Ковтонюк Інна Юхимівна,
викладач,
Національний авіаційний університет
Ковтонюк Вадим Сергійович
магістр,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АЛЬТЕРНАТИВНИЙ ПОГЛЯД НА ВИВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ БЕЛЛА

Вступ.

У 1935 році А. Ейнштейн, Б. Подольский та Н. Розен опублікували свій знаменитий парадокс про квантові кореляції [1]. Вони розглядали пару достатньо розділених у просторі заплутаних електронів та двох спостерігачів, Алісу та Боба, які проводять над ними вимірювання. Якщо Аліса вимірюватиме деяку фізичну величину, скажімо імпульс, свого електрона, то це призведе до редукції хвильової функції електрона Боба. Таким чином, Аліса впливає на стан його електрона, за рахунок чого вона може передавати йому інформацію. Якщо ж вимірювання, які виконують Аліса та Боб, будуть розділені просторовоподібним інтервалом, то передача інформації між ними означатиме порушення принципу причинності.

Для пояснення парадокса Ейнштейн, Подольский та Розен стверджували, що квантовомеханічний опис фізичної реальності не є повним. Вони припускали існування деякої прихованої локальної змінної $\omega \in \Omega$, яка визначає стан квантової системи. У межах такого припущення вважалось, що насправді кореляції між двома частинами квантової системи, наприклад між двома заплутаними електронами, виникають за рахунок усереднення за цією локальною змінною. Математично це можна описати наступним чином: позначимо $P(A, B|a, b)$ імовірність отримати значення A в результаті вимірювання над першим електроном за умови налаштування a вимірювального приладу та значення B в результаті вимірювання над другим електроном за умови налаштування b, сукупність розподілів $P(A, B|a, b)$ для різних a та b називають поведінкою квантової системи. Тоді справджується наступна рівність:

$$P(A, B|a, b) = \int_{\Omega} \mathrm{d}\,\omega\; \rho(\omega)\; \Pi(A|a; \omega)\; \Pi(B|b; \omega), \qquad (1)$$

де ρ(ω) — розподіл прихованої локальної змінної, $\Pi(A|a;\omega)$ та $\Pi(B|b;\omega)$ — так звані функції відгуку, які фактично є імовірностями отримати задані значення фізичних величин за умови заданого значення локальної змінної.

Невдовзі у 1964 році Д. С. Белл опублікував свою статтю [2], в якій зазначив, що існування такої прихованої локальної змінної є несумісним із статистичними передбаченнями квантової механіки: існують так звані нелокальні стани, які не допускають опис за допомогою формули (1). Тим не менш, виявилося, що існування квантових кореляцій не суперечить принципу причинності. Було показано, що незважаючи на те, що, здавалося б, після вимірювання над однією частиною квантової системи редукція хвильової функції іншої відбувається із необмеженою швидкістю, передача інформації за рахунок редукції не є можливою. Саме тому квантові кореляції є підкласом так званих несигнальних кореляцій [3].

У сучасній фізиці нелокальні стани знайшли застосування у квантовій інформатиці, квантовій криптографії та квантових комунікаціях.

Формулювання Файна

А. Файн у своїй роботі [4] запропонував інше формулювання теорії прихованої локальної змінної. Він показав, що формулу (1) можна переписати у еквівалентному вигляді. Нехай налаштування вимірювальних приладів можуть приймати такі набори значень: $a = a_1, a_2 \dots a_n$ та $b = b_1, b_2 \dots b_m$. Через $\mathcal{W}(A_1, A_2 \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_m)$ позначимо загальну ймовірність, що за умови налаштування a_1 вимірювальний прилад покаже значення A_1, за умови налаштування a_2 покаже значення A_2 і так далі. Потрібно наголосити, що такий розподіл є нефізичним та має формальне значення, адже різні налаштування можуть відповідати фізичним величинам, оператори яких не комутують між собою, що унеможливлює їх одночасне вимірювання. Якщо ж задана поведінка допускає опис за допомогою прихованої локальної змінної, то для заданих налаштувань a_k, b_l розподіл $P(A, B|a_k, b_l)$ можна записати у вигляді маргінального відносно $\mathcal{W}(A_1, A_2 \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_m)$:

$$P(A, B|a, b) = \sum \mathcal{W}(A_1 \dots A_{k-1}, A, A_{k+1} \dots A_n, B_1 \dots B_{k-1}, B, B_{k+1} \dots B_m), \quad (2)$$

де підсумовування відбувається за всіма змінними $A_1 \dots A_n$ та $B_1 \dots B_m$, окрім A_k та B_l. Корисною є векторна форма формули (2) [5, с. 6]:

$$\vec{P} = \mathcal{M}\vec{\mathcal{W}}, \quad (3)$$

де елементами векторів $\vec{P}$ та $\vec{\mathcal{W}}$ є значення імовірностей $P(A, B|a, b)$ та $\mathcal{W}(A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_m)$ відповідно, а матриця $\mathcal{M}$ відповідає за підсумовування.

Нерівності Белла

Формулювання Файна дає можливість у зручній формі записати критерій нелокальності — так звані нерівності Белла [3, с. 426]. Сформулювати його можна наступним чином: поведінка $\vec{P}$ є нелокальною тоді й тільки тоді, коли існує такий вектор $\vec{\lambda}$, розмірність якого дорівнює розмірності $\vec{P}$, що порушується нерівність

$$\vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\vec{P} \leq \max_i\left(\vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}\right)_i. \tag{4}$$

У правій частині нерівності (4) стоїть найбільший за значенням елемент вектора $\vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}$.

У літературі [3, с. 426] посилаються на теорію лінійного програмування для доведення критерію. Пошук загального розподілу $\vec{\mathcal{W}}$ з формули (3) розглядається як лінійна програма. Тоді мета дуальної лінійної програми полягатиме у пошуку вектора $\vec{\lambda}$, за якого порушуватиметься нерівність (4). Необхідність та достатність нерівностей Белла випливає із теорем про дуальність лінійних програм.

Виведення нерівностей Белла

Ми пропонуємо альтернативний спосіб виведення нерівностей Белла. Замість того, щоб посилатися на теорію лінійних програм, доцільніше розглянути лему Фаркаша [6]. У ній стверджується, що за умови заданих вектора $\vec{P}$ та матриці $\mathcal{M}$ справджується лише одне з двох наступних тверджень:

1. Існує вектор $\vec{\mathcal{W}}$ такий, що виконується рівність (3).
2. Існує вектор $\vec{\lambda}$ такий, що $\vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\vec{P} > 0$ і всі елементи вектора $\vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathcal{M} \leq 0$.

Фактично із другого твердження умови випливає порушення нерівності (4). Щоб довести зворотне, тобто що з порушення нерівності (4) випливає друге твердження з леми Фаркаша, ми пропонуємо покласти

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 - \frac{\max_i\left(\vec{\lambda}_0^{\mathrm{T}}\mathcal{M}\right)_i}{\sum_a \sum_b 1}\vec{e}, \tag{5}$$

де $\vec{\lambda}_0$ — вектор, для якого порушується нерівність Белла, $\vec{e}$ — вектор, усі компоненти якого дорівнюють одиниці, а підсумовування у знаменнику відбувається за всіма налаштуваннями вимірювальних приладів. Тоді при підстановці (5) у (4) отримаємо, що права сторона нерівності дорівнює нулю, а ліва додатна, тобто справджується друге твердження з леми Фаркаша.

Висновок

На нашу думку, наведений спосіб виведення нерівностей Белла є зрозумілішим і кращим для сприйняття, ніж загальноприйнятий, адже не потребує посилання на теорію лінійних програм.

Список використаних джерел

1. Einstein A. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? / A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen // Phys. Rev. 47 — 1935 — 777.
2. Bell J.S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox / Bell J.S. // Physics (Long Island City, N.Y.) 1 — 1964 — 195.
3. Brunner N. Bell nonlocality / N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner // Rev. Mod. Phys. 86 — 2014 — 419.
4. Fine. A Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities / A. Fine // Phys. Rev. Lett 48 — 1982 — 291.
5. Abramsky S. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality / S. Abramsky, A. Brandenburger // New J. Phys. 13 — 2011 — 113036.
6. Farkas G. Theorie der Einfachen Ungleichungen / G. Farkas // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124 — 1902 — c. 1-27.