МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей**

Київ 2019

УДК

Укладачі:
І.О. Ластівка – д.т.н., проф., зав. каф. – вступ, теми 1, 3

О.С. Давидов – к.ф. – м.н., доц. – теми 2, 6, 7

Т.А. Левковська – ст. викл. – теми 4, 5

Рецензент: А.С. Богатирчук

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №___ від ________ 2019 р.).

Вища математика. Аналітична геометрія: методичні рекомендації до самостійної роботи студентів / уклад. : І. О. Ластівка, О.С. Давидов, Т.А. Левковська. – К. : НАУ, 2019. – 64 с.

Укладено відповідно до програм навчальної дисципліни «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Аналітична геометрія», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» через вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час розв'язування задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв'язування математичних задач.

У запропонованій методичній праці підібрано задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Матеріал кожної теми методичних рекомендацій відповідає робочим навчальним програмам технічних та економічних спеціальностей дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Аналітична геометрія». Кожна тема містить рекомендовану літературу, основні методичні рекомендації, розв'язані типові приклади, запитання для самоперевірки та завдання для самостійного виконання, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. НАЙПРОСТІЙШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

План

1. Відстань між двома точками.
2. Ділення відрізка у заданому відношенні.
3. Площа трикутника.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати***: формули для знаходження: відстані між двома точками, координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні, площі трикутника; ***уміти*** знаходити: відстань між двома точками, координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні, площу трикутника.

Відстань d між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$.

Тобто $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$

Нехай точка $M(x;y)$ ділить відрізок M_1M_2 в заданому відношенні $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$. Використовуючи поняття векторної алгебри, координати точки $M(x;y)$ знаходять за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,. \qquad (1.2)$$

Зауваження.

1. Якщо $\lambda=-1$, формули (1.2) втрачають свій зміст.
2. Якщо $\lambda=1$, точка $M(x;y)$ лежить в середині відрізка M_1M_2 і її координати знаходять за формулами (1.2):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\,.$$

3. Якщо точка $M(x;y)$ лежить в середині відрізка M_1M_2, то $\lambda>0$. Якщо точка $M(x,y)$ лежить поза межами відрізка M_1M_2,

то $\lambda < 0$.

4. Формули (1.1) і (1.2) такі самі і у просторовій системі координат.

Нехай трикутник ABC задається координатами вершин $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Його площу можна знайти, використовуючи визначник:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Зауваження.

1. Якщо в результаті обчислення $S = 0$, це означає, що точки A, B, C лежать на одні прямій.

2. Якщо в результаті обчислення $S < 0$, то потрібно взяти це число за модулем.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задано відрізок M_1M_2. Точка M до точки M_1 в два рази ближча ніж до точки M_2. Знайти: а) довжину відрізка M_1M_2; б) координати точки M, якщо $M_1(1;2;4)$ і $M_2(3;5;-8)$.

Розв'язання

а) Довжину відрізка M_1M_2 обчислюємо за формулою (1.1):

$$|M_1M_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{157} \text{ (лін.од.).}$$

б) За умовою $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{1}{2}$, тому за формулами (1.2):

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3}; \; z = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-8)}{1 + \frac{1}{2}} = 0.$$

Отже, координати точки $M\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};0\right)$.

Приклад 2. Довести, що трикутник з вершинами $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(5;-1)$ прямокутний.

Розв'язання. Знаходимо довжини сторін трикутника за формулою (1.1):

$$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5},\ |BC|=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=5,$$

$$|AC|=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}.$$

За теоремою Піфагора: $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$, $5^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2$, 25=25, тому трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою BC та катетами AB і AC.

Приклад 3. Довести, що точки $A(2;2)$, $B(-1;6)$, $C(-5;3)$, $D(-2;-1)$ є вершинами квадрата.

Розв'язання. Діагоналі квадрата рівні між собою і взаємно перпендикулярні, тому за формулою (1.1) маємо: $|AC|=\sqrt{(-5-2)^2+(3-2)^2}=5\sqrt{2}$, $|BD|=\sqrt{(-2+1)^2+(-1-6)^2}=5\sqrt{2}$.

За властивістю скалярного добутку векторів $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\{-7;1\}\cdot\{-1;-7\}=7-7=0.$ Отже, задані точки є вершинами квадрата.

Приклад 4. Задано трикутник з вершинами $A(2;-5)$, $B(1;-2)$, $C(4;7)$. Знайти координати точки перетину бісектриси BK зі стороною AC та площу трикутника ABC.

Розв'язання. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам: $\frac{|AK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|BC|}$, $\frac{|AK|}{|KC|}=\frac{\sqrt{1+9}}{\sqrt{9+81}}=\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}=\frac{1}{3}=\lambda.$ За формулами (1.2):

$x=\dfrac{2+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{2};\quad y=\dfrac{-5+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{3}}=-2.$ Точка $K\left(\frac{5}{2};-2\right)$ є точкою перетину бісектриси BK зі стороною AC.

Площу трикутника знайдемо за формулою (1.3): $S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4-2 & 1-2\\ 7+5 & -2+5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 12 & 3\end{vmatrix}=9\,(\text{кв. од.})$.

Приклад 5. Визначити координати кінців відрізка AB, який точками $P(2;2)$ і $Q(1;5)$ поділений на три рівні частини.

Розв'язання. Нехай точка P є серединою відрізка AQ. Тоді $x_A = 2x_P - x_Q = 4 - 1 = 3$, $y_A = 2y_P - y_Q = 4 - 5 = -1$. Отже, маємо координати точки $A(3;-1)$. Аналогічно, якщо точка Q є серединою відрізка PB, то $x_B = 2x_Q - x_P = 2 - 2 = 0$, $y_B = 2y_Q - y_P = 10 - 2 = 8$ і координати точки $B(0;8)$.

Запитання для самоперевірки

1. Як знайти відстань між двома точками ?
2. За якою формулою знаходять координати середини відрізка?
3. Як знайти координати точки, яка ділить відрізок у деякому відношенні?
4. Як обчислити площу трикутника, якщо відомі координати його вершин?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти відстань між точками $A(5;2)$ і $B(1;-1)$, $C(-6;3)$ і $D(0;-5)$, $O(0;0)$ і $P(-3;4)$, $Q(9;-7)$ і $M(4;5)$.

Завдання 2. Знайти довжини сторін трикутника з вершинами $A(3;2)$, $B(-1;-1)$, $C(11;-6)$.

Завдання 3. Довести, що трикутник з вершинами $A(-2;-1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$ прямокутний.

Завдання 4. Знайти ординату точки M, якщо її абсциса 7, а відстань до точки $N(-1;5)$ дорівнює 10.

Завдання 5. На осі ординат знайти точку, віддалену від $A(4;-6)$ на 5 одиниць.

Завдання 6. Відрізок між точками $A(3;2)$ і $B(15;6)$ поділено на 5 рівних частин. Знайти координати точок поділу відрізка.

Завдання 7. Знайти координати точки M, симетричної точці $A(3;-1)$ відносно $B(2;1)$, та координати точки N, симетричної точці B відносно A.

Завдання 8. На бісектрисах координатних кутів знайти точки, відстань яких до точки $M(-2;0)$ дорівнює 10.

Завдання 9. Обчислити площу трикутника, якщо його вершини $A(4;2)$, $B(9;4)$, $C(7;6)$

Відповіді: **1.** 5; 10; 5; 13. **2.** 5; 13; $8\sqrt{2}$.**4.** 11 або –1. **5.** $(0;-3)$ або $(0;-9)$. **6.** $(5{,}4;2{,}8)$; $(7{,}8;3{,}6)$; $(10{,}2;4{,}4)$; $(12;5{,}2)$. **7.** $M(1;3)$, $N(4;-3)$. **8.** $(-8;-8)$;$(6;6)$. **9.** 7.

Тема 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

План

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий вектор нормалі. Загальне рівняння прямої.
2. Рівняння прямої у відрізках на осях.
3. Канонічне рівняння прямої.
4. Параметричні рівняння прямої.
5. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
7. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
8. Рівняння прямої в нормальному вигляді.
9. Відстань від точки до прямої. Відхилення точки від прямої.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** різні види рівнянь прямої на площині, умови взаємного розміщення прямих; ***уміти:*** складати рівняння прямих на площині різних видів, знаходити кути між прямими, використовувати умови паралельності та перпендикулярності прямих для розв’язання геометричних задач, обчислювати відстань від точки до прямої.

Пряма на площині може бути задана різними видами. Від способу завдання цієї прямої залежить її рівняння.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ *і має вектор нормалі* $\vec{n}=\{A;B\}$, який перпендикулярний до даної прямої, має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2.1)$$

Якщо в рівнянні (2.1) розкрити дужки, то отримаємо *рівняння прямої в загальному вигляді*:

$$Ax+By+C=0. \qquad (2.2)$$

Розглянемо деякі окремі випадки рівняння (2.2).

1) $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, тоді $y=-\dfrac{C}{B}$. Це рівняння прямої, яка паралельна осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок $\left(-\dfrac{C}{B}\right)$.

2) $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$, тоді $x=-\dfrac{C}{A}$. Це рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і відтинає на осі Ox відрізок $\left(-\dfrac{C}{A}\right)$.

3) $C=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0$, тоді $y=-\dfrac{A}{B}x$, це рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

Рівняння прямої у відрізках на осях випливає із загального рівняння, коли $C\neq 0$:

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1,\ \ \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Якщо покласти $-\dfrac{C}{A}=a,\ -\dfrac{C}{B}=b$, то отримаємо *рівняння прямої у відрізках на осях*, яка відтинає на осі Ox відрізок a, на осі Oy відрізок b:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.3)$$

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{q}=\{l;m\}$, який паралельний цій прямій. Вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$, де $M(x;y)$ – довільна точка прямої, та вектор $\vec{q}$ колінеарні, їх відповідні координати пропорційні. Тоді *канонічне рівняння прямої* має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (2.4)$$

Параметричні рівняння прямої можна отримати з канонічного, якщо $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t$, де t – деякий параметр. Звідси маємо:

$$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, $M(x;y)$ – довільна точка прямої. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ візьмемо за напрямний. Тоді $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні, їх відповідні координати пропорційні. Отже, *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.6)$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y=kx+b, \qquad (2.7)$$

де $k=\operatorname{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої; α – кут, який утворює пряма з додатним напрямком осі Ox; b – відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.

Якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить прямій, то $y_0=kx_0+b$, $b=y_0-kx_0$. Підставивши значення b у рівняння (2.7), матимемо $y=kx+y_0-kx_0$, тому

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (2.8)$$

Рівняння (2.8) є *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*.

Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

1. Нехай прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2:

$$l_1:\ y_1=k_1x+b_1,\ k_1=\operatorname{tg}\alpha_1;\ l_2:\ y_2=k_2x+b_2,\ k_2=\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Гострий кут між ними визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Якщо l_1 і l_2 паралельні, то $k_2 - k_1 = 0$, або $k_2 = k_1$.

Якщо l_1 і l_2 перпендикулярні, то $1 + k_1 k_2 = 0$, або $k_1 k_2 = -1$.

2. Нехай прямі задано загальними рівняннями:

$l_1 :\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,\ \overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1\};\ l_2 :\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,\ \overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2\}.$
Кут φ між прямими визначається як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (2.9)$$

Якщо l_1 і l_2 паралельні, то $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ колінеарні, тому $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Якщо l_1 і l_2 збігаються, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Якщо l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ також перпендикулярні, тому $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

3. Якщо прямі задані канонічними рівняннями вигляду (2.4), то кут між ними дорівнює куту між напрямними векторами до цих прямих $\overrightarrow{q_1} = \{l_1; m_1\}$ і $\overrightarrow{q_2} = \{l_2; m_2\}$. Тому формула для знаходження кута між прямими та умови паралельності та перпендикулярності аналогічні формулі (2.9) та умовам п.2): $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{q_1} \cdot \overrightarrow{q_2}}{|\overrightarrow{q_1}| \cdot |\overrightarrow{q_2}|}$; $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$ – умова паралельності; $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$ – умова перпендикулярності.

Пряма на площині може бути визначена відстанню від початку координат до цієї прямої (це перпендикуляр p, опущений з початку координат на цю пряму) і напрямними косинусами $\cos\alpha, \cos\beta$ кутів, які утворює цей перпендикуляр з додатними напрямками осей координат: рівняння $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, або $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, називається *нормальним рівнянням прямої*.

Для того щоб звести загальне рівняння прямої (2.2) до нормального, потрібно помножити його на нормувальний множник

$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, μ беремо зі знаком, протилежним знаку C.

Отже, рівняння прямої в нормальному вигляді має вигляд

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (2.10)$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої можна знайти за формулою

$$d = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p\right| = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.11)$$

Відхилення точки від прямої позначають через $\sigma = \pm d$. Отже,

$$\sigma = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.12)$$

Якщо $\sigma = +d$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ і початок координат містяться по різні боки від даної прямої. Якщо $\sigma = -d$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ і початок координат розміщені по один бік від цієї прямої.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Записати різні види рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-1;\ 2)$ і $M_2(2;\ 1)$.

Розв'язання. Використовуючи рівняння (2.6), припускаючи в ньому, що $x_1 = -1,\ \ y_1 = 2,\ x_2 = 2,\ \ y_2 = 1$, дістанемо $\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Тоді $\frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}$ – канонічне рівняння прямої (2.4) з напрямним вектором $\vec{q} = \{-1; 3\}$. Звідки $\frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3} = t$. Тому $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - t \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої (2.5). Якщо $3(y-2) = -1(x+1)$, то $x + 3y - 5 = 0$ – загальне рівняння прямої (2.2) з вектором нормалі $\vec{n} = \{1; 3\}$. Тоді $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{1}{3}$ (2.7). Поділивши загальне рівняння на 5, отримуємо рівняння прямої у відрізках на осях (2.3): $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(2;3)$ і відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини.

Розв'язання. Розглянемо випадки, коли у рівнянні (2.3) $|a| = |b|$, тобто $a = \pm b$.

Якщо $a = b$, то рівняння (2.3) має вигляд: $\frac{x+y}{a} = 1$. Оскільки пряма проходить через точку $P(2;3)$, то $\frac{2+3}{a} = 1, a = 5$. Отже, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1, \quad x + y - 5 = 0$ – рівняння цієї прямої.

Якщо $a = -b$, то рівняння (2.3) має вигляд: $\frac{x-y}{a} = 1$. Оскільки пряма проходить через точку $P(2;3)$, то $\frac{2-3}{a} = 1, a = -1$. Отже, $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1, \quad x - y + 1 = 0$ – друге рівняння цієї прямої.

Якщо $a = -b$, то пряма проходить через початок координат, $a = b = 0$, і точку $P(2;3)$. Тоді рівняння (2.6) має вигляд: $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{3-0}$, або $3x - 2y = 0$ – третє рівняння цієї прямої.

Приклад 3. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $l: 4x - 5y + 3 = 0$.

Розв'язання. Нехай точка $Q(x;y)$ – проекція P на пряму l. За умовою перпендикулярності прямих PQ та l: $k_{PQ} = -\frac{1}{k_l}$. Із рівняння прямої l: $5y = 4x + 3,\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$. Тобто $k_l = \frac{4}{5}$. Отже, $k_{PQ} = -\frac{5}{4}$. Координати точки P та знайдений кутовий коефіцієнт k_{PQ} підставляємо в рівняння (2.8): $y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6)$, $4y - 16 = -5x - 30$. Рівняння прямої PQ має вигляд $5x + 4y + 14 = 0$.

Для знаходження координат точки $Q(x; y)$ – точки перетину двох прямих, розв'язуємо систему рівнянь: $\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0; \\ 5x + 4y + 14 = 0. \end{cases}$ Звідси $x = -2,\ y = -1$. Отже, точка $Q(-2; -1)$ – проекція P на пряму l.

Приклад 4. Звести загальне рівняння прямої $4x - 3y - 10 = 0$ до рівняння в нормальному вигляді.

Розв'язання. Знаходимо нормувальний множник, ураховуючи що $C = -10 < 0$: $\mu = +\frac{1}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$. Помножимо задане рівняння на μ. Отже, $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$ – рівняння прямої у нормальному вигляді (2.10).

Приклад 5. Скласти рівняння медіани AM, висоти AD трикутника ABC, якщо $A(3;2), B(-1;4), C(3;-2)$. Обчислити площу трикутника та кут C.

Розв'язання. Оскільки AM медіана, то точка M є серединою сторони BC. За формулами (1.2): $x_M = \frac{-1 + 3}{2} = 1,\ y_M = \frac{4 - 2}{2} = 1$, отже, $M(1;1)$. Рівняння прямої AM знаходимо за формулою (2.6): $\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1},\ \ x - 1 = 2(y - 1),\ x - 2y + 1 = 0$.

Висота AD перпендикулярна стороні BC, тому $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{BC} = \{4; -6\}$. Згідно з рівнянням (2.1) рівняння прямої AD буде таким: $4(x - 3) - 6(y - 2) = 0,\ \ 4x - 6y = 0,\ \ 2x - 3y = 0$.

Довжина висоти AD дорівнює відстані від точки A до прямої BC. Рівняння сторони BC знаходимо із формули (2.6): $\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-4}{-2-4}$, $-6(x-1)=4(y-1)$, $6x+4y-10=0$, $3x+2y-5=0$.

Отже, за формулою (2.11) $\frac{|3\cdot 3+2\cdot 2-5|}{\sqrt{9+4}}=\frac{8}{\sqrt{13}}$. Довжина сторони $BC=\sqrt{(-1-3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ (лін.од.). Тоді площа трикутника ABC буде $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{13}}\cdot 2\sqrt{13}=8$ (кв.од.).

Кут C трикутника ABC дорівнює куту між прямими CA і CB. За формулою (2.6) знаходимо рівняння сторін CA і CB відповідно:

$$\frac{x-3}{3-3}=\frac{y+2}{2+2},\ x-3=0,\ \overrightarrow{n_{CA}}=\{1;0\};$$

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-4}{-2-4},\ -6(x+1)=4(y-4),\ 3x+2y-5=0,\ \overrightarrow{n_{CA}}=\{3;2\}.$$

Тоді за формулою (2.9) $\cos\angle C=\frac{3\cdot 1+0\cdot 2}{\sqrt{1+0}\cdot\sqrt{9+4}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$. Отже, $\angle C=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

Приклад 6. Задано дві прямі $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ і $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, які перетинаються. Знайти рівняння бісектрис отриманих кутів.

Розв'язання. На бісектрисі довільним чином вибираємо точку $M_0(x_0;y_0)$. Знаходимо відстань від цієї точки до прямих за формулою (2.11): $\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$. Ця рівність справедлива для будь-якої точки, взятої на бісектрисі. Отже, рівність $\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x_0+B_2y_0+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ буде визначати рівняння бісектрис отриманих кутів.

Приклад 7. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.

Розв'язання. Перевіримо, чи належить точка A заданій прямій: $2+10-7=5\neq 0$. З формулою (2.11) знаходимо відстань d від точки A до прямої: $d=\dfrac{|2-2(-5)-7|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$ (лін.од.). Це є стороною квадрата. Тоді його площа $S_{кв}=d^2=5$ (кв.од.).

Приклад 8. Довести, що пряма $2x+y+3=0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(-5;1)$ і $B(3;7)$.

Розв'язання. За формулою (2.12) знаходимо відхилення точок A і B від прямої. Якщо знаки відхилень однакові, то точки лежать по один бік від прямої і пряма не перетинає відрізок; якщо знаки різні, то точки лежать по різні боки від прямої і пряма перетинає відрізок AB. Отже, $\sigma(A;l)=\dfrac{2(-5)+1+3}{\sqrt{4+1}}=-\dfrac{6}{\sqrt{5}}<0$ і $\sigma(B;l)=\dfrac{23+7+3}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{16}{\sqrt{5}}>0$ – знаки різні, тому точки лежать по різні боки від прямої і пряма перетинає відрізок AB.

Приклад 9. Обчислити відстань між паралельними прямими: $l_1:\ 3x-4y-10=0,\ l_2:\ 6x-8y+5=0$

Розв'язання. На будь-який з прямих вибираємо довільну точку. Нехай точка $P(x;y)$ належить прямій l_1. Якщо $y=-1$, то $x=2$. Отже, $P(2;-1)$ і за формулою (2.11) відстань $d=\dfrac{|6\cdot 2-8(-1)+5|}{\sqrt{36+64}}=\dfrac{25}{10}=2,5$ (лін.од.).

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
2. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт.
3. Наведіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
4. Наведіть загальне рівняння прямої. Які координати має

нормальний вектор цієї прямої?

5. Наведіть рівняння прямої у відрізках на осях. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять до цього рівняння?

6. Наведіть канонічне рівняння прямої. Як визначаються координати напрямного вектора цієї прямої?

7. Наведіть параметричні рівняння прямої.

8. Який вигляд має нормальне рівняння прямої? Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять в нормальне рівняння?

9. Наведіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

10. Наведіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано загальними рівняннями. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

11. Наведіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано канонічними рівняннями. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

12. Сформулюйте правило обчислення відстані від точки до прямої. Дайте означення відхилення точки від прямої.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скласти загальне рівняння прямої l, якщо задано:

а) $A(1;-2)\in l,\ \vec{q}=\{2;-3\}, \vec{q}\parallel l$; б) $A(1;3)\in l,\ B(-1;0)\in l$;

в) $A(4;5)\in l,\ l\parallel Ox$; г) $A(1;-1)\in l,\ l_1: 5x-2y+5=0,\ l\parallel l_1$;

д) $A(-5;2)\in l,\ l\parallel Oy$; е) $A(0;1)\in l,\ l_1: \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+1}{2},\ l\parallel l_1$.

Завдання 2. Знайти гострий кут між прямими та точку їх перетину: а) $3x+2y=27,\ y=-\dfrac{1}{5}x+7$; б) $2x-y+1=0,\ \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{3}$;

в) $2x+3y-3=0,\ y=\dfrac{3}{2}x+3{,}5$; г) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1},\ 2x-4y=-3$.

Завдання 3. У прямокутнику з вершиною $(2;-3)$ дві сторони лежать на прямих $2x-3y=-5,\ y=-1{,}5x+3{,}5$. Скласти рівняння двох інших сторін.

Завдання 4. Скласти рівняння медіани CM, висоти CD трикутника ABC, якщо $A(2;-3)$, $B(0;-1)$, $C(1;0)$. Обчислити площу трикутника.

Завдання 5. Через точку перетину прямих $3x-y=0$ і $x+4y-2=0$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $2x+7y=0$.

Завдання 6. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $5x+12y-1=0$ які віддалені від неї на відстань 5.

Завдання 7. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими $3x-y+5=0$ і $3x+y-4=0$.

Завдання 8. Знайти проекцію точки $(-5;6)$ на пряму $7x-13y-105=0$.

Завдання 9. Через точку перетину прямих $x+y-6=0$ і $2x+y-13=0$ провести прямі, паралельні осям координат.

Завдання 10. Знайти площу трикутника, сторони якого лежать на прямих $2x+3y-13=0$, $x+2y-7=0$, $x+y-5=0$.

Відповідь: **1.** а) $3x+2y-1=0$; б) $3x-2y=0$; в) $x=-5$; г) $y=5$; д) $5x-2y-7=0$; е) $3x-2y+2=0$; **2.** а) $\varphi=\frac{\pi}{4}, (5;6)$; б) $\varphi=\frac{\pi}{4}, (-0{,}8;-0{,}6)$; в) $\varphi=\frac{\pi}{2}, \left(-\frac{15}{13};\frac{23}{13}\right)$; г) $\varphi=0$; **3.** $3x+2y=0,$ $2x-3y=13.$ **4.** $x-1=0,$ $x-y-1=0,$ 2 кв.од.; **5.** $91x-26y-2=0$; **6**. $5x+12y+64=0$, $5x+12y-66=0$; **7.** $6x+1=0$, $2y-9=0$; **8.** $(2;-7)$**; 9.** $32x-9=0,$ $32y-19=0$; **10.** $0{,}5$ кв.од.

Тема 3. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

План

1. Рівняння площини, що проходить через задану точку з вектором нормалі. Загальне рівняння площини.
2. Рівняння площини у відрізках на осях.
3. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки.
4. Рівняння площини в нормальному вигляді.

5. Відстань від точки до площини. Відхилення точки від площини.

6. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** різні види рівнянь площини, умови взаємного розміщення площин; ***уміти:*** складати рівняння площин у просторі різних видів, знаходити кути між площинами, використовувати умови паралельності та перпендикулярності площин під час розв'язування геометричних задач, обчислювати відстань від точки до площини.

Площина в просторі може бути задана різними способами і від способу задання залежить вигляд її рівняння.

Площина може бути задана точкою $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ і вектором нормалі $\vec{n}=\left\{A;B;C\right\}$, який перпендикулярний до цієї площини:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\,. \qquad (3.1)$$

Якщо в рівнянні (3.1) розкрити дужки, отримуємо *рівняння площини в загальному вигляді*:

$$Ax+By+Cz+D=0\,. \qquad (3.2)$$

Одночасно всі коефіцієнти при x,y,z не можуть дорівнювати нулю, тому що вектор $\vec{n}$ не є нуль-вектором. Розглянемо деякі випадки рівняння (3.2).

1. Нехай $D=0$, тоді $Ax+By+Cz=0$ – рівняння площини, яка проходить через початок координат і має вектор нормалі $\vec{n}=\left\{A;B;C\right\}$.

2. Нехай $B=0$. Якщо $D\neq 0$, тоді $Ax+Cz+D=0$ – рівняння площини, паралельної осі Oy з вектором нормалі $\vec{n}=\left\{A;0;C\right\}$. Якщо $D=0$, тоді $Ax+Cz=0$ – рівняння площини, яка проходить через вісь Oy з вектором нормалі $\vec{n}=\left\{A;0;C\right\}$.

3. Нехай $B=C=0$. Якщо $D\neq 0$, тоді $Ax+D=0$ – рівняння площини паралельної площині Oyz з вектором нормалі

$\vec{n}=\{A;0;0\}$. Якщо $D=0$, тоді $Ax=0$ – рівняння площини, яка співпадає з площиною Oyz і має вектор нормалі $\vec{n}=\{A;0;0\}$.

Рівняння площини у відрізках на осях випливає із загального рівняння, коли $D\neq 0$:

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1,\ \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Якщо покласти $-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$, то отримаємо *рівняння*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{3.3}$$

площини у відрізках на осях, яка відтинає по осі Ox відрізок a, по осі Oy відрізок b, по осі Oz відрізок c.

Нехай площина проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_3)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$; $M(x;y;z)$ – довільна точка прямої. Вектори $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, та $\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$ компланарні, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю. Отже, *рівняння площини, яка проходить через три задані точки* має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.4}$$

Площина в просторі може бути задана відстанню від початку координат до цієї площини (це перпендикуляр p, опущений з початку координат на цю площину) і напрямними косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ кутів, які утворює цей перпендикуляр з додатними напрямками осей координат. Рівняння

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{3.5}$$

називається *нормальним рівнянням площини*.

Для того, щоб звести загальне рівняння (3.2) площини до нормального (3.5), потрібно помножити його на нормувальний множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, де знак μ беремо протилежним знаку D.

Тому загальне рівняння в нормальному вигляді матиме вигляд

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Відстань d від точки $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ *до площини* можна знайти за формулою

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.6)$$

Відхилення точки від прямої позначають як $\sigma=\pm d$. Отже,

$$\sigma=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Якщо $\sigma=+d$, то точка $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ і початок координат містяться по різні боки від заданої площини. Якщо $\sigma=-d$, то точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ і початок координат розміщені по один бік від заданої площини.

Нехай площини задані загальними рівняннями:

$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \overrightarrow{n_1}=\left\{A_1;B_1;C_1\right\},$

$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \overrightarrow{n_2}=\left\{A_2;B_2;C_2\right\}.$

Кут між площинами визначається як кут між векторами нормалей до цих площин:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}+C_2^{\ 2}}}. \qquad (3.7)$$

Якщо π_1 і π_2 паралельні, то $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ колінеарні, тому $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Якщо π_1 і π_2 збігаються, то $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Якщо π_1 і π_2 перпендикулярні, то $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ також перпендикулярні, тому $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;1;-1)$ і має вектор нормалі $\vec{n}_1 = \{1;-2;3\}$.

Розв'язання. За формулою (3.1): $1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$. Отже, шукана площина має рівняння: $x-2y+3z+3=0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7;2;3)$ і $M_2(5;6;-4)$ паралельно осі Ox.

Розв'язання. Оскільки площина паралельна осі Ox, то в рівнянні (3.2) $A=0$, отже, маємо рівняння $By+Cz+D=0$. Точки $M_1(7;2;3)$ і $M_2(5;6;-4)$ лежать на площині, тому $\begin{cases} 6B-4C+D=0; \\ 2B-3C+D=0. \end{cases}$ Розв'язуючи систему, отримуємо $4B=C$. Нехай $C=4$, тоді $B=1$ і $D=10$. Таким чином, отримуємо рівняння шуканої площини: $y+4z+10=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(0;1;-4)$ і $M_3(-1;2;-3)$.

Розв'язання. За формулою (3.4): $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 3 & -7 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$.

Обчислимо цей визначник, розкриваючи його за елементами першого рядка: $10(x-1)+8(y+2)+2(z-3)=0$.

Розкриємо дужки, зведемо подібні члени і скоротимо на 10, після чого дістанемо: $5x+4y+z=0$. Це рівняння визначає площину, яка проходить через початок координат.

Приклад 4. Через точку $M(1;3;2)$ провести площину, яка одночасно проходить через вісь Ox.

Розв'язання. Якщо площина проходить через вісь Ox, то рівняння має вигляд $By+Cz=0$. Координати точки M задовольняють рівняння цієї площини, тобто $3B+2C=0$. Ця рівність виконується, якщо $B=-2,\ C=3$. Тому рівняння шуканої площини: $-2y+3z=0$.

Приклад 5. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;3;-1)$ паралельно площині $5x-3y+2z-10=0$.

Розв'язання. Оскільки площини паралельні, то у них вектори нормалей однакові: $\vec{n}=\{5;-3;2\}$. Підставляючи координати точки $M(2;3;-1)$ і вектора нормалі $\vec{n}=\{5;-3;2\}$ у рівняння (3.1), отримуємо рівняння шуканої площини: $5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0$; $5x-3y+2z+1=0$.

Приклад 6. Записати рівняння площини π, яка проходить через точку $M_0(2;1;4)$ перпендикулярно до двох площин: $\pi_1:\ 2x+3y+z+4=0,\quad \pi_2:\ x+4y+5z-6=0$. Знайти кут між площинами π_1 і π_2.

Розв'язання. Довільним чином на площині π виберемо точку $M(x;y;z)$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-2;y-1;z-4\}$, який належить площині π. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{n}_1=\{2;3;1\}$ та $\vec{n}_2=\{1;4;5\}$ компланарні, їх мішаний добуток дорівнює 0:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0;$$

$$11(x-2)-9(y-1)+5(z-4)=0.$$

Рівняння площини π: $11x-9y+5z-33=0$.

Оскільки $\vec{n}_1=\{2;3;1\}$, $\vec{n}_2=\{1;4;5\}$, то за формулою (3.7):

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|2\cdot1+3\cdot4+1\cdot5|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+16+25}}=\frac{19}{14\sqrt{3}}.$$

Приклад 7. Обчислити площу трикутника, який відтинає площина $5x-6y+3z+120=0$ від координатного кута Oxy.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у відрізках на осях (3.3):

$$5x-6y+3z=-120;\ \frac{5x}{-120}+\frac{6y}{120}+\frac{3z}{-120}=1;\ \frac{x}{-24}+\frac{y}{20}+\frac{z}{-40}=1.$$

На площині Oxy задана площина відтинає на осі Ox відрізок довжиною 24, а на осі Oy відрізок довжиною 20. Це катети прямокутного трикутника, який лежить у площині Oxy. Його площа $S=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 20=240(\text{кв.од.})$.

Приклад 8. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин: $\pi_1:\ 2x-2y+z-3=0$, $\pi_2:\ x+2y-2z+12=0$.

Розв'язання. На осі Oz візьмемо довільну точку $M(0;0;z)$ та знайдемо відстань від неї до площин за формулою (3.6)

$$d(M;\pi_1)=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0+z-3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|z-3|}{3};$$

$$d(M;\pi_2)=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-2z+12|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|-2z+12|}{3}.$$

За умовою $d_1=d_2$ або $\frac{|z-3|}{3}=\frac{|-2z+12|}{3}$, $z-3=\pm(-2z+12)$:

$z-3=-2z+12$, $z=5$ або $z-3=2z-12$, $z=9$.

Отримуємо дві точки $M_1(0;0;5)$ і $M_2(1;0;9)$, рівновіддалені від заданих площин.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть загальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних у цьому рівнянні.
2. Наведіть рівняння площини у відрізках на осях і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів у цьому рівнянні.
3. Наведіть рівняння площини, що проходить через три задані точки. Запишіть нормальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.
4. Що називається відстанню від точки до площини і за якою формулою вона обчислюється?
5. Що таке відхилення точки від площини? У якому випадку відхилення точки від площини дорівнює відстані від точки до площини?
6. Наведіть формулу обчислення кута між двома площинами. За допомогою яких міркувань із цієї формули отримують умови паралельності та перпендикулярності двох площин?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через три задані точки: а) $M_1(2;3;1)$, $M_2(3;1;4)$ і $M_3(3;1;5)$; б) $M_1(2;0;-1)$, $M_2(-2;4;1)$ і $M_3(0;2;-1)$.

Завдання 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;1;1)$, $M_2(-3;0;4)$ та початок координат.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;1;2)$ та відтинає на осях Ox і Oy відрізки 5 і –7 відповідно.

Завдання 4. Обчислити об'єм тетраедра, обмеженого координатними площинами та площиною $2x+3y+6z-18=0$.

Завдання 5. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-5;1)$ паралельно площині $x-2y-4z=0$.

Завдання 6. Знайти косинуси кутів між площинами: а) $2x-y+3z=0$, $x+4y-6z=0$; б) $x+3y-4z+5=0$, $2x+2y+2z-7=0$.

Завдання 7. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;2;3)$ перпендикулярно до площини $x-y+2z-4=0$.

Завдання 8. Знайти відстань від точок $M_1(3;5;1)$, $M_2(7;-1;2)$ і $M_3(2;0;4)$ до площини $x+2y-2z+5=0$.

Завдання 9. На осі Oy знайти точку рівновіддалену від площин: $\pi_1: x+y-z+1=0, \pi_2: x-y+z-5=0$.

Відповіді: **1.** а) $x+2y+z-9=0$; б) $x+y-2=0$; **2.** $4x-11y+3z=0$; **3.** $14x-10y+33z-70=0$; **4.** 27; **5.** $x-2y+4z-17=0$; **6.** а) $\pm\frac{20}{\sqrt{742}}$; б) площини взаємно перпендикулярні; **7.** $7x+y-3z=0$; **8.** $\frac{16}{3}$; 2; $\frac{1}{3}$; **9.** $(0;3;0)$.

Тема 4. ПРЯМА У ПРОСТОРІ

План

1. Канонічні рівняння прямої.
2. Параметричні рівняння прямої.
3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
4. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
5. Відстань між паралельними прямими.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** різні види рівнянь прямої в просторі, умови взаємного розміщення прямих; ***уміти:*** складати рівняння прямих у просторі різних видів, знаходити кути між прямими, використовувати умови паралельності та перпендикулярності прямих для розв'язування геометричних задач.

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{q}=\{l;m;n\}$, який паралельний даній прямій. Вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$, де $M(x;y;z)$ – довільна точка прямої, та вектор $\vec{q}$ колінеарні, їх відповідні координати пропорційні. Тоді *канонічні рівняння прямої* мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{4.1}$$

Параметричні рівняння прямої можна отримати з канонічних, якщо $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$, де t – деякий параметр. Звідси

$$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt; \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{4.2}$$

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M(x;y;z)$ – довільна точка прямої. Вектор

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ візьмемо за напрямний. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні, їх відповідні координати пропорційні. Отже, *рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки*, має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.3}$$

Нехай прямі в просторі задані рівняннями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \vec{q}_1 = \{l_1; m_1; n_1\};$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad \vec{q}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}.$$

Кут φ між прямими визначається як кут між напрямними векторами $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$ до цих прямих:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{4.4}$$

Якщо L_1 і L_2 паралельні, то $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$ колінеарні, тому $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Якщо L_1 і L_2 перпендикулярні, то $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$ також перпендикулярні, тому $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Нехай паралельні прямі задаються точкою та напрямним вектором. Побудуємо паралелограм на векторах $\vec{q} = \{l; m; n\}$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Знайдемо його площу як модуль векторного добутку $S = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{q}\right|$ або $S = |\vec{q}| \cdot h$.

Відстань між паралельними прямими дорівнює висоті паралелограма, отже

$$d(L_1; L_2) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{q}\right|}{|\vec{q}|}. \tag{4.5}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;-2;1)$ і $M_2(3;1;-1)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (4.3), маємо: $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$ – канонічні рівняння прямої (4.1). За формулою (4.2) знаходимо параметричні рівняння прямої: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}=t$, $\begin{cases} x=1+2t; \\ y=-2+3t; \\ z=1-2t. \end{cases}$

Приклад 2. Знайти відстань точки $M_1(7;9;7)$ до прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

Розв'язання. Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну цій прямій. Тоді відстань точки до прямої дорівнює відстані між паралельними прямими, яку можна знайти за формулою (4.5).

Точка $M_2(2;1;0)$ лежить на прямій, яка має напрямний вектор $\vec{q}=\{4;3;2\}$ довжиною $|\vec{q}|=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-5;-8;-7\}$;

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -8 & -7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=8\vec{i}-18\vec{j}+17\vec{k}=\{8;-18;17\}.$$

Тоді $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{q}\right|=\sqrt{25+324+289}=\sqrt{638}$;

$$d(M_1;L)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{q}\right|}{|\vec{q}|}=\frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}}=\sqrt{22} \text{ (лін.од.).}$$

Приклад 3. У площині Oxz знайти пряму, яка перпендикулярна до прямої $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}$ і проходить через початок системи координат.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Вона лежить у площині Oxz, тому її напрямний вектор перпендикулярний до осі Oy, тобто $\vec{q}=\{l;0;n\}$. З умови перпендикулярності прямих маємо: $3l+n=0,\ l=1,\ n=-3$. Тоді $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$ – рівняння шуканої прямої.

Приклад 4. Знайти косинуси кутів, які утворює пряма $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{6}$ з координатними осями.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{q}=\{2;3;6\}$, а координатних осей Ox, Oy, Oz: $\vec{i}=\{1;0;0\},\ \vec{j}=\{0;1;0\},\ \vec{k}=\{0;0;1\}$. За формулою (4.4) маємо:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{q}\cdot\vec{i}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{i}|}=\pm\frac{2}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{1+0+0}}=\pm\frac{2}{7};$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{q}\cdot\vec{j}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{j}|}=\pm\frac{3}{7};\ \cos\alpha=\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{k}|}=\pm\frac{6}{7}.$$

Приклад 5. Обчислити відстань між паралельними прямими $L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ і $L_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Розв'язання. Розв'язання цієї задачі аналогічне розв'язанню прикладу 2. Точка $M_1(2;-1;0)$ належить прямій L_1, точка $M_2(7;1;3)$ – прямій L_2. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{7-2;1+1;3-0\}=\{5;2;3\}$. Напрямний вектор прямих $\vec{q}=\{3;4;2\},\ |\vec{q}|=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$. Знаходимо векторний добуток $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\vec{q}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-8\vec{i}-\vec{j}+14\vec{k}=\{-8;-1;14\}.$$

Тоді $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{q}\right|=\sqrt{64+1+196}=\sqrt{261}$. Відстань між паралельними прямими знайдемо за формулою (4.5):

$$d\left(L_1;L_2\right)=\frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}}=3\,(\text{лін.од.}).$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть канонічні рівняння прямої у просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять у ці рівняння?
2. Наведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
3. Наведіть параметричні рівняння прямої у просторі. Як отримують параметричні рівняння прямої із канонічного рівняння?
4. Наведіть формулу кута між двома прямими. За допомогою яких міркувань із цієї формули отримують умови паралельності, перпендикулярності двох прямих?
5. Як знайти відстань між паралельними прямими?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки: а) $M_1\left(2;3;1\right)$ і $M_2\left(4;6;9\right)$; б) $M_1\left(7;-1;2\right)$ і $M_2\left(5;-1;4\right)$; в) $M_1\left(1;5;1\right)$ і $M_1\left(1;-5;1\right)$.

Завдання 2. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M\left(1;-1;1\right)$ паралельно: а) вектору $\vec{q}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; б) прямій $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$; в) осі Ox; г) осі Oy.

Завдання 3. Знайти точки перетину прямої, яка проходить через точки $A\left(12;-6;1\right)$ і $B\left(-6;6;-5\right)$, з координатними площинами.

Завдання 4. Скласти канонічні рівняння медіани CM трикутника ABC, якщо $A\left(3;6;-7\right), B\left(3;6;-7\right), C\left(4;-7;-2\right)$.

Завдання 5. Знайти гострий кут між прямими
$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}},\quad \begin{cases} x=3+t; \\ y=-2-t; \\ z=\sqrt{2}t. \end{cases}.$$

Завдання 6. Обчислити відстань між паралельними прямими

$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Відповіді: **1.** а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{8}$; б) $\frac{x-7}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{1}$; в) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-5}{-10}=\frac{z-1}{0}$; **2.** а) $x=1+2t,\ y=-1+3t,\ z=1+t$; б) $x=1+t,\ y=-1+2t,\ z=1-t$; в) $x=1+t,\ y=-1,\ z=1$; г) $x=1,\ y=-1,\ z=1+t$; **3.** $(9;-4;0)$, $(3;0;-2)$, $(0;2;-3)$; **4.** $\frac{x-4}{5}=\frac{y+7}{-11}=\frac{z+2}{0}$; **5.** $\frac{\pi}{3}$; **6.** $3\sqrt{\frac{93}{17}}$ (лін.од.).

Тема 5. ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

План

1. Пряма в просторі як перетин двох площин.
2. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.
3. Точка перетину прямої з площиною.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** умови взаємного розміщення прямих та площин у просторі; ***уміти:*** переходити із загального рівняння прямої до канонічного, знаходити кут між прямою і площиною, координати точки перетину прямої та площини, використовувати умови паралельності і перпендикулярності прямих та площин для розв’язування геометричних задач, обчислювати відстань між паралельними прямими.

Нехай площини π_1 і π_2 задані рівняннями:

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

які перетинаючись утворюють пряму L. Тоді система рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

називається *загальним рівнянням прямої в просторі*.

Щоб звести рівняння прямої L до канонічного вигляду, потрібно знайти координати точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через яку проходить пряма, та координати її напрямного вектора $\vec{q}$ і скористатися (4.1).

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 = -C_1z_0 - D_1; \\ A_2x_0 + B_2y_0 = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$ відносно x_0 та y_0, причому z_0 – вільна змінна (їй надається будь-яке значення), отримаємо точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Напрямний вектор прямої дорівнює векторному добутку векторів нормалей до площин π_1 і π_2:

$$\vec{q} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} = \{l;m;n\}. \qquad (5.1)$$

Нехай площину π задано загальним рівнянням, що має вектор нормалі $\vec{n} = \{A;B;C\}$, а пряму – канонічними рівняннями з напрямним вектором $\vec{q} = \{l;m;n\}$ (рис. 5.1).

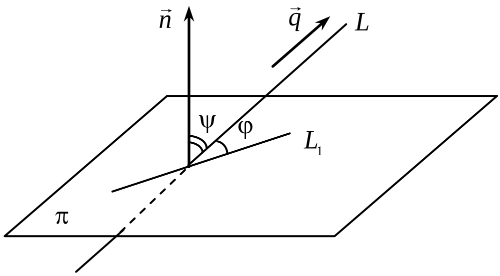


Рис. 5.1

Тоді $\vec{n} \cdot \vec{q} = |\vec{n}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\psi$. Якщо $0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\psi = \sin\varphi$. Якщо $\psi > \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\varphi = -\cos\psi$. Тому *кут між прямою і площиною* визначається за допомогою формули:

$$\sin\varphi = \left|\cos\psi\right| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{q}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|} = \frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (5.2)$$

Якщо пряма L перпендикулярна до площини π, то $\vec{q}$ і $\vec{n}$ колінеарні, тому $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$.

Якщо пряма L паралельна площині π, то $\vec{q}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, тому $Al + Bm + Cn = 0$.

Координати точки перетину прямої з площиною можна знайти, розв’язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt; \\ A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0. \end{cases} \qquad (5.3)$$

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Записати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 6 = 0; \\ x + 2y - 3z - 5 = 0. \end{cases}$ Знайти кут між заданими площинами.

Розв’язання. Пряму задано загальним рівнянням, з якого $\overrightarrow{n_1} = \{2;3;4\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \{1;2;-3\}$. Знайдемо координати будь-якої точки прямої, розв’язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 3y = -4z - 6; \\ x + 2y = 3z + 5. \end{cases}$ Нехай $z = 0$, тоді отримуємо систему $\begin{cases} 2x + 3y = -6; \\ x + 2y = 5, \end{cases}$ розв’язком якої буде $x = -27,\ y = 16$. Отже, точка $M_0(-27;16;0)$ належить прямій.

Для знаходження напрямного вектора прямої використовуємо формулу (5.1):

$$\vec{q} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{k} = \{-17;10;1\}.$$ Тоді за

формулою (4.1) канонічні рівняння прямої мають вигляд: $\dfrac{x+27}{-17}=\dfrac{y-16}{10}=\dfrac{z}{1}$.

Кут між заданими площинами обчислюємо за формулою (3.7):

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 2-4\cdot 1|}{\sqrt{4+9+16}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{174}}.$$

Приклад 2. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

Розв'язання. Проводимо площину через початок координат перпендикулярно до заданої прямої, причому напрямний вектор прямої є вектором нормалі цієї площини, тобто $\vec{n}=\{2;3;1\}$. Тому рівняння площини за формулою (3.1) буде таким: $2(x-0)+3(y-0)+1(z-0)=0$ або $2x+3y+z=0$.

Знаходимо координати точки перетину прямої з побудованою площиною. Запишемо параметричні рівняння заданої прямої (4.2): $x=2+2t,\ y=1+3t,\ z=3+t$. Тоді останнє рівняння системи (5.3) матиме вигляд: $2(2+2t)+3(1+3t)+(3+t)=0.$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $t=-\dfrac{5}{7}$. Тоді координати шуканої точки будуть такими: $x=\dfrac{4}{7},\ y=-\dfrac{8}{7},\ z=\dfrac{16}{7}$. Тобто $M_1\left(\dfrac{4}{7};-\dfrac{8}{7};\dfrac{16}{7}\right)$.

Рівняння перпендикуляра – це рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 та початок координат. За формулою (4.3) $\dfrac{x-0}{\frac{4}{7}-0}=\dfrac{y-0}{-\frac{8}{7}-0}=\dfrac{z-0}{\frac{16}{7}-0}$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{4}$.

Приклад 3. Знайти точку перетину прямої та площини: а) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ і $2x+y+z-6=0$; б) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$ і $3x-4y-z+5=0$.

Розв'язання. а) Запишемо параметричні рівняння заданої прямої (4.2): $x = 2+t,\ y = 3+t,\ z = 4+2t$. Тоді останнє рівняння системи (5.3) матиме вигляд: $2\left(2+t\right)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$

Розв'язавши рівняння, знаходимо $t=-1$. Тоді координатами шуканої точки будуть: $x=1,\ y=2,\ z=2$.

б) Аналогічно, як і в прикладі 3 запишемо рівняння прямої в параметричній формі (4.2): $x=1+5t,\ y=-2+4t,\ z=1-t$; $3\left(1+5t\right)-4(-2+4t)-(1-t)+5=0$. Отримуємо рівняння: $0\cdot t+15=0$, яке не має розв'язків. Отже, пряма не перетинає площину. За умовою паралельності прямої і площини, використовуючи те що $\vec{q}=\left\{5;4;-1\right\}$ і $\vec{n}=\left\{3;-4;-1\right\}$, маємо: $Al+Bm+Cn=3\cdot 5+\left(-4\right)\cdot 4+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)=0$. Тому пряма паралельна площині.

Приклад 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M\left(1;2;-3\right)$ паралельно прямим $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$ та $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{3}$.

Розв'язання. Вектором нормалі шуканої площини буде векторний добуток напрямних векторів заданих прямих $\overrightarrow{q_1}=\left\{3;-2;-1\right\}$ і $\overrightarrow{q_2}=\left\{2;-3;3\right\}$:

$$\vec{n}=\overrightarrow{q_1}\times\overrightarrow{q_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-9\vec{i}-11\vec{j}-5\vec{k}=\left\{-9;-11;-5\right\}.$$

Використовуючи рівняння (3.1), отримуємо рівняння шуканої площини $-9\left(x-1\right)-11\left(y-2\right)-5\left(z+3\right)=0$ або $9x+11y+5z-16=0$.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{5}$ і точку $M\left(1;1;-2\right)$.

Розв'язання. Вектором нормалі шуканої площини буде векторний добуток напрямного вектора заданої прямої $\vec{q}=\left\{2;1;5\right\}$ і вектора $\overrightarrow{MM_1} = \{0; 2; 2\}$, де точка $M_1(1;3;0)$ одночасно лежить і на прямій, і на площині.

$$\vec{n} = \overrightarrow{MM_1} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = \{8; 4; -4\}.$$

Використовуючи рівняння (3.1), дістаємо рівняння шуканої площини $2(x-1)+(y-1)-(z+2)=0$ або $2x+y-z-5=0$.

Приклад 6. Знайти кут між прямою $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ і площиною, яка проходить через три задані точки $M_1(1;3;-1)$, $M_2(-2;1;0)$, $M_3(0;-1;2)$.

Розв'язання. Складемо рівняння площини, скориставшись співвідношенням (3.4):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ -2-1 & 1-3 & 0+1 \\ 0-1 & -1-3 & 2+1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо $-2(x-1)+8(y-3)+10(z+1)=0$ або $x-4y-5z+6=0.$

Кут між прямою і площиною будемо шукати через вектор нормалі площини $\vec{n} = \{1; -4; -5\}$ та напрямний вектор прямої $\vec{q} = \{2;1;-1\}$ за формулою (5.2): $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{q}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|} = \dfrac{|2-4+5|}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

Приклад 7. Знайти точку P симетричну точки $M(1;1;1)$ відносно прямої $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Проводимо площину через точку $M(1;1;1)$ перпендикулярно до заданої прямої, причому напрямний вектор прямої є вектором нормалі цієї площини, тобто $\vec{n} = \{2; 3; -1\}$. Тому рівняння площини за формулою (3.1) буде: $2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0$ або $2x+3y-z-4=0$. Знайдемо проекцію точки M на пряму. Для цього запишемо параметричні рівняння прямої та складемо систему (5.3), останнє рівняння якої буде таким: $2(1+2t)+3\cdot 3t-(-1-t)-4=0$, $t=\dfrac{1}{4}$. Отже, проекцією точки M на пряму буде точка $Q\left(\dfrac{8}{7};\dfrac{3}{14};-\dfrac{15}{14}\right)$, яка є серединою відрізка MP. Використовуючи формули (1.2), отримуємо координати точки P, а саме: $x_P=2x_Q-x_M=\dfrac{9}{7}$, $y_P=2y_Q-y_M=-\dfrac{4}{7}$, $z_P=2z_Q-z_M=-\dfrac{22}{7}$, $P\left(\dfrac{9}{7};-\dfrac{4}{7};-\dfrac{22}{7}\right)$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть загальне рівняння прямої в просторі.
2. Як перейти від загального рівняння прямої до канонічного вигляду?
3. Дайте означення кута між прямою і площиною.
4. Наведіть формулу обчислення кута між прямою і площиною. За допомогою яких міркувань із цієї формули отримують умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини?
5. Як знайти координати точки перетину прямої з площиною?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Записати канонічні рівняння прямої а) $\begin{cases} x+3y-4z+5=0, \\ 2x-y+z-4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

Завдання 2. Записати параметричні рівняння прямої а) $\begin{cases} 2x+3y+2z+8=0, \\ x-y-z-9=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 2x+3y-4z+5=0. \end{cases}$

Завдання 3. Знайти точку перетину прямої та площини: а) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$ і $x+y-2z-4=0$; б) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ і $x+y-z+5=0$.

Завдання 4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x+y-4z+5=0, \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ і точку $M(1;-1;2)$.

Завдання 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ паралельно прямій $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$.

Завдання 6. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x+y-z=0; \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ і площиною $3x+5y-4z+2=0$.

Завдання 7. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M(3;-2;4)$ на площину $5x+3y-7z+1=0$.

Завдання 8. Знайти проекцію точки $M(1;2;-3)$ на площину $6x-y+3z-41=0$.

Завдання 9. Знайти точку P, симетричну точці $M(2;7;1)$ відносно площини $x-4y+z+7=0$.

Завдання 10. Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(-1;0;4)$ на пряму: $x=1+t,\ y=2t,\ z=4-t$.

Завдання 11. Знайти точку P, симетричну точці $M(4;3;10)$ відносно прямої: $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=3+5t$.

Відповіді: **1**. а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-0}{7}$; б) $\frac{x-0}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}$; **2**. а) $x=4-t,\ y=-6+4t,\ z=1-5t$; б) $x=\frac{2}{7}+t,\ y=-\frac{13}{7}+10t,\ z=7t$; **3.** а) $(-2;0;3)$; б) пряма паралельна площині; **4**. $8x+2y-9z+12=0$; **5.** $6x+5y-2z+1=0$; **6.** $\arcsin\frac{\sqrt{19}}{190}$; **7.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$; **8.** $(7;1;0)$; **9.** $(4;-1;3)$; **10.** $\begin{cases} y+2z-8=0, \\ x+2y-z+5=0 \end{cases}$; **11.** $(2;9;6)$.

Тема 6. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План

1. Рівняння кола та еліпса.
2. Рівняння гіперболи.
3. Рівняння параболи.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен **знати:** рівняння кривих другого порядку, їх характеристики; **уміти:** визначати вид кривої, знаходити її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи) та будувати графіки.

Многочлен другого порядку відносно змінних x та y описує *лінію другого порядку*:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0, \tag{6.1}$$

де a,b,c,d,e,f – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a,b,c відмінне від нуля.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини O_1 (центра кола) дорівнюють сталому числу R (радіусу) (рис. 6.1).

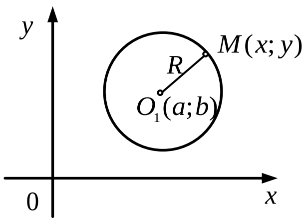


Рис. 6.1

Рівняння
$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2 \tag{6.2}$$
називається *канонічним рівнянням кола*. Зокрема, рівняння кола з центром в початку координат $(a=0,\ b=0)$ має вигляд: $x^2+y^2=R^2$.

Еліпсом називають геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок F_1 і F_2 площини, які називаються *фокусами*, є величина стала і більша від відстані між фокусами. Позначимо $F_1F_2 = 2c.$ Тоді для фокусів маємо $F_1(c;\,0);$ $F_2(-c;\,0)$ (рис. 6.2). Суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів позначимо через $2a$: $F_1M + F_2M = 2a.$ Відстані $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ називаються *фокальними радіусами*.

Точки перетину еліпса з координатними осями називаються *вершинами еліпса*. Вершини еліпса мають координати: $A_1(a;0);$ $A_2(-a;0);$ $B_1(0;b);$ $B_2(0;-b)$ (рис. 6.2). Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $B_1B_2 = 2b$ – *малою віссю еліпса*.

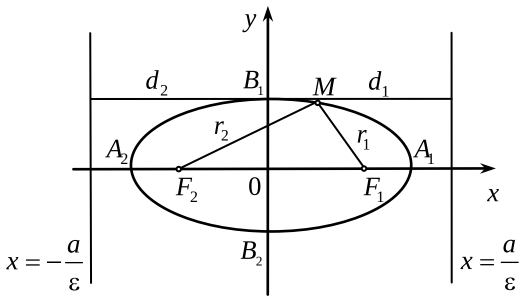


Рис. 6.2

Канонічним рівнянням еліпса називається рівняння вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.3}$$

Позначимо: $a^2 - c^2 = b^2$.

Відношення відстані між фокусами до довжини великої осі називається *ексцентриситетом еліпса* і позначається так:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{6.4}$$

Оскільки $c < a,$ то для еліпса $0 \le \varepsilon < 1.$ Для кола ексцентриситет $\varepsilon = 0.$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса, $\frac{a}{\varepsilon} > a$.

Відношення фокальних радіусів r_1 і r_2 довільної точки еліпса до відстаней d_1 і d_2 цієї точки від відповідних директрис є величини сталі і дорівнюють ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon . \qquad (6.5)$$

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок F_1 і F_2 цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша від відстані між фокусами.

Позначимо відстань $F_1F_2 = 2c$. Тоді фокуси гіперболи $F_1\left(c;0\right)$ і $F_2\left(-c;0\right)$ (рис. 6.3).

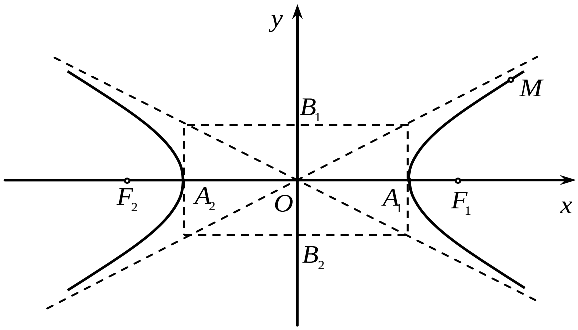


Рис. 6.3

Нехай довільна точка $M\left(x;y\right)$ належить гіперболі. *Канонічним рівнянням гіперболи* називається рівняння вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.6)$$

Точки перетину гіперболи з віссю Ox: $A_1\left(a;0\right)$, $A_2\left(-a;0\right)$ називаються вершинами гіперболи. Відрізок A_1A_2 називається дійсною віссю гіперболи. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Якщо на осі Oy взяти точки $B_1\left(0;b\right)$, $B_2\left(0;-b\right)$, то відрізок B_1B_2 називається уявною віссю гіперболи (рис. 6.3).

Вісь Ox – горизонтальна вісь симетрії, Oy – вертикальна вісь симетрії. Точка перетину осей симетрії O називається центром гіперболи. Позначимо: $c^2 - a^2 = b^2$.

Відношення відстані між фокусами до довжини дійсної осі називається ексцентриситетом гіперболи і позначається так:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (6.7)$$

Оскільки $c > a$, то для гіперболи $\varepsilon > 1$. Тоді

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \qquad (6.8)$$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи; ε – її ексцентриситет, називаються директрисами гіперболи, $\frac{a}{\varepsilon} < a$.

Для директрис гіперболи, так само як і для директрис еліпса, справджується співвідношення (6.5).

Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \qquad (6.9)$$

Рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ також визначає гіперболу, яка називається спряженою до гіперболи (6.6).

Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F, яка називається фокусом, і заданої прямої l, яка називається директрисою і не проходить через фокус.

Відстань від фокуса до директриси позначимо через p і назвемо параметром параболи.

Виходячи з цих позначень, маємо: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – координати фокуса параболи, $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси параболи.

Нехай довільна точка $M(x;y)$ належить параболі (рис. 6.4).

Канонічним рівнянням параболи називається рівняння вигляду:

$$y^2 = 2px. \qquad (6.10)$$

Точка перетину O параболи з віссю Ox називається вершиною параболи. Вершина параболи збігається з початком координат. Парабола лежить правіше від осі Oy і симетрична відносно осі

Ox . Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

Фокальна властивість: фокальний радіус r (відстань від фокуса до змінної точки $M(x;y)$ параболи) дорівнює відстані d від цієї точки до директриси. Отже, $r = d$, або $r = \frac{p}{2} + x$.

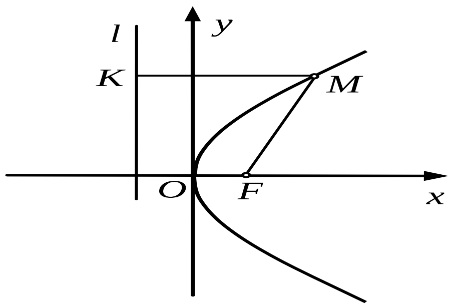


Рис. 6.4

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Скласти рівняння кола:

1) центром якого є точка $O_1(-1;4)$, а радіус $R = 5$;

2) точки $M_1(1;-3)$ і $M_2(-5;7)$ є кінцями діаметрів;

3) центр якого лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$ і яке проходить через точки $A(3;1)$ і $B(-1;3)$;

4) яке проходить через три задані точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Розв'язання. 1. За формулою (6.2) складаємо рівняння кола:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

2. Оскільки точки M_1 і M_2 є кінцями діаметра, то центр кола (точка O_1) є серединою відрізка M_1M_2: $x_{O_1} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -2;$ $y_{O_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = -2.$ Отже, $O_1(-2;-2)$ – центр кола.

Радіус кола дорівнює половині діаметра:

$$R=\frac{1}{2}M_1M_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+100}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{34}=\sqrt{34}.$$

За формулою (6.2) маємо рівняння кола $\left(x+2\right)^2+\left(y+2\right)^2=34.$

3. Нехай центром кола є точка $O_1\left(a;\ b\right)$. Координати точки A та центра кола O_1 задовольняють формулу (6.2): $\left(3-a\right)^2+\left(1-b\right)^2=R^2$. Координати точки B та центра кола O_1 також задовольняють формулу (6.2): $\left(-1-a\right)^2+\left(3-b\right)^2=R^2$.

Координати центра кола O_1 задовольняють рівняння прямої $3x-y-2=0$, оскільки точка O_1 належить цій прямій: $3a-b-2=0$.

Щоб знайти значення $a, b, R,$ розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\left(3-a\right)^2+\left(1-b\right)^2=R^2;\\ \left(-1-a\right)^2+\left(3-b\right)^2=R^2;\\ 3a-b-2=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}a=2;\\ R^2=10;\\ b=4.\end{cases}$$

За формулою (6.2) складемо рівняння кола:

$\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=10$.

4. Нехай центром кола є точка $O_1\left(a;b\right)$. Координати точки M_1 та центра O_1 задовольняють формулу (6.2): $\left(-1-a\right)^2+\left(5-b\right)^2=R^2$. Координати точки M_2 та центра O_1 задовольняють формулу (6.2): $\left(-2-a\right)^2+\left(-2-b\right)^2=R^2$. Координати точки M_3 та центра O_1 задовольняють формулу (6.2): $\left(5-a\right)^2+\left(5-b\right)^2=R^2$.

Розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases}\left(-1-a\right)^2+\left(5-b\right)^2=R^2;\\ \left(-2-a\right)^2+\left(-2-b\right)^2=R^2;\\ \left(5-a\right)^2+\left(5-b\right)^2=R^2,\end{cases}\ \text{отримуємо}\ \begin{cases}R^2=25;\\ b=1;\\ a=2.\end{cases}.$$

Тоді рівняння шуканого кола: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Приклад 2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис і симетричні відносно початку координат, якщо:

1) півосі відповідно дорівнюють 5 і 3;

2) відстань між фокусами дорівнює 8 і велика піввісь – 6;

3) велика вісь дорівнює 24 і ексцентриситет $\varepsilon=0,5$;

4) мала вісь дорівнює 16 і ексцентриситет $\varepsilon=0,6$;

5) сума осей дорівнює 40 і відстань між фокусами дорівнює $4\sqrt{10}$;

6) ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$ і точка еліпса $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$.

Розв'язання. 1. За умовою $a=5$ і $b=3$. Тому за формулою (6.3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. За умовою $2c=8$, $c=4$ і $a=6$. Так як $a^2-c^2=b^2$, то $b^2=6^2-4^2=20$. За формулою (6.3) маємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

3. За умовою $a=12$. Із формули (6.4) знайдемо c: $0,5=\frac{c}{12}$, $c=6$. Оскільки $a^2-c^2=b^2$, то $b^2=144-36=108$. За формулою (6.3) маємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$.

4. Із рівності $2b=16$ знаходимо $b=3$. Із формули (6.4) отримуємо $c=0,6a$. Оскільки $a^2-c^2=b^2$, то $0,64a^2=64$, $a^2=100$. За формулою (6.3) маємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

5. За умовою $2(a+b)=40,\ a+b=20$ і $2c=4\sqrt{10},\ c=2\sqrt{10},\ c^2=40$, $a^2-b^2=40$.

Знайдемо a і b із системи рівнянь

$$\begin{cases} a+b=20; \\ a^2-b^2=40, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=20; \\ a-b=2. \end{cases}$$

Маємо: $a=11, \quad b=9.$

За формулою (6.3) запишемо рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{121}+\dfrac{y^2}{81}=1.$

6. Координати точки M_1 задовольняють рівняння (6.3): $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{25}{9b^2}=1.$ Крім того, за формулою (6.4): $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{2}{3}.$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{25}{9b^2}=1, \\ \dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{4}{9}, \end{cases}$ отримаємо $a^2=9, b^2=5$. За формулою (6.3) запишемо рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1.$

Приклад 3. Скласти рівняння хорди еліпса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, яка проходить через точку $M(1;1)$ та ділиться в ній навпіл.

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.8), складемо рівняння усіх хорд, які проходять через точку M: $y-1=k(x-1)$. Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо координати точки перетину хорди з еліпсом:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ y-1=k(x-1); \end{cases} \quad \begin{cases} (4+9k^2)x^2+18(1-k)x+9(1-k)^2-36=0, \\ y=kx-k+1. \end{cases}$$

Оскільки точка M є серединою хорди, то згідно з формулами (1.2) координати точок перетину хорди з еліпсом $(x_1;y_1)$ та $(x_2;y_2)$ задовольняють рівності: $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1;$ $\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$. Із теореми Вієта і останньої умови маємо: $\dfrac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2,\ k=-\dfrac{4}{9}.$

Отже, рівняння хорди буде таким:

$y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$, $4x+9y-13=0$.

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8 і відстань між директрисами – 6;

2) уявна піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $\varepsilon=2$;

3) асимптоти перпендикулярні та директриси задано рівняннями $x=\pm 3\sqrt{2}$;

4) асимптоту задано рівнянням $y=\frac{5}{3}x$ і вона проходить через точку $M(6;9)$.

Розв'язання. 1. За умовою $2c=8, c=4$ і відстань між директрисами $\frac{2a}{\varepsilon}=6$ та враховуючи формулу (6.7), маємо $a^2=12$. Оскільки $c^2-a^2=b^2$, то $b^2=4$. За формулою (6.6) рівняння гіперболи буде: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2. За умовою $b=3$ і $\varepsilon=2$, за формулою (6.8): $\frac{3}{a}=\sqrt{3}, a=\sqrt{3}$. Рівняння гіперболи (6.6) має вигляд $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. Якщо асимптоти гіперболи перпендикулярні, то $a=b$. З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$ та використовуючи формулу (6.8) дістанемо: $\varepsilon=\sqrt{2}$ і $a=b=6$. Отже, рівняння шуканої гіперболи (6.6) має вигляд: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

4. Із рівнянь асимптот гіперболи (6.9) випливає: $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, $b=\frac{5}{3}a$. Якщо точка $M(6;9)$ належить гіперболі, то за формулою (6.6): $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. Тоді $\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1$, $a^2=\frac{171}{25}$, $b^2=19$. Рівняння

гіперболи (6.6) має такий вигляд: $\frac{25x^2}{171} - \frac{y^2}{19} = 1$.

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її фокуси лежать на осі Oy, відстань між ними 20 і дійсна вісь дорівнює 16.

Розв'язання. Ця гіпербола буде спряженою до гіперболи (6.6), її рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. За умовою $2c = 20, c = 10$ і $2b = 16, b = 8$. Із рівності $c^2 - a^2 = b^2$ маємо $a^2 = 36$. Отже, рівняння шуканої гіперболи має вигляд: $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$.

Приклад 5. Через точку $M(-1;1)$ провести прямі, паралельні асимптотам гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 25$.

Розв'язання. Запишемо рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 25$ у канонічній формі, поділивши обидві частини заданого рівняння на 25: $\frac{x^2}{\frac{25}{4}} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$. Отже, $a^2 = \frac{25}{4}$, $b^2 = \frac{25}{9}$, звідки $a = \frac{5}{2}; b = \frac{5}{3}$.

Рівняння асимптот гіперболи за формулою (6.9) мають вигляд:

$$y = \pm\frac{b}{a}x;\ \ y = \pm\left(\frac{5}{3} : \frac{5}{2}\right)x;\ \ y = \pm\frac{2}{3}x.$$

За умовою шукані прямі паралельні асимптотам, тому їх кутові коефіцієнти дорівнюють відповідним кутовим коефіцієнтам асимптот. Запишемо рівняння прямої (2.8), що проходить через задану точку M і має заданий кутовий коефіцієнт: $y - 1 = \pm\frac{2}{3}\left(x - (-1)\right)$.

Перша пряма: $y - 1 = \frac{2}{3}(x+1)$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, $2x - 3y + 5 = 0$.

Друга пряма: $y - 1 = -\frac{2}{3}(x+1)$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $2x + 3y - 1 = 0$.

Приклад 6. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) відстань від фокуса, що лежить на осі Ox, до вершини

дорівнює 5;

2) відстань від фокуса, розміщеного на осі Oy, до директриси дорівнює 3;

3) парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $M(3;-2)$;

4) парабола симетрична відносно осі ординат і проходить через точку $M(-5;1)$.

Розв'язання. 1. За умовою $\frac{p}{2}=5$, звідси $p=10$. За формулою (6.10) рівняння параболи буде таким: $y^2=20x$.

2. За умовою $p=3$. Оскільки парабола симетрична відносно осі ординат, то вона має вигляд: $x^2=2py$, $x^2=6y$.

3. Щоб знайти рівняння параболи, підставимо координати точки M у формулу (6.10): $(-2)^2=6p$, звідки $p=\frac{2}{3}$. Рівняння шуканої параболи $y^2=\frac{4}{3}x$.

4. Якщо парабола симетрична відносно осі ординат, то її рівняння має вигляд $x^2=2py$. Оскільки точка M лежить на параболі, то: $(-5)^2=2p$, звідки $p=\frac{25}{2}$. Запишемо рівняння параболи $x^2=25y$.

Приклад 7. Визначити за рівнянням вигляд кривої:

1) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$; 2) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$;

3) $9x^2-6x-y+2=0$.

Розв'язання. Усі рівняння описуються многочленом другого порядку і мають вигляд (6.1).

1) Перетворимо задане рівняння, виділивши повні квадрати за x та y: $4\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2-4y\right)=-4$;

$$4\left(x^2-2x+1-1\right)+9\left(y^2-4y+4-4\right)=-4;$$

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=-4+4+36; \quad 4(x-1)^2+9(y-2)^2=36;$$

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$. Маємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ з центром у точці $O_1(1;2)$.

2) Перетворимо задане рівняння, виділивши повні квадрати за x та y:

$(x^2+2x)-9(y^2-4y)=44$;

$(x^2+2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=44$;

$(x+1)^2-9(y-2)^2=44+1-36$; $(x+1)^2-9(y-2)^2=9$;

$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$. Маємо канонічне рівняння гіперболи

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$ з центром в точці $O_1(-1;2)$.

3) Перетворимо задане рівняння, виділивши повні квадрати за x: $y=9x^2-6x+2$, $y=9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-1+2$,

$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(y-1)$. Маємо канонічне рівняння параболи $x^2=\frac{1}{9}y$, симетричної відносно осі ординат з центром в точці $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Який многочлен описує лінію другого порядку?
2. Дайте означення кола. Який вигляд має канонічне рівняння кола? Який вигляд має рівняння кола з центром у початку координат?
3. Дайте означення еліпса. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
4. Дайте означення фокуса, фокального радіуса, ексцентриситету еліпса. Як знайти ексцентриситет та які вимоги до

нього?

5. Які рівняння мають директриси еліпса? Сформулюйте основну властивість директриси.

6. Дайте означення гіперболи. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

7. Дайте означення фокуса, фокального радіуса, ексцентриситету гіперболи. Як знайти ексцентриситет та які вимоги до нього?

8. Які рівняння мають директриси гіперболи? Сформулюйте основну властивість директриси. Які рівняння мають асимптоти гіперболи?

9. Яка гіпербола називається спряженою? Запишіть її рівняння.

10. Дайте означення параболи. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?

11. Як визначити параметр параболи та її фокус? Сформулюйте фокальну властивість параболи. Запишіть рівняння директриси параболи.

12. Який алгоритм визначення вигляду кривої за лінією другого порядку?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скласти рівняння кола:

1) центром якого є початок координат, а радіус $R=4$;

2) центром якого є точка $O_1(1;-2)$, а радіус $R=6$;

3) що проходить через точку $A(1;1)$ та центром якого є точка $O_1(4;-2)$;

4) у якого точки $M_1(1;3)$ і $M_2(-5;3)$ є кінцями діаметра;

5) яке дотикається до прямої $x-3=0$ і його центр – початок координат;

6) яке дотикається до прямої $y=x+1$ і його центр $O_1(1;-1)$.

Завдання 2. Знайти точки перетину прямої $y=7x+12$ і кола $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Завдання 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис і симетричні відносно початку координат, якщо:

1) півосі відповідно дорівнюють 7 і 2;

2) відстань між фокусами дорівнює 6 і велика піввісь дорівнює 5;

3) велика вісь дорівнює 10 і ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$;

4) мала піввісь дорівнює 4 і відстань між фокусами 6;

5) відстань між фокусами дорівнює 8 та ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

Завдання 4. Знайти точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює 14.

Завдання 5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) $a = 4$ і $b = 3$;

2) відстань між фокусами $2c = 16$ і уявна вісь $2b = 12$;

3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

4) дійсна вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{2}x$ і дійсна вісь $2a = 4$;

6) відстань між директрисами $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

7) відстань між директрисами 12,8 і рівняння асимптот $y = \pm 0,75x$.

Завдання 6. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) її фокус $F(-6;0)$ і директриса $x = 6$;

2) її фокус $F(4;3)$ і директриса $y = -1$.

Завдання 7. Визначити за рівнянням вигляд кривої:

1) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$; 2) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$;

3) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$; 4) $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$;

5) $2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0$; 6) $4y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Відповіді: **1.** 1) $x^2 + y^2 = 16$; 2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 36$; 3) $(x-4)^2 + 9(y+2)^2 = 18$; 4) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$; 5) $x^2 + y^2 = 9$; 6) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{2}$; **2.** $(-1;5)$, $(-2;2)$; **3**. 1)

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;
5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; **4.** $\left(-5;3\sqrt{3}\right)$, $\left(-5;-3\sqrt{3}\right)$; **5.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;
2) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;
6) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 7) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; **6.** 1) $y^2=-24x$; 2) $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$;
7. 1), 4) еліпс; 2), 5) гіпербола; 3), 6) парабола.

Тема 7. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План

1. Загальне рівняння поверхні другого порядку.
2. Сфера.
3. Еліпсоїд.
4. Циліндрична поверхня: еліптичний циліндр, гіперболічний циліндр, параболічний циліндр.
5. Конічна поверхня.
6. Гіперболоїди: однопорожнинний та двопорожнинний.
7. Параболоїди: еліптичний та гіперболічний.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен **знати:** рівняння поверхонь другого порядку, їх характеристики; **уміти:** визначати вигляд поверхні та будувати графіки.

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння другого степеня:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0, \qquad (7.1)$$

де принаймні один з коефіцієнтів a,b,c,d,e,f відмінний від нуля.

Рівняння (7.1) називається *загальним рівнянням поверхні другого порядку.*

До поверхонь другого порядку належать циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром сфери. *Рівняння сфери* з центром у точці $O_1(a;b;c)$ і радіуса R (рис. 7.1) має вигляд: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

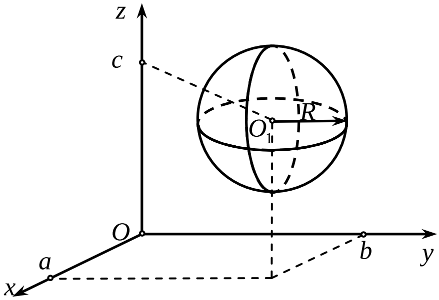


Рис. 7.1

Якщо центр сфери знаходиться в початку координат у точці $O(0;0;0)$, то маємо канонічне рівняння сфери: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Еліпсоїдом з півосями a, b, c і центром в початку координат називається поверхня, яка в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ визначається рівнянням: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис.7.2).

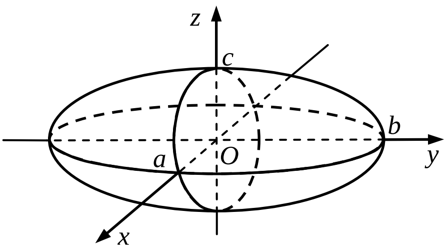


Рис. 7.2

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію (напрямну) і паралельні заданій прямій.

Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називаються *циліндричними поверхнями другого порядку.*

Їх *канонічними* рівняннями є:

$x^2 + y^2 = R^2$ – це *прямий круговий циліндр,* напрямною якого в площині Oxy є коло (рис.7.3, *а)*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – це *еліптичний циліндр,* напрямною якого в площині Oxy є еліпс (рис.7.3, *б)*;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – це *гіперболічний циліндр*, напрямною якого в площині Oxy є гіпербола (рис.7.3, *в*);

$y^2 = 2px$ – це *параболічний циліндр*, напрямною якого площині Oxy є парабола (рис.7.3, *г)*.

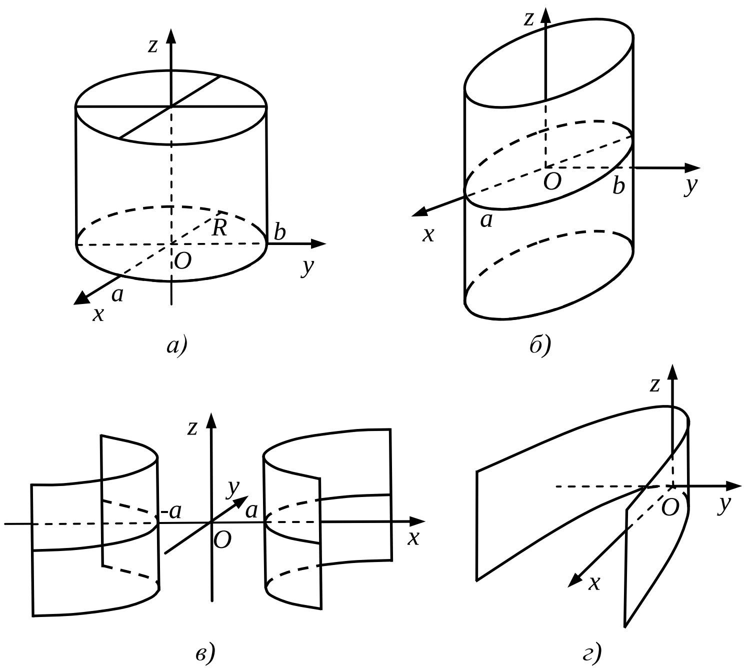


Рис. 7.3

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих (твірних), що проходять через задану точку P, яка називається її вершиною, і перетинають задану лінію L, яку називають її напрямною.

Конічна поверхня, напрямною якої є коло, називається *прямим круговим конусом* і описується рівнянням $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис.7.4, *а*). *Еліптичний конус*, у якого напрямною є еліпс, описується рівнянням: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис.7.4, *б*).

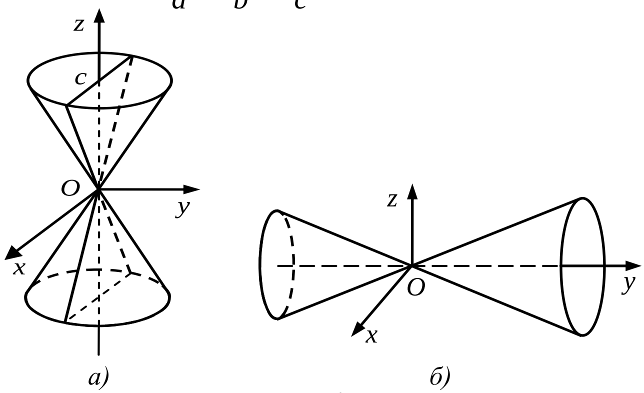


Рис. 7.4

Однопорожнинним гіперболоїдом з півосями a, b, c і віссю Oz називається поверхня (рис.7.5, *а*), яка в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. У перетині гіперболоїда горизонтальними площинами $z=h$ отримуємо еліпси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$. У перетині гіперболоїда вертикальними площинами $x=h$ або $y=h$ отримуємо гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ або $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$.

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня (рис.7.5, *б)*, яка в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Перетин гіперболоїда горизонтальними площинами $z=h, |h|>c$

є еліпсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$. Перетин гіперболоїда вертикальними площинами $x=h$ або $y=h$ є гіперболами $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{a^2}-1$ або $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{b^2}-1$.

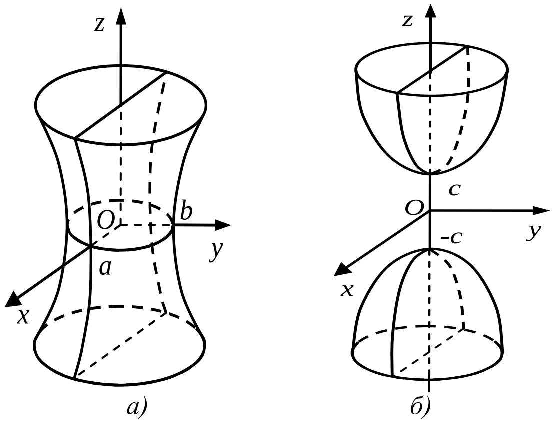
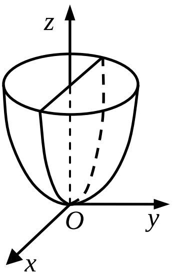


Рис. 7.5

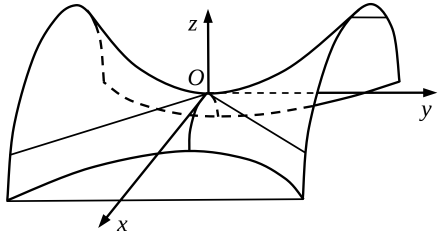
Еліптичним параболоїдом з параметрами a, b і вершиною в початку координат називається поверхня (рис 7.6, *а*), яка в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$. Перетин параболоїда горизонтальними площинами $z=h, |h|>c$ є еліпси $\frac{y^2}{b^2}=2z-\frac{h^2}{a^2}$ або $\frac{x^2}{a^2}=2z-\frac{h^2}{b^2}$.

Гіперболічним параболоїдом з параметрами a, b і вершиною в початку координат називається поверхня (рис. 7.6, *б*), яка в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

У перетині параболоїда горизонтальними площинами $z=h$ отримуємо гіперболи $\frac{x^2}{2a^2h}-\frac{y^2}{2b^2h}=1$. У перетині параболоїда вертикальними площинами $x = h$ або $y = h$ отримуємо гіперболи $\frac{y^2}{b^2} = -2z + \frac{h^2}{a^2}$ або $\frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}$.



а)



б)

Рис. 7.6

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Скласти рівняння сфери:

1) з центром у точці $M_0(-5;3;2)$, яка дотикається до площини $2x - 2y + z - 4 = 0$;

2) яка дотикається до двох паралельних площин $\pi_1 : 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ і $\pi_2 : 6x - 3y - 2z + 63 = 0$, якщо її центр міститься на прямій $\frac{x-11}{6} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{-2}$;

3) яка проходить через чотири точки $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;-1)$.

Розв'язання. 1. Радіус сфери дорівнює відстані від точки M_0 до заданої площини. За формулою (3.6): $R = \frac{|-5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6$. Тоді канонічне рівняння сфери буде: $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.

2. Задано пряму, перпендикулярну площинам. Запишемо параметричні рівняння заданої прямої (4.2): $x = 11 + 6t,\ y = -4 - 3t,\ z = -3 - 2t$. Підставимо їх у рівняння

площини π_1: $6(11+6t)-3(-4-3t)-2(-3-2t)-35=0$, $t=-1$. Тоді $x=5,\ y=-1,\ z=-1$. Отже, $M_1(5;-1;-1)$ – точка перетину прямої π_1. Аналогічно, $M_2(-7;5;3)$ – точка перетину прямої з площиною π_2. Центр сфери M_0 – є серединою відрізка M_1M_2. За формулами (1.2): $M_0(-1;2;1)$. Радіус сфери за формулою (1.1): $R=M_0M_1=\sqrt{36+9+4}=7$. Тоді канонічне рівняння сфери буде: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.

3. Координати точок O, A, B, C задовольняють рівнянню сфери. Тому:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=R^2; \\ (2-a)^2+b^2+c^2=R^2; \\ (1-a)^2+(1-b)^2+c^2=R^2; \\ (1-a)^2+b^2+(1+c)^2=R^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо: $a=1,\ b=0,\ c=0,\ R^2=1$. Тоді канонічне рівняння сфери буде таким $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

Приклад 2. Знайти точки перетину поверхні $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ і прямої $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння заданої прямої (4.2): $x=4t,\ y=-3t,\ z=-2+4t$. Підставимо їх у рівняння заданого однопорожнинного гіперболоїда: $\frac{16t^2}{16}+\frac{9t^2}{9}-\frac{(4t-2)^2}{4}=1$, $(t-1)^2=0,\ t_1=t_2=1$. Тоді $x=4,\ y=-3,\ z=2$. Отже, пряма дотикається до поверхні гіперболоїда в точці $M(4;-3;2)$.

Приклад 3. За яких значень параметра p площина $2x-2y-z=p$ дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=81$?

Розв'язання. Якщо площина дотикається до сфери, то відстань від її центра до площини дорівнює радіусу сфери, тобто:

$$\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-0-p|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=9,\ |p|=27,\ p=\pm 27.$$

Приклад 4. Установити, що площина $y-2=0$ перетинає еліпсоїд $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1$ по еліпсу. Знайти його півосі та вершини.

Розв'язання. Перетин двох поверхонь у просторі задає деяку лінію. Її рівняння визначається системою: $\begin{cases} y-2=0; \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1. \end{cases}$

Оскільки $y=2$, то $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=\frac{1}{2}$. Остаточно маємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{\frac{9}{2}}=1$, розташованого в площині $y-2=0$. Його півосі $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Вершини еліпса розташовані на великому діаметрі в точках $A_1(-2\sqrt{2};2;0),\ A_2(2\sqrt{2};2;0)$ та на меншому діаметрі в точках $B_1(0;2;-\frac{3\sqrt{2}}{2}),\ B_2(0;2;\frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Приклад 5. Визначити вигляд поверхні, яка визначається наступними рівняннями:

1) $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$;

2) $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$;

3) $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

Розв'язання. Усі рівняння мають вигляд (7.1).

1. Групуємо члени з однаковими координатами: $4\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2-2y\right)+36\left(z^2-2z\right)=-13$. Доповнюємо до повних квадратів вирази в дужках:

$$4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-2y+1\right)+36\left(z^2-2z+1\right)=-13+4+9+36,$$

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36,\ \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}=1.$$

Маємо канонічне рівняння еліпсоїда, центр якого міститься в точці $O_1(1;1;1)$, а півосі відповідно дорівнюють 3, 2 і 1.

2. Виконуємо аналогічні перетворення: $\left(x^2-4x\right)-\left(y^2-8y\right)=2z$, $\left(x^2-4x+4\right)-\left(y^2-8y+16\right)=2z+4-16$, $(x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6)$, $(x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6)$. Маємо канонічне рівняння гіперболічного параболоїда, центр якого міститься в точці $O_1(2;4;6)$.

3. Виконуємо аналогічні перетворення:

$$4\left(x^2-2x+1\right)-\left(y^2-4y+4\right)+4\left(z^2+2z+1\right)=-4+4-4+4,$$

$$4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0,\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{4}=0.$$

Маємо канонічне рівняння конічної поверхні, центр якої міститься в точці $O_1(1;2;-1)$.

4. Виконуємо аналогічні перетворення:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+2y+1\right)+z^2=\frac{1}{4}+1-1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Маємо канонічне рівняння сфери радіуса $R=\frac{1}{2}$, центр якої міститься в точці $O_1(\frac{1}{2};-1;0)$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Дайте означення поверхні другого порядку.
2. Яка поверхня називається циліндричною. Запишіть канонічні рівняння прямого кругового, еліптичного, гіперболічного та параболічного циліндрів.
3. Яка поверхня називається конічною. Запишіть канонічні рівняння прямого кругового та еліптичного конусів.
4. Що називається сферою? Запишіть канонічне рівняння сфери. Яке рівняння має сфера з центром в початку координат?

5. Наведіть канонічне рівняння еліпсоїда.

6. Наведіть канонічні рівняння однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів.

13. Наведіть канонічні рівняння еліптичного та гіперболічного параболоїдів.

14. Який алгоритм визначення вигляду поверхні за рівнянням другого порядку?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Скласти рівняння сфери, якщо точки $M_1(4;-3;7)$ і $M_2(2;1;3)$ є кінцями діаметра. Чи лежать на цій сфері точки $M_3(4;-2;7)$ і $M_4(5;-3;4)$?

Завдання 2. Знайти рівняння еліпсоїда, який проходить через точки $A\left(2;2;4\right)$, $B\left(0;0;6\right)$, $C\left(2;4;2\right)$.

Завдання 3. На параболоїді $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ знайти прямолінійні твірні, паралельні площині $3x+2y-4z=0$.

Завдання 4. Визначити вид поверхні, яка визначається такими рівняннями: 1) $x^2+z^2-4x-4z+4=0$;

2) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$;

3) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$;

4) $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$;

5) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$;

6) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$;

7) $2x^2+2y^2+2z^2-12x-10y+8z+1=0$.

Відповіді: **1.** $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-5\right)^2=9$; M_3 не лежить на сфері; M_4 лежить на сфері; **2.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$; **3.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$; **4.** 1) прямий круговий циліндр; 2) конус; 3) однопорожнинний гіперболоїд; 4) двопорожнинний гіперболоїд; 5) еліптичний параболоїд; 6) гіперболічний параболоїд; 7) сфера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища математика*: Збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.
2. *Вища математика*: навч. посіб. / І. О. Ластівка, О. І. Безверхий, І. П. Кудзіновська. – К. : НАУ, 2018. – 452 с.
3. *Денисюк В. П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 2-ге вид., виправ. – К. : НАУ, 2013. – 472 с.
4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.
5. *Збірник задач з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії:* навч. посіб. / Т.В. Лубенська, Л.Д. Чупаха. – К. : НАУ, 2005. – 210 с.
6. *Математика для економістів* : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 1 / І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, І. В. Шевченко [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 432 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей**

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ДАВИДОВ Олександр Сергійович
ЛЕВКОВСЬКА Тетяна Андріївна