

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ АЕРОНАВІГАЦІЇ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

КАФЕДРА АВІОНІКИ  
ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ  
Завідувач випускової кафедри  
\_\_\_\_\_ Ю.В. Грищенко  
“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2024 р.

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**(ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)**  
ВИПУСКНИКА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ БАКАЛАВРА  
ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ 173 «Авіоніки»

**Тема: «Керування рухом літака в умовах невизначеності»**

Виконавець: \_\_\_\_\_ Бондар Олександр Олександрович

Керівник: \_\_\_\_\_ Сущенко Ольга Андріївна

Нормоконтролер:

\_\_\_\_\_ (підпис)

В.В. Левківський  
(П.І.Б.)

Київ 2024

# НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет аеронавігації, електроніки та телекомунікації

Кафедра Авіоніки

Напрямок (спеціальність) 173 «Авіоніка»  
(шифр, найменування)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Ю.В.Грищенко

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 р.

## ЗАВДАННЯ

### на виконання дипломної роботи

Бондар Олександр Олександрович

1. Тема дипломної роботи: «Керування рухом літака в умовах невизначеності» затверджена наказом ректора від \_\_\_\_\_
2. Термін виконання роботи: \_\_\_\_\_
3. Вихідні дані до роботи: Аеродинамічні складові рівнянь поздовжнього та вертикального руху, вимоги за точністю, аеродинамічні складові рівнянь поздовжнього та вертикального руху ЛА.
4. Зміст пояснювальної записки: Розділ 1 Методи керування літаком в умовах невизначеності; Розділ 2 Математичний опис процесів управління рухом літака; Розділ 3 Процедура робастного структурного синтеза.
5. Перелік обов'язкового графічного (ілюстративного) матеріалу: графічні залежності результатів моделювання.

## 6. Календарний план-графік

| № пор. | Завдання  | Термін виконання | Відмітка про виконання |
|--------|---|------------------|------------------------|
| 1.     | Обґрунтування теми дипломної роботи                       | 22.05.2024       |                        |
| 2.     | Проведення огляду літератури                              | 24.05.2024       |                        |
| 3.     | Підготовка та написання 1 розділу                         | 31.05.2024       |                        |
| 4.     | Підготовка та написання 2 розділу                         | 07.06.2024       |                        |
| 5.     | Підготовка та написання 3 розділу                         | 14.06.2024       |                        |
| 6.     | Перевірка на анти плагіат та отримання рецензії на диплом | 17.06.2024       |                        |
| 7.     | Оформлення та друк пояснювальної записки                  | 20.06.2024       |                        |
| 8.     | Підготовка презентації та доповіді                        | 22.06.2024       |                        |

7. Дата видачі завдання: 12.02.2024р.

Керівник дипломної роботи (проекту) \_\_\_\_\_ Сущенко О.А.  
(підпис керівника) (П.І.Б.)

Завдання прийняв до виконання \_\_\_\_\_ Бондар О.О.  
(підпис випускника) (П.І.Б.)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи «Керування рухом літака в умовах невизначеності», \_\_\_\_\_ сторінок, \_\_\_\_\_ рисунків, \_\_\_\_\_ таблиць, \_\_\_\_\_ використаних джерел.

Об'єкт дослідження – системи управління рухом літака.

Предмет дослідження – методи та алгоритми керування літаком в умовах невизначеності.

Мета кваліфікаційної роботи – структурний синтез робастного регулятора у короткоперіодичному та довгоперіодичному русі ЛА.

Методологічна база дослідження – методи аеродинаміки, методи робастного структурного синтезу, методи оптимізації, методи аналізу систем управління.

Засоби програмної реалізації – комп'ютерна система проведення математичних розрахунків MATLAB (Control System Toolbox), (Robust Control Toolbox).

Проаналізовано методи керування літаком в умовах невизначеності та обрано метод робастного структурного синтезу. Розроблений математичний опис системи управління короткоперіодичним та довгоперіодичним рухами літака. Розроблені моделі у просторі станів. Синтезовано робастний регулятор у вигляді четвірки матриць простору станів. Проаналізовано частотні характеристики системи із синтезованим регулятором.

Ключові слова: РУХ ЛІТАКА, РОБАСТНЕ УПРАВЛІННЯ, СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА, МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС, МОДЕЛЮВАННЯ.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 6  |
| 1.1. Характеристика методів робастного структурного синтезу .....   | 8  |
| 1.2. Систематизація методів проектування стійких систем управління .....  | 17 |
| 1.2.1. Розподіл робастних систем на класи за їх гнучкістю.....  | 17 |
| 1.2.2. Огляд методів синтезу САУ, ґрунтуючись на тому, як вони визначають та формують бажані частотні характеристики системи..... | 20 |
| 1.2.3. Розподіл методів синтезу в залежності від способу введення вагових передавальних функцій.....                              | 22 |
| РОЗДІЛ 2.....   | 27 |
| 2.1. Формалізація процесів керування польотом за допомогою математичних рівнянь .....   | 32 |
| 2.2. Математичне моделювання динаміки польоту літака.....   | 40 |
| РОЗДІЛ 3.....   | 49 |
| 3.1 Особливості поздовжнього руху .....   | 49 |
| 3.2 Види поздовжнього руху .....  | 49 |
| 3.3 Характеристика сингулярних величин.....   | 52 |
| 3.4 Синтез робастного регулятора системи управління короткоперіодичним рухом літака.....  | 52 |
| 3.5 Розробка стійкого регулятора для системи управління довгоперіодичним рухом літака.....  | 58 |
| ВИСНОВКИ .....  | 66 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....  | 67 |

## ВСТУП

Проектування сучасних систем керування літальними апаратами (ЛА) є ключовим аспектом авіаційної промисловості, що характеризується стрімким прогресом техніки та зростаючою конкуренцією. Внаслідок цього зростають вимоги до безпеки та економічності польотів. В Україні авіаційна промисловість є достатньо розвиненою, тому необхідно враховувати світові тенденції в цій галузі. В умовах глобалізації стає актуальним проектування робастних систем керування рухом ЛА, які можуть забезпечити високу надійність та ефективність.

Робастні системи керування мають переваги, такі як забезпечення точності процесів керування в складних умовах, незважаючи на вплив внутрішніх параметричних та зовнішніх координатних збурень. Підхід до створення таких систем базується на визначенні сингулярних величин передавальної функції системи та мінімізації  $H$ -норм функцій чутливості системи. Це дозволяє реалізувати автоматизовані засоби оптимального проектування, зокрема, за допомогою пакета Robust Control Toolbox у середовищі MATLAB.

Процес синтезу регулятора спрямований на мінімізацію  $H$ -норми замкнутої передавальної функції системи, що забезпечує внутрішню стійкість системи серед допустимих регуляторів. Важливим аспектом є вибір оптимального регулятора, який задовольняє вимоги до точності та робастності керування.

Проектування робастних систем керування також включає синтез системи із заданими частотними характеристиками, чого можна досягти за допомогою формування об'єкта управління із додаванням вагових передавальних функцій.

Основним завданням цієї дипломної роботи є дослідження керування рухом ЛА в умовах невизначеності. Мета досліджень полягає в покращенні стійкості та надійності керування літаками у складних умовах польоту, коли на них впливають різноманітні збурення. Це дослідження сприятиме розвитку сучасних підходів до проектування систем керування ЛА, що відповідають високим стандартам безпеки та ефективності.

## РОЗДІЛ 1

### МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ЛІТАКОМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

#### 1.1. Характеристика методів робастного структурного синтезу

Для кращого розуміння формулювання цілей синтезу систем управління, розглянемо систему, структурна схема якої представлена на рис.1.1 [1 - 4].

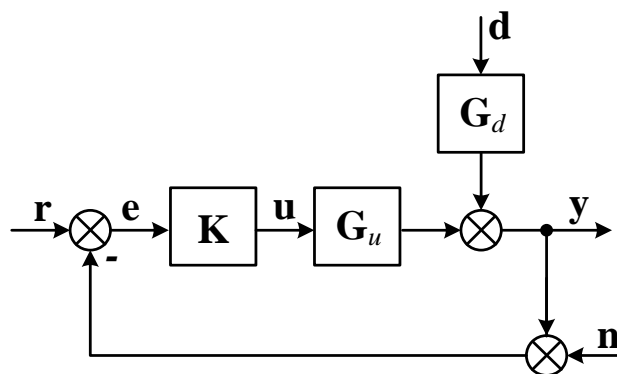


Рис. 1.1. Схема будови системи управління

Для даної системи рівнянь вихідні сигнали, такі як: вимірюваний сигнал  $y$ , сигнал управління  $u$  та сигнал похибки  $e$  можуть визначаються на основі передавальних функцій об'єкта керування  $G_u$ , сигналу збурення  $G_d$  та регулятора  $K$ , а також вхідних сигналів, таких як командний сигнал, сигнал збурення  $d$  та сигнал похибки вимірювання  $n$  [3].

$$\begin{aligned}
 y &= G_u K (I + G_u K)^{-1} r + (I + G_u K)^{-1} G_d d - G_u K (I + G_u K)^{-1} n, \\
 u &= K (I + G_u K)^{-1} r - K (I + G_u K)^{-1} G_d d - K (I + G_u K)^{-1} n, \\
 e &= (I + G_u K)^{-1} r - (I + G_u K)^{-1} d - (I + G_u K)^{-1} n.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для аналізу та за допомогою матричних передавальних функцій можна розраховувати характеристики систем з декількома входами та виходами, що відображають динамічний зв'язок між командним сигналом  $r$  та сигналами похибки  $e$ , управління  $u$  та вихідними вимірюваннями  $y$  [1 - 3]



$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(j\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_u(j\omega)\mathbf{K}(j\omega))^{-1}, \\
\mathbf{R}(j\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{G}_u(j\omega)\mathbf{K}(j\omega))^{-1}, \\
\mathbf{T}(j\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_u(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{G}_u(j\omega)\mathbf{K}(j\omega))^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Матрична передавальна функція  $\mathbf{S}(j\omega)$ , що описує зв'язок між командним сигналом  $\mathbf{r}$  та сигналом похибки  $\mathbf{e}$ , має назву функції чутливості. Функцію комплементарної чутливості представляє матрична передавальна функція  $\mathbf{T}(j\omega)$ , яка відображає вплив командного сигналу управління  $\mathbf{r}$  на сигнал виходу системи  $\mathbf{y}$ . З визначень  $\mathbf{S}(j\omega)$  та  $\mathbf{T}(j\omega)$  випливає, що їх сума дорівнює одиниці  $\mathbf{S}(j\omega) + \mathbf{T}(j\omega) = \mathbf{I}$  [1 - 3]. Ця функція  $\mathbf{R}(j\omega)$  від командного сигналу  $\mathbf{r}$  до сигналу керуванням  $\mathbf{u}$  є функцією чутливості за управлінням [5].

Спільне застосування функцій чутливості дає можливість глибокого аналізу систем керування (1.2) дозволяє знайти баланс між точністю, стійкістю та витратами на управління.

Враховуючи передавальні функції (1.2), вирази для сигналів системи управління (1.1) стають такими:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{T}(j\omega)\mathbf{r} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{d} - \mathbf{T}(j\omega)\mathbf{n}, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{R}(j\omega)\mathbf{r} - \mathbf{R}(j\omega)\mathbf{d} - \mathbf{R}(j\omega)\mathbf{n}, \\
\mathbf{e} &= \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{r} - \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{d} - \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

У сучасних системах управління часто виникають суперечливі цілі, що ускладнює їх одночасне досягнення. Ефективним методом реалізації цих цілей є мінімізація  $H_\infty$  - норм функцій чутливості, які характеризують вплив різних сигналів на поведінку системи, як визначено в [1 - 3].

$\min \| (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \|_\infty = \min \| \mathbf{S} \|_\infty$  – для досягнення високої точності;

$\min \| (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \|_{\infty} = \min \| \mathbf{S} \|_{\infty}$  – для приглушення впливу збурень;

$\min \| \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \|_{\infty} = \min \| \mathbf{T} \|_{\infty}$  – для приглушення впливу як зовнішніх, так і внутрішніх збурень;

$\min \| \mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \|_{\infty} = \min \| \mathbf{R} \|_{\infty}$  – для зменшення витрат енергії на управління;

$\min \| \mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \|_{\infty} = \min \| \mathbf{R} \|_{\infty}$  для забезпечення робастної стійкості у присутності адитивних збурень;

$\min \| \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \|_{\infty} = \min \| \mathbf{T} \|_{\infty}$  – для забезпечення робастної стійкості при наявності мультиплікативних збурень.

Вищезазначені вимоги до системи керування є властивості стійкості та оптимальності часто суперечать одна одній, тому їх неможливо поєднати в одному регуляторі. При  $H_{\infty}$ - синтезі регуляторів зазвичай знаходять оптимальний регулятор з множини регуляторів, які забезпечують стійкість системи. Цей підхід лежить в основі методу змішаної чутливості [1 - 5].

Якщо не враховувати вплив зовнішніх факторів (збурення), то на основі структурної схеми, представленої на рисунку 1.1, критерій і завдання оптимізації описуються так, як зазначено в [3, 5]:

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} = \arg \inf_{\mathbf{K}_{\text{opt}} \in \mathbf{K}_{\text{st}}} J(\mathbf{G}, \mathbf{K}), \quad J(\mathbf{G}, \mathbf{K}) = \left\| \begin{bmatrix} W1(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ W2\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ W3\mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty}. \quad (1.4)$$

Для кращого розуміння завдання  $H_{\infty}$ - синтезу системи пропонується розглянути схему узагальненого контролю (general control configuration), представлену на рисунку 1.2. [3]

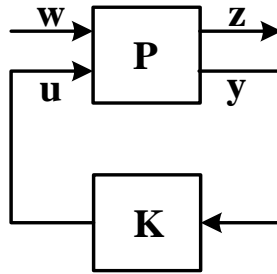


Рис. 1.2. Функціональна схема системи керування

Представлена система містить управління та регулятор з матричними передавальними функціями  $P(s)$ ,  $K(s)$ , які є дробово-раціональними і правильними. Об'єкт управління має два входи  $w$ ,  $u$  та виходами  $z$ ,  $y$ . Вхідний вектор  $w$  у загальному випадку включає збурення, завади вимірювань та командні сигнали. Сигнали управління надходять у систему у вигляді вхідного вектора  $u$ , а вихідний вектор  $z$  відображає ефективність цих сигналів. Ідеальним результатом є нульова похибка відпрацювання командного сигналу, що свідчить про бездоганне виконання команд. Вихідний вектор - це набір сигналів спостереження, які можна використовувати для реалізації зворотного зв'язку в системі управління. У сучасній зарубіжній науковій літературі об'єкт та регулятор системи керування прийнято називати узагальненими, визнаючи складність їх структури та взаємозв'язків. [2, 3] Узагальнений об'єкт описується за допомогою передавальних функцій, які враховують як збурення, так і вагові коефіцієнти. Використання цього поняття дозволяє більш детально аналізувати та проектувати складні системи керування.

Візуалізація системи керування, зображена на рис. 1.2, може бути описана в просторі станів. Цей опис використовує систему диференціальних рівнянь для представлення динаміки системи. [2, 3]:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t); \\
\mathbf{u}(t) &= \mathbf{K}\mathbf{y}(t).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Існує матричне представлення математичної моделі (1.5):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Математичний опис передавальної функції узагальненого об'єкта керування в матричній формі:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

то можна записати [2, 3]

$$\mathbf{z} = [\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}]\mathbf{w}, \tag{1.8}$$

де  $\mathbf{T}_w^z = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}$  – передавальна функція замкнутої системи від входу  $\mathbf{w}$  до виходу  $\mathbf{z}$ .

Метою  $H_\infty$ -оптимізації є синтез регулятора  $\mathbf{K}(s)$ , за допомогою якої мінімізується норма  $\|\mathbf{T}_w^z\|_\infty$  передавальної функції замкнутої системи  $\mathbf{T}_w^z$ , де

$$\mathbf{T}_w^z = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ \mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \text{ – функція методу змішаної чутливості.}$$

Аналіз усіх регуляторів дозволяє обрати найкращий з них, які формують замкнуту систему з передавальною функцією  $\mathbf{T}_w^z$  внутрішньо стійкою, конкретизуючи на множині допустимих регуляторів [3].

$H_\infty$ - норма характеризує верхню межу найбільшого сингулярного числа матричної передавальної функції замкнутої системи. Ця функція, по суті, виконує роль функції комплементарної чутливості [3]. З точки зору числових значень, то  $H_\infty$ - норму можна розглядати як максимальне значення амплітудно-частотної характеристики передавальної функції замкнутої системи.

Зазвичай  $H_\infty$ -норма обчислюється на основі представлення системи у просторі станів. Цей метод передбачає пошук найменшого значення  $\gamma$ , для якого матриця Гамільтона  $\mathbf{H}$  не має власних чисел на уявних осях [6].

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T)\mathbf{C} & -(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

де  $\mathbf{R} = \gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ . Пошук  $\gamma$  здійснюється ітеративним методом.

Використання  $H_\infty$ -норми у задачах робастного управління обумовлене тим, що вона ефективно відображає неструктуровану невизначеність та володіє властивістю мультиплікативності [3]:

$$\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty. \quad (1.10)$$

Розв'язання задачі  $H_\infty$ -синтезу ґрунтується на вирішенні спеціального рівняння Ріккати, при цьому для опису у просторі станів (1.6) мають задовольняти наступні умови [2, 3].

1. Пара матриць  $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1$  має бути усталеною, а інша пара масивів  $\mathbf{A}, \mathbf{C}_1$  – детектованою.

2. Пара матриць  $\mathbf{A}, \mathbf{B}_2$  має бути усталеною, інша пара масивів  $\mathbf{A}, \mathbf{C}_2$  – детектованою.

3.  $\mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]$ .

4.  $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ .

Умови 1 і 2 гарантують, що на уявній осі відсутні власні значення матриць Гамільтона, які відповідають рівнянням Ріккати для керування та спостереження. Це означає, що жодне з цих власних значень не знаходиться на уявній вісі. Власні значення матриць Гамільтона перебувають в області визначення оператора Ріккати, позначеної як  $\text{dom}(\text{Ric})$ . Це означає, що ці значення належать до множини, для якої оператор Ріккати визначений коректно, тобто може бути правильно обчислений. Умова 3 означає, що  $\mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t)$  і  $\mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t)$  є ортогональними сигналами. Відносно  $H_2$ -проблеми ця умова вказує на те, що вагова матриця керувань у нормі вектора  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t)$  є одиничною, і на цю норму не впливають складові  $\mathbf{z}(t)$  від вектора стану  $\mathbf{x}(t)$  і вектора управління  $\mathbf{u}(t)$ . Умова 4 підтверджує ортогональність сигналів  $\mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t)$  і  $\mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t)$ .

Отже, умови 3 та 4 є звичайними для проблеми  $H_2$  і поширюються на випадок  $H_\infty$ -синтезу.

У даній постановці задачі під "об'єктом управління" розуміється сукупність пристроїв та приладів, які складають власне об'єкт управління, виконавчий механізм, вимірювальна система та інші додаткові пристрої, необхідні для функціонування реальної системи в реальних умовах експлуатації [8].

Ідея застосування  $H_\infty$ -синтезу для систем управління вперше була висловлена Зеймсом [9]. Цей підхід дає можливість розробити системи з робастною якістю та ефективним управлінням. Завдання формулюється як задача математичної оптимізації, метою якої є пошук оптимального регулятора.

Цей підхід має низку переваг, а саме:

1. Простота застосування, його легко використовувати для багатовимірних систем з перехресними зв'язками між каналами.

2. Він гнучкий та дозволяє синтезувати системи з бажаними амплітудно-частотними характеристиками.

Але присутні і недоліки:

1. Математична складність, алгоритм може бути складним для реалізації.
2. Ефективність методу залежить від того, наскільки точно математична модель описує реальну систему.
3. Вагові передавальні функції визначаються евристично, що може вплинути на результат.

У практичних задачах, наприклад, при розробці автоматизованих систем управління ЛА, часто доцільно шукати субоптимальний регулятор. Цей регулятор повинен гарантувати, що  $H_\infty$  норма передавальної функції замкнутої системи буде не більшою за задане додатне число  $\gamma$  [3].

$$\mathbf{T}_w^z = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ \mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \\ \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \end{bmatrix} < \gamma \quad (1.11)$$

Алгоритм пошуку  $H_\infty$ -субоптимального регулятора описано у працях [2, 3]. Для практичної реалізації алгоритму системи управління, представленої на рис.1.2 та описуваній рівняннями (1.6) слід врахувати низку ключових припущень, для пошуку субоптимального регулятора  $\mathbf{K}(s)$  необхідно реалізувати наступні кроки [3]:

- 1) Необхідно знайти розв'язок алгебраїчного рівняння Ріккати  $\mathbf{X}_\infty$ , тобто розв'язок рівняння для регулятора

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty = 0, \quad (1.12)$$

- 2) Вирішити алгебраїчне рівняння Ріккати  $\mathbf{Y}_\infty$ , тобто розв'язок рівняння для спостерігача

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top + \mathbf{Y}_\infty(\gamma^{-2}\mathbf{C}_1^\top\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2)\mathbf{Y}_\infty = 0, \quad (1.13)$$

3) Оцінити, чи відповідають дані заданим критеріям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda_i[\mathbf{A} + (\gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^\top)\mathbf{X}_\infty] &< 0, \forall i, \\ \operatorname{Re}\lambda_i[\mathbf{A} + \mathbf{Y}_\infty(\gamma^{-2}\mathbf{C}_1^\top\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2)] &< 0, \forall i, \\ \rho(\mathbf{X}_\infty\mathbf{Y}_\infty) &< \gamma^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Сукупність усіх допустимих регуляторів описується виразом  $\mathbf{K} = F(\mathbf{K}_c, Q)$  [1, 3], де

$$\mathbf{K}_c(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty & \mathbf{Z}_\infty\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{F}_\infty & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

тут  $\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^\top\mathbf{X}_\infty$ ;  $\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty\mathbf{C}_2^\top$ ;  $\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2}\mathbf{Y}_\infty\mathbf{X}_\infty)^{-1}$ ;

$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top\mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty\mathbf{C}_2$  та  $Q$  є деяка стійка передавальна функція, така, що  $\|Q\|_\infty < \gamma$ . Для  $Q(s) = 0$  регулятор визначається як

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_{c11}(s) = -\mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_\infty)^{-1}\mathbf{F}_\infty. \quad (1.16)$$

Цей регулятор відомий як центральний, і він має ту же кількість станів, як і об'єкт управління  $\mathbf{G}$  [1, 3]. У ньому може бути використаний спостерігач

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1\gamma^{-2}\mathbf{B}_1^\top\mathbf{X}_\infty\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty(\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (1.17)$$

та зворотний зв'язок  $\mathbf{u} = \mathbf{F}_\infty\hat{\mathbf{x}}$ . (1.18)

Для мінімізації в заданих межах, згідно з роботами [1, 3], використовується процедура пошуку субоптимального робастного регулятора.

Для знаходження мінімального значення  $\gamma_{\min}$  виконують розподіл  $\gamma$  навпіл і потім перевіряють, чи належить отриманий регулятор множині допустимих. Візуальне представлення описуваної процедури наведено на рис. 1.3.



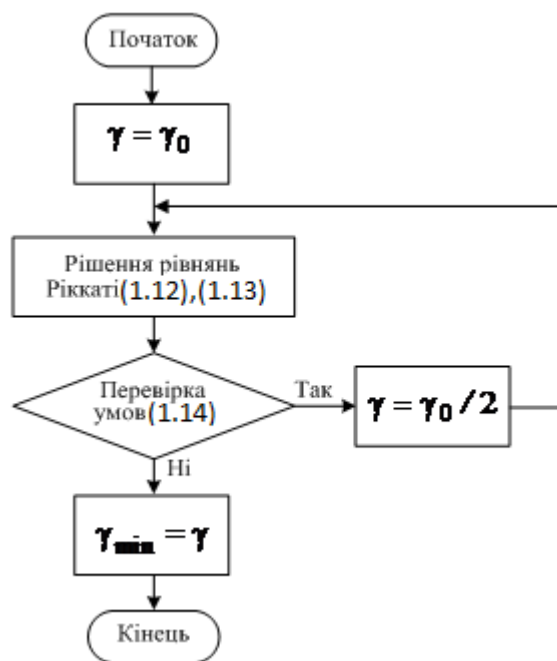


Рис. 1.3. Алгоритм пошуку регулятора з суб'оптимальними характеристиками

## 1.2. Систематизація методів проектування стійких систем управління

Під час конструювання систем керування рухомих об'єктів критично важливим є вибір методу структурного синтезу. Завданням синтезу робастних систем управління рухомими об'єктами є знаходження закону управління, який здатний забезпечувати встановлені характеристики точності навіть у присутності сумнівностей математичних описів системи. Ці невизначеності можуть бути обумовлені екзогенними впливами, неточностями в оцінці передавальної функції системи, а також динамікою, що не враховується в моделі. Методи  $H_\infty$ -синтезу можна класифікувати за кількома аспектами: кількість ступенів вільності регулятора, метод формування контурів управління для досягнення необхідних частотних характеристик системи та підхід до введення вагових передавальних функцій.

### 1.2.1. Розподіл робастних систем на класи за їх гнучкістю.

Структура регулятора залежить від методу  $H_\infty$ -синтезу та його ступенів вільності

Структури регуляторів з різною кількістю ступенів вільності мають такий вигляд, як показано на рис. 1.4 в роботі [10]:

На наведених схемах  $r$ ,  $u$ ,  $y$  і  $e$  є відповідно командним сигналом, сигналом управління, вимірним вихідним сигналом та сигналом похибки,  $K_1$  – пре-фільтр іншими словами регулятор прямого зв'язку та  $K_2$  – контролер зворотного зв'язку.

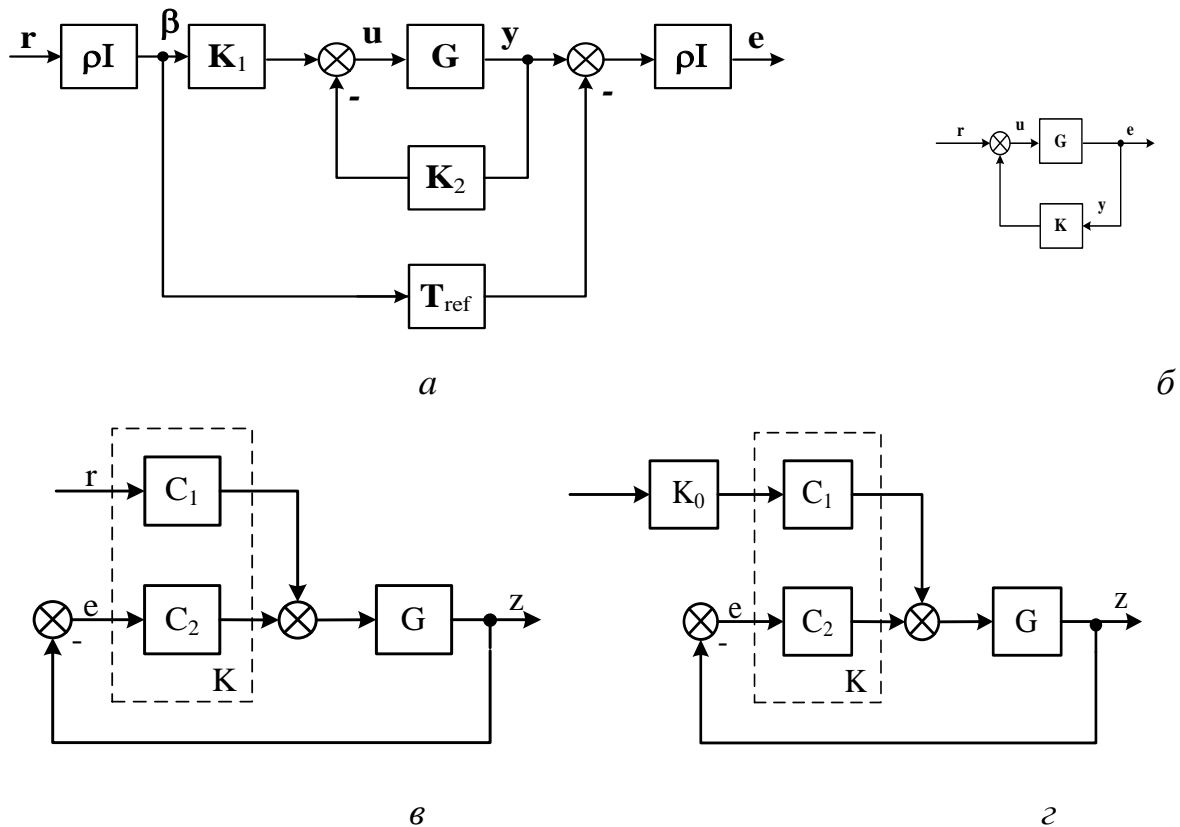


Рис. 1.4. Будова систем, що включають регулятори : *a* – регулятори з двома ступенями вільності; *б* – регулятори з одним ступенем вільності; *в* – регулятори

з  $1\frac{1}{2}$  ступенями вільності; *г* – регулятори з  $2\frac{1}{2}$  ступенями вільності

У системі регулятора з  $1\frac{1}{2}$  ступенями вільності [10] регулятор  $K$

складається з двох компонентів  $C_1, C_2$ , які описуються дробами з

$$C_1 = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{X}}, \quad C_2 = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}.$$

поліноміальними чисельниками та знаменниками

Степінь чисельника  $\mathbf{F}$  дробу, що описує компонент регулятора, повинен бути меншим або дорівнювати степеню знаменника  $\mathbf{X}$ . В рамках схеми з  $2\frac{1}{2}$  ступенями вільності [10] накладається обмеження на ступінь чисельника дробу, що описує компонент регулятора  $\mathbf{K}_0$ .

Діяння кількості ступенів вільності регулятора на форму передавальної функції узагальненого об'єкта (1.7) та критерій якості процедури  $H_\infty$ -синтезу (1.4). Аналіз систем з різною кількістю ступенів вільності дасть можливість зрозуміти, як ця кількість (з одним і двома ступенями вільності) впливає на характеристики регулятор.

Для системи управління з одним ступенем вільності (рис. 2б), якщо структуру сигналів зовнішніх впливів та сигналів якості управління представити у вигляді  $\mathbf{w} = \mathbf{r} \quad ; \quad \mathbf{z} = [\mathbf{e} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{y}]^T$ , матричну передавальну функцію узагальненого об'єкта управління, критерій оптимізації та постановка задачі  $H_\infty$ -синтезу можна описати наступним чином :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{G} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad J(\mathbf{G}, \mathbf{K}) = \left\| \begin{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \\ \mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \\ \mathbf{G}\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty, \quad \mathbf{K}_{\hat{\text{opt}}} = \arg \inf_{\mathbf{K}_{\hat{\text{opt}}} \in \mathbf{K}_{\hat{\text{st}}}} J(\mathbf{G}, \mathbf{K}). \quad (1.19)$$

У системі управління з регулятором, що має два ступені вільності (рис. 2а), де  $\beta$  - картинка попередніх зовнішніх сигналів та сигналів якості управління, а  $\mathbf{y}$  - вихідний сигнал  $[\beta \quad \mathbf{y}]^T$  узагальнений об'єкт управління, критерій оптимізації та постановка задачі  $H_\infty$ -синтезу описуються наступними виразами:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{ref} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J = \left\| \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{ref} + \mathbf{G}\mathbf{K}_1(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_2)^{-1} \\ \mathbf{K}_1(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_2)^{-1} \\ \mathbf{G}\mathbf{K}_1(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_2)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty}, \quad \mathbf{K}_{\hat{H}_0} = \arg \inf_{\mathbf{K}_{\hat{H}_0} \in \mathbf{K}_{\hat{H}_1}} J(\mathbf{G}, \mathbf{K}) \quad (1.20)$$

У цих виразах (1.19), (1.20) перша складова критеріїв описує чутливість системи до зовнішніх впливів, друга - до команд управління, а третя - до похибок регулятора. Це свідчить про те, що обидва критерії розроблені для багатоцільових задач.

### 1.2.2. Огляд методів синтезу САУ, ґрунтуючись на тому, як вони визначають та формують бажані частотні характеристики системи

Розглянемо методи формування бажаних частотних характеристик системи. Вони можуть бути розділені на дві основні категорії: методи, які ґрунтуються на аналізі передавальних функцій закритих систем, та методи, що стосуються аналізу частотних характеристик сигналів системи. В першому випадку бажані частотні властивості закритих систем формуються шляхом визначення їх сингулярних чисел. Максимальні значення цих сингулярних чисел можна змінити, встановивши певні верхні межі для них. Цей підхід дозволяє досягти необхідної ширини смуги та кута нахилу амплітудно-частотної характеристики синтезованої системи.

У другому випадку розглядається заданий набір вхідних сигналів, який включає зовнішні впливи, вимірювальні спотворення та командні сигнали, і деякі з їх помилок мінімізуються.

Процес  $H_{\infty}$ - синтезу є високоефективним, коли йдеться про створення автоматизованих систем керування, які включають зворотний зв'язок. Цей

підхід обертається навколо формування бажаних частотних характеристик закритої системи. Як правило, при роботі зі стійкими системами керування можливо визначити максимально допустиме відхилення частотних характеристик від їх передбачених значень.

До визначення характеристик, які накладають обмеження, можна підходити різними способами. Один метод передбачає використання результатів експериментальних досліджень для побудови фактичної частотної характеристики [5]. Незважаючи на те, що дані про частотні характеристики реальних систем часто недоступні, найпоширенішим методом визначення їхніх граничних характеристик є підхід, що ґрунтується на вимогах до частоти.

Існують методи, які спрямовані на формування передатних функцій об'єкта керування, яким є відкрита система, це допоможе покращити частотні властивості передавальної функції закритої системи. Такий підхід до процедури  $H_\infty$ - синтезу, що базується на встановленні параметричних збурень за допомогою взаємної простої факторизації, описаний у дослідженнях [3, 11].

Метод  $H_\infty$ - синтезу, який ґрунтується на аналізі характеристик системних сигналів, добре підходить для вирішення багатокритеріальних задач. Однак для його застосування необхідне складне математичне забезпечення [12], включаючи математичний опис об'єкта керування, модель невизначеності, відомий клас вхідних сигналів системи та моделі помилок сигналів. Коли використовується цей метод, першочерговою проблемою є величина сигналів, а не особливості передатних функцій системи. Характеристики зважування використовуються для опису очікуваної або відомої частоти зовнішніх подразників і бажаного частотного діапазону сигналів помилок. Якщо за модель невизначеності приймається обурення, яке повинно мати вагові характеристики, ці характеристики мають бути нормованими, тобто  $\|\Delta\|_\infty < 1$ . Умовою

успішного проведення  $H_\infty$ -синтезу є стійкість і правильність вагових характеристик [3, 5].

1.2.3. Розподіл методів синтезу в залежності від способу введення вагових передавальних функцій.

Методи  $H_\infty$ -синтезу мають різні способи введення функції передачі ваги. Це може передбачати використання вагових функцій для створення бажаних передатних функцій у закритій системі, використання попередніх і посткомпенсаторів для досягнення бажаної передатної функції у відкритій системі або використання вагових функцій для сигналів системи. Після реалізації вагової матриці, яка передає вагу системі, її можна назвати розширеною [2, 3].

На рисунку 1.5 наведено структурні схеми розширених систем, побудованих з використанням усіх вищезазначених методів.

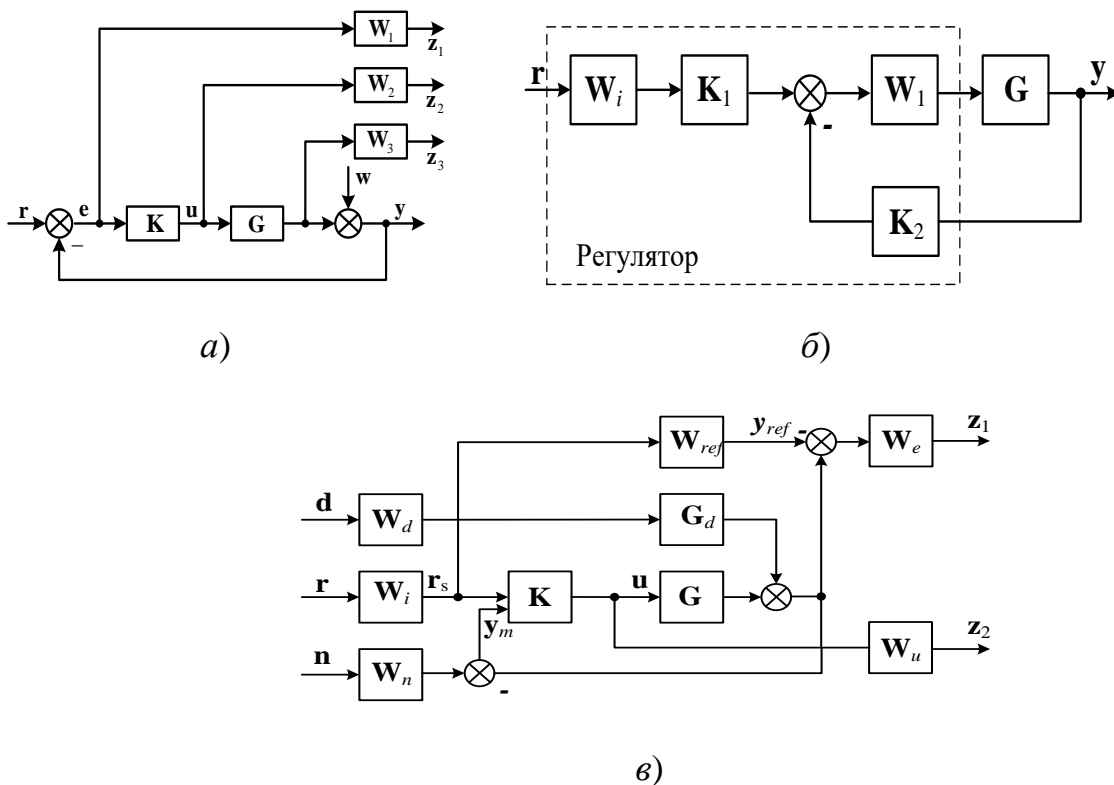


Рис. 1.5. Методи введення вагових передавальних функцій: *a* – Розширення замкнутої передавальної функції; *б* – Використання пре- та пост-компенсаторів.;  
*в* – Введення вагових функцій для сигналів

Використання методу змішаної чутливості, який передбачає введення вагових передавальних  $W_1, W_2, W_3$  за допомогою додаткових виходів  $Z_1, Z_2, Z_3$  (рис. 1.5а), сприяє зменшенню похибки відпрацювання сигналу, обмеженню потужності управління та забезпеченню стійкості системи. Цей підхід є характерним для методу змішаної чутливості.

Застосовуючи метод змішаної чутливості, як зображено на рис. 1.5а, передавальна функція розширеного узагальненого об'єкта управління та алгоритм оптимізації  $H_\infty$ -синтезу набувають наступного вигляду:

$$P = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1G \\ 0 & W_2 \\ 0 & W_3G \\ I & -G \end{bmatrix}, \quad J = \left\| \left\| \begin{bmatrix} W_1(I + GK)^{-1} \\ W_2K(I + GK)^{-1} \\ W_3GK(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \right\| \right\|_\infty \quad \text{або} \quad J = \left\| \left\| \begin{bmatrix} W_1S \\ W_2R \\ W_3T \end{bmatrix} \right\| \right\|_\infty. \quad (1.21)$$

Критерій оптимізації, визначений у рівнянні (1.21), враховує точність, енергоефективність сигналу управління та стійкість до зовнішніх впливів. Це дозволяє процедурі  $H_\infty$ -синтезу знаходити рішення, які відповідають всім вимогам, що стоять перед системою, навіть якщо вони суперечливі.

Як зазначено в [5], перешкоди пригнічуються, покращується відновлення командного сигналу, а стабільність системи покращується за рахунок мінімізації функції чутливості на малих частотах. Функція зниження високочастотної комплементарної чутливості запобігає надмірному зростанню втрат енергії, впливу вимірювальних перешкод і втрати стабільності. Використання зваженої передавальної функції дозволяє встановити чіткі межі у формуванні цільових частотних характеристик системи. Під час  $H_\infty$ -синтезу

впливовість усіх невизначеностей об'єкта управління оцінюється за допомогою єдиного мультиплікативного збурення  $\Delta_M$ . На основі цього, вимоги до системи можна сформулювати таким чином [2, 13].

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) &\leq |\mathbf{W}_1^{-1}(j\omega)|; \\ \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) &\leq |\mathbf{W}_2^{-1}(j\omega)|; \\ \bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) &\leq |\mathbf{W}_3^{-1}(j\omega)|,\end{aligned}\tag{1.22}$$

де  $\bar{\sigma}$  – міра виродження матриці.

З обов'язковою умовою виконання [2, 13]

$$\bar{\sigma}(\mathbf{W}_1^{-1}(j\omega)) + \bar{\sigma}(\mathbf{W}_3^{-1}(j\omega)) > 1 \text{ для будь-якого } \forall \omega.\tag{1.23}$$

Підбір вагових передавальних матриць є складним завданням, для якого часто використовуються евристичні методи, такі як метод проб і помилок. Цей підхід ґрунтується на досвіді розробника системи та дозволяє ефективно визначити оптимальні параметри, враховуючи специфіку конкретної задачі.

Розробка робастних систем, що ґрунтується на визначенні сингулярних значень передавальної функції та мінімізації  $H_\infty$ -норми, може бути виконана за допомогою розширеного пакету Robust Control у MATLAB.

Вагові передавальні функції, про які йдеться на рис. 1.5б, розширюють передавальну функцію розімкнутої системи. Ці функції, позначені як  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$ , представляють собою пре- та пост-компенсатори відповідно. Завдяки їх введенню, розширена система управління з обмеженими частотними характеристиками  $\mathbf{G}_s$  буде описуватися виразом [3].

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{W}_2 \mathbf{G} \mathbf{W}_1.\tag{1.24}$$

Завдяки введенню пре- та пост-компенсаторів можна обмежити сингулярні числа передавальної функції розімкнутої системи та сформулювати бажані частотні характеристики замкнутої системи. Пре-компенсатор



забезпечує прямий вплив на систему від зовнішнього збудження (у цьому випадку - командного сигналу).

Застосування вагових функцій у постановці задачі  $H_\infty$ - синтезу для методу, з урахуванням характеристик сигналів системи, як показано на рис.

1.5в. На даній схемі EMBED Equation.3  $\mathbf{G}$  і  $\mathbf{G}_d$  відповідають номінальній моделі об'єкта управління та збурення, а  $\mathbf{K}$  – регулятору. Вагові характеристики зовнішніх сигналів, таких як збурення, командний сигнал та завада вимірювання  $\mathbf{W}_d$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{W}_n$  можуть бути постійними величинами або передавальними функціями [3].

Вагова характеристика  $\mathbf{W}_{ref}$  представляє необхідну замкнуту передатну функцію між зваженим командним сигналом  $\mathbf{r}_s$  і вихідним сигналом  $\mathbf{y}$  системи. Вагові ознаки  $\mathbf{W}_e$  та  $\mathbf{W}_d$  характеристики характеризують бажаний спектр сигналів похибки  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{ref}$  та управління  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{u}$  відповідно.

Для системи, зображеної на малюнку 1.5в, метою є зменшення величини  $H_\infty$ -норми передавальної функції від вхідних сигналів  $\mathbf{r}, \mathbf{d}, \mathbf{n}$  до вихідних сигналів  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$  [3].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e \mathbf{S} & -\mathbf{W}_e \mathbf{S} \mathbf{W}_d & \mathbf{W}_e \mathbf{T} \mathbf{W}_n \\ \mathbf{W}_b \mathbf{K} \mathbf{S} & -\mathbf{W}_b \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_d & -\mathbf{W}_b \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Остаточна проблема може бути сформульована як задача синтезу  $H_\infty$ - синтезу, де сигнали  $\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  визначаються наступним чином:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}. \quad (1.26)$$

### Висновок

У цьому розділі представлено алгоритм синтезу надійної структури з використанням методу змішаної чутливості, класифікацію методів синтезу стійкої структури та деякі інші методи синтезу надійного контролера для систем керування літальними апаратами рухомих об'єктів.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСІВ УПРАВЛІННЯ РУХОМ ЛІТАКА

Управління поздовжнім рухом центру мас літака (ЛА) передбачає контроль висоти та швидкості польоту. Важливим аспектом управління висотою є рівень, відносно якого вимірюється висота. Під час польоту ЛА використовують такі види висот:

Істинна (геометрична) висота: Висота над конкретною точкою земної поверхні, виміряна без урахування атмосферного тиску.

Барометрична (абсолютна) висота: Висота, визначена за допомогою барометричного висотоміра.

Відносна висота: Висота над рівнем певної точки земної поверхні або над рівнем моря.

Висота ешелону: Стандартний рівень польоту, застосовується для вертикального ешелонування повітряного руху.

Висота рельєфу місцевості: Висота над поверхнею місцевості.

Знання істинної висоти польоту є необхідним для забезпечення безпеки польотів, особливо на малих висотах, для навігаційних розрахунків, а також для визначення місцеположення ЛА відносно точок на земній поверхні. Це знання є важливим для виконання розвідувальних і пошукових польотів. У багатьох випадках корисною є усереднена висота, тобто істинна висота без урахування дрібної структури рельєфу місцевості.

Контроль висоти ешелону необхідний для виконання всіх пілотажних завдань, оскільки змінні характеристики ЛА та його силової установки залежать від висоти польоту. Висота ешелону є основним контрольованим параметром у

системі вертикального ешелонування, що забезпечує однаковий рівень відліку висоти для всіх ЛА в одному районі, компенсуючи методичні похибки висотомірів і атмосферні відхилення.

При управлінні поздовжнім рухом ЛА важливо враховувати різні параметри швидкості польоту. Інструментальна (індикаторна) швидкість та число М польоту є необхідними для вирішення пілотажних завдань, оскільки від них залежать всі аеродинамічні характеристики ЛА та межі льотних лімітів. Шляхова (земна) швидкість потрібна для реалізації чотиривимірної навігації з дотриманням графіка польоту та інших завдань управління, коли рух ЛА координується з наземних пунктів управління. Контроль шляхової швидкості також необхідний для вирішення інших навігаційних завдань.

Параметр управління, такий як еталонна повітряна швидкість  $V$ , може втрачати своє значення при наявності вимірювачів шляхової швидкості та числа М польоту на сучасних ЛА. Однак, вимірювання істинної повітряної швидкості є необхідним для розрахунку швидкості вітру  $W$  та для визначення шляху у випадку відмови вимірювача шляхової швидкості польоту ЛА.

Перелік типових завдань при управлінні поздовжнім рухом ЛА на різних етапах маршрутного польоту наведено в таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

| Етапи польоту                | Управління висотою                  | Управління швидкістю                       |
|------------------------------|-------------------------------------|--|
| Збільшення висоти польоту    | Під час контролю $H_{абс}$          | Залежно від $M(V_{нр})$                    |
| Подальший політ за маршрутом | Під час згідно з графіком, контроль | За $V_{ш}$ відповідно до часового графіка, |

|  |  |   |
|--|--|---|
|  | Згідно з графіком,<br>контроль стабілізації<br>$H_{еш}$                              | контроль $M(V_{np})$                                    |
| Виконання<br>розвідувальних місій                      | При стабілізації<br>усередненої $H_{ісм}$  | При стабілізації $M(V_{np})$ і<br>контролі              |
| Польот на низькій<br>висоті відносно<br>поверхні землі | З урахуванням попереду<br>лежачого рельєфу<br>місцевості та з<br>контролем $H_{ісм}$ | При стабілізації $M$ або<br>контролі $V_{np}$           |
| Пошукові маневри в<br>певній зоні                      | За усередненої $H_{ісм}$   | За $V_{ш}$ з контролем<br>параметрів $M$ і $W$          |
| Зменшення висоти<br>польоту                            | За $H_{сід}$ з одночасним<br>контролем $H_{ісм}$                                     | За одночасним<br>контролем залежності $M$<br>і $V_{np}$ |

Завдання управління умовно поділяються на три типи:

- контроль параметра: обмеження або врахування параметра при прийнятті рішень;
- стабілізація параметра;
- управління за параметром у разі необхідності його цілеспрямованої корекції.

## **Профіль польоту ЛА**

Профіль польоту динамічно підбирається з урахуванням економії палива та поставлених завдань. Загалом він включає набір висоти до заданого рівня, крейсерський політ з можливістю корекції висоти та зниження перед посадкою. Проте, для літаків спеціального призначення профіль може відрізнятись, включаючи перехід на низькі висоти на певних ділянках маршруту.

## **Автоматичне управління поздовжнім рухом ЛА**

Крейсерський політ автоматично стабілізує висоту ешелону. Зміна ешелону може відбуватися в автоматичному режимі, де пілот задає вертикальну швидкість, а система САУ регулює кут тангажа. В ручному режимі пілот керує кутом тангажа, коригуючи швидкість. Завершення переходу та стабілізація нової висоти здійснюються вручну. Автоматична зміна ешелонів можлива за сигналами з БЦОМ або наземних пунктів управління.

### **Режим стабілізації барометричної висоти**

Режим стабілізації барометричної висоти польоту активується за допомогою відповідної кнопки на панелі керування Пілотажно-Навігаційного Комплексу (ПНК) або Системи Автоматичного Управління (САУ). Перехід до цього режиму доцільно здійснювати з режиму стабілізації кутових положень, наприклад, стабілізації кута тангажа під час горизонтального польоту

Для визначення відхилення літака від заданої барометричної висоти польоту, на якій активується режим, використовуються коректори висоти. За наявності на борту літака системи повітряних сигналів, інформацію про висоту доцільно отримувати саме з неї.

Розглянемо типові закони регулювання для режиму підтримки барометричної висоти за допомогою контуру формування заданого кута тангажа та контуру нормального перевантаження  $n_{узад}$ :

$$\begin{aligned}\delta_{\text{в}} &= K_{\delta}(\vartheta - \vartheta_{\text{зад}}) + K_{\omega z} \omega_z - K_{\text{в}}^Y f(|\gamma|); \\ \vartheta_{\text{зад}} &= -\frac{1}{K_{\vartheta}} \left( K_{\text{н}} + K_{\text{н}p} + \frac{K_{\text{н}}}{p} \right) (H - H_{\text{зад}}); \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\text{в}} &= K_{n_y}(n_y - n_{узад}) + K_{\omega z} \omega_z - K_{\text{в}}^Y f(|\gamma|); \\ n_{узад} &= -\frac{1}{K_{n_y}} (K_{\text{н}} + K_{\text{н}p})(H - H_{\text{зад}}); \end{aligned}$$

Основним сигналом управління є відхилення поточної барометричної висоти польоту від заданої  $(H - H_{\text{зад}})$ ; що визначається коректором висоти.

Алгоритм керування висотою за нормальним перевантаженням, як правило, вирізняється кращою реакцією на вітрові збурення, забезпечуючи швидке гасіння їх впливу. Проте, для стійкості такого контуру, коли в законі управління відсутній сигнал кута тангажа, необхідні додаткові заходи,

В законах управління (2.1),  $\delta r^{\delta_{\text{в}}}$  — корегування руля висоти;  $q^{K_{\omega z} \omega_z}$  — демпфіруючий сигнал. Компонент  $q^{f(\gamma)} = 1 - \cos\gamma / \cos\gamma$  використовується для компенсації втрати висоти під час кренів літака.

Завдяки законам ізодромного зворотного зв'язку сервопривод може забезпечувати більш точне позиціонування. Ця технологія забезпечує більш стійку та чітку роботу системи.

Додатково, включення першої та другої похідних від сигналу відхилення в закон управління дозволяє досягти кращої стабілізації. Ці похідні дозволяють системі швидше реагувати на зміни та ефективніше гасити коливання.

Перша похідна представлена сигналом  $\Delta h \cdot \Delta h'$ , а друга - сигналом нормального перевантаження  $nznz$ . Система управління польотом ВСУП-85 використовує наступний формат керуючого сигналу:

$$\vartheta_z = K_H \Delta H + K_{V_y} V_y + K_{n_y} \Delta n_y \quad (2.2)$$

Для стабілізації істинної висоти польоту основним джерелом інформації виступає радіовисотомір.

## 2.1. Формалізація процесів керування польотом за допомогою математичних рівнянь

Лінеаризована модель в просторі станів. Розглянемо систему управління польотом літака, об'єкт управління якої має лінеаризовану модель, представлену системою рівнянь у просторі станів:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_0\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $\mathbf{x}$  – вектор стану;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  – матриці придатних аеродинамічних похідних;  $\mathbf{u}$  – вхідні данні системи;  $\mathbf{y}$  – вектор вимірювань реальної системи;  $\mathbf{C}, \mathbf{C}_0$  – матриці вимірювань;  $\mathbf{z}$  – вектор вимірювань для обчислення показника якості.

Наприклад, для бокового руху літака вектор стану має форму  $\mathbf{x} = [\beta, p, r, \varphi, \psi]'$ , де  $\beta$  – кут ковзання,  $p, r$  – кутова швидкість крену та кутова швидкість крену, а  $\varphi, \psi$  – кут крену та кут ковзання. Вектор керування



визначається як  $\mathbf{u} = [\delta a, \delta e]'$ , де  $\delta a, \delta e$  – кут відхилення елерона та напрямний кут. Матриці аеродинамічних похідних  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  можуть бути виражені таким чином

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Y_\beta & Y_p & Y_r & Y_\varphi & Y_\psi \\ L_\beta & L_p & L_r & L_\varphi & L_\psi \\ N_\beta & N_p & N_r & N_\varphi & N_\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

У формулі (2.4) та далі використовуються системи координат та позначення з [18, 19]. Тут позначає сигнал спостереження бічної системи, а та відповідно моменти за креном та рисканням.

Матриця спостереження використовується для моделювання реального автопілота і визначається фактичними вимірюваннями навігаційного комплексу. Вона включає всі змінні стану. У реальних системах кут ковзання та кут атаки рідко вимірюються, хоча їх обмеження є важливим для безпеки польоту.

При математичному представленні системи у просторі станів, змінна застосовується для створення регулятора, а змінна - для визначення показника якості роботи цієї системи.

Для повітряних суден цивільної авіації дуже важливо обмежити короткоперіодичні та довгоперіодичні прискорення. Тому для цих випадків необхідно розробити метод врахування цих вимог у показниках якості. Визначити бічне прискорення літака, яке виникає при маневрах, можна за допомогою акселерометра, ігноруючи гравітаційну силу.

$$a_y = Y_\beta \cdot \beta + Y_{\delta_r} \cdot \delta_r = a_{11}x_1 + b_{21}u_2 \quad (2.5)$$

Аналізуючи вираз (2.3), бачимо, що квадрат цієї величини прискорення матиме складову  $2a_{11} \cdot b_{21} \cdot x_1 \cdot u_2 = 2Y_\beta \cdot Y_{\delta_r} \cdot \beta \cdot \delta_r$ .

Врахувати в рівнянні об'єкту управління (2.3) необхідно додати рівняння регулятора, що враховують від'ємний зворотний зв'язок

$$\begin{aligned} \dot{x}_u &= A_u x_u + B_u (\bar{r} - Cx), \\ u &= C_u x_u + D_u (\bar{r} - Cx), \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $\bar{r}$  – командний сигнал,  $A_u, B_u, C_u, D_u$  – матриця, що описує регулятор.

Проаналізуємо модель замкненої системи, зображену на блок-схемі рис. 2.1.

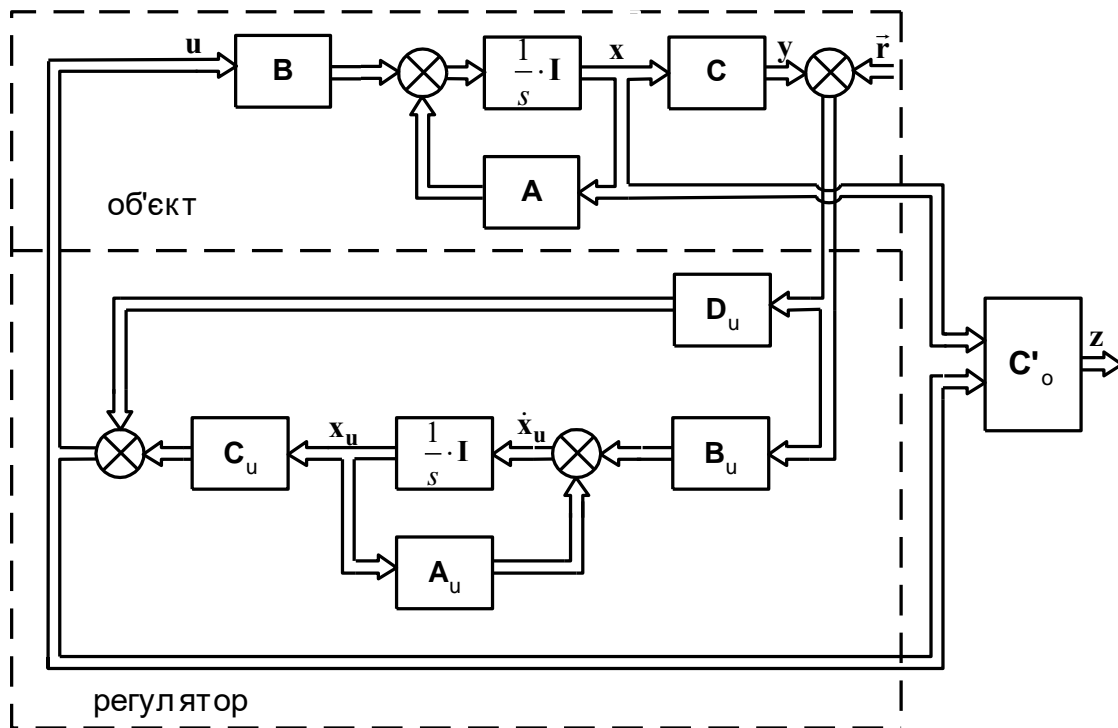


Рис.2.1. Модель з фіксованою структурою

Модель замкненої системи у векторному просторі станів  $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{x}, \mathbf{x}_u]'$ , що описує динаміку системи з вхідним сигналом  $\vec{\mathbf{r}}$ , векторами спостереження  $\mathbf{y}_0 = [\mathbf{y}, \mathbf{u}]'$  та  $\mathbf{z} = \mathbf{C}'_0 \mathbf{x}_0$ , може бути отримана з рівнянь (2.3) та (2.6) наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}_0 \vec{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{D}_0 \vec{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{z} = \mathbf{C}'_0 \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де матриця, що описує динаміку системи в просторі станів, має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_u\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_u \\ -\mathbf{B}_u\mathbf{C} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{D}_u \\ \mathbf{B}_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{D}_u\mathbf{C} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

тут  $\vec{\mathbf{r}}$  – вхідний (командний) сигнал;  $\mathbf{z}$  – вектор спостереження, який формує показник якості.

Першочерговим завданням є математичне описання турбулентного вітру, що впливає на повітряний літак. Один із способів цього можна досягти за допомогою моделі Драйдена. Ця модель розглядає короткоперіодичну, довгоперіодичну та вважаючи бічні компоненти вектора миттєвої швидкості вітру стаціонарними випадковими процесами з відповідними спектральними щільностями.

$$\begin{aligned}
S_u(\omega) &= \frac{2\sigma_u^2 L_u}{U_0 \pi} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_u^2 \omega^2)} \\
S_v(\omega) &= \frac{\sigma_v^2 L_v}{U_0 \pi} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \tau_v^2 \cdot \omega^2}{(1 + \tau_v^2 \omega^2)^2} \\
S_w(\omega) &= \frac{\sigma_w^2 L_w}{U_0 \pi} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \tau_w^2 \cdot \omega^2}{(1 + \tau_w^2 \omega^2)^2} \\
\tau_u &= \frac{L_u}{U_0}; \quad \tau_v = \frac{L_v}{U_0}; \quad \tau_w = \frac{L_w}{U_0};
\end{aligned} \tag{2.9}$$

де  $L_u, L_v, L_w$  – інтенсивність турбулентності;  $U_0$  – постійна швидкість ЛА;  $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$  стандартні відхилення відповідних компонент швидкості.

За таких умов процеси можна представити як виходи формуючих фільтрів, де входи збуджуються некорельованими білими шумами  $\eta_x, \eta_y, \eta_z$ .

Довгоперіодичну швидкість  $w_g$  можна перерахувати в турбулентний кут атаки:  $\alpha_g = w_g / U_0$ . Вектори входу  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_x, \eta_z]^T$  та виходу  $\mathbf{g} = [u_g, \alpha_g, q_g]^T$  можна визначити для поздовжнього руху, де  $q_g$  відповідно до  $q_g = -\dot{\alpha}_g$ . У цьому прикладі описане турбулентне рівняння вітру описується таким чином:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_g &= \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{x}_g + \mathbf{B}_g \cdot \boldsymbol{\eta}, \\
\mathbf{g} &= \mathbf{C}_g \cdot \mathbf{x}_g + \mathbf{D}_g \cdot \boldsymbol{\eta},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_g &= \begin{bmatrix} -\lambda_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_w^2 & -2\lambda_w \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_g &= \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}_g &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha \beta_w & K_\alpha \\ 0 & K_\alpha \lambda_w^2 & K_\alpha (2\lambda_w - \beta_w) \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_g &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -K_\alpha \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

$$K_u = \sigma_u \sqrt{\frac{2u_0}{\pi L_u}} \quad K_\alpha = \sigma_w \sqrt{\frac{3}{\pi L_w u_0}} \quad \lambda_w = \frac{u_0}{L_w} \quad \lambda_u = \frac{u_0}{L_u} \quad \beta_w = \frac{\lambda_w}{\sqrt{3}}
\tag{2.12}$$

Існує можливість побудови формуючого фільтра для бічного руху, де вхідним сигналом слугуватиме білий шум  $\eta_y$ , а вихідними даними  $v_g$  - поперечна швидкість та турбулентні кутові швидкості  $\rho_g, r_g$ . Модель Драйдена є стандартизованою, і коефіцієнти в рівняннях (2.9) експериментально визначаються для різних режимів польоту (крейсерський політ, посадка тощо), що дозволяє врахувати вплив турбулентності на динаміку літака. Застосування цих моделей дозволяє аналізувати ефективність стабілізації при польотах у турбулентних умовах, що дає можливість оптимізувати конструкцію літака.

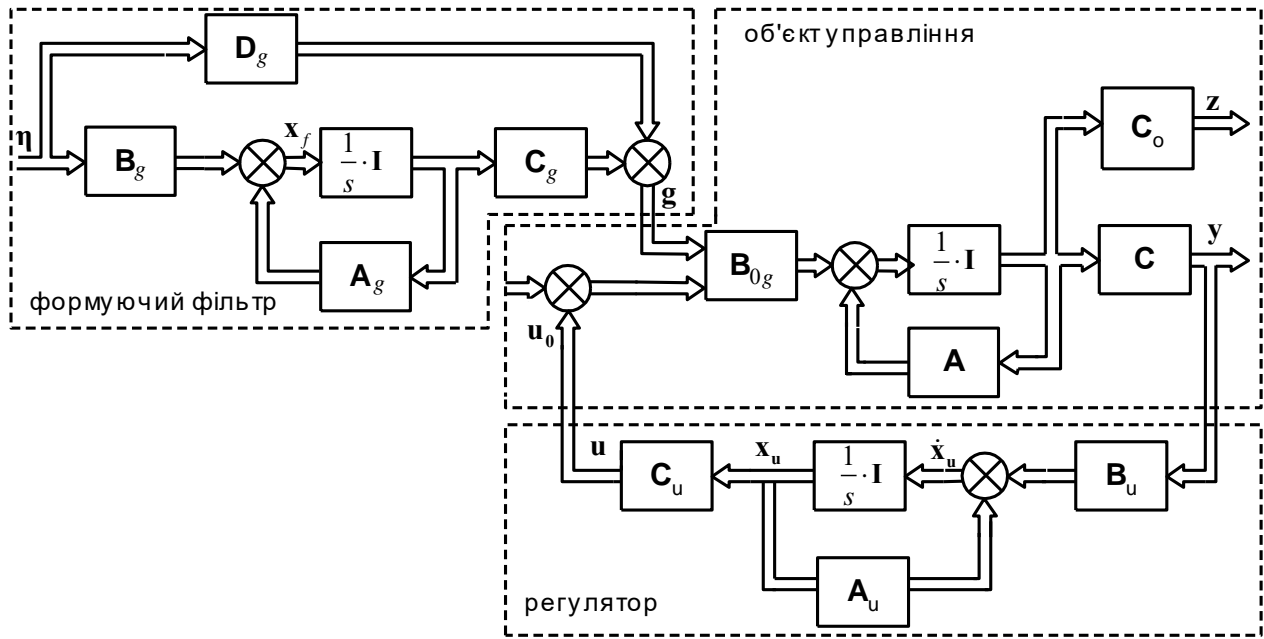


Рис. 2.2. Математична модель ізольованої системи повинна враховувати її стохастичну природу

Математична модель поздовжнього руху, представлена на рис. 2.2, містить формулюючий фільтр (2.11), (2.12) та замкнутої системи управління. На відміну від схеми, представленої на рис. 2.1, у цій моделі місце введення зовнішнього сигналу змінено. Вирази для блокових матриць замкненої системи у просторі станів для вхідного сигналу мають наступний вигляд

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_u\mathbf{C} & -\mathbf{B}_u\mathbf{C} \\ \mathbf{B}_u\mathbf{C} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ \mathbf{D}_u\mathbf{C} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

причому  $\mathbf{D}_0$  важливо зазначити, що зовнішня дія описується нульовою матрицею відповідного розміру. Врахування впливу турбулентної атмосфери на модель реалізується за допомогою послідовного підключення замкненої системи керування польотом до фільтра Драйдена, що описується чотирма матрицями (2.12), що дає можливість аналізувати та проектувати системи

управління польотом з покращеними характеристиками. Таким чином, матриця управління об'єктом трансформується в розширену блочну матрицю.

$$\mathbf{V}_{0g} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g^0 & \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

Дія зовнішнього фактора на об'єкт  $\mathbf{g}$  управління описується матрицею  $\mathbf{V}_g^0$ , яка складається з елементів матриці  $\mathbf{A}$ , але з протилежними знаками. Це відповідає стану системи, що зазнає турбулентного збурення. За умови, що опис формуючого фільтра у просторі станів визначається четвіркою матриць  $[\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{D}_g]$ , то при врахуванні виразів (2.13), (2.14) для послідовного об'єднання фільтра та замкненої системи можна отримати математичні формули, які описують динаміку системи з урахуванням турбулентної дії.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_{s0} \mathbf{x}_s, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вектор стану  $\mathbf{x}_s$  описує динаміку літака в турбулентній атмосфері. Він складається на основі змінних стану фільтра та системи. Вектор білих шумів  $\boldsymbol{\eta}$  слугує вхідним для фільтра. Це дозволяє моделювати випадкові впливи на систему. Вимірюваний вихід системи позначається як  $\mathbf{y}$ . Матриці моделі  $\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{D}_s$  мають вигляд

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & 0 \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g & 0 \\ \mathbf{B}_g^{(0)} & \mathbf{D}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = [\mathbf{D}_0 \mathbf{C}_g, \mathbf{C}_0], \quad \mathbf{D}_s = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_g. \quad (2.16)$$

Враховуючи симетричність матриці  $\mathbf{D}_0 = 0$ , можемо зробити висновок, що матриця  $\mathbf{C}_{s0}$  також буде симетричною. Матриця  $\mathbf{C}$  формується за допомогою тих змінних стану, які впливають на показник якості системи.

## 2.2. Математичне моделювання динаміки польоту літака

Ізольований поздовжній рух літака може бути описаний окремою системою рівнянь, виділеною з повної системи динаміки літака. Цей процес передбачає уявне обнулення параметрів бічного руху та кутів відхилення органів управління  $\delta_\epsilon \delta_n$ . Система рівнянь, що описує поздовжній рух у такому випадку, набуває наступного вигляду

$$\begin{aligned}m\dot{V} &= P \cos \alpha - X \alpha - mg \sin \theta; \\mV\dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y \alpha - mg \cos \theta; \\I_z \dot{\omega}_z &= \omega_z; \\v &= \omega_z i; \\\alpha &= v - \theta; \\\dot{H} &= V \sin \theta\end{aligned}\tag{2.17}$$

де  $mg=G$ ,  $m$  - маса тіла,  $g$  - прискорення сили тяжіння, а  $G$  - гравітаційна стала, описує силу тяжіння, що діє на тіло.

Співвідношення  $\alpha=v-\theta$  є кінематичним, його можна отримати за допомогою геометричного рівняння, якщо перетворити його за допомогою математичних методів для спрощення виразів з тригонометричними функціями, що містять віднімання аргументів.

Система (2.17) характеризується нелінійною структурою, що робить її аналіз та розв'язання складними завданнями. Нелінійність обумовлена присутністю творів змінних, тригонометричних залежностей та нелінійних функцій параметрів польоту, що описують аеродинамічні сили та моменти.

Перехід до спрощеної лінійної моделі руху літака потребує введення певних припущень та застосування методу лінеаризації до початкових рівнянь..



Динаміка польоту літака визначається поступальним рухом його центру мас та обертальним рухом навколо нього. Запис диференціальних рівнянь, що описують ці рухи в проекціях на осі нерухомої системи координат, є складним завданням, адже проектування сил і моментів, що діють на літак, на ці осі є складним завданням. Це також значно ускладнює подальший аналіз таких рівнянь. Тому в динаміці польоту перевагу надають рівнянням руху, записаним у рухомих системах координат.

При описі просторового руху літака приймаються такі спрощення:

Літак вважається абсолютно жорстким тілом з постійними інерційними характеристиками. Це означає, що його деформації не враховуються.;

Осі зв'язаної системи координат збігаються з головними осями інерції літака. Це спрощує розрахунки моментів інерції;

Вектор тяги прикладений до центру мас літака і не створює додаткових моментів. Це припущення робить модель більш простою;

Земля вважається плоскою, нерухомою і не обертається в інерціальному просторі. Це дозволяє не враховувати переносні та коріолісові сили й моменти;

Повітряне середовище вважається нерухомим. Це спрощує аеродинамічні розрахунки.

Використовуючи принципи збереження кількості руху та моментів кількості руху, отримуємо рівняння руху літака як твердого тіла. У векторній формі ці рівняння мають наступний вигляд:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}; \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} \quad (2.17)$$

де  $\vec{v}$  – вектор швидкості повітряного потоку;

$\vec{R}$  – вектор результуючої зовнішньої сили, що діє на літак;

$\vec{K}$  – вектор моменту кількості руху;

$\vec{M}$  – аеродинамічний момент, що діє на літак;

$m$  – маса літака.

За допомогою методів векторного аналізу відомо, що похідна  $\vec{A}$  за часом вектора в нерухомій системі координат  $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$  може бути представлена як сума двох компонент: похідної за часом цього вектора в рухомій системі координат  $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_p$ , яка обертається відносно нерухомої, та векторного добутку кутової швидкості  $\vec{\Omega}$  обертання рухомої системи відносно нерухомої на сам вектор  $\vec{A}$ .

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_p + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Векторні рівняння (2.17), спроектовані на осі рухомої системи координат, матимуть такий вигляд. Враховуючи прийняті припущення про рух літального апарату (ЛА) як твердого тіла з шістьма ступенями свободи, динаміка його польоту описується системою рівнянь, що включає шість рівнянь Ейлера, доповнені рівняннями сил і моментів, кінематичними та геометричними співвідношеннями, а також рівняннями, що описують траєкторний рух центру мас літака, в сукупності описують його просторовий рух. Ця система рівнянь має наступний вигляд (2.18).

$$mV = P \cos \alpha \cos \beta - X_a - G \sin \theta;$$

$$mV\dot{\theta} = P(\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - G \cos \theta;$$

$$-mV\dot{\Psi}\cos\theta = P(\sin\alpha\sin\gamma a - \cos\alpha\sin\beta\gamma a) + Y\sin\gamma a + Z\cos\gamma a;$$

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_z\omega_y = M_x;$$

$$J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y;$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x = M_z;$$

$$\sin\alpha = [\sin\vartheta\cos\theta - \cos\vartheta\sin\theta\cos(\psi - \Psi)]\cos\gamma_\alpha - \cos\vartheta\sin\gamma_\alpha\sin(\psi - \Psi);$$

$$\sin\beta = [\cos\gamma\sin(\psi - \Psi) + \sin\vartheta\sin\gamma\cos(\psi - \Psi)]\cos\theta - \sin\theta\cos\vartheta\sin\gamma;$$

$$\cos\gamma_\alpha = (\sin\alpha\sin\vartheta + \cos\alpha\cos\vartheta\cos\gamma)\sec\theta;$$

$$\dot{\psi} = (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)\sec\vartheta$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x + \operatorname{tg}\vartheta(\omega_z\sin\gamma - \omega_y\cos\gamma);$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma;$$

$$\dot{g} = \dot{H} = V\sin\theta;$$

$$\dot{X}g = V\cos\theta\cos\Psi;$$

(2.18)

$$\dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \psi.$$

Якщо у ЛА наявний апарат площини симетрії, це дозволяє нам розділити його рух на просторовий, поступальний та бічний.

Поступальний рух ЛА, що описується траєкторією в просторі без обертання, при нейтральному положенні органів управління.

Траєкторія польоту літака визначається двома складовими: поступальною швидкістю та її проекціями, а також обертальним рухом навколо вертикальної осі OZ.

Характеристики власного поздовжнього руху літака визначаються:

- кутом атаки  $\alpha$
- кутом похилу траєкторії  $\theta$
- кутом тангажу  $\vartheta$
- швидкістю  $V$
- висотою польоту  $H$
- положенням руля висоти  $\delta_v$
- тягою установки силової  $P$

Умовою виділення системи рівнянь поздовжнього руху є відсутність бокових параметрів та нульові значення кутів відхилення органів керування  $\delta_z$ ,  $\delta_n$  які впливають на бокове переміщення .

Таким чином, рівняння, що описують рух літака вздовж його поздовжньої осі при відсутності бокового ковзання, крену та зміни курсу, мають такий вигляд:

$$m \dot{V} = P \cos \alpha - X_a - mg \sin \theta;$$

$$m V \dot{\theta} = P \sin \alpha + Y_a - mg \cos \theta;$$

$$J_z \dot{\omega}_z = M_z;$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z;$$

(2.19)

$$\alpha = \vartheta - \theta;$$

$$\dot{H} = V \sin \theta.$$

де  $mg=G$ ,  $m$  - маса тіла,  $g$  - прискорення сили тяжіння, а  $G$  - гравітаційна стала, описує силу тяжіння, що діє на тіло.  $G$  - це фундаментальна фізична константа, що описує силу тяжіння між двома об'єктами. Її значення дорівнює приблизно  $6,67430 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .  $g$  - це прискорення, з яким тіло падає під дією сили тяжіння. Це величина, яка залежить від маси Землі та радіуса Землі. На Землі  $g$  приблизно дорівнює  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

Рівняння (2.19) є нелінійними через наявність добутків змінних, тригонометричних залежностей та виразів для аеродинамічних сил і моментів, які є нелінійними функціями польоту.

Для розробки лінійних моделей руху літака, які б описували його динаміку в спрощеному вигляді, необхідно ввести додаткові умови та здійснити лінеаризацію вихідних рівнянь.

В даній роботі аналізується динаміка важкого літака. Модель літака, що описує його короткоперіодичний рух у поздовжній площині на висоті 8000 м зі швидкістю, відповідною числу Маха 0,9, представлена системою рівнянь 6-го порядку з фазовими координатами:

- $x_1$  – кут нахилу траєкторії;
- $x_2$  – кут атаки;
- $\dot{x}_3$  – кутова швидкість по тангажу;
- $x_4$  – кут тангажу;
- $x_5$  – вертикальна швидкість, м/сек.;
- $x_6$  – відносна висота.

Кути атаки та тангажу вимірюються, а контроль над динамікою літака здійснюється за допомогою:  $u_1$  – кут відхилення елевона, град.  $u_2$  – кут відхилення тангажа, град. Модель у просторі стану, що описує лінійну систему, має наступний вигляд  $G(s) = C(Is - A)^{-1}$ , де чотирьохматрична структура у просторі стану визначається наступним чином:

$$A = \begin{bmatrix} -3.257e-02 & -35.6 & -17.4 & -31.1 & 3.251 & -0.7626 \\ 8.257e-05 & -1.4 & 0.883 & -6.26e-04 & -0.171 & -5e-03 \\ 1.234e-02 & 10.22 & -2.63 & 8.758e-04 & -29.6 & 22.46 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0 \end{bmatrix};$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Схема конфігурації та геометрії літака у вимушеному поздовжньому русі представлена на рис. 2.3.

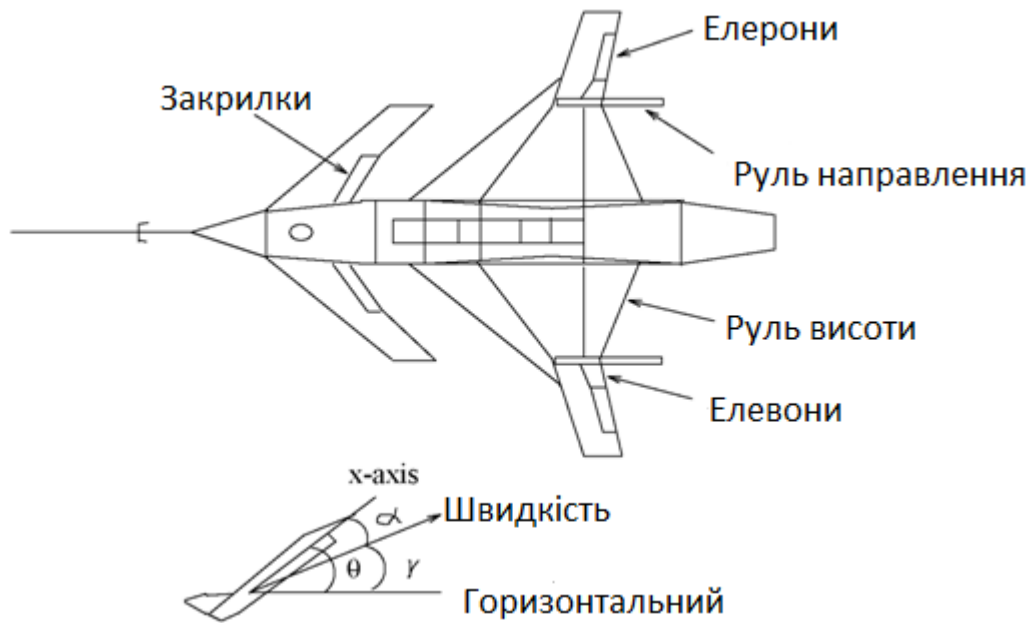


Рис. 2.3. Геометричні характеристики та конфігурація літака під час вимушеного поздовжнього руху

Модель динаміки літака, виконує довгоперіодичний рух у поздовжній площині описує рівняння 5-го порядку з фазовими координатами :

- $x_1$  – відносна висота, м;
- $x_2$  – горизонтальна швидкість, м/с;
- $x_3$  – кут тангажу, град.;
- $x_4$  – кутова швидкість по тангажу, град./с;
- $x_5$  – вертикальна швидкість, м/сек.

Вимірюються перші три координати. Керуючими змінними є:

- $u_1$  – кут спойлера, град.  $\times 0,1$ ;
- $u_2$  – поступове прискорення, м/с<sup>2</sup>;
- $u_3$  – кут руля висоти, град.

Лінійна динамічна система в становому просторі описується таким чином

$G(s) = C(Is - A)^{-1}$ , де рівняння лінійної моделі в становому просторі мають наступну форму:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.42 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

## Висновок

У цій частині роботи представлено математичний опис динаміки літака, що охоплює його короткоперіодичний та довгоперіодичний рух. Ця модель є цінним інструментом для аналізу поведінки літака під час польоту, дозволяючи дослідити його динамічні характеристики, оцінити стійкість та розробити ефективні системи керування.



## РОЗДІЛ 3

### СИНТЕЗ СТІЙКИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

#### 3.1 Особливості поздовжнього руху

Поздовжній рух літального апарату – це рух у площині симетрії  $XOZ$  [20]. Припустимо, що початковий безтурботний рух літака є прямолінійним і стійким горизонтальним польотом. Тоді за відсутності керуючих впливів і зовнішніх збурень всі сили і моменти, що діють на площину, врівноважують один одного. Якщо керуючий вплив або зовнішні збурення чиняться на повітряне судно, змушуючи його обертатися навколо осі  $OZ$  або переміщатися вздовж осі  $OX$  або  $OY$ , поздовжній рух повітряного судна стане вимушеним і, після усунення керуючого впливу або зовнішніх збурень. Але навіть при цьому поздовжній рух буде розвивається майже незалежно від бічного.

#### 3.2 Види поздовжнього руху

Якщо ми будемо дивитись на власний поздовжній рух літак, котрий виникає через короткочасні відхилення керма висоти. Це дасть нам приріст нормальної сили на горизонтальному оперенні  $AU$ , що у свою чергу приведе до тангажу  $M_{z\delta}$  на плече  $L_{ro}$  керуючого аеродинамічного моменту.

За рахунок вище названого моменту ЛА почне повертатись відносно напрямку поперечної осі  $OZ$ , це буде міняти кут тангажу  $\vartheta$  та кут атаки  $\alpha$ . Якщо кута атаки буде наростати, це призведе до підвищення нормальної сили  $OY$ , яка викличе стабілізуючий статичний момент тангажу по куті атаки  $M_{za}$ , який буде направлений на усунення отриманого збільшення кута атаки, за рахунок дії моменту  $M_{za}$  ЛА повернеться відносно поперечних осі  $OZ$  в зворотньому напрямку в наслідок чого кут атаки зменшеться.

Якщо літак буде обертатись довкола осі OZ це стане причиною для створення демпфуючого моменту тангажа  $M_{z\omega}$  і моменту тангажа  $M_{za}$ , через запізнення скоса потоку, що протидіє обертанню літака. Саме коли ЛА повертається до початкового куту атаки, кутова швидкість тангажу  $\omega_z$  ставатиме ще більшою і літака зможе пройти через це положення, в такому випадку збільшення кута атаки матиме негативним вплив. За рахунок збільшення нормальної сили ОУ буде мати направлення вниз, тому буде створювати кабріруючий момент і всі три моменти  $M_{za}$ ,  $M_{z\omega_z}$ ,  $M_{z\dot{a}}$  будуть сповільнювати обертальний рух літака. Але якщо опускання носа зупиниться, моменти  $M_{z\omega_z}$ ,  $M_{z\dot{a}}$  будуть дорівнювати нулю, але ЛА за рахунок дії стабілізуючого моменту  $M_{za}$  вкотре почне задирати ніс.

Ця дія може повторюватись і після деяких коливань зарахунок дії моментів літак майже повністю повернеться в стартове положення рівноваги. Це відбувається достатньо швидко, тому поздовжній рух літака по кутовій швидкості тангажа  $\omega_z$ , кута атаки  $\alpha$  та кута тангажу  $\vartheta$  називають швидким поздовжнім. При умові, якщо він досить швидко згасає, його називають короткоперіодичним

Короткоперіодичні рухи відносно центру мас літака можуть відбуватися без істотних змін швидкості і зазвичай закінчуються протягом кількох секунд.

Якщо звернути увагу на вимушений поздовжній рух ЛА, який трапляється внаслідок тривалого відхилення руля висоти, це може викликати появу приросту нормальної сили горизонтальному оперенні ОУ і керуючого аеродинамічного моменту  $M_{z\delta}$ . Літак реагує на цей вплив, викликаючи стабілізуючий момент тангажа по куту атаки  $M_{za}$ , демпфуючий момент тангажа

$M_{z\omega}$  та момент тангажа, зумовлений запізненням скоса потоку  $M_{z\dot{\alpha}}$ . Початково процес розвивається аналогічно до власного поздовжнього збуреного руху. Проте, він завершується тільки після того, як кількість коливань стабілізує момент  $M_{za}$  врівноважуючи керуючий момент  $M_{z\delta}$ . Це може статися при новому значенні кута атаки, відмінному від початкового, пропорційному відхиленню керма висоти пілотом  $\Delta\delta_B$ . У такому разі літак знову збалансовується, і точкою прикладання підйомної сили вкотре стає центр мас літака.

Цей процес виконується достатньо швидко, тому початковий етап вимушеного поздовжнього збуреного руху називають швидким. Якщо рух швидко загасає, його називають короткоперіодичним.

Якщо змінити кут атаки на величину  $\Delta\alpha$  це може викликати зміни сили лобового опору на величину  $X_{a\alpha}$ , а це може привести до змінення швидкості ЛА. За рахунок зменшення швидкості на величину  $\Delta V$  виконується зменшення підйомної сили на величину  $\Delta Y_\alpha$ . В результаті літак починає знижуватися, і при цьому збільшує швидкість. У вертикальній площині коливальний рух літака при майже незмінному куті атаки, називається повільним поздовжнім рухом. Якщо цей рух поступово згасає, то його називають довгоперіодичним.

Довгоперіодичний рух характеризується переміщенням центру мас літака і зазвичай триває десятки або сотні секунд. Такий рух може виникати не лише під час вимушених збурень, але і при власних поздовжніх збуреннях, хоча в останньому випадку він менш виражений.

### 3.3 Характеристика сингулярних величин

У системах МІМО команда `bode` генерує набір характеристик, що описують зв'язок між входами та виходами, де кожна з цих властивостей має своє унікальне значення  $M_r$ . Однак для оцінки таких властивостей МІМО, як коливальність і стійкість, зручно мати єдиний показник. Для матриці  $A$  з комплексними елементами розміру  $m \times n$  таким показником слугують  $p$  позитивних квадратних коренів з власних значень матриці  $A * A$ , де  $A *$  - транспонована матриця з комплексно спряженими елементами, а  $p = \min(m, n)$ :

$$\sigma_i = \sqrt{\text{eig}_i(A * A)} \quad (3.1)$$

$i = 1 \dots p$ , причому  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots$ . У такому випадку елементи матриці  $A$  є передавальними функціями, це означає що вони є функціями  $s = j\omega$ . Команди `sigma(A)` або `sigma(sys)` будують ці функції. Для SISO команди `bodemag` і `sigma` мають однакові характеристики. Особливу увагу приділяють характеристиці для  $\sigma_1$ . Цей максимум є infinity-нормою ( $\|A\|_\infty$ ). Величина, що використовується для МІМО систем, аналогічна величині  $M_r$  для SISO систем та співпадає з нею у випадку одновимірних систем. Позначимо  $\sigma_p$  як мінімальну сингулярну величину  $\sigma_j$ . Наведемо основні відношення для сингулярних величин:

$$\sigma_1 = \max_x \|Ax\|_2 \text{ при умові } \|x\|_2 = 1. \quad (3.2)$$

### 3.4 Синтез робастного регулятора системи управління короткоперіодичним рухом літака

$$W1 = \begin{bmatrix} 1/(s + 0.01) & 0 \\ 0 & 1/(s + 0.01) \end{bmatrix}, W2 = 0$$

$$W3 = \begin{bmatrix} s^2/1000 & 0 \\ 0 & (\tau s + 1)s^2/1000 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Вхідні коефіцієнти у рівняння є функціями аеродинамічних параметрів і можуть зазнавати значних змін. Тому система повинна бути достатньо стійкою до таких змін: ми допускаємо мультиплікативну неоднозначність не менше ніж на 50%. Смуга пропускання системи приблизно 10 радіан за секунду. Бажано зменшити взаємний зв'язок обох каналів, і кожен вхід повинен бути зв'язаний зі своїм виходом. Також важливо, щоб система мала достатньо ефективне демпфування. На рис. 3.1 показані сингулярні значення SV для обох каналів, а також вагові функції (зворотні значення). Об'єкт має полюси, включаючи нестійкі.

$p_1 = -5.67, p_2 = 0.258, p_3 = p_4 = -30, p_5, p_6 = 0.69 \pm j0.249$  та один нуль  $z = 0.021$

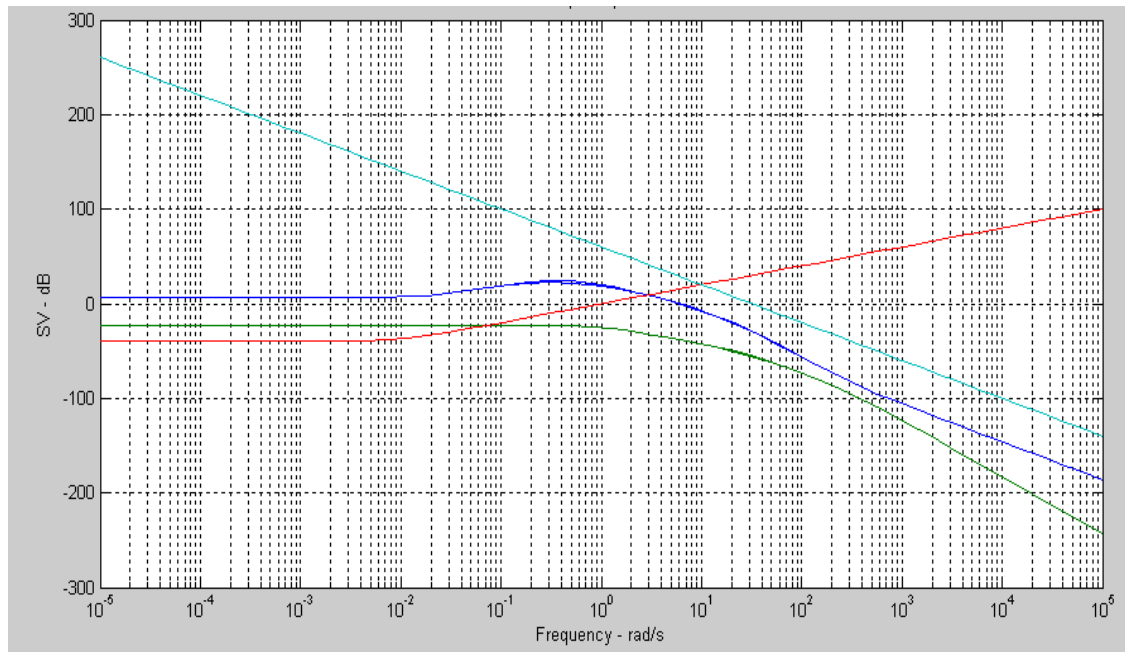


Рис. 3.1. Графік сингулярних величини SV.

Спочатку створюється розширений об'єкт TSS. Далі використовується команда `hinfort` для пошуку оптимального рішення, яке задає значення параметра  $\gamma_{opt} = 6.06$ . На основі отриманих даних формується передавальна

функція замкненої розширеної системи  $sscl$  і відповідний регулятор  $sscp$  восьмого порядку. Система  $ss\_ft$  представляє передавальну функцію замкненої системи, яка описує послідовне з'єднання регулятора  $sscp$  і об'єкта  $ssg$ , об'єднаних за допомогою одиничного зворотного зв'язку в кожному з двох каналів.  $ss\_fs$  є передавальною функцією чутливості. На рисунку 3.2 представлений графік сингулярних значень  $T_{y|u|}$ , який показує, що система дійсно охоплює весь діапазон.

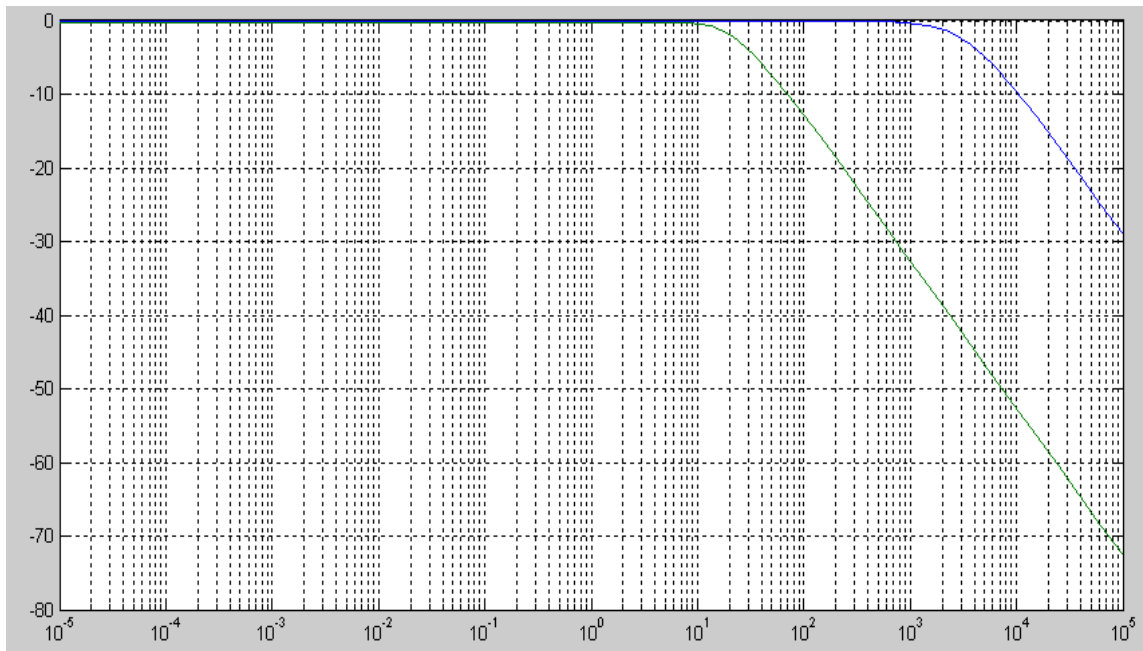


Рис. 3.2. Графічне відображення для сингулярних величин  $T_{y|u|}$

Рисунок 3.3 ілюструє смугу пропускання, представлену на графіку Т 10-12 рад / с, з цього ж графічного відображення  $\|T\|_{\infty} = \text{antilog}(2.5 / 20) \approx 1.33$ , видно що допустима мультиплікативна невизначеність порядку  $1 / 1.33 \approx 75\%$ .

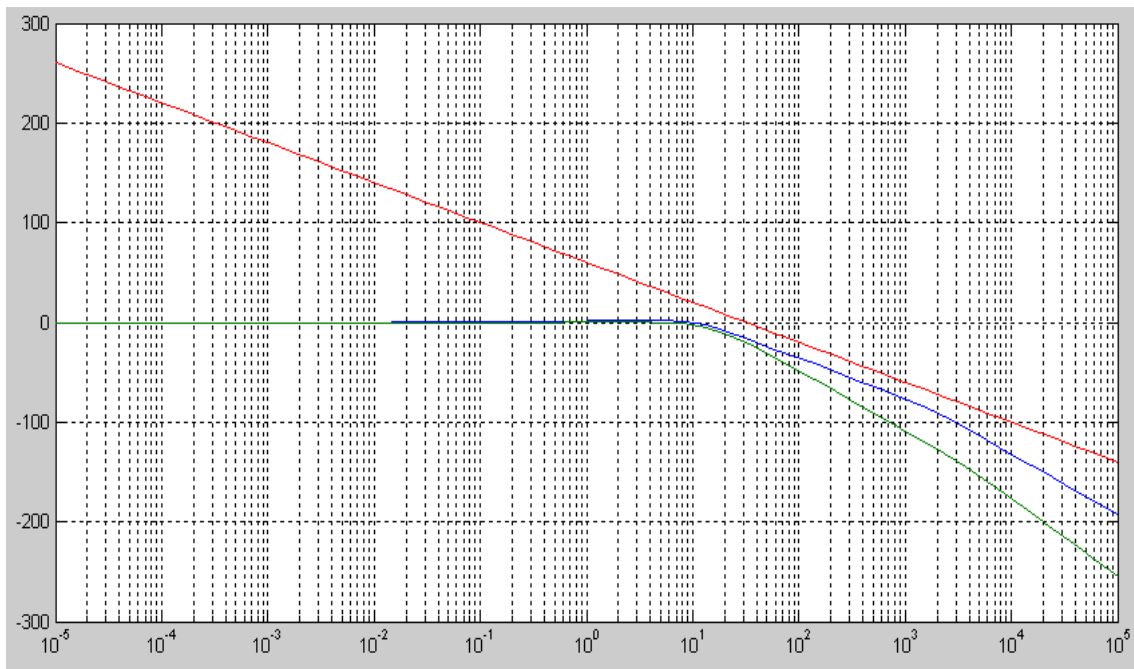


Рис. 3.3. Дослідження амплітудно-частотних властивостей замкнутої системи керування короткоперіодичним рухом літака

Рисунок 3.4 представляє графіки функцій чутливості, а рисунок 3.5 - графіки перехідних процесів, що виникають при ступінчастому змінненні завдання на кожному вході.

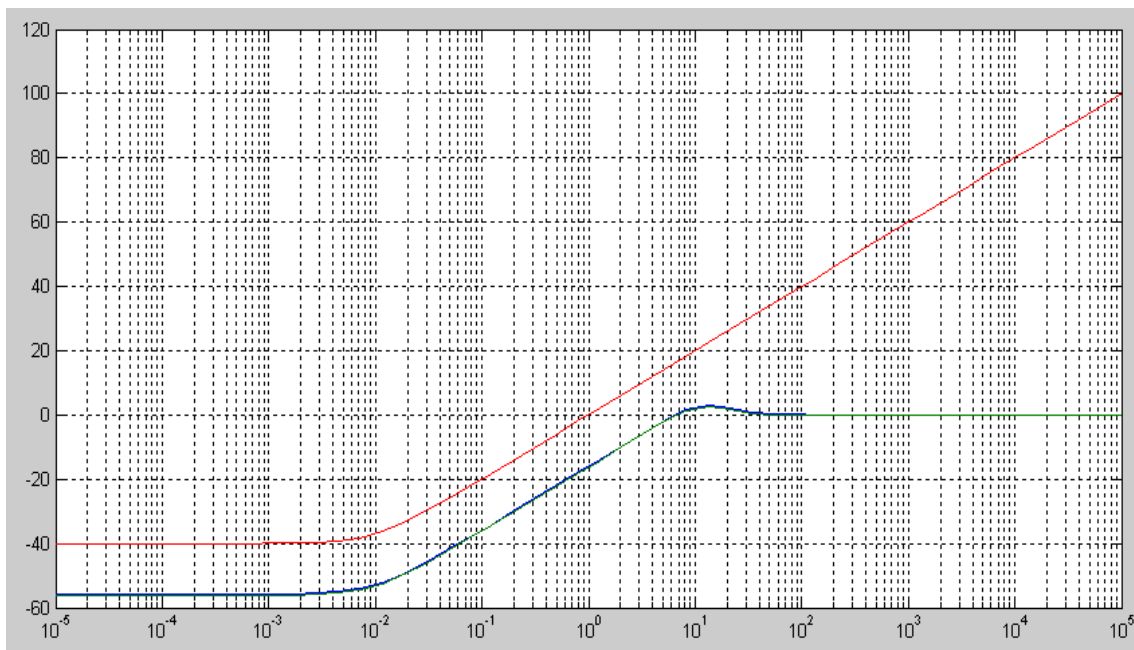


Рис. 3.4. Дослідження впливу параметрів на систему керування короткоперіодичним рухом літака

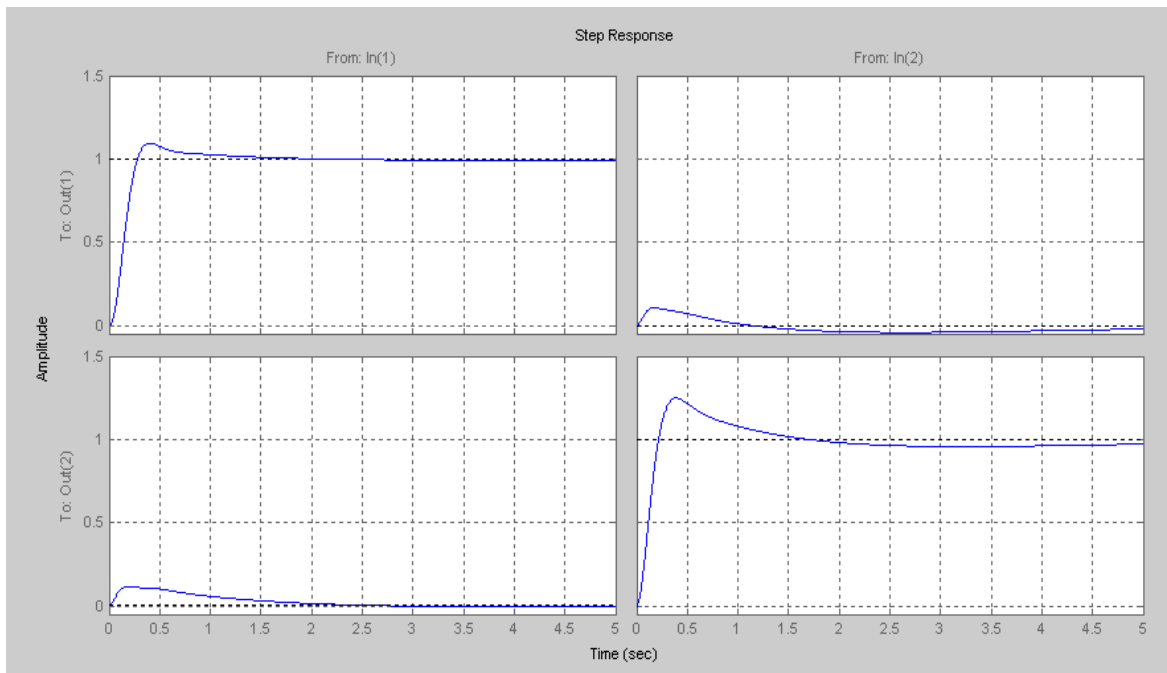


Рис. 3.5. Динаміка перехідних процесів короткоперіодичного руху

Аналіз графіку свідчить про ефективне демпфування процесів та мінімальний вплив між каналами керування. Це підтверджує виконання вимог, поставлених до проектування.

Математичний опис регулятора системи керування короткоперіодичним рухом ЛА:

a =

|    | x1      | x2      | x3      | x4       | x5      | x6      | x7     | x8         |
|----|---------|---------|---------|----------|---------|---------|--------|------------|
| x1 | -309.9  | -1260   | 39.49   | 134.9    | -817.1  | -363.9  | 3353   | 2.323e+005 |
| x2 | -404.9  | -1692   | 58.55   | 110.3    | -1030   | -375.3  | 2902   | 2.912e+005 |
| x3 | 0.9749  | 3.498   | -7.5    | -2.135   | -17.07  | -0.6341 | -40.74 | 4716       |
| x4 | 0.1373  | 2.808   | 0.6413  | -4.808   | 0.4159  | 6.33    | -99.25 | -233.1     |
| x5 | -0.5833 | -2.31   | -0.4092 | 0.008545 | -2.909  | -0.6434 | 1.636  | 811.6      |
| x6 | 0.2327  | -0.5382 | -0.8434 | 1.751    | -0.4817 | -2.355  | 35.41  | 176.7      |
| x7 | -0.1815 | 0.3839  | 0.2708  | -1.489   | 0.781   | 1.434   | -27.19 | -236.2     |
| x8 | -0.3486 | 0.2077  | -6.973  | -2.198   | 15.71   | -3.825  | -8.452 | -3545      |



b =

|    | u1         | u2         |
|----|------------|------------|
| x1 | 7e-005     | -9.16e-005 |
| x2 | -0.0001907 | 0.0001466  |
| x3 | -0.06574   | -0.03808   |
| x4 | 0.7135     | -0.4919    |
| x5 | 12.2       | 22.31      |
| x6 | 36.8       | -19.77     |
| x7 | -21.59     | 17.09      |
| x8 | 46.19      | 97.85      |

c =

|    | x1     | x2     | x3      | x4     | x5    | x6      | x7    | x8         |
|----|--------|--------|---------|--------|-------|---------|-------|------------|
| y1 | 2.216  | 6.376  | -0.2978 | 0.8269 | 3.023 | -0.5005 | 16.94 | -825.1     |
| y2 | -16.68 | -73.14 | 2.332   | 7.008  | -46.8 | -19.84  | 176.2 | 1.329e+004 |

d =

|    | u1 | u2 |
|----|----|----|
| y1 | 0  | 0  |
| y2 | 0  | 0  |

За допомогою команди `sspr` отримано регулятор ,пониживши до 5-го порядку:

a =

|    | x1          | x2          | x3          | x4          | x5     |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|--------|
| x1 | -1.205e+004 | 5.32e+004   | -6.151e+004 | 9.721e+004  | -6636  |
| x2 | -460.9      | 2021        | -2336       | 3691        | -246.3 |
| x3 | 4410        | -1.946e+004 | 2.249e+004  | -3.555e+004 | 2420   |
| x4 | 2285        | -1.02e+004  | 1.18e+004   | -1.866e+004 | 1318   |
| x5 | 3523        | -1.555e+004 | 1.798e+004  | -2.841e+004 | 1937   |

b =

|    | u1     | u2     |
|----|--------|--------|
| x1 | 2.414  | -2.835 |
| x2 | 6.879  | 46.04  |
| x3 | 24.72  | -29.83 |
| x4 | 89.41  | 134.1  |
| x5 | -67.85 | 28.9   |

c =

|    | x1     | x2     | x3    | x4     | x5     |
|----|--------|--------|-------|--------|--------|
| y1 | 37.49  | -159.3 | 183.6 | -291.7 | 17.04  |
| y2 | -581.7 | 2580   | -2983 | 4713   | -326.3 |

d =

|    | u1 | u2 |
|----|----|----|
| y1 | 0  | 0  |
| y2 | 0  | 0  |

### 3.5 Розробка стійкого регулятора для системи управління довгоперіодичним рухом літака

Система має свої полюси  $-0.78 \pm 1.03j$ ,  $-0.0176 \pm 0.1826j$ , 0. Вагові частотні функції вибрані наступним чином:

$$W1(s) = \frac{1}{s+0.01} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10(0.02s+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W3(s) = \frac{s^2}{k} \text{diag}(3) \quad (3.19)$$

Графіки сингулярних величин SV та частотних характеристик представлені на рис. 3.6, рис. 3.7.

Друга частина програми майже не відрізняється від першої, за винятком розміру одиничної матриці для замикання системи. У цій частині розмір матриці становить 3, що відповідає динаміці літака по поздовжній осі, на відміну від 2 в першій частині.

Команда `hinfprt` знаходить оптимальне значення  $\gamma$ , яке дорівнює 4.97. Відповідні характеристики функції витрат представлені на рисунку 3.7. Як видно з рисунка, вони охоплюють майже весь діапазон значень.

Регулятор `sscp` також має 8-й порядок, але за допомогою команди `mineral(sscp)` його вдалося зменшити до 7-го.

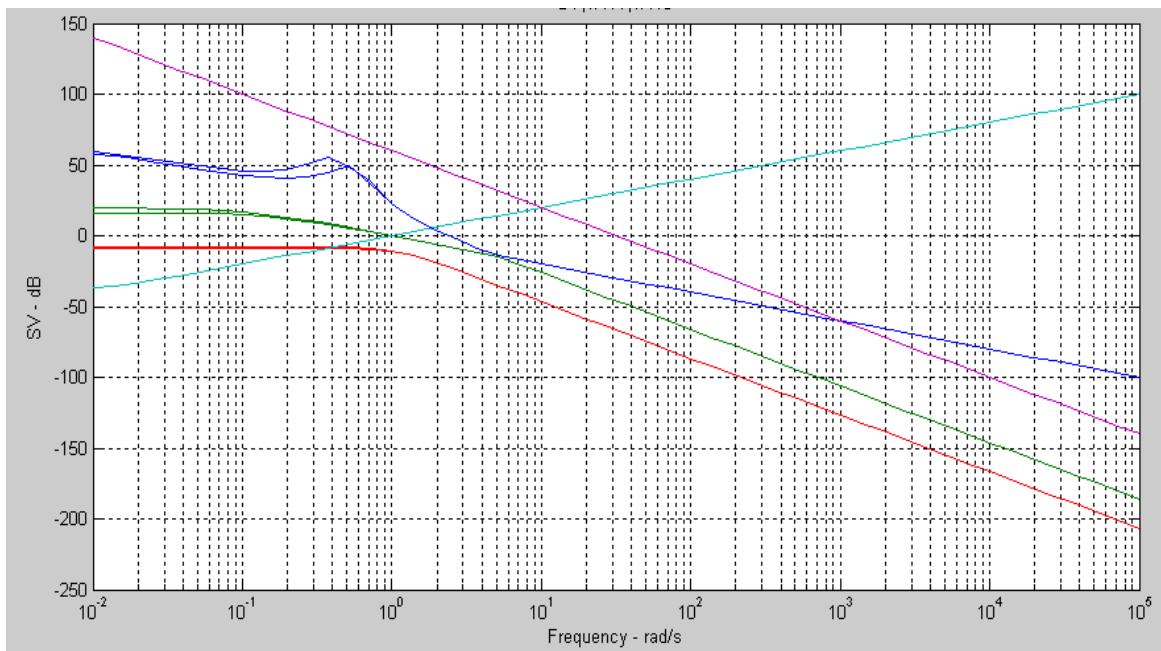


Рис. 3.6. Спектр сингулярних значень SV

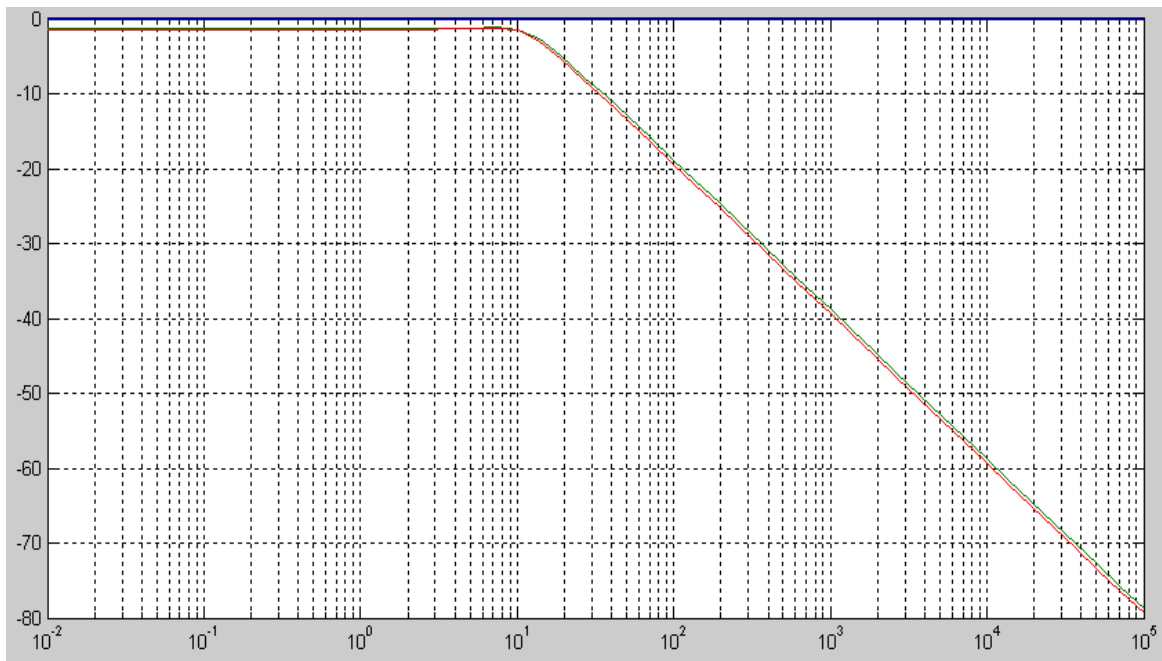


Рис. 3.7. Спектр сингулярних значень  $T_{ylul}$

Рисунок 3.8 демонструє характеристики замкнутої системи. Максимальне значення функцій чутливості  $|T(j\omega)| = 1$ , що дозволяє допустити мультиплікативну невизначеність до 100%.

На рисунку 3.9 представлені графіки функцій чутливості, а на рисунку 3.10 - графіки перехідних процесів, що виникають при ступінчастому зміні завдання на кожному вході системи.

На рисунку 3.9 представлені графіки функцій чутливості, а на рисунку 3.10 - графіки перехідних процесів, що виникають при ступінчастому зміні завдання на кожному вході системи.

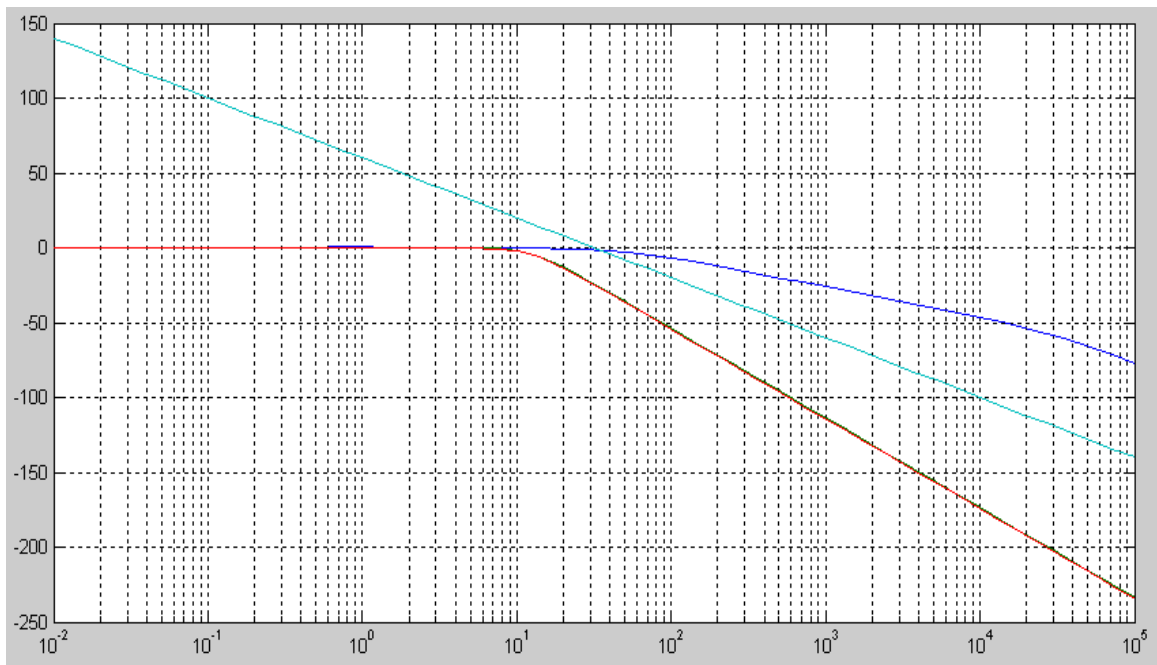


Рис. 3.8. Частотна характеристика замкненої системи управління під час довгоперіодичного руху літака

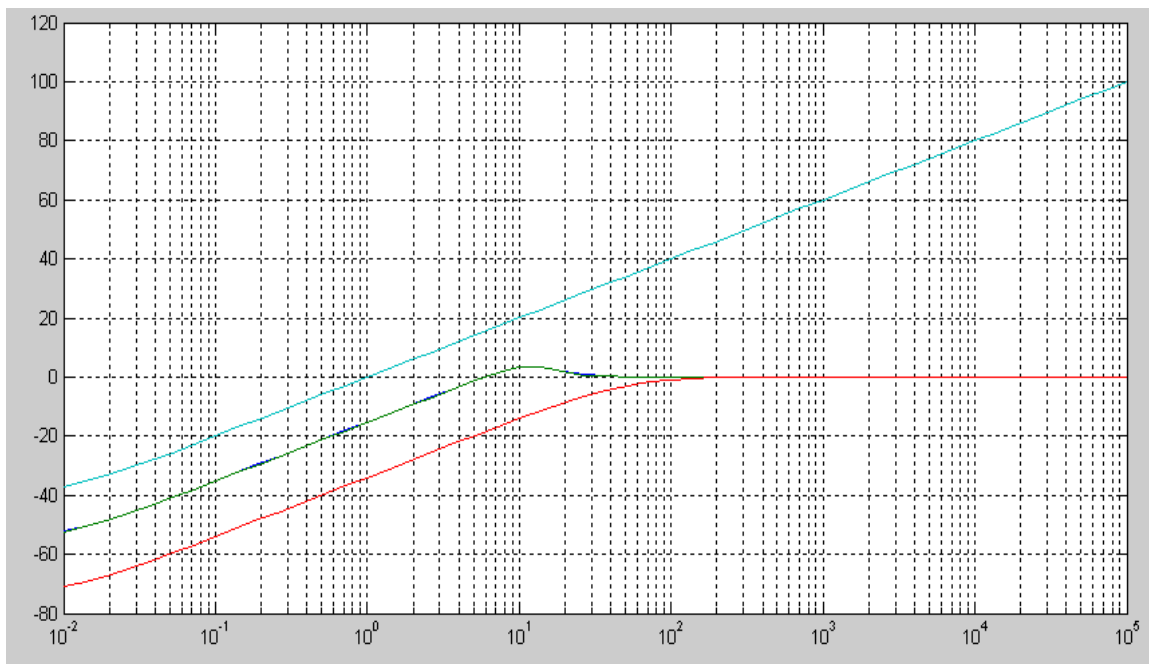


Рис. 3.9. Відгуки системи управління на довгоперіодичні коливання руху літака

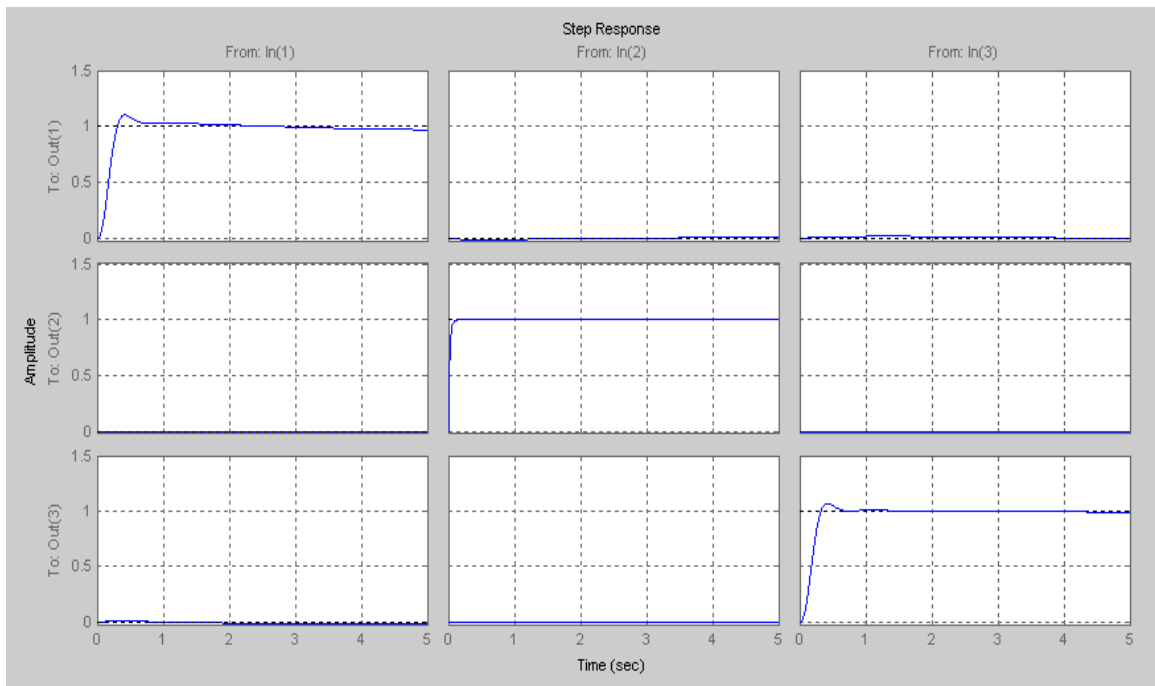


Рис. 3.10. Динаміка під час довгоперіодичного руху літака

Спостерігаються добре демпфовані процеси без взаємного впливу каналів.

Рівняння регулятора системи керування довгоперіодичним рухом літака:

|     | x1    | x2      | x3      | x4      | x5     | x6          | x7          | x8          |
|-----|-------|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|-------------|
| x1  | -0.01 | 0       | 1.232   | 0       | -1     | 0           | 0           | 0           |
| x2  | 0     | -0.0738 | -0.3712 | 0       | 0.0705 | 4.804e+004  | -9.372e+004 | 1.17e+005   |
| x3  | 0     | 0       | -0.01   | 1       | 0      | 0           | 0           | 0           |
| x4  | 0     | 0.0885  | 0       | -0.8756 | -1.013 | 3.66        | -91.6       | -61.23      |
| x5  | 0     | -0.2909 | 0       | 1.053   | 0.6759 | 251.2       | -557.6      | 555.9       |
| x6  | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | -1.905e+004 | 3.725e+004  | -4.632e+004 |
| x7  | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | 1103        | -2154       | 2692        |
| x8  | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | -1755       | 3390        | -4298       |
| x9  | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | 4958        | -9658       | 1.209e+004  |
| x10 | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | -3125       | 6087        | -7618       |
| x11 | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | -2.653e+004 | 5.169e+004  | -6.469e+004 |
| x12 | 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | -1.844e+004 | 3.592e+004  | -4.496e+004 |

|     | x9          | x10    | x11    | x12    |
|-----|-------------|--------|--------|--------|
| x1  | 0           | 0      | 0      | 0      |
| x2  | -1.839e+004 | -3148  | 1967   | 2270   |
| x3  | 0           | 0      | 0      | 0      |
| x4  | 68          | 139.1  | -2.321 | -5.279 |
| x5  | -80.92      | -261   | 34.39  | 19.56  |
| x6  | 7244        | 1325   | -793.9 | -902   |
| x7  | -426.8      | -90.14 | 47.24  | 52.83  |
| x8  | 683.4       | 53.1   | -63.79 | -80.99 |
| x9  | -1917       | -430.1 | 209.5  | 238.2  |
| x10 | 1202        | 184.7  | -125   | -147.3 |
| x11 | 1.02e+004   | 1705   | -1078  | -1253  |
| x12 | 7088        | 1185   | -749   | -871.1 |

b =

|     | u1     | u2          | u3       |
|-----|--------|-------------|----------|
| x1  | 0      | 0           | 0        |
| x2  | 0      | -2.185e-015 | 0        |
| x3  | 0      | 0           | 0        |
| x4  | 0      | 8.152e-016  | 0        |
| x5  | 0      | -2.288e-015 | 0        |
| x6  | 0.9175 | 2.146       | -0.07932 |
| x7  | 5.176  | -5.495      | -8.383   |
| x8  | 3.648  | 6.943       | -5.991   |
| x9  | -1.637 | -1.352      | 4.207    |
| x10 | 6.121  | -0.02231    | 3.903    |
| x11 | 1.252  | -0.5577     | -5.499   |
| x12 | -1.442 | -0.2021     | 8.279    |

c =

|    | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| y1 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0   |

```

y2 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
y3 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

d =

```

      u1 u2 u3
y1 0 0 0
y2 0 0 0
y3 0 0 0

```

За допомогою команди `sscr` отримано регулятор ,пониживши до 5-го порядку:

a =

|    | x1          | x2          | x3          | x4          | x5     |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|--------|
| x1 | -1245       | 1006        | 1460        | 1291        | 23.31  |
| x2 | 4.704e+004  | -3.804e+004 | -5.528e+004 | -4.893e+004 | -907.3 |
| x3 | -2.621e+004 | 2.119e+004  | 3.081e+004  | 2.73e+004   | 503.8  |
| x4 | 1.953e+004  | -1.579e+004 | -2.296e+004 | -2.033e+004 | -377.4 |
| x5 | 1.76e+004   | -1.422e+004 | -2.059e+004 | -1.809e+004 | -353   |

b =

|    | u1      | u2     | u3     |
|----|---------|--------|--------|
| x1 | 2.098   | 4.82   | 7.618  |
| x2 | -4.368  | -3.021 | 4.208  |
| x3 | -0.3983 | -5.787 | 4.218  |
| x4 | 5.911   | -4.492 | -0.592 |
| x5 | 0.3949  | 0.5149 | -5.895 |

c =



|    | x1        | x2          | x3          | x4          | x5    |
|----|-----------|-------------|-------------|-------------|-------|
| y1 | 197.6     | -176.1      | -335.2      | -460        | 12.37 |
| y2 | 7.77e+004 | -6.282e+004 | -9.129e+004 | -8.078e+004 | -1503 |
| y3 | 495.6     | -448.5      | -882.7      | -1258       | 38.38 |

d =

|    | u1 | u2          | u3 |
|----|----|-------------|----|
| y1 | 0  | -1.683e-015 | 0  |
| y2 | 0  | -2.387e-015 | 0  |
| y3 | 0  | -4.957e-015 | 0  |

### Висновок

У цьому розділі було досліджено процес структурного робастного синтезу, який включає аналіз сингулярних величин і застосування алгоритму робастного структурного синтезу. Ми провели синтез робастного регулятора для системи керування, яка враховує як короткоперіодичний, так і довгоперіодичний рух літака, і отримали відповідні рівняння регулятора системи управління.

## ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі комплексно досліджено проблему керування рухом літака в умовах невизначеності. За допомогою методу змішаної чутливості здійснено синтез робастних каналів управління власним та вимушеним поздовжнім збуреним рухом важкого літака.

1. Розроблена система динамічного моделювання поздовжнього руху літака може використовуватися для конструювання систем управління.
2. Синтезовано робастні регулятори для управління власним та вимушеним поздовжнім збуреним рухом важкого літака.
3. Зменшено порядок отриманих регуляторів за допомогою обчислювальної системи MatLab.
4. Досліджено динаміку поздовжнього руху важкого літака, керованого синтезованими каналами системи управління.
5. Доведено, що синтезовані канали управління забезпечують добре демпфовані перехідні процеси поздовжнього руху літака та мінімальний взаємний вплив каналів.

Проведене дослідження свідчить про те, що розроблені методи та алгоритми керування дозволяють забезпечити стійкість та керованість важкого літака в умовах невизначеності. Отримані результати мають значну теоретичну та практичну цінність і можуть бути використані для розробки систем керування польотом літаків, а також для підвищення їхньої безпеки та ефективності.

Дана робота може бути продовжена в наступних напрямках:

- Дослідження впливу різних факторів невизначеності на поведінку системи керування.
- Розробка методів оптимізації параметрів синтезованих регуляторів.
- Дослідження застосування розроблених методів до інших типів літаків.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zhou, K., & Doyle, J. (1999). *Essentials of Robust Control*. New Jersey: Prentice Hall. 425 p.
  2. Gu, D., Petkov, P., & Konstantinov, M. (2005). *Robust Control Design with MATLAB*. London: Springer-Verlag. 389 p.
  3. Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable Feedback Control*. New York: John Wiley and Sons. 572 p.
  4. Burns, R. S. (2001). *Advanced Control Engineering*. Oxford: Butterworth-Heinemann. 450 p.
  5. Перельмутер, В. М. (2008). Пакеты расширения Matlab Control System и Robust Control Toolbox. М.: СОЛОН-ПРЕСС. 224 с.
  6. Егупов, И. П. (2002). Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана. 744 с.
  7. Поляк, Б. Т., & Щербаков, П. С. (2002). Робастная устойчивость и управление. М.: Наука. 303 с.
  8. McLean, D. (1990). *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall, Inc. 593 p.
  9. Stevens, B. L., & Lewis, F. L. (1992). *Aircraft Control and Simulation*. J. Wiley & Sons Inc. 617 p.
  10. Воробьев, В. Г., & Кузнецов, С. В. (1995). Автоматическое управление полетом самолетов: Учебник для вузов. М: Транспорт. 448 с. □
- Glover, K., & Doyle, J. (1988). State Space Formulae for all Stabilizing Controllers that satisfy an H-norm Bound and Relations to Risk Sensitivity. *Systems and Control Letters*, 11(3), 168–172.

11. Zames, G. (1981). Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2), 301–320.
12. Bosgra, O. H., Kwakernaak, H., & Meinsma, G. (2005). Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control. 319 p.
13. Glover, K., & McFarlane, D. (1989). Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with Bounded Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control AC*, 34(8), 821–830.
14. Zhou, K., Khargonekar, P. P., Stoustrup, J., & Niemann, H. H. (1995). Robust Performance of Systems with Structured Uncertainties in State-Space. *Automatica*, 31(2), 249–255.
15. Doyle, J. C., & Stein, G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4), 4–16.
16. Balas, G., Chiang, R., Packard, A., & Safonov, M. (2005-2008). Robust Control Toolbox User's Guide. The Math Works Inc.
17. Glover, K., & McFarlane, D. (1989). Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with Bounded Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control AC*, 34(8), 821–830.
18. Сущенко, О. А. (2012). Структурний синтез комбінованої робастної системи управління з урахуванням зовнішніх координатних збурень. *Вісник Національного авіаційного університету*, 4, 31–36.
19. Sushchenko, O. A. (2013). Design of Robust Controllers in Problems of UAV.