

УДК 517.956:616.9

## ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕПІДЕМІЙ

### Костянтин Коріневський

*Національний авіаційний університет, Київ*

*Науковий керівник – Олег Олійник, ст.викладач*

Ключові слова: диференціальні рівняння, математичне моделювання, динамічні процеси, розповсюдження епідемій, Covid-19.

Диференціальні рівняння є потужним інструментом для дослідження різноманітних динамічних процесів у технічних, економічних, соціальних та природних системах. Використання математичного моделювання на основі диференціальних рівнянь дозволяє прогнозувати поведінку системи з динамічними процесами в майбутньому та встановлювати оптимальні стратегії управління ними. Найвідоміші приклади: моделювання руху океанських течій, повітряних мас, турбулентних потоків в атмосфері, поведінки цін на фондовому ринку, розповсюдження епідемій або динаміки чисельності популяцій.

Ми живемо в динамічному середовищі, в якому протікають різні процеси, і чинники, які впливають на них, також часто змінюються. Атака коронавірусу SARS-CoV-2 2019 року сильно змінила весь світ та зробила стрімкі зміни умов проживання людей у ньому. Модифікації цього вірусу до сих пір атакують всі країни світу. Розглянемо застосування диференціальних рівнянь для моделювання розповсюдження епідемій на прикладі Covid-19.

**Приклад 1:** модель **SIR**, яка описує поширення інфекційної хвороби серед населення і передбачає три його стани: інфікований ( $S$  – від англ. susceptible), інфекційний ( $I$  – від англ. infected) та одужавший ( $R$  – від англ. recovered) [1, с. 110-113]. За певних умов ці стани можуть перетворюватися один в інший за схемою (рис. 1) [2, с. 3].



Рис.1 Модель SIR



Рис.2 Модель SEIR

Описується SIR системою диференціальних рівнянь:  $\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I$ ,

$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$ , де  $S$  - кількість здорових людей,  $I$  – кількість інфікованих людей,  $R$  – кількість людей, які одужали або померли,  $N=S+I+R$  – загальна кількість осіб у системі,  $\beta$  – коефіцієнт переносу інфекції,  $\gamma$  – коефіцієнт виліковування. Дозволяє оцінювати кількість інфікованих та визначати ефективність стратегій боротьби з хворобою. Існує багато модифікацій цієї моделі, які враховують різні чинники, які впливають на поширення інфекційної хвороби серед обраного населення. Найвагоміші чинники: імунітет населення, вакцинація та карантинні обмеження і самоізоляція. В Оксфордській SIR моделі для Covid-19 коефіцієнт

переносу інфекції та коефіцієнт виліковування виражаються через нові два параметри:  $\beta = \frac{R_0}{T_{inf}}$ ,  $\gamma = \frac{1}{T_{inf}}$ , де  $R_0$  – коефіцієнт репродукції або середня кількість заражень, що спричиняє одна хвора людина (залежить від поведінки людей та карантинних обмежень),  $T_{inf}$  – активний період або час, який хворий заразний (характеризує реакцію організму людини на вірус і не залежить від карантинних обмежень) [2, с. 3]. Відомий вчений та професор прикладної математики Корнелльського університету Стівен Строгац для дослідження динаміки поширення хвороб розв'язує ці моделі чисельно за допомогою методу Ейлера або методу Рунге-Кутти [3, с. 295-298].

**Приклад 2:** моделі класу **SEIR**, які відрізняються від **SIR** додатковим компартментом **E** – це хворі в інкубаційному періоді, коли вони ще не є заразними. Ці моделі виявились найбільш успішними в прогнозуванні розповсюдження COVID-19 в Китаї 2019 року [3, с. 13]. Стани компартментів можуть перетворюватися один в інший за схемою (рис. 2) [2, с. 4].

Описується **SEIR** системою диференціальних рівнянь:  $\frac{dS}{dt} = -\frac{R_0}{T_{inf}} \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot I$ ,

$\frac{dE}{dt} = \frac{R_0}{T_{inf}} \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot I - \frac{E}{T_{inc}}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{E}{T_{inc}} - \frac{I}{T_{inf}}$ ,  $\frac{dR}{dt} = \frac{I}{T_{inf}}$ , де додатковий параметр  $T_{inc}$  – інкубаційний

період ( $E$  – від англ. exposed). Досить гнучка до наповнення каліброваними для обраного регіону параметрами та чинниками, які є актуальними в певний час саме для нього. Робоча група при Президії НАН України на чолі з Ігорем Бровченко розробила модель **SEIR\_U**, яка була адаптована до ситуації в Україні станом на березень-травень 2020 року [2, с. 8-10].

Моделі **SEIR** ефективно застосовувати для прогнозування розповсюдження епідемії, спричинених новими вірусами або модифікаціями старих вірусів. Можуть використовуватись і для кількісної оцінки ефективності обраних контрзаходів, зменшуючи з моменту їх впровадження коефіцієнти, які характеризують зниження передаточних коефіцієнтів інфекції внаслідок введення обмежень на контакти та обраних контрзаходів.

#### **Список використаних джерел:**

1. Keeling M., Rohani P. Modeling infectious diseases in humans and animals. – Princeton, USA : Princeton University Press, 2018. – 464 p.
2. Бровченко І. Розробка математичної моделі поширення епідемії COVID-19 в Україні // Світогляд. – Рубрика: Наука, Суспільство, Біологія, Медицина. – Національна академія наук України. Головна астрономічна обсерваторія НАН України. – 2020. – Випуск 2 (82). – С. 2-13.
3. Strogatz S. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 2nd ed. – Boulder, USA : Westview Press, 2018. – 528 p.