МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань
для студнтів спеціальності 134
«Авіаційна та ракетно-космічна техніка»

Київ 2018

УДК 517.53 (076.5)
ББК В 161.55 р
В559

Укладачі: *А. І. Бабко, О. М. Гришко, В. В. Кравченко, О. П. Олійник, В. К. Репета*

Рецензент *П. П. Баришовець*

Затверджено на засіданні методично-редакційної ради Національного авіаційного університету (протокол № 3/12 від 12.04.2012 р.).

Вища математика. Теорія функції комплексної змінної :
В559 методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань / уклад. : А. І. Бабко, О. М. Гришко, В. В. Кравченко, О. П. Олійник, В. К. Репета. – К. : НАУ, 2018. – 36 с.

Методичні рекомендації присвячені вивченню теми «Теорія функції комплексної змінної». Подано основний теоретичний матеріал, розв’язано найбільш типові задачі, достатня кількість задач пропонуються як варіанти індивідуальних завдань та для самостійної роботи.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ВСТУП

Методичні рекомендації відповідають робочій навчальній програмі курсу «Вища математика» для технічних спеціальностей за кредитно-модульною системою навчання і розраховані на студентів вищих технічних навчальних закладів.

Методичні рекомендації містять матеріал занять з теми «Теорія функції комплексної змінної».

Зважаючи на різну кількість годин, відведених за планом для вивчення вищої математики студентами різних спеціальностей, для занять може бути відібрана лише частина пропонованого матеріалу. Кожна тема (мікромодуль) містить необхідну теоретичну частину, яка ілюструється прикладами. Розв'язані найбільш типові задачі.

Методичні рекомендації містять велику кількість задач, які пропонується використовувати як варіанти індивідуальних завдань, а також для самостійної роботи студентів.

Список рекомендованої літератури дасть можливість студентам у разі потреби більш детально і ґрунтовно опанувати теоретичний матеріал.

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

1.1. Комплексні числа

○ Вираз $z = x + iy$, де x і y – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, називають комплексним числом. Таку форму запису комплексного числа називають *алгебраїчною*.

Число x називають *дійсною частиною* числа z і позначають $x = \operatorname{Re} z$; y – *уявною частиною* z і позначають $y = \operatorname{Im} z$.

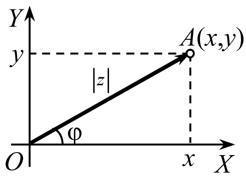

Рис. 1

Геометрично комплексне число $z = x + iy$ зображають у площині xOy точкою з координатами x та y (рис. 1), причому між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини існує взаємно однозначна відповідність.

Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають *комплексною площиною Z*.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зображати вектором, початок якого знаходиться у точці $O(0;\ 0)$, а кінець – у точці $A(x, y)$.

○ *Модулем* комплексного числа $z = x + iy$ називають довжину вектора $\overrightarrow{OA}$, тобто $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Очевидно, що $0 \le |z| < +\infty$.

○ Комплексні числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$, що відрізняються лише знаком уявної частини, називають *спряженими*.

○ *Аргументом* комплексного числа z (позначення) $\operatorname{Arg} z$ називають кут φ, на який треба повернути навколо початку координат додатну частину дійсної осі до збігу з вектором $\overrightarrow{OA}$: $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Аргумент числа $z = 0$ не визначений. Якщо $z \ne 0$, то $\operatorname{Arg} z$ визначається з точністю до сталого доданка $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Серед значень φ аргументу z лише одне належить проміжку $(-\pi;\ \pi]$, його називають *головним значенням* і позначають $\arg z$.

Отже, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, де $-\pi < \arg z \le \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Справджуються формули (див. рис. 1):

$$\operatorname{Re} z = |z|\cos(\arg z) = |z|\cos\varphi ,\ \operatorname{Im} z = |z|\sin(\arg z) = |z|\sin\varphi .$$

Тоді $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрична* форма запису комплексного числа $z = x + iy$.

За формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ маємо $z = |z|e^{i\varphi}$. Таку форму запису комплексного числа z називають *показниковою*.

Формула Муавра:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) .$$

Формула добування кореня n-го степеня з комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ \text{де}\ \ \varphi = \arg z,$$

$\sqrt[n]{|z|}$ – арифметичне значення кореня, $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Приклад 1.1. Обчисліть $\sqrt[3]{-1}$.

▼ Запишемо число $z = -1$ у тригонометричній формі: $x = -1$, $y = 0$, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\arg z = \pi$ ($x < 0, y = 0$).

Матимемо $z = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\pi + i\sin\pi$,

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3},\ \text{де}\ k = 0,1,2 .$$

Звідси отримаємо:

$k = 0$: $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = 1$: $\omega_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

$k = 2$: $\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдені значення виразу $\sqrt[3]{-1}$ зображаються вершинами правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $r = 1$ (рис. 2). ▲

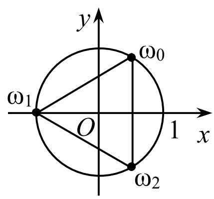

Рис. 2

1.2. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність

Нехай D — множина комплексних чисел.

○Якщо кожному $z \in D$ поставлено у відповідність за певним законом одне або кілька комплексних чисел w, то кажуть, що на множині D визначено *функцію комплексної змінної*, і пишуть $w = f(z)$.

Множину D при цьому називають *областю визначення*, або областю існування функції, z – незалежною змінною (*аргументом*), w – залежною змінною або *функцією*.

○ Якщо кожному $z \in D$ ставиться у відповідність тільки одне число w, то функцію $w = f(z)$ називають *однозначною*, у іншому випадку її називають *багатозначною*.

Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$, $w = f(z)$ – однозначна функція. Тоді кожній точці $z \in D$ з координатами x і y ставиться у відповідність пара дійсних чисел u і v. Інакше кажучи, на D визначені дві дійсні функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ двох дійсних змінних, тобто $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Отже, одне комплексне співвідношення $w = f(z)$ еквівалентне двом дійсним співвідношенням: $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$.

○ *Околом* (δ-околом) точки z_0 називають круг $|z - z_0| < \delta$ з центром у точці z_0 і радіусом δ.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в околі точки z_0.

○ Число $A = a + ib$ називають *скінченною границею* функції $f(z)$ в точці z_0, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться дійсне число $\delta > 0$ таке, що $|f(z) - A| < \varepsilon$ для всіх z, що містяться в δ-околі точки z_0 ($z \neq z_0$).

Позначають: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, або $f(z) \to A$ при $z \to z_0$.

Означення границі функції комплексної змінної за формою збігається з означенням границі функції дійсної змінної: якщо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, то комплексне співвідношення $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ еквівалентне двом дійсним співвідношенням:

$$\lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Означення границі має сенс і при $A = \infty$. Число ∞ називають *невластивим* (нескінченним) комплексним числом, а відповідну точку – *нескінченно віддаленою* точкою комплексної площини. Для числа ∞ поняття дійсної та уявної частин, а також поняття аргументу позбавлені сенсу. Вважають, що $|\infty| = +\infty$.

○ *Околом нескінченно віддаленої точки* називають множину точок z, які задовольняють нерівність $|z| > R$, тобто зовнішню частину кожного круга з центром у початку координат.

○ Комплексну площину, до якої приєднано єдину нескінченно віддалену точку, називають *розширеною комплексною площиною*.

○ Функція, визначена в околі точки z_0, *неперервна* в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Неперервність функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ еквівалентна неперервності двох дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ у точці (x_0, y_0).

○ Функцію, неперервну в кожній точці множини *D*, називають неперервною на цій множині.

Приклад 1.2. Зобразіть множини точок на комплексній площині, що задовольняють умови $|z - 2 - i| < 2$, $\operatorname{Im} z \ge 0$ та $\operatorname{Re} z > 2$.

▼ Нехай $z = x + iy$, $x, y \in R$. Тоді

$|z - 2 - i| = |(x-2) + i(y-1)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$.

Отже, нерівність $|z - 2 - i| < 2$ рівносильна нерівності $(x-2)^2 + (y-1)^2 < 2^2$ – внутрішня частина круга з центром у точці $z = 2 + i$ радіуса 2.

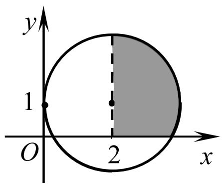

Рис. 3

Врахувавши нерівності $\operatorname{Im} z \ge 0$ та $\operatorname{Re} z > 2$, тобто $y \ge 0$ та $x > 2$, одержимо шукану множину точок (рис. 3). ▲

1.3. Основні елементарні функції

1.3.1. Показникова та тригонометричні функції

○ Функції $e^z, \cos z, \sin z$ визначаються як суми збіжних степеневих рядів:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ці ряди збігаються, причому абсолютно, для довільного комплексного значення z.

Означені функції пов'язані між собою формулою Ейлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Замінюючи у ній z на $-z$, матимемо $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Із цих формул одержимо рівності:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ та } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Зауважимо, що e^z – періодична функція з періодом $2\pi i$.

Функції e^z, $\cos z$, $\sin z$ необмежені в комплексній площині.

Інші тригонометричні функції комплексної змінної z визначаються формулами: $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

1.3.2. Гіперболічні функції

○ *Гіперболічні синус і косинус* визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

З означень функцій $\sin z$, $\cos z$ та $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ випливають такі формули: $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\operatorname{ch} iz = \cos z$.

Функції *тангенс гіперболічний* та *котангенс гіперболічний* визначаються за допомогою рівностей: $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

1.3.3. Логарифмічна функція

○ Функцію, обернену до показникової, називають *логарифмічною*.

Якщо $e^w = z$, де $z \neq 0$, то $w = \operatorname{Ln} z$. Кожне значення функції $w = \operatorname{Ln} z$ називають *логарифмом комплексного числа* z ($z \neq 0$) і обчислюють за формулою: $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Логарифмічна функція є нескінченнозначна. Серед нескінченної множини значень логарифма комплексного числа z виділяють одне значення $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, яке називають *головним значенням логарифма*. Тоді $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i$, $k \in Z$.

1.3.4. Загальні показникова та степенева функції

Загальну показникову функцію визначають рівністю $w = a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$, де a і z – комплексні числа, причому $a \neq 0$. Ця функція визначена для всіх z і є нескінченнозначною.

Загальна степенева функція $w = z^{\alpha}$, де α – сталий показник, в загальному випадку визначена для всіх $z \neq 0$. Якщо α – ірраціональне або уявне число, то $w = z^{\alpha} = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}$.

1.3.5. Обернені тригонометричні і гіперболічні функції

○ Функції, обернені до функцій $z = \sin w$, $z = \cos w$, $z = \mathrm{tg}\, w$, $z = \mathrm{ctg}\, w$, називаються *оберненими тригонометричними функціями* і позначаються відповідно $w = \mathrm{Arcsin}\, z$, $w = \mathrm{Arccos}\, z$, $w = \mathrm{Arctg}\, z$, $w = \mathrm{Arcctg}\, z$.

Можна показати, що

1. $\mathrm{Arcsin}\, z = \dfrac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. **3.** $\mathrm{Arctg}\, z = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$ ($z \neq \pm i$).

2. $\mathrm{Arccos}\, z = \dfrac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$. **4.** $\mathrm{Arcctg}\, z = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{iz - 1}{iz + 1}$ ($z \neq \pm i$).

Обернені гіперболічні функції визначаються формулами:

1. $\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$. **3.** $\mathrm{Arth}\, z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}$, ($z \neq \pm 1$).

2. $\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$. **4.** $\mathrm{Arcth}\, z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{z + 1}{z - 1}$, ($z \neq \pm 1$).

Приклад 1.3. Знайдіть дійсні та уявні частини комплексних чисел:

а) e^{-2+5i}; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 3i\right)$; в) $\mathrm{sh}(1 + 2i)$; г) 1^i; д) $\mathrm{Arcsin}\, i$.

▼ а) За формулою $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ матимемо:

$$e^{-2+5i} = e^{-2}(\cos 5 + i\sin 5) = e^{-2}\cos 5 + ie^{-2}\sin 5,\ \mathrm{Re}(e^{-2+5i}) = e^{-2}\cos 5,$$

$$\mathrm{Im}(e^{-2+5i}) = e^{-2}\sin 5;$$

б) За формулою $\cos(z - t) = \cos z\cos t + \sin z\sin t$ матимемо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3i\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos 3i + \sin\frac{\pi}{4}\sin 3i = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3i + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3i.$$

Враховуючи рівності $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z$, $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$, одержимо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-3i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3+\frac{\sqrt{2}}{2}i\operatorname{sh}3=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3+i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}3 .$$

$$\operatorname{Re}(\cos(\frac{\pi}{4}-3i))=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3,\ \operatorname{Im}(\cos(\frac{\pi}{4}-3i))=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}3 ;$$

в) $\operatorname{sh}(1+2i)=\operatorname{sh}i(2-i)=i\sin(2-i)=i(\sin 2\cos i-\cos 2\sin i)=$

$$=i(\sin 2\operatorname{ch}1-i\cos 2\operatorname{sh}1)=\cos 2\operatorname{sh}1+i\sin 2\operatorname{ch}1 .$$

Звідси $\operatorname{Re}(\operatorname{sh}(1+2i))=\operatorname{sh}1\cos 2$, $\operatorname{Im}(\operatorname{sh}(1+2i))=\operatorname{ch}1\sin 2$;

г) За означенням загальної показникової функції: $1^i=e^{i\operatorname{Ln}1}$. Знайдемо $\operatorname{Ln}1=\ln|1|+i(\arg 1+2\pi k)=0+i(0+2\pi k)=2\pi ki$, $1^i=e^{i\operatorname{Ln}1}=e^{i2\pi ki}=e^{-2\pi k}$, $\operatorname{Re}(1^i)=e^{-2\pi k}$, $\operatorname{Im}(1^i)=0$, де $k\in Z$.

д) $\operatorname{Arcsin}i=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}(i^2+\sqrt{1-i^2})=-i\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2})$.

Ураховуючи, що $\sqrt{2}$ двозначний, матимемо:

1) $\operatorname{Arcsin}i=-i\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2})=-i(\ln(\sqrt{2}-1)+i(0+2\pi k))=2\pi k-i\ln(\sqrt{2}-1)$,

2) $\operatorname{Arcsin}i=-i\operatorname{Ln}(-1-\sqrt{2})=-i(\ln(1+\sqrt{2})+i(\pi+2\pi k))=\pi+2\pi k-i\ln(1+\sqrt{2})$,

$k\in Z$. Остаточно, $\operatorname{Re}(\operatorname{Arcsin}i)=2\pi k$, $\operatorname{Im}(\operatorname{Arcsin}i)=-\ln(\sqrt{2}-1)$ або $\operatorname{Re}(\operatorname{Arcsin}i)=\pi+2\pi k$, $\operatorname{Im}(\operatorname{Arcsin}i)=-\ln(1+\sqrt{2})$, $k\in Z$. ▲

ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Зобразіть область, яка задається нерівностями:

1.1. $|z-1+2i|>1,\ |z+2|\le 3$.

1.2. $|z+2-3i|>3,\ \operatorname{Im}z\ge 2,\ \operatorname{Re}z<-1$.

1.3. $z\bar{z}\le 4,\ \operatorname{Im}z<1,\ \operatorname{Re}z\ge -1$.

1.4. $|z-2|\ge 3,\ |z+3-i|>1$.

1.5. $|z-1+i|<2,\ \operatorname{Im}z>0,\ \operatorname{Re}z\le 1$.

1.6. $z\bar{z}>9,\ \operatorname{Im}z\ge 2,\ \operatorname{Re}z<0$.

1.7. $|z-2+i|<2,\ |z-3i|\ge 3$.

1.8. $|z+2i|<3,\ \operatorname{Im}z>-4,\ \operatorname{Re}z>-2$.

1.9. $z\bar{z}<16,\ \operatorname{Im}z<-1,\ \operatorname{Re}z\ge -3$.

1.10. $|z+4|\le 3,\ |z-i|>2$.

1.11. $|z+3i|<2,\ -4<\operatorname{Im}z<-2,\ \operatorname{Re}z\ge -1$.

1.12. $z\bar{z}\ge 1,\ \operatorname{Im}z>0,\ \operatorname{Re}z<0,5$.

1.13. $|z-3-4i|>2,\ |z-1-i|\le 2$.

1.14. $|z+3+2i|<2,\ \operatorname{Im} z>-3,\ -3<\operatorname{Re} z\le -2$.

1.15. $z\bar{z}<25,\ -1<\operatorname{Im} z<3,\ \operatorname{Re} z\ge 2$.

1.16. $|z+4i|\le 3,\ |z+1+2i|>2$.

1.17. $|z+3|>2,\ \operatorname{Im} z<1,\ \operatorname{Re} z\ge -4$.

1.18. $z\bar{z}\ge 4,\ 0\le \operatorname{Im} z<2,\ -1<\operatorname{Re} z\le 1{,}5$.

1.19. $|z+1-i|\le 3,\ |z+3+3i|<2$.

1.20. $|z-3|\ge 1,\ \operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re} z\ge 2{,}5$.

1.21. $z\bar{z}<9,\ \operatorname{Im} z\le 1,\ \operatorname{Re} z\le -1$.

1.22. $|z-i|<1,\ |z-1|\ge 1$.

1.23. $|z+4i|>2,\ \operatorname{Im} z>-4,\ \operatorname{Re} z<0$.

1.24. $z\bar{z}\ge 16,\ -2<\operatorname{Im} z<1,\ \operatorname{Re} z>3$.

1.25. $|z+2i|<1,\ |z-2|\le 3$.

1.26. $|z-2-i|>1,\ 0<\operatorname{Im} z\le 3,\ 1\le \operatorname{Re} z<3$.

1.27. $1<z\bar{z}<2,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1,\ \operatorname{Re} z>0$.

1.28. $|z-1|<1,\ |z-2+2i|\ge 2$.

1.29. $|z+2+i|>2,\ \operatorname{Im} z\le 0,\ -2\le \operatorname{Re} z<-1$.

1.30. $z\bar{z}\le 2,\ \operatorname{Im} z<1,\ \operatorname{Re} z>-1$.

2. Обчисліть дійсні та уявні частини комплексних чисел:

2.1. 3^{-i}. **2.2.** $\sin\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$. **2.3.** $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)$. **2.4.** 2^{i}.

2.5. $\operatorname{ch}(3-2i)$. **2.6.** $\operatorname{Arccos}(2i)$. **2.7.** $\operatorname{Arch} i$. **2.8.** e^{4+3i}.

2.9. i^{-i}. **2.10.** $\operatorname{Ln}(-1+i)$. **2.11.** $\operatorname{sh}(2+3i)$. **2.12.** i^{7i-4}.

2.13. i^{7i-4}. **2.14.** $\operatorname{sh}(1-2i)$. **2.15.** $\operatorname{Arcsin} 2$. **2.16.** 5^{i+1}.

2.17. $\operatorname{ch}(5-i)$. **2.18.** $\operatorname{tg}\left(i+\frac{\pi}{3}\right)$. **2.19.** $\sin\left(i+\frac{2\pi}{3}\right)$. **2.20.** e^{-2-i}.

2.21. $\operatorname{Arc\,tg}(2i)$. **2.22.** $\operatorname{Arth} 5$. **2.23.** $\operatorname{Ln}(2i-2)$. **2.24.** e^{-2-i}.

2.25. i^{5-6i}. **2.26.** $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}i+1)$. **2.27.** $\operatorname{Arccos}(4i)$. **2.28.** i^{3i-5}.

2.29. $\operatorname{Arcsin}(3i)$. **2.30.** $\operatorname{Ln}(-2-2\sqrt{3}i)$.

2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1. Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші–Рімана

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в області *D*, і нехай точка z належить цій області.

○ *Похідною* $f'(z)$ у точці z називають границю відношення приросту функції $f(z)$ у точці z до приросту аргументу Δz, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

○ Функцію $f(z)$, яка має в точці $z \in D$ скінченну похідну, називають *диференційовною* в цій точці; $f(z)$ диференційовна в області *D*, якщо вона диференційовна в кожній її точці.

Теорема 2.1. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки $z = x + iy$, причому в цій точці дійсні функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні, то для диференційовності функції $w = f(z)$ в точці $z = x + iy$ необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувались умови *Коші–Рімана*: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Якщо виконано всі умови теореми, то похідну диференційовної функції $f(z)$ можна обчислити за однією з формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

○ Однозначну функцію $f(z)$ називають *аналітичною* в точці z, якщо вона диференційовна в деякому околі цієї точки.

○ Функцію $f(z)$ називають *аналітичною* в області *D*, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Точки *Z*-площини, в яких однозначна функція $f(z)$ аналітична, називають *правильними* точками цієї функції, а ті точки, в яких функція не є аналітичною, називають *особливими* точками.

Із властивостей диференційовних функцій випливає, що многочлен $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ – аналітична функція в усій комплексній площині.

Далі, якщо $f(z)$ і $\varphi(z)$ – аналітичні функції в області *D*, то в цій області будуть аналітичними також і функції $cf(z)$, $f(z)\pm\varphi(z)$, $f(z)\cdot\varphi(z)$, $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ ($\varphi(z)\neq 0$).

2.2. Гармонічні функції

○ Диференціальне рівняння $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ називають *рівнянням Лапласа*, а дійсну функцію $\varphi(x,y)$, яка має в області *D* неперервні частинні похідні другого порядку включно і задовольняє це рівняння, називають *гармонічною* функцією в цій області.

Якщо функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналітична в деякій області *D*, то дійсні функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ задовольняють рівняння Лапласа, тобто є *гармонічними*.

○Гармонічні функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ називають *спряженими*, якщо вони задовольняють умови Коші–Рімана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Теорема 2.2. Для того, щоб функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ була аналітичною в області *D*, необхідно і достатньо, щоб її дійсна частина $u(x,y)$ і уявна частина $v(x,y)$ були спряженими гармонічними функціями в цій області.

За даною гармонічною в однозв’язній області *D* функцією $u(x,y)$ можна знайти нескінченну множину аналітичних у цій області функцій із дійсною частиною $u(x,y)$. Уявну частину цих функцій визначають за формулою $v(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}-\dfrac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+$ $+\int\limits_{y_0}^{y}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy+c$, де c – довільна стала.

Аналогічно, якщо гармонічна функція $v(x,y)$ – уявна частина аналітичної функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то її дійсну частину знаходять за формулою: $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx+\int\limits_{y_0}^{y}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy+c$.

Коментар. За точку (x_0,y_0) можна взяти будь-яку фіксовану точку площини, в якій підінтегральні функції існують. Найзручнішою при цьому є точка $(0,0)$.

Приклад 2.1. Знайдіть аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$.

▼ Задана функція $v(x,y)$ гармонічна на всій комплексній площині:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+12xy-3y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(6x^2-6xy-6y^2)=$$

$$=6x+12y-6x-12y=0 .$$

Застосовуючи формулу $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx+\int\limits_{y_0}^{y}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy+c$, у якій покладемо $x_0=0,\ y_0=0$, матимемо:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x 6x^2dx+\int\limits_0^y(-3x^2-12xy+3y^2)dy+c=6\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^x-3x^2\cdot y\big|_0^y-$$

$$-12x\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^y+3\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_0^y+c=2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c.$$

Отже, $f(z)=(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c)+i(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3)$.

З умови $f(0)=0$ знаходимо сталу *c*: $f(0)=(0+c)+i\cdot 0=c$, $c=0$. Остаточно одержимо:

$$f(z)=(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3)+\ i(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3)=(2+i)z^3\ .▲$$

2.3. Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $f(z)$ визначена і неперервна в області *D*, а *L* – кусково-гладка крива, яка належить *D*. Нехай $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

Інтеграл від функції $f(z)$ уздовж кривої L визначається формулою

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy$$

і є сумою двох криволінійних інтегралів другого роду від функцій двох дійсних змінних.

Теорема 2.3 (*інтегральна теорема Коші*). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області *D* і *L* – кусково-гладкий замкнений контур, що цілком міститься в *D*, то $\oint_L f(z)dz = 0$.

Інтегральна теорема Коші справджується і у випадку, коли область *D* є багатозв'язною.

Теорема 2.4. Нехай багатозв'язна область *D* обмежена зовнішнім контуром *L*, орієнтованим проти руху годинникової стрілки, і внутрішніми контурами $L_1, L_2, ..., L_N$, орієнтованими теж проти руху годинникової стрілки, і нехай в $\overline{D}$ задана аналітична функція $f(z)$. Тоді $\oint_L f(z)dz = \sum_{\kappa=1}^{N} \oint_{L_k} f(z)dz$.

Інтеграли від функції $f(z)$, *аналітичної* в однозв'язній області *D*, не залежать від форми шляху інтегрування, а залежать лише від початкової і кінцевої точок. Тому для інтеграла уздовж кривої *L*, що сполучає точки z_0 і z, користуються позначенням $\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$.

Теорема 2.5. Нехай $f(z)$ – функція, неперервна в однозв'язній області *D*, і інтеграл від цієї функції вздовж довільної кусково-гладкої кривої, яка цілком лежить у *D*, не залежить від форми цієї кривої. Тоді функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$, де $z_0, z \in D$, має похідну $F'(z)$, причому $F'(z) = f(z)$.

○ Функцію $F(z)$ називають *первісною* для $f(z)$, якщо $F'(z) = f(z)$ для всіх $z \in D$.

Якщо $F(z)$– первісна для $f(z)$, то $\Phi(z) = F(z) + c$, де c – комплексна стала, також первісна для $f(z)$.

Теорема 2.6 (*формула Ньютона–Лейбніца*). Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області *D* і Φ(z) – будь-яка первісна для $f(z)$, то $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, де $z_1, z_2 \in D$ й інтегрування відбувається вздовж будь-якої кусково-гладкої дуги, що цілком лежить у D і сполучає точки z_1 і z_2.

Інтеграли від елементарних функцій комплексної змінної в області аналітичності обчислюють за допомогою тих самих правил і формул, що й від функцій дійсної змінної.

2.4. Інтегральна формула Коші

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв’язній замкненій області $\overline{D}$, L – межа області D, орієнтована в додатному напрямку (тобто проти руху годинникової стрілки). Тоді для будь-якої внутрішньої точки $z_0 \in D$ (рис. 4) справджується *інтегральна формула Коші*:

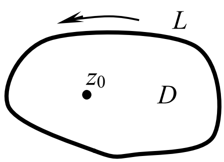

Рис. 4

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Вираз $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ називають *інтегралом Коші*.

Формула Коші також справджується для багатозв’язної області.

Важливість інтегральної формули Коші полягає в тому, що вона виражає значення аналітичної функції $f(z)$ у довільній внутрішній точці області D через її значення на межі цієї області.

Теорема 2.7. Нехай $f(z)$ – аналітична в області D функція і L – кусково-гладкий додатно орієнтовний замкнений контур, який цілком міститься в D разом з усіма своїми внутрішніми точками. Тоді для точок z_0, які лежать всередині L, виконуються рівності:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}, \; n = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

Приклад 2.2. Обчисліть інтеграл $\int\limits_L (2 - i + \overline{z})dz$ вздовж ліній, що сполучають точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$, у напрямку від z_1 до z_2

а) вздовж прямої; б) вздовж параболи $y = x^2$.

▼ Нехай $z = x + iy$, тоді $\overline{z} = x - iy$, а підінтегральна функція набуде вигляду: $f(z)=2-i+x-iy=(2+x)+i(-1-y)$, де $u(x,y)=2+x$, $v(x,y)=-1-y$. Тоді за формулою $\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L udx-vdy+i\int\limits_L vdx+udy$ матимемо:

$$\int\limits_L (2-i+\overline{z})dz=\int\limits_L (2+x)dx-(-1-y)dy+i\int\limits_L (-1-y)dx+(2+x)dy\ .$$

а) Рівняння відрізка, що сполучає точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$ має вигляд: $y=x$, $0\le x\le 1$. Оскільки $dy=dx$, то матимемо

$$\int\limits_L (2-i+\overline{z})dz=\int\limits_0^1((2+x)-(-1-x))dx+i\int\limits_0^1((-1-x)+(2+x))dx=$$

$$=\int\limits_0^1(3+2x)dx+i\int\limits_0^1 dx=3\cdot x\Big|_0^1+2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+i\cdot x\Big|_0^1=3+1+i=4+i\ .$$

б) Маємо: $y=x^2$, $dy=2xdx$, $0\le x\le 1$, тоді

$$\int\limits_L (2-i+\overline{z})dz=\int\limits_0^1((2+x)-(-1-x^2)\cdot 2x)dx+i\int\limits_0^1((-1-x^2)+(2+x)2x)dx=$$

$$=\int\limits_0^1(2+3x+2x^3)dx+i\int\limits_0^1(-1+4x+x^2)dx=2\cdot x\Big|_0^1+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+$$

$$+i(-x\Big|_0^1+4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1)=2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+i(-1+2+\frac{1}{3})=4+\frac{4}{3}i\ .\blacktriangle$$

Приклад 2.3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_i^2 z^2dz$.

▼ Підінтегральна функція $f(z)=z^2$ аналітична всюди, тому застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_i^2 z^2dz=\frac{z^3}{3}\Big|_i^2=\frac{2^3}{3}-\frac{i^3}{3}=\frac{8}{3}+\frac{i}{3}\ .\quad\blacktriangle$$

Приклад 2.4. Користуючись інтегральною формулою Коші, обчисліть інтеграл $\oint\limits_{L_i}\frac{\cos\pi z}{z^2-2z}dz$, якщо:

а) $L_1:|z-2|=1$; б) $L_2:|z-2|=3$.

▼ а) Всередині області, обмеженій колом $|z-2|=1$ (рис. 5) знаходиться одна точка $z=2$, в якій знаменник дорівнює нулю.

Перепишемо інтеграл у вигляді

$$\oint_{L_1} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 2z} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{\cos \pi z}{z(z-2)} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z}}{z-2} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{f(z)}{z-2} dz,$$

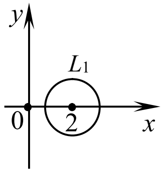

Рис. 5

де $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z}$ – аналітична в даній області функція. За інтегральною формулою Коші ($z_0 = 2$) одержимо

$$\int_{|z-2|=1} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 2z} dz = 2\pi i f(z)\Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{\cos \pi z}{z}\Bigg|_{z=2} = 2\pi i \frac{\cos 2\pi}{2} = \pi i;$$

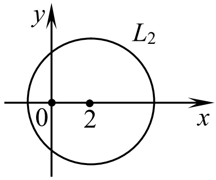

Рис. 6

б) області, обмеженій колом $|z-2| = 3$, належать обидві точки $z = 0$, $z = 2$ (рис. 6), в яких знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю. Розкладемо дріб $\frac{1}{z^2 - 2z}$ на найпростіші дроби: $\frac{1}{z^2 - 2z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$.

Отримаємо інтеграл

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 2z} dz = \frac{1}{2} \int_{|z-2|=3} \frac{\cos \pi z}{z-2} dz - \frac{1}{2} \int_{|z-2|=3} \frac{\cos \pi z}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i \cos 2\pi - \frac{1}{2} 2\pi i \cos 0 = \pi i - \pi i = 0. \blacktriangle$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3. Відновіть аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною частиною $u(x, y)$ або уявною $v(x, y)$.

3.1. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$. **3.2.** $v(x, y) = y^2 - x^2 - y$.

3.3. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$. **3.4.** $v(x, y) = -y^3 + 3yx^2 - 3$.

3.5. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$. **3.6.** $v(x, y) = y^2 - x^2 - xy$.

3.7. $u(x, y) = y^3 + 6y^2x - 3yx^2 - 2x^3$. **3.8.** $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy$.

3.9. $u(x, y) = -y^3 + 3yx^2 + 2xy$. **3.10.** $v(x, y) = y^3 - 3yx^2 - y$.

3.11. $u(x, y) = y - 2xy$. **3.12.** $v(x, y) = -x + 2xy$.

3.13. $u(x, y) = y^2 - x^2 + 2y - 5x$. **3.14.** $v(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 8y$.

3.15. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2$. **3.16.** $v(x, y) = 2xy + y$.

3.17. $u(x, y) = 2xy + 2x$. **3.18.** $v(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2xy$.

3.19. $u(x,y)=3y^2-3x^2-2xy$.

3.20. $v(x,y)=6xy-x^2+y^2$.

3.21. $u(x,y)=x^2-y^2-4xy$

3.22. $v(x,y)=x^2-y^2+3x^2y-y^3$

3.23. $u(x,y)=2y^2-2x^2+3xy^2-x^3$.

3.24. $v(x,y)=7xy-5x^2+5y^2$.

3.25. $u(x,y)=5xy+3x^2-3y^2$.

3.26. $v(x,y)=x^3-3xy^2-4x$.

3.27. $u(x,y)=y^3-3yx^2-4y$.

3.28. $v(x,y)=x^2-y^2-x$.

3.29. $u(x,y)=-2xy-2y$.

3.30. $v(x,y)=x^3-3xy^2$.

4. Обчисліть інтеграл від функції комплексної змінної вздовж даної кривої.

4.1. а) $\int\limits_{AB}\overline{z}^2dz$; $AB:\left\{y=x^2; z_A=0; z_B=-1+i\right\}$; б) $\int\limits_{-1}^{2i}(z+1)e^z dz$.

4.2. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Re}z^2dz$; $AB:\left\{y=-x; z_A=0; z_B=2-2i\right\}$; б) $\int\limits_{3i}^{2+i}(z-2)\sin z dz$.

4.3. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Im}\overline{z}^2dz$; $AB:\left\{y=-2x^2; z_A=0; z_B=1-2i\right\}$; б) $\int\limits_{-i}^{-1}3z\cos z dz$.

4.4. а) $\int\limits_{AB}(\overline{z}^2-3z)dz$; $AB:\left\{y=2x; z_A=0; z_B=1+2i\right\}$; б) $\int\limits_{0}^{3-i}(z-1)3^z dz$.

4.5. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Im}z^3dz$; $AB:\left\{y=3x^2; z_A=0; z_B=1+3i\right\}$; б) $\int\limits_{2}^{i}4z\sin z dz$.

4.6. а) $\int\limits_{AB}(\operatorname{Re}z^2+\overline{z})dz$; $AB:\left\{y=\dfrac{x}{2}; z_A=0; z_B=2+i\right\}$; б) $\int\limits_{3i}^{2+i}2z\cos z dz$.

4.7. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Re}\overline{z}^2dz$; $AB:\left\{y=-x^2; z_A=0; z_B=1-i\right\}$; б) $\int\limits_{i}^{2+2i}(3z-1)e^{2z}dz$.

4.8. а) $\int\limits_{AB}(z\overline{z}+z^2)dz$; $AB:\left\{y=-x+1; z_A=i; z_B=1\right\}$; б) $\int\limits_{0}^{-1-2i}5z\sin 2z dz$.

4.9. а) $\int\limits_{AB}(\operatorname{Im}\overline{z}^2-z)dz$; $AB:\left\{y=x^2; z_A=0; z_B=1+i\right\}$; б) $\int\limits_{i}^{2+2i}z4^{3z}dz$.

4.10. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Re}\dfrac{\overline{z}}{z}dz$; $AB:\left\{y=x; z_A=0; z_B=3+3i\right\}$; б) $\int\limits_{i}^{1}(3-2z)\cos z dz$.

4.11. а) $\int\limits_{AB}(i\overline{z}^2+4)dz$; $AB:\left\{y=x^2; z_A=0; z_B=1+i\right\}$; б) $\int\limits_{-2}^{1+i}(z-4)e^{-z}dz$.

4.12. а) $\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$; $AB:\{y=-x+1; z_A=1; z_B=i\}$; б) $\int\limits_{5+i}^{0}(3-z)\sin z dz$.

4.13. а) $\int\limits_{AB}(z^2-\overline{z}+2i)dz$; $AB:\left\{y=-x^2; z_A=0; z_B=1-i\right\}$; б) $\int\limits_{-3i}^{0}3z5^z dz$.

4.14. а) $\int\limits_{AB}(iz^3+\mathrm{Re}\,z)dz$; $AB:\{y=x; z_A=0; z_B=1+i\}$; б) $\int\limits_{5+i}^{0}5z\cos 3z dz$.

4.15. а) $\int\limits_{AB}(\overline{z}^2+2z\overline{z})dz$; $AB:\left\{y=x^2; z_A=0; z_B=2+4i\right\}$; б) $\int\limits_{i}^{2-i}2z\sin z dz$.

4.16. а) $\int\limits_{AB}\mathrm{Im}\dfrac{z}{\overline{z}}dz$; $AB:\{y=-x;\ z_A=1-i; z_B=0\}$; б) $\int\limits_{1}^{3-i}(4z-3)e^{3z}dz$.

4.17. а) $\int\limits_{AB}(z^2-iz\overline{z})dz$; $AB:\left\{y=-x^2; z_A=0; z_B=-2-4i\right\}$; б) $\int\limits_{0}^{2i}z6^{-z}dz$.

4.18. а) $\int\limits_{AB}\mathrm{Re}(z\overline{z})dz$; $AB:\left\{y=-\dfrac{x}{2}; z_A=0; z_B=2-i\right\}$; б) $\int\limits_{5i}^{3}z\cos 6z dz$.

4.19. а) $\int\limits_{AB}z\,\mathrm{Re}\,z dz$; $AB:\left\{y=3x^2; z_A=0; z_B=1+3i\right\}$; б) $\int\limits_{-6}^{-i}7z\sin 4z dz$.

4.20. а) $\int\limits_{AB}z^2\overline{z}dz$; $AB:\{y=-x; z_A=0; z_B=-1+i\}$; б) $\int\limits_{1-i}^{2}(z-4)e^{-2z}dz$.

4.21. а) $\int\limits_{AB}(\overline{z}^2-z\overline{z})dz$; $AB:\left\{y=x^2; z_A=0; z_B=-1+i\right\}$; б) $\int\limits_{-6}^{-i}6z2^{-z}dz$.

4.22. а) $\int\limits_{AB}\mathrm{Re}\dfrac{z}{\overline{z}}dz$; $AB:\left\{y=\dfrac{x}{2}; z_A=0; z_B=-2-i\right\}$; б) $\int\limits_{0}^{3+i}z\cos 7z dz$.

4.23. а) $\int\limits_{AB}\mathrm{Im}\,z^2dz$; $AB:\left\{y=-2x^2; z_A=0; z_B=1-2i\right\}$; б) $\int\limits_{-6}^{-i}5z\sin 2z dz$.

4.24. а) $\int\limits_{AB}(\overline{z}^2z-1)dz$; $AB:\{y=x;\ z_A=-3-3i; z_B=0\}$; б) $\int\limits_{-1}^{2i}(z+9)e^z dz$.

4.25. а) $\int\limits_{AB}z\,\mathrm{Re}\,\overline{z}^2dz$; $AB:\left\{y=-x^2; z_A=0; z_B=1-i\right\}$; б) $\int\limits_{2i}^{4}(5+z)3^{5z}dz$.

4.26. а) $\int\limits_{AB}(iz-\overline{z}^3)dz$; $AB:\{y=2x;\ z_A=1+2i; z_B=0\}$; б) $\int\limits_{4}^{-i}2z\cos 3z dz$.

4.27. а) $\int\limits_{AB} (\overline{z} - iz^2)dz$; $AB: \left\{ y = x^2; z_A = 0; z_B = -2 + 4i \right\}$; б) $\int\limits_{2i}^{4} 4ze^{-2z} dz$.

4.28. а) $\int\limits_{AB} (z \operatorname{Re} \overline{z} - i)dz$; $AB: \left\{ y = -x;\ z_A = -1 + i; z_B = 0 \right\}$; б) $\int\limits_{0}^{4i} 7z5^{4z} dz$.

4.29. а) $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} \overline{z} dz$; $AB: \left\{ y = 2x^2; z_A = 0; z_B = -1 + 2i \right\}$; б) $\int\limits_{-2i}^{0} z \sin 4z dz$.

4.30. а) $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 \operatorname{Re} z dz$; $AB: \left\{ y = \dfrac{x}{2};\ z_A = 2 + i; z_B = 0 \right\}$; б) $\int\limits_{i}^{2} 9z \sin 8dz$.

5. Обчисліть інтеграли вздовж вказаного контуру L, використовуючи інтегральну формулу Коші або теорему Коші для багатозв'язної області (обхід проти руху годинникової стрілки).

5.1. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{dz}{z(z^2+1)}$; а) $L_1: |z| = 0{,}5$; б) $L_2: |z - i| = 1{,}5$.

5.2. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{3 - z}{z(z^2 - 4)} dz$; а) $L_1: |z| = 1$; б) $L_2: |z - 1| = 2$.

5.3. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{2 + \cos z}{z(z - 2i)} dz$; а) $L_1: |z + 1| = 2$; б) $L_2: |z - i| = 1{,}5$.

5.4. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{\sin(0{,}5\pi z)}{z^2 - 1} dz$; а) $L_1: |z - 1| = 1{,}5$; б) $L_2: |z| = 2$.

5.5. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{z - 1}{z(z^2 + 4)} dz$; а) $L_1: |z - 2i| = 1$; б) $L_2: |z + i| = 1{,}5$.

5.6. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{tgz + 2}{4z^2 + \pi z} dz$; а) $L_1: |z + 2| = 1{,}5$; б) $L_2: |z - 1| = 2$.

5.7. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{\cos z}{z^2 + 2z - 3} dz$; а) $L_1: |z| = 1{,}5$; б) $L_2: |z + 1| = 2{,}5$.

5.8. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{e^z + 1}{z^2 - 5z} dz$; а) $L_1: |z - i| = 2$; б) $L_2: |z - 2{,}5| = 3$.

5.9. $\oint\limits_{L_i} \dfrac{z^2 + 2}{4z^2 - \pi z} dz$; а) $L_1: |z - 1| = 0{,}5$; б) $L_2: |z + 1| = 2$.

5.10. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin(0{,}25\pi z)}{z^2-1}dz$; а) $L_1 : |z+2| = 2$; б) $L_2 : |z| = 1{,}5$.

5.11. $\oint\limits_{L_i} \frac{\cos z - 3}{z^2 - \pi z}dz$; а) $L_1 : |z-3| = 1$; б) $L_2 : |z-2| = 2{,}5$.

5.12. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin z}{z^2+9}dz$; а) $L_1 : |z-2i| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z| = 3{,}5$.

5.13. $\oint\limits_{L_i} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(z^2+10)}dz$; а) $L_1 : |z| = 2$; б) $L_2 : |z+2i| = 2{,}5$.

5.14. $\oint\limits_{L_i} \frac{dz}{z^3-4z}$; а) $L_1 : |z-i| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z+1| = 1{,}5$.

5.15. $\oint\limits_{L_i} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2-7z+10}dz$; а) $L_1 : |z-1{,}5| = 1$; б) $L_2 : |z-3{,}5| = 2$.

5.16. $\oint\limits_{L_i} \frac{e^z+3}{z(z-1)}dz$; а) $L_1 : |z| = 0{,}5$; б) $L_2 : |z-1| = 1{,}5$.

5.17. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin 2z+1}{z^2-2z-3}dz$; а) $L_1 : |z+2| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z-1| = 2{,}5$.

5.18. $\oint\limits_{L_i} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}dz$; а) $L_1 : |z+2i| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z-1-i| = 1{,}5$.

5.19. $\oint\limits_{L_i} \frac{\cos^2 z+3}{z^2-\pi^2}dz$; а) $L_1 : |z+3| = 1$; б) $L_2 : |z| = 3{,}5$.

5.20. $\oint\limits_{L_i} \frac{z+4}{z^2-2z}dz$; а) $L_1 : |z+1| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z-1| = 1{,}5$.

5.21. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin z+1}{z^2+4z}dz$; а) $L_1 : |z| = 1$; б) $L_2 : |z+2| = 2{,}5$.

5.22. $\oint\limits_{L_i} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(z^2-9)}dz$; а) $L_1 : |z-2| = 1{,}5$; б) $L_2 : |z+1{,}5| = 2$.

5.23. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin^2 z+1}{z^2+2\pi z}dz$; а) $L_1 : |z+1| = 2$; б) $L_2 : |z+3| = 4$.

5.24. $\oint\limits_{L_i} \frac{\cos(\pi z)}{z^2+2z-15}dz$; а) $L_1: |z-2| = 1,5$; б) $L_2: |z+1| = 4,5$.

5.25. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin^2 z-3}{z^2-2\pi z}dz$; а) $L_1: |z| = 1$; б) $L_2: |z-3,5| = 4$.

5.26. $\oint\limits_{L_i} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+3z}dz$; а) $L_1: |z+1| = 1,5$; б) $L_2: |z+1,5| = 2$.

5.27. $\oint\limits_{L_i} \frac{sh(\pi(z+i)/2)}{z^2-2z}dz$; а) $L_1: |z| = 1$; б) $L_2: |z-2| = 2,5$.

5.28. $\oint\limits_{L_i} \frac{2z-1}{z^2-5z+6}dz$; а) $L_1: |z-1| = 1,5$; б) $L_2: |z-2,5| = 1$.

5.29. $\oint\limits_{L_i} \frac{\sin(z-1)}{z^2+6z}dz$; а) $L_1: |z| = 1,5$; б) $L_2: |z+3| = 3,5$.

5.30. $\oint\limits_{L_i} \frac{5z+2}{z^2-6z+5}dz$; а) $L_1: |z-2| = 1,5$; б) $L_2: |z-3| = 2,5$.

3. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД ЛОРАНА. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ. ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Ряд Тейлора

Теорема 3.1. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області *D*, z_0 – довільна фіксована точка цієї області і *R* – відстань від точки z_0 до найближчої межової точки області *D*. Тоді функцію в крузі $|z-z_0| < R$ єдиним способом можна розкласти у степеневий ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n = 0,1,2,\dots .$$

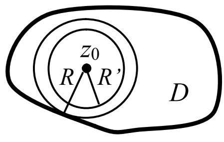

Рис. 7

Тут L – довільне коло з центром у точці z_0 радіуса R': $0 < R' < R$, орієнтоване проти руху годинникової стрілки.

○ Степеневий ряд вигляду $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ називають *рядом Тейлора* функції $f(z)$ в околі точки z_0.

Розвинення деяких елементарних функцій у ряд Тейлора за степенями z (ряд Маклорена) мають вигляд:

1. $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$.

2. $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$.

3. $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...$.

4. $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n z^n+...$ $(|z|<1)$.

5. $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+...+z^n+...$ $(|z|<1)$.

Коментар.

1. Підкреслимо, що радіус збіжності степеневого ряду дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$.

2. Оскільки степеневий ряд можна почленно диференціювати, то його сума $f(z)$ має похідні всіх порядків, які є також аналітичними функціями. Тому під аналітичною функцією розуміють інколи таку, яка є нескінченно диференційовною.

3.2. Ряд Лорана

Теорема 3.2. Кожну функцію $f(z)$, аналітичну в круговому кільці $0\le r<|z-z_0|<R<\infty$, можна подати в цьому кільці збіжним рядом $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, де $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $n=0,\pm1,...$, де L – будь-яке коло $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$, орієнтоване проти руху годинникової стрілки.

Такий ряд називають *рядом Лорана* для функції $f(z)$ у круговому кільці $r<|z-z_0|<R$.

Ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

складається з двох частин.

Перша частина, тобто ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, називається *правильною частиною* ряду Лорана; цей ряд містить лише додатні степені $z-z_0$ і збігається у крузі $|z-z_0|<R$ до деякої аналітичної в цьому крузі функції $f_1(z): f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$.

Другу частину ряду Лорана, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$, називають *головною частиною* ряду Лорана. Цей ряд містить лише від'ємні степені $z-z_0$ і визначає деяку функцію $f_2(z)$, аналітичну поза кругом з центром у точці z_0 і радіусом r: $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$.

Отже, функція $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ аналітична всередині кільця $r<|z-z_0|<R$. Залежно від значень радіусів r та R це кільце може виродитись:

1) у круг з виколотим центром: $r<|z-z_0|<R$ $(r=0,\ 0<R<\infty)$;

2) у зовнішність круга: $|z-z_0|>r$ $(0<r<R=\infty)$;

3) в усю комплексну площину без точки $z=z_0$ $(r=0,\ R=\infty)$.

Приклад 3.1. Функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$ розкладіть в ряди Тейлора або Лорана за степенями z в областях:

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

▼ За умовою $z_0=0$. Функція $f(z)$ має дві особливі точки: $z=1$, $z=-2$, які визначають три кругових «кільця» (рис. 8).

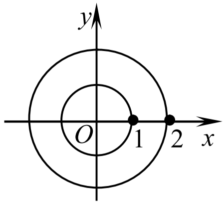

Рис. 8

а) $|z|<1$. У цьому крузі функція аналітична, отже, за теоремою 2, розкладається в ряд Тейлора. Розкладаємо функцію $f(z)$ на суму простих дробів $f(z)=\frac{1}{3}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{z+2}$. Для обох доданків використаємо розклади 5 та 4 відповідно:

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+...+z^n+...)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\,,\ |z|<1\,;$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-...+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+...)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\,,\ |z|<2\,.$$

Отже, у крузі $|z|<1$ ряд Тейлора заданої функції має вигляд:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n\ .$$

б) $1<|z|<2$. У цьому кільці функція аналітична, отже, за теоремою 2 розкладається в ряд Лорана. Маємо

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\,,\ |z|<2\,;$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...+\frac{1}{z^n}+...)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\,,\ |z|>1\,.$$

Отже, в кільці $1<|z|<2$ розклад функції в ряд Лорана такий:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\ .$$

в) $|z|>2$. У цьому випадку: $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\,,\ |z|>1\,;$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-...+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+...)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\,,|z|>2\,.$$

Отже, розвинення $f(z)$ в кільці $|z|>2$ має вигляд:

$$f(z)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}. ▼$$

3.3. Ізольовані особливі точки та їх класифікація

○ Особливу точку $z=z_0$ функції $f(z)$ називають *ізольованою*, якщо $f(z)$ є однозначною і аналітичною в кожній точці кругового кільця $0<|z-z_0|<\delta$, крім самої точки z_0.

○ Ізольовану особливу точку називають *усувною*, якщо ряд Лорана функції $f(z)$ не містить від'ємних степенів $(z-z_0)$, тобто $f(z)=f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ – *правильна* частина ряду Лорана.

○ Ізольована особлива точка z_0 називається *полюсом* порядку $m\geq 1$, якщо ряд Лорана функції $f(z)$, крім правильної частини, містить лише скінченне число від'ємних степенів $(z-z_0)$, тобто $f(z)=f_1(z)+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+...+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$ (якщо $m=1$, то z_0– *простий* полюс, якщо $m>1$, то z_0– полюс кратності m).

○ Ізольовану особливу точку z_0 називають *істотно особливою* точкою функції $f(z)$, якщо ряд Лорана цієї функції містить нескінченну кількість від'ємних степенів $(z-z_0)$, тобто

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+a_0+a_1(z-z_0)+...+a_k(z-z_0)^k.$$

Теорема 3.3. Нехай z_0 – ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції $f(z)$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$, то z_0 – усувна особлива точка. Якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 – полюс. Якщо в точці z_0 не існує ні скінченна, ні нескінченна границя функції $f(z)$, то z_0 – істотно особлива точка функції $f(z)$.

3.4. Лишок функції. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

○ *Лишком* аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z=z_0$ (позначають символом $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$) називають інтеграл

$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, де L – орієнтований проти руху годинникової стрілки контур у крузі $|z-z_0|<R$, що охоплює точку z_0.

Отже, $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz.$

Теорема 3.4. Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$. Тоді лишок $f(z)$ у точці z_0 дорівнює коефіцієнту a_{-1} при $\frac{1}{z-z_0}$ в розвиненні функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки z_0:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=a_{-1}.$$

Теорема 3.5. Нехай z_0 – простий полюс функції $f(z)$. Тоді

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0)).$$

Теорема 3.6. Нехай $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$ (з цих умов випливає, що z_0 – простий полюс функції $f(z)$). Тоді $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Теорема 3.7. Нехай z_0 – полюс порядку m, тоді

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.8. (*основна теорема про лишки*). Нехай функція $f(z)$ аналітична в області *D*, крім скінченного числа особливих точок $z_1, z_2, ..., z_N$, і аналітична на межі L області *D*, орієнтованій додатно. Тоді $\oint\limits_L f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{\kappa=1}^{N}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z).$

Приклад 3.2. Обчисліть інтеграл $\oint\limits_{|z|=4}\frac{dz}{(z-2)^2(z-3)}$.

▼ Точки $z_1=2$, $z_2=3$ – ізольовані особливі точки підінтегральної функції $\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$, причому обидві точки належать кругу $|z|<4$. Тому за теоремою 3.8:

$\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{dz}{(z-2)^2(z-3)} = 2\pi i(\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=2} f(z) + \mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=3} f(z))$. Нехай $\varphi(z)=1$, $\psi(z)=(z-2)^2(z-3)$.

а) Оскільки $\varphi(z_1)=\varphi(2)=1\neq 0$ і $\psi(z_1)=\psi'(z_1)=0$, а $\psi''(2)=-2\neq 0$, то точка $z_1=2$ – полюс 2-го порядку функції $f(z)$. За формулою (3.1) при m = 2, $z_0=z_1=2$ матимемо:

$$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=2}\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}=\lim_{z\to 2}\left((z-2)^2\frac{1}{(z-2)^2(z-3)}\right)'=-\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-3)^2}=-\frac{1}{(-1)^2}=-1.$$

б) Оскільки $\varphi(z_2)=\varphi(3)=1\neq 0$ і $\psi(z_2)=\psi(3)=0$, а $\psi'(3)=1\neq 0$, то точка $z_2=3$ – полюс *першого* порядку функції $f(z)$. За формулою $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ при $z_0=z_2=3$ одержимо: $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=3}\dfrac{1}{(z-2)^2(z-3)}=$

$$=\left.\frac{1}{2(z-2)(z-3)+(z-2)^2}\right|_{z=3}=\frac{1}{1^2}=1.$$

Отже, $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{dz}{(z-2)^2(z-3)}=2\pi i(-1+1)=0$. ▼

ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

6. Функцію $f(z)$ розкладіть в ряди Тейлора або Лорана за степенями z в областях:

а) $|z|<a$; б) $a<|z|<b$; в) $|z|>b$.

6.1. $\dfrac{3z-1}{z^2-z-2}, a=1, b=2.$ **6.2.** $\dfrac{2z}{z^2+2z-3}$, $a=1, b=3.$

6.3. $\dfrac{3}{z^2-2z-3}$, $a=1, b=3.$ **6.4.** $\dfrac{z+1}{z^2+z-6}$, $a=2, b=3.$

6.5. $\dfrac{-1}{z^2-z-6}$, $a=2, b=3.$ **6.6.** $\dfrac{3-2z}{z^2+3z-4}$, $a=1,\ b=4.$

6.7. $\dfrac{3}{z^2-5z+4}$, $a=1,\ b=4.$ **6.8.** $\dfrac{1-z}{2z^2+3z+1}$, $a=0,5, b=1.$

6.9. $\dfrac{z+3}{z^2+6z+8}$, $a=2, b=4.$ **6.10.** $\dfrac{2+3z}{z^2+2z-8}$, $a=2,\ b=4.$

6.11. $\dfrac{z+2}{z^2+5z-6}$, $a=1, b=6.$ **6.12.** $\dfrac{-3}{2z^2+7z+3}$, $a=0,5, b=3.$

6.13. $\dfrac{4z-1}{z^2+7z+12}$, $a=3$, $b=4$.

6.14. $\dfrac{5}{z^2+z-12}$, $a=3$, $b=4$.

6.15. $\dfrac{3z+4}{z^2+5z+6}$, $a=2$, $b=3$.

6.16. $\dfrac{-2}{z^2+6z+5}$, $a=1$, $b=5$.

6.17. $\dfrac{-4}{2z^2-9z+4}$, $a=0,5$, $b=4$.

6.18. $\dfrac{1-3z}{z^2-3z-10}$, $a=2$, $b=5$.

6.19. $\dfrac{3z}{z^2-7z-10}$, $a=2$, $b=5$.

6.20. $\dfrac{2+5z}{2z^2-7z-4}$, $a=0,5$, $b=4$.

6.21. $\dfrac{1+z}{z^2+8z+15}$, $a=3$, $b=5$.

6.22. $\dfrac{-2z}{z^2-2z-15}$, $a=3$, $b=5$.

6.23. $f(z)=\dfrac{4z-3}{z^2+z-20}$, $a=4$, $b=5$.

6.24. $\dfrac{3+z}{z^2-9z+20}$, $a=4$, $b=5$.

6.25. $f(z)=\dfrac{4z}{2z^2+11z+5}$, $a=0,5$, $b=5$.

6.26. $\dfrac{z-4}{2z^2+9z-5}$, $a=0,5$, $b=5$.

6.27. $f(z)=\dfrac{z+6}{z^2-5z-6}$, $a=1$, $b=6$.

6.28. $\dfrac{3}{z^2-8z+12}$, $a=2$, $b=6$.

6.29. $f(z)=\dfrac{-z-4}{z^2+3z-18}$, $a=3$, $b=6$.

6.30. $\dfrac{6z}{z^2-4z-12}$, $a=2$, $b=6$.

7. Знайдіть лишки функцій в особливих точках.

7.1. $\dfrac{1}{(z+2)^2(z^2-z-2)}$.

7.2. $\dfrac{3-2z}{(z^2-2z-3)(z-1)^2}$.

7.3. $\dfrac{z+4}{(z^2+2z-3)(z-2)^2}$.

7.4. $\dfrac{3z}{(z-4)^2(z^2-z-6)}$.

7.5. $\dfrac{-3}{(z^2-4)(z+1)^2}$.

7.6. $\dfrac{z-2}{(z+3)^2(z^2+3z-4)}$.

7.7. $\dfrac{4z-1}{(z^2+6z+8)(z-3)^2}$.

7.8. $\dfrac{z+i}{(z^2+4)(z+4)^2}$.

7.9. $\dfrac{2-3z}{(z-i)^2(z^2+2z-8)}$.

7.10. $\dfrac{z-3}{(z^2+7z+12)(z+i)^2}$.

7.11. $\dfrac{2z}{(z^2-9)(z-2i)^2}$.

7.12. $\dfrac{z+4}{(z^2+9)(z+5)^2}$.

7.13. $\dfrac{4-2z}{(z-5)^2(z^2+z-12)}$.

7.14. $\dfrac{2z+1}{(z+2i)^2(z^2+5z+6)}$.

7.15. $\dfrac{-3z}{(z-3i)^2(z^2+6z+5)}$.   **7.16.** $\dfrac{5-z}{(z-2)^2(z^2+16)}$.

7.17. $\dfrac{2z-1}{(z+3i)^2(z^2-3z-10)}$.   **7.18.** $\dfrac{6}{(z+6)^2(z^2-7z+10)}$.

7.19. $\dfrac{4+3z}{(z-6)^2(z^2+8z+15)}$.   **7.20.** $\dfrac{1-z}{(z-4i)^2(z^2-2z-15)}$.

7.21. $\dfrac{z}{(z+3)^2(z^2+z-20)}$.   **7.22.** $\dfrac{2z-5}{(z-i)^2(z^2-16)}$.

7.23. $\dfrac{2}{(z+4)^2(z^2+1)}$.   **7.24.** $\dfrac{7+z}{(z+2i)^2(z^2-9z+20)}$.

7.25. $\dfrac{4z}{(z-5)^2(z^2+4z+3)}$.   **7.26.** $\dfrac{2+3z}{(z-4i)^2(z^2+5z+4)}$.

7.27. $\dfrac{3z+7}{(z+7)^2(z^2+4z-5)}$.   **7.28.** $\dfrac{8}{(z+2)^2(z^2+25)}$.

7.29. $\dfrac{z+8}{(z-5i)^2(z^2-25)}$.   **7.30.** $\dfrac{-9}{(z+i)^2(z^2+6z-7)}$.

8. Вважаючи, що обхід замкнених контурів відбувається в додатному напрямку, обчисліть за допомогою лишків інтеграли:

8.1. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{3z^2-2z+2}{z^3}dz.$ **8.2.** $\oint\limits_{|z|=0,5} \dfrac{\cos z^3+1}{z^2}dz.$ **8.3.** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{2-z^2+3z}{z^3}dz.$

8.4. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{5z^3+z^2-4}{z^4}dz.$ **8.5.** $\oint\limits_{|z|=2,5} \dfrac{2+\sin z^2}{z^3}dz.$ **8.6.** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z+2z}{z^2}dz.$

8.7. $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z-\sin z-3}{z^3}dz.$ **8.8.** $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{2\cos z-1}{z^4}dz.$ **8.9.** $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{3z^3-e^{iz}}{z^4}dz.$

8.10. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^4+2z^2-2}{z^5}dz.$ **8.11.** $\oint\limits_{|z|=3,5} \dfrac{e^{iz}+1}{z^2}dz.$ **8.12.** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin iz+3}{z^3}dz.$

8.13. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{4z^2+z^3-5}{z^4}dz.$ **8.14.** $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{e^z-\sin z}{z^3}dz.$ **8.15.** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{2z}+3z}{z^2}dz.$

8.16. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 - 2 + 2z^3}{z^4} dz.$ **8.17.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz + 2z}{z^5} dz.$ **8.18.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z^2 + 1}{z^3} dz.$

8.19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{3 - \cos iz}{z^3} dz.$ **8.20.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{3z + 2}{z^2} dz.$ **8.21.** $\oint\limits_{|z|=4,5} \frac{z^2 + \sin iz - 2}{z^4} dz.$

8.22. $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{6 + z - z^4}{z^5} dz.$ **8.23.** $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{3 + \cos z^2}{z^2} dz.$ **8.24.** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{3 + 5z + 2z^2}{z^3} dz.$

8.25. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{1 - z^4 + 2z^5}{z^6} dz.$ **8.26.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z + 1}{z^3} dz.$ **8.27.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{4 + z^2 - z^5}{z^6} dz.$

8.28. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{2\cos z - 1}{z^4} dz.$ **8.29.** $\oint\limits_{|z|=3,5} \frac{4z + \sin z - 1}{z^3} dz.$ **8.30.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{3z - 2}{z^2} dz.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Денисюк В. П.* Вища математика (Модульна технологія навчання): навч. посіб. У 4 ч. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – К. : НАУ, 2009. – Ч. 3. – 444 с.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учебн. пособ. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – Т. 1. – 456 с.

3. *Бермант А. Ф.* Краткий курс математического анализа: учебн. пособ. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

4. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учебн. пособ. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 304 с.

5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебн. пособ. / *Демидович Б. П.* – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1996. – 624 с.

6. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

7. *Дюженкова Л. І.*/Вища математика: приклади і задачі: посібн. / Дюженкова Л.І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. – К. : Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань
для студнтів спеціальності 134
«Авіаційна та ракетно-космічна техніка»

Укладачі:
БАБКО Антоніна Ігорівна
ГРИШКО Олена Миколаївна
КРАВЧЕНКО Вікторія Валеріївна
ОЛІЙНИК Олег Петрович
РЕПЕТА Віктор Кузьмич

Редактор *Л. М. Дудченко*

Технічний редактор *А. І. Лавринович*

Коректор Л. М. Романова

Комп'ютерна верстка *Н. В. Чорної*

Підп. до друку 09.02.2018. Формат 60x84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,0.
Тираж 100 прим. Замовлення № 21-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002