МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи для студентів
спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини»

Київ 2018

УДК 51:33 (076.5)
ББК В 1я7
М 34

Укладачі:
І. О. Ластівка – д.т.н., проф.
І. В. Шевченко – к.е.н., доц.

Рецензент: *О. О. Железняк*

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №___ від ________ 2018 р.).

М 34 **Математика для економістів:** методичні рекомендації до самостійної роботи / уклад. : І. О. Ластівка, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2018. – 96 с.

Укладено відповідно до програми курсу «Математика для економістів». Методичні рекомендації містять теоретичний матеріал з основних питань даного курсу та завдання для самостійного виконання.

Для студентів спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини».

ЗМІСТ

ВСТУП…………………………..…………………………………………… 4
Тема 1. ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. МАТРИЦІ, ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ. ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ В ЕКОНОМІЦІ……………… 5
Тема 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ……….. 15
Тема 3. ВЕКТОРИ, ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРИ В ПРЯМОКУТНІЙ ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ……………………………………………. 25
Тема 4. ОЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ. КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ…………………………..……………… 38
Тема 5. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ………………… 47
Тема 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ…………………………………………………………. 57
Тема 7. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В ЕКОНОМІЦІ... 66
Тема 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ……………………………………………………………. 77
Тема 9. ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ 87
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ…….…………………………………………..... 96

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни «Математика для економістів» – опанування студентами основними математичними поняттями та методами, необхідними для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач у галузях економіки.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методами дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальної програми курсу «Математика для економістів» для студентів спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини».

У пропонованому виданні наведено задачі для індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має економічну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно під час вивчення навчального матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочій навчальній програмі дисципліни. Кожна тема містить основні методичні рекомендації та завдання для самостійного виконання, розв'язування яких сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та практичному застосуванню основних теоретичних положень.

Тема 1. ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. МАТРИЦІ, ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ. ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ В ЕКОНОМІЦІ

План

1. Визначники другого і третього порядків, їх властивості.
2. Теорема Лапласа про розклад визначника за елементами рядка або стовпця. Визначники *n*-го порядку.
3. Матриці. Дії над матрицями.
4. Обернена матриця. Ранг матриці.
5. Використання алгебри матриць в економіці.

Література: [1]; [2]; [5]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення та запис визначників, їх основні властивості, означення та запис матриць; ***уміти:*** обчислювати визначники другого, третього і вищих порядків; виконувати дії над матрицями, знаходити обернену матрицю, обчислювати ранг матриці, використовувати теорію матриць у задачах економіки.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} = \grave{a}_{11}\grave{a}_{22} - \grave{a}_{12}\grave{a}_{21}\,. \tag{1.1}$$

Визначником (детермінантом) третього порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}\,. \tag{1.2}$$

Символи $\grave{a}_{ij}$ – це елементи визначника, де перший індекс i означає номер рядка, другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких розміщений елемент.

Порядок визначника дорівнює кількості його рядків або стовпців.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) становлять *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} визначника (1.1) і a_{13}, a_{22}, a_{31} визначника (1.2) – *побічну діагональ*. Терміни «головна діагональ», «побічна діагональ» мають місце і для визначників вищих порядків.

Основні властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.
2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то визначник змінить знак на протилежний.
3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
4. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.
5. Визначник, в якого елементи двох рядків (стовпців) однакові або пропорційні, дорівнює нулю.
6. Якщо кожний елемент i-го рядка (j-го стовпця) деякого визначника є сумою двох доданків, то даний визначник дорівнює сумі двох визначників того самого порядку, в одного з яких i-й рядок (j-й стовпець) складається з перших доданків, а в другого – з других; інші елементи всіх трьох визначників однакові.
7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на те саме число.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij}, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення.

Визначник n-го порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \; i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (1.3)$$

Права частина виразу (1.3) називається *розкладом визначника за елементами i-го рядка* або *j-го стовпця*.

Зручно обчислювати визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця, що містять найбільшу кількість нулів. Нулі у відповідних рядках або стовпцях можна утворити, застосувавши властивість 7 визначників.

Матрицею розміром $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} $\left(i = \overline{1,m}\,;\; j = \overline{1,n}\right)$, розміщених в m рядках та n стовпцях, і записана у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

де a_{ij} – елементи матриці; i, j – індекси, що визначають номер рядка та номер стовпця, на перетині яких розміщується зазначений елемент.

Квадратною називають матрицю, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці визначає її *порядок*.

Діагональною називають квадратну матрицю, в якій усі її елементи, крім тих, що лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одиничною називають діагональну матрицю, в якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці. Одиничну матрицю, як правило, позначають латинською літерою E.

Нульовою називають матрицю, усі елементи якої дорівнюють нулю.

Матриця, в якої лише один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, в якої лише один стовпець – *матрицею-стовпцем.*

Дві матриці називаються *рівними,* якщо їх розміри рівні й відповідні елементи рівні.

Заміна рядків матриці A її стовпцями і навпаки називається *транспонуванням матриці.* Матрицю, транспоновану до матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, позначають $A^T_{m\times n}=\left(a^T_{ij}\right)=\left(a_{ji}\right)$.

Сумою двох матриць однакового розміру є матриця того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів заданих матриць: $A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Різницею двох матриць однакового розміру є матриця того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює різниці відповідних елементів матриць зменшуваного і від’ємника:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}-b_{ij}\right).$$

Добутком матриці на число (або числа на матрицю) називається матриця, елементами якої є добутки елементів даної матриці на це число:

$$\lambda\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot\lambda=C_{m\times n};\quad \lambda\cdot\left(a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\right)\cdot\lambda=\left(c_{ij}\right).$$

Операція *множення двох матриць* уводиться лише для узгоджених матриць. Матриця A називається *узгодженою з матрицею* B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Добутком матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ *на матрицю* $B_{n\times k}=\left(b_{ij}\right)$ називається матриця $C_{m\times k}=\left(c_{ij}\right)$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = \overline{1,m}\,;\; j = \overline{1,k}\,.$$

Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці A і B називаються *переставними.*

Кожній квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником (детермінантом)* цієї *матриці* і позначається det *A*:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника матриці такий самий, як і порядок матриці.

Оберненою до матриці A є така матриця A^{-1}, що виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Матриця A^{-1} має той самий порядок, що й матриця A.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

Обернену матрицю A^{-1} до даної матриці A можна обчислити за формулою

$$\grave{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Нехай задано матрицю *A* розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці вибираємо будь-які k рядків та k стовпців ($k \le \min(m, n)$). Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю k-го порядку, визначник якої називають *мінором* k-го порядку матриці *A*.

Рангом $r(A)$ *матриці* A називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

З означення рангу матриці випливає, що ранг існує для будь-якої матриці $A_{m \times n}$, причому $0 \le r(A) \le \min(m, n)$; ранг матриці $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли маємо нульову матрицю ($A = 0$); для квадратної матриці A n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли $\det A \ne 0$.

Для обчислення рангу матриці зручно застосовувати метод *елементарних перетворень*. Суть цього методу полягає в тому, що матрицю зводять до так званого східчастого вигляду, коли всі елементи, що стоять під елементами головної діагоналі, дорівнюють нулю. Тоді кількість ненульових рядків отриманої східчастої матриці визначає ранг матриці.

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;

2) множення елементів рядка (стовпця) матриці на той самий відмінний від нуля множник;

3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на те саме число.

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.

Значна частина математичних моделей економічних об’єктів і процесів записується в простій і компактній матричній формі. За допомогою матриць зручно записувати деякі економічні залежності. Наприклад, розподіл ресурсів за окремими галузями економіки (табл. 1.1) може бути записаний у вигляді матриці

$A=\begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}$, в якій елемент $a_{11}=5,3$ вказує на кількість (норми витрат) електроенергії, що споживається промисловістю, елемент $a_{22}=2,1$ – на кількість трудових ресурсів, що використовується в сільському господарстві тощо.

Таблиця 1.1

Ресурси	Галузі економіки	
	Промисловість	Сільське господарство
Електроенергія, ум. од.	5,3	4,1
Трудові ресурси, ум. од.	2,8	2,1
Водні ресурси, ум. од.	4,8	5,1

Матриця $A=\left(a_{ij}\right)$, де a_{ij} – норми витрат i-го ресурсу на виробництво j-го виду продукції, називається *технологічною матрицею норм витрат.*

Розглянемо задачу. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 і використовує два типи сировини S_1 і S_2. Задано технологічну матрицю норм витрат $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, в якій кожен її елемент a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2,3)$ – це кількість сировини i-го типу, що витрачається на виробництво продукції j-го виду. План виробництва задано матрицею-стовпцем $C=\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 130 \end{pmatrix}$, а вартість одиниці кожного типу сировини – матрицею-рядком $B=\begin{pmatrix} 30 & 50 \end{pmatrix}$. Визначити загальні витрати S і загальну вартість Q сировини під час виробництва продукції.

Обчислюємо загальні витрати S сировини:

$$S=AC=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 130 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 730 \\ 980 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виробництва продукції P_1, P_2, P_3 використовується сировини S_1 730 од. і 980 од. – сировини S_2.

Загальна вартість Q сировини становитиме

$$Q = BS = \begin{pmatrix} 30 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 730 \\ 980 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70900 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальна вартість використаної сировини $Q = 70900$ грош. од.

Із прикладів зрозуміло, що матриці дозволяють із мінімальними витратами праці та часу обробляти величезний і різноманітний статистичний матеріал, різні вихідні дані, що характеризують рівень, структуру, особливості соціально-економічного комплексу.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть визначники.

Приклад 1.1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.2. $\begin{vmatrix} a^2 + 3a + 9 & a \\ a^2 & a - 3 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.3. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Приклад 1.4. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & a \\ -1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

Приклад 1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.6. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \\ 16 & 9 & 15 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.7. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 & -1 \\ -8 & -6 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.8. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -6 \\ -7 & 7 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.9. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

Приклад 1.10. $\begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & -5 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

Завдання 2. Знайдіть матрицю $D = 4\grave{A}\hat{A} - 3\tilde{N}^2$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -11 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ 9 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайдіть матрицю $D = AB - 5A^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Обчисліть.

Приклад 4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 4.2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Завдання 5. Знайдіть значення многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = x^2 - 3x + 1,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 6. Знайдіть обернену матрицю до матриць.

Приклад 6.1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$

Приклад 6.2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

Приклад 6.3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Приклад 6.4. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Завдання 7. Знайдіть ранги матриць.

Приклад 7.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.3.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 9 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.4.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -4 & 5 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.5.

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.6.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Завдання 8. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів та використовує сировину двох типів. Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного виду задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вартість одиниці сировини кожного типу задано матрицею $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Які загальні витрати підприємства на виробництво 100 од. продукції першого виду, 200 од. – другого виду, 150 од. – третього?

Завдання 9. Фірма реалізує чотири види товарів у трьох районах міста. Матриця рівня продажу має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, де рядки матриці – райони, а стовпці – види товарів. Обсяги продажу наведено в тисячах штук. Ціни (в тис.

грн./тис. шт.) задані за допомогою матриці $C=\begin{pmatrix}7\\4\\2\\5\end{pmatrix}$. Знайдіть сумарний обсяг продажу в кожному районі (тис. грн.).

Тема 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

План

1. Основні означення. Теорема Кронекера-Капеллі.
2. Метод Крамера.
3. Матричний метод.
4. Метод Гаусса.
5. Застосування систем лінійних рівнянь в економіці.

Література: [3]; [7]; [9]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення та запис систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), теорему Кронекера-Капеллі, методи розв'язування СЛАР; ***уміти:*** досліджувати СЛАР на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, розв'язувати СЛАР методами Крамера та Гаусса, матричним методом, застосовувати СЛАР в економіці.

Систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

називають *системою лінійних алгебраїчних рівнянь*, де $x_j \left(j = \overline{1,n} \right)$ – невідомі, $a_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right)$ – коефіцієнти при невідомих, $b_i \left(i = \overline{1,m} \right)$ – вільні члени системи рівнянь.

Система рівнянь (2.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени b_i дорівнюють нулю, і *неоднорідною,* якщо хоча б один із них відмінний від нуля.

Розв'язком системи рівнянь (2.1) називається упорядкована множина чисел $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0 \right)$, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, $x_2, \ldots,$ x_n усі рівняння системи лінійних алгебраїчних рівнянь перетворюються на тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має лише один розв'язок, і *невизначеною,* якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи дістають, зокрема, внаслідок елементарних перетворень даної системи, а саме:

1) множення будь-якого рівняння на довільне число, відмінне від нуля;
2) зміна рівнянь системи місцями;
3) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на довільне число.

Позначимо через *A* матрицю, утворену з коефіцієнтів a_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right)$ при невідомих системи (2.1), і назвемо її *основною матрицею системи*, а матрицю A^* – *розширеною матрицею* системи, що утворена з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів b_j $\left(j = \overline{1,n} \right)$ системи (2.1):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший кількості невідомих, то система має безліч розв’язків.

Метод Крамера. Розглянемо систему, яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Основна матриця системи рівнянь (2.2) квадратна. Визначник цієї матриці

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи*.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь (2.2) має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

де Δx_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – визначники, отримані з визначника системи Δ заміною елементів відповідного k-го стовпця стовпцем вільних членів.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta x_k \neq 0$, система (2.2) несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta x_k = 0$, то система (2.2) має безліч розв'язків.

Матричний метод. Систему (2.2), що містить n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими, можна записати у вигляді матричного рівняння

$$A \cdot X = B, \tag{2.3}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – основна матриця системи,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – відповідні матриці-стовпці невідомих x_i і вільних членів b_j $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Якщо $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} (1.4) до матриці A. Помноживши ліворуч обидві частини матричного рівняння (2.3) на A^{-1}, дістанемо його розв'язок

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B \tag{2.4}$$

Отже, розв'язок системи (2.2) матричним методом знаходиться за формулою (2.4).

Метод Гаусса. Метод Гаусса є універсальним методом розв'язування СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити систему на сумісність та визначеність і знайти її розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих із рівнянь системи. Він ґрунтується на елементарних перетвореннях, за допомогою яких система рівнянь зводиться до *східчастого* або *трапецієподібного* чи *трикутного вигляду.*

Розглянемо систему (2.1) m лінійних рівнянь з n невідомими. Виключимо з усіх рівнянь цієї системи, починаючи з другого, невідоме x_1 за умови, що $a_{11} \neq 0$ (інакше потрібно поміняти місцями рівняння). Для цього помножимо перше рівняння на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо до другого, потім перше рівняння помножимо на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього і т.д. Система рівнянь (2.1) після $m-1$ таких дій перетвориться до вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Виконаємо наступний крок методу Гаусса – виключимо з усіх рівнянь системи (2.5), починаючи з третього, невідоме x_2 за умови, що $a'_{22} \neq 0$, додавши до третього рівняння системи (2.5) друге, помножене на $-\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}$, і т.д. У результаті отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases}$$

Оскільки кількість кроків не може перевищувати n, то ми прийдемо до системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s + \ldots + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Для розв’язування системи (2.6) розглянемо два можливі випадки: $s = n$ і $s < n$. При $s = n$ система (2.6) має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

З останнього рівняння знайдемо єдине значення x_n. Підставивши його в передостаннє рівняння системи (2.7), знайдемо єдине значення x_{n-1} і т.д., поки не дійдемо до першого рівняння, визначивши невідоме x_1. Отже, у цьому випадку система має єдиний розв'язок.

При $s < n$ за умови, що в системі (2.6) $a_{ss}^{(s-1)} \neq 0$, маємо систему трапецієподібного вигляду. З останнього рівняння знаходимо x_s і підставимо в передостаннє рівняння. Піднімаючись угору, знайдемо всі інші невідомі x_{s-1}, $x_{s-2}, \ldots$, x_3, x_2, x_1. Система рівнянь (2.6) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_{1s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{1n}x_n; \\ x_2 = c_2 + c_{2s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = c_s + c_{ss+1}x_{s+1} + \ldots + c_{sn}x_n, \end{cases} \tag{2.8}$$

де вільні члени $c_1, c_2, ..., c_s$ і коефіцієнти при невідомих $x_{s+1}, \ldots, x_n$ – задані значення. Невідомі x_1, $x_2, \ldots, x_s$ системи рівнянь (2.8) – *основні (базисні)*. Невідомі x_{s+1}, $x_{s+2}, \ldots, x_n$ – *вільні* й вони можуть набувати довільних значень. Надаючи вільним невідомим x_{s+1}, $x_{s+2}, \ldots, x_n$ конкретних значень, знайдемо з системи (2.8) значення основних невідомих x_1, $x_2, \ldots, x_s$. Отже, якщо $s < n$, система має безліч розв'язків.

Зауваження. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручно приводити до східчастого вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю системи. При цьому елементарні перетворення виконуються над рядками розширеної матриці.

Використання елементів лінійної алгебри є одним з основних методів розв'язування широкого класу економічних задач, пов'язаних із плануванням виробництва і транспортних перевезень, з прогнозуванням і оцінюванням функціонування підприємства, а також з плануванням мікроекономічної діяльності підприємства.

Балансова модель виробництва є однією з математичних моделей, яка записується у вигляді системи рівнянь, кожне з яких виражає вимогу балансу між кількістю продукції, що випускається окремим економічним об’єктом, і сукупністю потреб у цьому продукті.

Співвідношеннями балансу називаються рівняння вигляду

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i,\ i = \overline{1,\ n}, \tag{2.9}$$

де x_i – загальний обсяг продукції i-ї галузі (її валовий випуск), x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі, що споживається j-ю галуззю під час виробництва обсягу продукції x_j, y_i – так званий продукт кінцевого споживання або кінцевий продукт.

Уведемо матрицю-стовпець X обсягів виробленої продукції (валовий випуск), матрицю-стовпець Y обсягів продукції кінцевого споживання і матрицю A коефіцієнтів прямих витрат (структурну матрицю):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\grave{a}_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j},\ i = \overline{1,\ n},\ \ j = \overline{1,\ n}$.

Тоді систему рівнянь (2.9) можна записати у матричному вигляді

$$X = AX + Y. \tag{2.10}$$

Рівняння (2.10) називають *рівнянням міжгалузевого балансу* або *моделлю Леонтьєва*.

За допомогою рівняння міжгалузевого балансу можна розв’язати задачі двох типів:

1) за заданою матрицею валового випуску X знайти матрицю кінцевого продукту Y ;

2) за відомою матрицею кінцевого продукту Y визначити матрицю валового випуску X.

Зауважимо, що всі елементи матриць X, Y, A – невід'ємні.

Для розв'язання задач першого типу достатньо представити в рівнянні (2.10) матрицю X як EX (E – одинична матриця розміру $n \times n$) і виразити Y:

$$EX - AX = Y, \qquad Y = (E - A)\,X. \tag{2.11}$$

Для розв'язання задач другого типу потрібно з'ясувати, чи існує матриця $(E - A)^{-1}$, обернена до матриці $(E - A)$. Якщо вона існує, то розв'язок рівняння (2.11) відносно X шукаємо у вигляді

$$X = (E - A)^{-1}\,Y,$$

де матриця $(E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*.

Існує низка задач, у яких потрібно спрогнозувати випуск продукції, якщо відомі запаси сировини. Такі задачі розв'язуються за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'яжіть системи лінійних алгебраїчних рівнянь, користуючись методами Крамера, Гаусса та матричним методом.

Приклад 1.1. $\begin{cases} 7x + y - 3z = 14, \\ x - 3y + 7z = -16, \\ -4x + y + z = -5. \end{cases}$

Приклад 1.2. $\begin{cases} x - y + 3z = 4, \\ 2x + y - 2z = 3, \\ x + 2y - z = 3. \end{cases}$

Приклад 1.3. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

Приклад 1.4. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$

Приклад 1.5. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 16, \\ 2x - 4y - 3z = -5, \\ x + 5y - z = 18. \end{cases}$

Приклад 1.6. $\begin{cases} 7x + y - z = 1, \\ -x - 2y + z = -3, \\ x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$

Приклад 1.7. $\begin{cases} 7x - 8y + z = -6, \\ x + y + z = 6, \\ -x + y + 3z = 10. \end{cases}$

Приклад 1.8. $\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 2x - 3y + z = -3, \\ -x + y + 5z = 6. \end{cases}$

Завдання 2. Дослідіть на сумісність СЛАР і розв’яжіть у разі сумісності.

Приклад 2.1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Приклад 2.2.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12; \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16. \end{cases}$$

Приклад 2.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2\tilde{o}_3 + 5x_4 = 3; \\ 9\tilde{o}_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4\tilde{o}_4 = 5; \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - \tilde{o}_4 = 7. \end{cases}$$

Приклад 2.4.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Приклад 2.5.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

Приклад 2.6.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Приклад 2.7.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Приклад 2.8.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Завдання 3. У табл. 2.1 наведено показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості.

а) Визначте матрицю прямих витрат A;

б) припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 34, 43 та 85 для галузей 1, 2, 3, відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Таблиця 2.1

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	30	58	28	24	110
2	40	22	64	34	150
3	40	46	46	82	200

Завдання 4. У табл. 2.2 наведено дані балансу трьох галузей промисловості за певний період часу. Знайдіть обсяг валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшити відповідно до 60, 70 і 30 умовних грошових одиниць.

Таблиця 2.2

№ з/п	Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2	3		
1	Видобуток і переробка вуглеводню	5	35	20	40	100
2	Енергетика	10	10	20	60	100
3	Машинобудування	20	10	10	10	50

Завдання 5. У табл. 2.3 для підприємства, що складається з трьох цехів, наведено витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеху, трудомісткість у людино-годинах на одиницю продукції, вартість одиниці відповідної сировини та вартість однієї робочої людино-години.

Таблиця 2.3

Показники	Норми витрат			Вартість
	Цех 1	Цех 2	Цех 3	
Сировина 1	1,5	2,5	0,9	10
Сировина 2	2	0	1,9	25
Паливо	3	1,8	4,2	8
Трудомісткість	10	22	22	1,4

Визначте:

а) загальні витрати сировини, палива та трудових ресурсів;

б) коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеху;

в) повні витрати сировини, палива та праці кожним цехом та підприємством.

Завдання 6. Фабрика спеціалізується на випуску трьох видів виробів P_1, P_2, P_3. При цьому використовується три види сировини: R_1, R_2, R_3. Витрати кожного виду сировини на одиницю кожного виду продукції і загальні витрати кожного виду сировини наведено у табл. 2.4. Обчисліть обсяг випуску кожного виду продукції, що випускається фабрикою.

Таблиця 2.4

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю виробу, ум. од.			Загальні витрати кожного виду сировини, ум. од.
	P_1	P_2	P_3	
R_1	4	3	5	2300
R_2	1	1	2	800
R_3	2	2	3	1400

Тема 3. ВЕКТОРИ, ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРИ В ПРЯМОКУТНІЙ ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

План

1. Вектори. Лінійні дії із векторами.
2. Вектори в системі координат.
3. Скалярний добуток двох векторів.
4. Векторний добуток двох векторів.
5. Мішаний добуток трьох векторів.

Література: [1]; [3]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** означення вектора, лінійної залежності та незалежності векторів, базису лінійного простору, скалярного, векторного та мішаного добутків векторів, їх властивості; ***уміти:*** виконувати лінійні операції з векторами; знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, розкладати вектор за базисом, застосовувати вектори в задачах економіки.

Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає *напрямний відрізок*, або *вектор*, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. Якщо точка A – початок вектора, а точка B – його кінець, то тоді вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, який зображує цей вектор, і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.

Одиничним називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називають *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^{\,0}$.

Нульовим вектором, або *нуль-вектором,* називають вектор, початок і кінець якого збігаються, і позначають $\vec{o}$. Довжина такого вектора дорівнює нулю. Напрям нульового вектора невизначений.

Колінеарними називають вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно.

Рівними називають такі колінеарні вектори, які однаково напрямлені й мають рівні довжини.

Протилежними називають такі колінеарні вектори, які протилежно напрямлені й мають рівні довжини. Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$, позначатимемо $-\vec{a}$.

Компланарними називають вектори, що лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Додавання векторів. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, напрямлений із початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$. Це правило додавання векторів називається *правилом трикутника.*

Часто для знаходження суми двох векторів використовують *правило паралелограма*, а саме: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку, то *сумою* $\vec{a}+\vec{b}$ векторів буде вектор $\vec{c}$, який має спільний початок із цими векторами і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Віднімання векторів. Під різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ такий, що $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Тобто, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний до вектора $\vec{b}$.

Множення вектора на число. Нехай задано вектор $\vec{a}$ і деяке дійсне число λ. *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\,\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Якщо $\lambda>0$ і $\vec{a}\neq 0,$ то вектори $\lambda\,\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені однаково. Якщо $\lambda<0$ і $\vec{a}\neq 0,$ то вектори протилежно напрямлені. Якщо $\lambda=0$ або $\vec{a}=0,$ то $\lambda\,\vec{a}=\vec{0}$.

Властивості лінійних дій із векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$
3. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}$.
4. $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.
5. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$

Множина всіх n-вимірних векторів називається n*-вимірним простором* R_n. Простір називається *лінійним*, якщо в ньому визначено лінійні дії з векторами – додавання і множення на число із властивостями цих дій.

Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ називають вектор $\vec{b}$: $\vec{b}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$, де числа $\lambda_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ – коефіцієнти лінійної комбінації.

Система векторів $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{a_n}$ називається *лінійно залежною,* якщо рівність $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=0$ можлива за умови, що хоча б одне з чисел $\lambda_i\neq 0$, $i=\overline{1,n}$. Якщо ж ця рівність можлива лише за умови, що всі $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то система векторів називається *лінійно незалежною*.

Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні. Два неколінеарні вектори – лінійно незалежні.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні. Три некомпланарні вектори – лінійно незалежні.

Базисом лінійного простору називають будь-яку упорядковану сукупність n векторів, якщо:

– усі вектори даної сукупності лінійно незалежні;

– будь-який вектор цього простору є лінійною комбінацією даної сукупності векторів.

Вектори, що складають базис, називають *базисними.*

Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів деякого простору називається його *розмірністю.* Розмірність простору дорівнює кількості базисних векторів цього простору.

Якщо система векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – базис n-вимірного простору і вектор $\vec{a}$ розкладений за цим базисом, тобто $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n$, то числа λ_1, λ_2, …, λ_n називають координатами вектора $\vec{a}$ в даному базисі. У координатній формі вектор $\vec{a}$ записують так: $\vec{a} = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$.

Проекцією $np_u \overrightarrow{AB}$ *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* u називається число, модуль якого дорівнює довжині відрізка $A_1 B_1$ цієї осі, де точки A_1 і B_1 – проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\overrightarrow{AB}$ на косинус кута φ між цим вектором і додатним напрямом осі u, тобто

$$np_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \qquad (3.1)$$

де $\varphi = \left(\overrightarrow{AB}, \hat{\ } u\right)$ – менший із кутів, на який треба повернути вектор $\overrightarrow{AB}$, щоб він збігався за напрямом з віссю u.

Точка O і векторний базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ утворюють *декартову систему координат* у просторі. Точка O – *початок координат*, а осі, що проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають *осями координат.* Вісь, що проходить у напрямі вектора $\vec{e_1}$ – *вісь абсцис,* у напрямі $\vec{e_2}$ – *вісь ординат* і у напрямі вектора $\vec{e_3}$ – *вісь аплікат*. Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами.*

Базис називають *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні й мають одиничну довжину. На площині R_2 їх позначають векторами $\vec{i}, \vec{j},$ а в просторі R_3 – векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.$

Базисні (некомпланарні) трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у просторі поділяють на два типи. Якщо при спостереженні з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки, то трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою*. Якщо при спостереженні з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно за годинниковою стрілкою, то трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою.*

Прямокутною декартовою системою координат називається декартова система координат, базис якої ортонормований.

Прямокутна система координат називається *правою*, якщо її ортонормований базис утворює праву трійку векторів, і *лівою,* якщо ортонормований базис утворює ліву трійку векторів.

Прямокутну систему координат позначають через $Oxyz$ (Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат), а координатні площини – через Oxy, Oyz, Oxz (рис. 3.1).

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді лінійної комбінації $\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – це координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які є разом із тим проекціями вектора $\vec{a}$ на осі координат. Замість $np_{Ox}\vec{a}$, $np_{Oy}\vec{a}$, $np_{Oz}\vec{a}$ пишуть a_x, a_y, a_z.

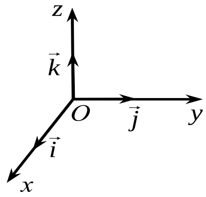

Рис. 3.1

Отже, розклад вектора $\vec{a}$ за ортонормованим базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ має вигляд

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \ .$$

У координатній формі вектор $\vec{a}$ запишеться так: $\vec{a} = \left(a_x ,\ a_y ,\ a_z \right)$.

Якщо M – довільна точка простору, то вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіусом-вектором* точки M.

Нехай задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ і довільну точку.

Радіусом-вектором цієї точки називають вектор $\overrightarrow{OM}$ з початком у початку координат і кінцем у заданій точці (рис. 3.2).

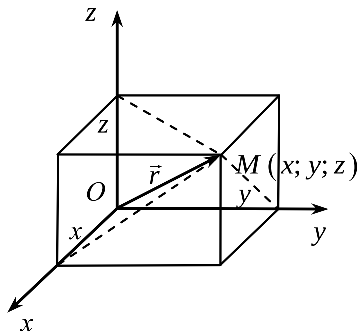

Рис. 3.2

Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки записують у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \ \text{ або } \ \vec{r} = \left(x;\ y;\ z \right).$$

Координати x, y, z радіуса-вектора точки M називають *координатами точки M* і позначають $M(x; y; z)$.

Нехай у прямокутній системі координат вектор $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ утворює з осями координат кути $\alpha = (\vec{a},\hat{\ } \vec{i})$, $\beta = (\vec{a},\hat{\ } \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a},\hat{\ } \vec{k})$, де $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$. Тоді згідно з формулою (3.1) маємо:

$$a_x = np_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha; \; a_y = np_{Oy}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta; \; a_z = np_{Oz}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Косинуси кутів α, β і γ називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$ і обчислюють за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Довжина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, заданого в прямокутній системі координат, дорівнює

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{3.2}$$

Якщо відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то в координатній формі він запишеться так:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_2 - x_1; \; y_2 - y_1; \; z_2 - z_1). \tag{3.3}$$

Ураховуючи формули (3.2) і (3.3), довжину вектора можна визначити за формулою

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Лінійні дії із векторами, заданими своїми координатами, відповідають арифметичним діям над їхніми координатами. Так, якщо задано вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ і дійсне число λ, то $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

Якщо вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ рівні, то $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ є пропорційність їхніх відповідних проекцій: $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \tag{3.4}$$

де $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Скалярний добуток двох векторів позначають ще так: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right| np_{\vec{b}}\vec{a}$, звідки

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|},\quad np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$$

Геометричні властивості скалярного добутку

1. Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
2. $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}>0$.
3. $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$, якщо $\cos\varphi=1$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й збігаються за напрямом.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то їх скалярний добуток дорівнює

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z b_z. \tag{3.5}$$

Наслідки з формули (3.5):

1. $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

2. Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$.

3. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна визначити з формули (3.4), ураховуючи формулу (3.5) і наслідок 1 з цієї формули:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\ .$$

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) якщо вектор $\vec{c}\neq 0$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів;

3) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi\text{, де }\varphi=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right).$$

Векторний добуток позначають $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Геометричні властивості векторного добутку.

1. Умова колінеарності векторів. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

2. Площа S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до одного початку, чисельно дорівнює $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, тобто $\vec{S}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку.

1. $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};$
 $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.
3. $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\ \vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\quad \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$

Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами, визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}\ .$$

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\ .$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b},$ $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x;c_y;c_z\right)$, то мішаний добуток векторів визначатимемо за формулою $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_y\end{vmatrix}$.

Геометричні властивості мішаного добутку трьох векторів

1. Об'єм паралелепіпеда $V_{\text{ïàðàë.}}$, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ як на ребрах, дорівнює модулю мішаного добутку $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, тобто $V_{\text{ïàðàë.}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, а об'єм трикутної піраміди: $V_{\text{ï³ð}} = \dfrac{1}{6}V_{\text{ïàðàë.}} = \dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

2. Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ – ліву.

3. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Алгебраїчні властивості мішаного добутку трьох векторів

1. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b} = -\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$.
2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.
3. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Задано точки $A(-3;1;2)$ і $B(1;0;-2)$. Визначте координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Завдання 2. Дано точки A(5; 0; 2), B(–3; 3; –1),C(1; 2; –3), D(5; –4; 3). Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

Завдання 3. Дано точки $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$. Обчисліть $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{AC}$.

Завдання 4. Визначте координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, і його довжина: $\left|\vec{a}\right| = 4$; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Завдання 5. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 120^\circ$?

Завдання 6. Розкладіть вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (2;\ 1;\ -3)$, $\vec{b} = (3;-2;\ 1)$, $\vec{c} = (-1;\ 0;-2)$, $\vec{d} = (-2;\ 2;\ 1)$.

Завдання 7. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Знайдіть число x, якщо вектори $(x-1)\vec{a}+2\vec{b}$ і $3\vec{a}+x\vec{b}$ колінеарні.

Завдання 8. Дано точки $A(0;\ 4;\ –6)$, $B(3;\ 0;\ 6)$, $C(1;\ 2;\ –4)$. Обчисліть координати вектора $\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$.

Завдання 9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{n}$ утворює з ними кути, що дорівнюють $\dfrac{\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{n}|=8$. Обчисліть $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{b}+3\vec{n}\right)$.

Завдання 10. Обчисліть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=6\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$

Завдання 11. Дано точки $A(–1;\ 3;\ –3)$, $B(4;\ 3;\ 6)$, $C(2;\ 0;\ 3)$, $D(4;\ 3;\ –3)$. Визначте $np_{\overline{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Завдання 12. Дано три вектори: $\vec{a}=(3;-3;-5)$, $\vec{b}=(5;-1;-7)$, $\vec{c}=(3;-4;12)$. Обчисліть $np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Завдання 13. Визначте координати вектора $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;\,3;\,-1)$, $\vec{b}=(1;\,-2;\,3)$ і задовольняє умову $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

Завдання 14. Обчисліть модуль векторного добутку $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$,

якщо $|\vec{a}|$ = 3, $|\vec{b}|$ =10, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Завдання 15. Дано точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 2;\ 1)$. Визначте координати векторного добутку $\left(\overrightarrow{\hat{A}\tilde{N}}-2\overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}}\right)\times\overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}}$.

Завдання 16. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\overrightarrow{AB}=8\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k},\ \overrightarrow{AC}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

Завдання 17. Визначте синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4; -4; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; 6)$.

Завдання 18. У трикутнику з вершинами $A(3; 1; 4)$, $B(7; -4; 4)$, $C(3; 5; 1)$ обчисліть висоту BD.

Завдання 19. Задано довжини векторів $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ і модуль векторного добутку $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Завдання 20. Обчисліть мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ заданих векторів $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Завдання 21. Встановіть, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (3; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$.

Завдання 22. Доведіть, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (3; -2; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; -2)$, $\vec{d} = (-2; 2; 1)$.

Завдання 23. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2; 2; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(3; 3; 2)$ і $D(4; 5; -3)$ обчисліть висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

Завдання 24. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Визначте, за якого значення x вектори $\vec{c} = (x - 2)\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = (2x + 1)\vec{a} - \vec{b}$ будуть колінеарними.

Завдання 25. На заводі є чотири цехи. Планові завдання цехів (в млн грн.) утворюють вектор-план $\overrightarrow{X} = (100; 200; 300; 200)$. На скільки мільйонів гривен виробив завод продукції за певний період, якщо цехи виконали свої плани відповідно на 20 %, 30 %, 20 %, 40 %?

Завдання 26. Підприємство випускає щодоби чотири види виробів, основні виробничо-економічні показники яких наведено в табл. 3.1.

Визначити такі щодобові показники: витрати сировини *S*; затрати робочого часу *T*; вартість продукції *P*, що виробляє підприємство.

Таблиця 3.1

Вид виробу	Кількість виробів, од.	Витрати сировини на одиницю виробу, кг	Норма часу виготовлення одиниці виробу, год.	Вартість одиниці виробу , грош. од.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	40

Тема 4. ОЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ. КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

План

1. Поняття функції, деякі її властивості.
2. Класифікація функцій.
3. Застосування функцій в економіці.
4. Числова послідовність. Границя числової послідовності.
5. Основні властивості збіжних послідовностей.
6. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, їх властивості.

Література: [3]; [5]; [7]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** означення функції, область визначення та область значень, способи задання функції, її основні властивості, класифікацію функцій, поняття числової послідовності та її границі, основні властивості збіжних послідовностей, означення нескінченно малих та нескінченно великих величин, їх властивості; ***уміти:*** знаходити область визначення функції, досліджувати функцію на парність, непарність, періодичність, знаходити обернену функцію до даної, будувати графіки основних елементарних функцій; знаходити границю числової послідовності.

Якщо кожному числу x із деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y з деякої числової множини Y, то кажуть, що y є функцією від x і пишуть $ó = f\left(x\right)$.

Змінна x називається *незалежною змінною*, або *аргументом*, а y – *залежною змінною*, або *функцією*. Множина X називається *областю визначення функції.* Множина Y усіх чисел y, таких, що $ó = f\left(x\right)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень функції*.

Функцію можна задати аналітично, графічно, таблично або описати словесно.

Графіком функції $y = f(x)$, $x \in X$ у прямокутній декартовій системі координат на площині називають множину точок із координатами $\left(x; f\left(x\right)\right)$.

Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-яких значень x із області визначення $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$, і *непарною*, якщо $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$. Якщо функція ані парна, ані непарна, то кажуть, що вона є функцією загального виду.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної – відносно початку координат.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число $T \neq 0$, що $f(x+T) = f(x)$, $x \in \left(-\infty; \infty\right)$. Найменше додатне число T, що задовольняє цю рівність, називають *періодом функції*.

Функцію $f(x)$, визначену на множині X, називають *обмеженою* на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ справджується нерівність $\left|f(x)\right| \le M$ або $-M \le f(x) \le M$.

Функція $f\left(x\right)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині X , якщо для всіх $x \in X$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Зростаючі і спадні функції називають *монотонними*.

Функція називається *явною* або *заданою у явній формі*, якщо вона задана рівнянням $\acute{o} = f\left(x\right)$, розв'язаним відносно залежної змінної y .

Функція y аргументу x називається *неявною* або *неявно заданою*, якщо її задано рівнянням $F\left(x;y\right)=0$, яке не розв'язане відносно залежної змінної y .

Нехай задана функція $\acute{o} = f\left(x\right)$ з областю визначення X і множиною значень Y . Функція $f\left(x\right)$ кожному значенню $x \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y \in Y$. Якщо кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, то можна визначити функцію $x = \varphi\left(y\right)$ з областю визначення Y і множиною значень X . Ця функція називається *оберненою функцією* до даної.

Отже, функція $x = \varphi\left(y\right)$ є оберненою до функції $\acute{o} = f\left(x\right)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f ;

2) множина значень функції φ є областю визначення функції f ;

3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

Функції $\acute{o} = f\left(x\right)$ і $x = \varphi\left(y\right)$ є взаємно оберненими, їх графіки симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Із означення оберненої функції випливає, що функція $\acute{o} = f\left(x\right)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену тоді і тільки тоді, коли ця функція задає взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y .

Нехай функція $\acute{o} = f\left(u\right)$ визначена на множині D, а функція $u = \varphi\left(x\right)$ – на множині E , причому для кожного значення $x \in E$

відповідне значення $u = \varphi(x) \in D$. Тоді на множині E визначена функція $\acute{o} = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$, яку називають *складеною функцією* від x або *суперпозицією* заданих функцій. Змінну $u = \varphi\left(x\right)$ функції $\acute{o} = f\left(u\right)$ називають *внутрішньою функцією*, або *проміжним аргументом*, а змінну $\acute{o} = f\left(u\right)$ – *зовнішньою функцією*.

Основними елементарними функціями є:

1) лінійна функція $\acute{o} = kx + b$, де k і b – сталі;

2) степенева функція $y = x^n$, де n – дійсне число;

3) показникова функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

4) логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

5) тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

6) обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функції, побудовані з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій і скінченного числа операцій утворення складеної функції, називаються *елементарними*.

Елементарні функції бувають алгебраїчні та трансцендентні. До алгебраїчних функцій належать ціла раціональна функція, дробово-раціональна функція, ірраціональна функція. Трансцендентними функціями є показникова, логарифмічна, тригонометричні, обернені тригонометричні.

Поняття функції широко використовується в економічних дослідженнях. Найчастіше економісти використовують такі функції: *функція корисності* – залежність корисності, результату, ефекту деякої дії від рівня (інтенсивності) цієї дії; *виробнича функція* – залежність результатів виробничої діяльності від чинників, що її зумовили; *функція попиту і пропозиції* – залежність обсягів попиту, пропозиції на товари або послуги від різних чинників; *функція випуску* – залежність обсягів виробництва від наявності або споживання ресурсів; *функція виробничих витрат* – залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

Функція випуску та функція виробничих витрат – це частинні випадки *продуктивної функції*, що використовується при аналізі закономірностей виробництва, і яка є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами і виготовленою продукцією. Якщо підприємство має n виробничих ресурсів і виготовляє m видів товарів, то $\overrightarrow{X}=\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ – вектор виробничих ресурсів, $\overrightarrow{Y}=(y_1;y_2;...;y_m)$ – вектор виготовлених товарів, $\vec{a}=\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ – вектор параметрів виробництва. Ці вектори пов'язані продуктивною функцією $F=\left(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y},\vec{a}\right)$. Якщо функція розв'язана відносно вектора $\overrightarrow{Y}$, то маємо функцію випуску, а якщо – відносно вектора $\overrightarrow{X}$, то отримуємо функцію виробничих витрат.

Функцією однієї змінної часто користуються в мікро- та макроекономіці для визначення точок рівноваги пов'язаних між собою процесів. Наприклад, одним із найважливіших завдань аналізу ринкової економіки є дослідження рівноваги між попитом та пропозицією (визначення *рівноважної ціни,* або точки рівноваги).

Функція, задана на множині натуральних чисел $y_n=f\left(n\right),\ n\in N$, називається *числовою послідовністю* $\left\{y_n\right\}$, або просто *послідовністю*. Числа $y_1,y_2,...,y_n,...$ – *елементи*, або *члени* послідовності.

Послідовність вважається заданою, якщо задано n-ий член послідовності.

Послідовність $\left\{y_n\right\}$ називається *обмеженою*, якщо існує таке число $M>0$, що для будь-якого $n\in N$ виконується нерівність $\left|y_n\right|\le M$.

Число a називається *границею числової послідовності* $\left\{y_n\right\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $\left|y_n-a\right|<\varepsilon$. Символічно це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

Числову послідовність називають *збіжною*, якщо вона має границю. Інакше послідовність називають *розбіжною*.

Основні властивості збіжних послідовностей

1. Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

2. Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

3. Якщо послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ збіжні, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то :

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n\cdot} \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0, b \neq 0.$$

4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то послідовність $\{c\tilde{o}_n\}$, де c – стала, також збіжна, і $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Якщо послідовність $\{\tilde{o}_n\}$ збіжна, то послідовність $\{\tilde{o}_n^k\}$, $k \in N$, також збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^k$.

Змінну x_n, границя якої дорівнює нулю, називають *нескінченно малою величиною* або, коротко, *нескінченно малою*. Отже, якщо x_n – нескінченно мала, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Властивості нескінченно малих величин

1. Сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою.

2. Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною.

3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Змінну y_n називають *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа $M > 0$ знайдеться таке n_0, що $|y_n| > M$ для всіх $n > n_0$.

При цьому пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ або $y_n \to \infty$ і кажуть, що y_n прямує до нескінченності.

Якщо нескінченно велика y_n, починаючи з деякого n_0, набирає тільки додатних (тільки від'ємних) значень, то пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ або $y_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ або $y_n \to -\infty$).

Властивості нескінченно великих величин

1. Алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно великих величин є нескінченно великою.

2. Добуток нескінченно великої величини на обмежену величину є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими величинами наведемо у вигляді *властивостей.*

1. Якщо змінна x_n – нескінченно мала, то $\dfrac{1}{x_n}$ – нескінченно велика.

2. Якщо змінна y_n – нескінченно велика, то $\dfrac{1}{y_n}$ – нескінченно мала.

За допомогою основних властивостей збіжних послідовностей можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями. На практиці при знаходженні границі часто зустрічаються вирази, до яких не можна одразу застосувати граничний перехід. У цьому разі вираз під знаком границі спочатку перетворюють так, щоб арифметичні дії виконувалися із збіжними послідовностями, а потім уже виконують граничний перехід. Наприклад, якщо вираз під знаком границі є дробом, в якому чисельник і знаменник – необмежені послідовності, то:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 n^m + a_2 n^{m-1} + \ldots + a_{m-1}n + a_m}{b_1 n^l + b_2 n^{l-1} + \ldots + b_{l-1}n + b_l} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left(a_1 + \dfrac{a_2}{n} + \dfrac{a_3}{n^2} + \ldots + \dfrac{a_{m-1}}{n^{m-1}} + \dfrac{a_m}{n^m}\right)}{n^l\left(b_1 + \dfrac{b_2}{n} + \dfrac{b_3}{n^2} + \ldots + \dfrac{b_{l-1}}{n^{l-1}} + \dfrac{b_l}{n^l}\right)} = \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1}, \text{ ï ðè } m = l; \\ 0, \text{ ï ðè } m < l; \\ \infty, \text{ ï ðè } m > l. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Для заданої функції $f(x)=x^2+1$ визначте $f(0)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(\sqrt{2})$.

Завдання 2. Для заданої функції $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ обчисліть $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(4)$.

Завдання 3. Визначте області визначення функцій.

Приклад 3.1. $y=\sqrt{4-x^2}$.

Приклад 3.2. $y=\ln\left(9-x^2\right)$.

Приклад 3.3. $y=\dfrac{2}{x^2-x}$.

Приклад 3.4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Приклад 3.5. $y=\sqrt{1-x}$.

Приклад 3.6. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(2-x)$.

Завдання 4. Дослідіть на парність і непарність функції.

Приклад 4.1. $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$.

Приклад 4.2. $f(x)=x^5-2x^3+\sin x$.

Приклад 4.3. $f(x)=x-x^2$.

Приклад 4.4. $f(x)=\sin x-\cos x$.

Приклад 4.5. $f(x)=2^{x-x^4}$.

Приклад 4.6. $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Завдання 5. Визначте період функцій.

Приклад 5.1. $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 5.2. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

Приклад 5.3. $y=\operatorname{ctg}(\pi x+1)$.

Приклад 5.4. $y=\cos^2 2x$.

Завдання 6. Знайдіть функцію, обернену до даної.

Приклад 6.1. $y=1-3x$.

Приклад 6.2. $y=\dfrac{1}{2-x}$.

Приклад 6.3. $y=10^{x+1}$.

Приклад 6.4. $y=3+\lg(x+2)$.

Завдання 7. Шляхом досліджень було встановлено функції попиту $q(p)$ і пропозиції $s(p)$, де q та s – кількість товару, p – ціна товару. Обчисліть рівноважну ціну, якщо:

Приклад 7.1. $q(p)=\dfrac{p+4}{p+2}$, $s(p)=p-4$.

Приклад 7.2. $q(p)=7-p$, $s(p)=p+3$.

Завдання 8. Запишіть чотири перші члени послідовності.

Приклад 8.1. $x_n=\dfrac{1}{n(2n-1)}$.

Приклад 8.2. $x_n=\dfrac{2^n}{(n+1)}$.

Приклад 8.3. $x_n=4+(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$.

Приклад 8.4. $x_n=(-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Завдання 9. Запишіть формулу для загального члена послідовності.

Приклад 9.1. $1\cdot 2;\quad 2\cdot 2^2;\quad 3\cdot 2^3;\quad 4\cdot 2^4;\ldots$.

Приклад 9.2. $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2};\quad \dfrac{5}{2^2\cdot 3^2};\quad \dfrac{7}{3^2\cdot 4^2};\quad \dfrac{9}{4^2\cdot 5^2};\ldots$.

Приклад 9.3. $\dfrac{2}{4};\quad \dfrac{5}{7};\quad \dfrac{10}{12};\quad \dfrac{17}{19};\ \ldots$.

Приклад 9.4. $-\dfrac{1}{1\cdot 5};\quad \dfrac{1}{5\cdot 9};\quad -\dfrac{1}{9\cdot 13};\quad \dfrac{1}{13\cdot 17};\ldots$.

Завдання 10. Обчисліть границі послідовностей.

Приклад 10.1.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+9n^2-3n-15}{24n^3-2n^2+3n+5}.$$

Приклад 10.2.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6-2n^3-n+5}{3n^3+5n^2-4}.$$

Приклад 10.3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+4n+5}{4n^4+2n^2-3n-1}.$$

Приклад 10.4.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-6}{\sqrt{4n^2+2}}.$$

Приклад 10.5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-5)^2-3n^2}{n^2-4n+4}.$$

Приклад 10.6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{5(n+3)!}.$$

Приклад 10.7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right).$$

Приклад 10.8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}.$$

Тема 5. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

План

1. Границя функції. Важливі границі.
2. Розкриття невизначеностей.
3. Еквівалентні нескінченно малі величини.
4. Неперервність функції в точці.
5. Точки розриву функції, їх класифікація.

Література: [2]; [4]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** означення та запис границі функції в точці, геометричний зміст границі функції, поняття односторонніх границь, важливі границі, означення неперервності функції в точці, точок розриву; ***уміти:*** знаходити границю функції, розкривати невизначеності, використовуючи важливі границі та основні еквівалентності, досліджувати функцію на неперервність, знаходити точки розриву.

Вивчаючи числові послідовності, ми розглядали їх як функції дискретного аргументу. Нехай тепер змінна величина x набуває всіх числових значень деякого скінченного проміжку X, тобто є неперервною змінною і точка $x_0 \in X$.

Нехай $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, і записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Геометричний зміст границі функції. Нерівності $|f(x)-A|<\varepsilon$ і $|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$ рівносильні нерівностям: $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$; $x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ x\neq x_0$, або $f(x)\in(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$ при $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$. Це означає, що для всіх $x\neq x_0$ з δ-околу точки x_0 відповідні значення функції $f(x)$ містяться в ε-околі точки A. Отже, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то яка б не була смуга площини Oxy, обмежена прямими $y=A-\varepsilon,\ y=A+\varepsilon$, на осі Ox знайдеться інтервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta),\ x\neq x_0$, такий, що частина графіка $y=f(x)$, яка відповідає точкам цього інтервалу, окрім, можливо, точки x_0, буде міститись усередині цієї смуги.

Число A – границя функції $f(x)$ *зліва* в точці x_0 (*ліва границя*), якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що при $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, і записують $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$.

Число B – границя функції $f(x)$ *справа* в точці x_0 (*права границя*), якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що при $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$, і записують $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$.

Ліву і праву границі функції називають *односторонніми границями.*

Границя послідовності – це окремий випадок границі функції, оскільки послідовність за означенням є функцією. Означення границі функції можна дати через границю послідовності.

Число A – *границя* функції $f(x)$ при $x\to x_0$ (у точці x_0), якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$ $(n\in N)$, збіжної до x_0, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збіжна до A.

Число A – *границя функції* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, якщо функція $f(x)$ визначена для всіх x таких, що $|x| > M$ при деякому $M > 0$ і $\lim\limits_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$ для будь-якої збіжної до ∞ послідовності $\{x_n\}$.

Основні властивості послідовностей щодо знаходження границі послідовності, розглянуті в темі 4, справджуються і для границі функції.

При обчисленні границь використовують важливі границі.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{5.1}$$

Наслідки: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$.

Друга важлива границя:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5.2}$$

Наслідки:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ a > 0, a \neq 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e, \ a > 0, a \neq 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Функція $f(x)$ – *нескінченно мала* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Функція $f(x)$ – *нескінченно велика* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій аналогічні властивостям нескінченно малих і нескінченно великих величин, що розглядалися в темі 4.

Якщо функція є елементарною і граничне значення аргументу належить області визначення, то обчислення границі функції зводиться до простої підстановки граничного значення аргументу:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

У низці випадків при виконанні граничного переходу при $x \to x_0$ у виразах типу $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ підстановка призводить до таких невизначеностей:

1) $\alpha(x) \to \infty$, $\beta(x) \to \infty$, то відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ дає невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$;

2) $\alpha(x) \to \infty$, $\beta(x) \to \infty$, то різниця $\left(\alpha(x) - \beta(x)\right)$ дає невизначеність виду $(\infty - \infty)$;

3) $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to \infty$, то добуток $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ дає невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$;

4) $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, то відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ дає невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$;

5) $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, то вираз $(\alpha(x))^{\beta(x)}$ дає невизначеність виду $\left(0^0\right)$;

6) $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to \infty$, то вираз $(\beta(x))^{\alpha(x)}$ дає невизначеність виду $\left(\infty^0\right)$;

7) $\alpha(x) \to 1$, $\beta(x) \to \infty$, то вираз $(\alpha(x))^{\beta(x)}$ дає невизначеність виду $\left(1^\infty\right)$.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*. Наведемо практичні рекомендації щодо розкриття невизначеностей.

1. Невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ задана відношенням двох многочленів. Для розкриття невизначеності треба чисельник і

знаменник поділити на найвищий степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

2. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тут можливі такі випадки.

Якщо невизначеність задана відношенням двох многочленів, то потрібно розкласти чисельник і знаменник на прості множники і скоротити це відношення на множник $\left(x-x_0\right)$ (критичний множник).

Якщо невизначеність задана ірраціональними виразами, то треба позбутися ірраціональності або в чисельнику, або в знаменнику, або і в чисельнику і в знаменнику дробу, а потім скоротити дріб на множник $\left(x-x_0\right)$.

Якщо невизначеність задана виразами, що містять тригонометричні функції, то невизначеність розкривають за допомогою першої важливої границі (5.1).

3. Невизначеність виду $\left(\infty-\infty\right)$ зводять до невизначеностей $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ або $\left(\frac{0}{0}\right)$. Наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

4. Невизначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$ розкривають, використовуючи другу важливу границю (5.2).

Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції. Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\left(x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta\left(x\right)=0$. Тоді функції $\alpha(x)$, $\beta(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=A\neq 0 \ \left(A\in R\right)$.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=0$.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Позначають так: $\alpha\sim\beta$.

Границя відношення нескінченно малих величин не зміниться, якщо замінити їх еквівалентними нескінченно малими величинами.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією в т. x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то мають місце такі еквівалентності:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a;$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad \log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\log_a e;$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2};\qquad (1+\alpha)^k-1\sim k\alpha(x),\ k>0.$$

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, включаючи точку x_0. Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* $x=x_0$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці.

Отже, функція $y=f(x)$ у точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) $y=f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;

2) існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функції в точці x_0;

3) односторонні границі функції зліва й справа в точці x_0 існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \qquad (5.3)$$

Функція *неперервна на проміжку*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Якщо хоча б одна з умов рівності (5.3) порушується, то функція називається *розривною* у точці $x = x_0$, а сама точка x_0 – *точкою розриву* функції.

Точки розриву бувають першого та другого роду. Розриви першого роду бувають усувні та неусувні. Розриви другого роду завжди неусувні.

Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив у точці x_0 називають *розривом першого роду*, а точку x_0 – *точкою розриву першого роду*.

Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив у точці x_0 називають *усувним*, а точку x_0 – *точкою усувного розриву*.

Назва «точка усувного розриву» пов'язана з тим, що достатньо змінити значення функції або довизначити її лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в цій точці.

Якщо для функції $f(x)$ у точці x_0 існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причому $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то розрив у точці x_0 називають *неусувним розривом першого роду,* або *скінченним стрибком,* а точку x_0 – *точкою неусувного розриву*.

Величину $\delta = \left| \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right|$ називають *стрибком функції в точці* x_0.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (5.3) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив у точці x_0 називається *розривом другого роду*, а сама точка x_0 – *точкою розриву другого роду*.

При знаходженні точок розриву функції слід керуватися такими правилами:

1) елементарна функція може мати розрив в окремих точках, але не може бути розривною у всіх точках будь-якого інтервалу;

2) елементарна функція може мати розрив лише в тій точці, де вона невизначена;

3) якщо функція задана різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, то вона може мати розриви в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть границі функцій.

Приклад 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^6-5x^5+2x-1}$.

Приклад 1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+3x+2}{-3x^2+2x-1}$.

Приклад 1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+x-2x^2}{2x^2+10x+5}$.

Приклад 1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x+1}$.

Приклад 1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+2x-3}}$.

Приклад 1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt[8]{x^8+6}+\sqrt{x-6}}$.

Приклад 1.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Приклад 1.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$.

Приклад 1.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$.

Приклад 1.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$.

Приклад 1.11. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Приклад 1.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}-1}$.

Приклад 1.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Приклад 1.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Приклад 1.15.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}.$$

Приклад 1.16.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right).$$

Приклад 1.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Приклад 1.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}-x\right)$.

Приклад 1.19. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{4x}{x^2-9}\right)$.

Приклад 1.20. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

Завдання 2. Обчисліть границі функцій, використовуючи важливі границі.

Приклад 2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+x}$.

Приклад 2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Приклад 2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

Приклад 2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Приклад 2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\mathrm{tg}3x}$.

Приклад 2.6. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$.

Приклад 2.7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x\mathrm{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

Приклад 2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

Приклад 2.9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$.

Приклад 2.10. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+3}\right)^{4x-1}$.

Приклад 2.11. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4-5x}{3-5x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

Приклад 2.12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2+2}\right)^{2x-1}$.

Приклад 2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

Приклад 2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Приклад 2.15. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Приклад 2.16. $\lim\limits_{x\to e}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Завдання 3. Визначте односторонні границі.

Приклад 3.1. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{5}{x-3}$.

Приклад 3.2. $\lim\limits_{x\to -2\pm 0}\dfrac{|2x+4|}{x+2}$.

Приклад 3.3. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}4^{\frac{1}{x-2}}$.

Приклад 3.4. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}f(x)$, якщо

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & -\infty<x\le 0,\\ x^2, & 0<x<\infty.\end{cases}$$

Завдання 4. За допомогою основних еквівалентних нескінченно малих величин визначте границі функцій.

Приклад 4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{x^2-x}$.

Приклад 4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

Приклад 4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg\left(1+x^2\right)}{x\sin 2x}$.

Приклад 4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 3x}$.

Приклад 4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Приклад 4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}$.

Приклад 4.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

Приклад 4.8. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Приклад 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin 5x}-1}{x}$.

Приклад 4.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Завдання 5. Дослідіть функції на неперервність і з’ясуйте характер точок розриву.

Приклад 5.1. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

Приклад 5.2. $y=3^{\frac{1}{x+5}}$.

Приклад 5.3. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Приклад 5.4. $y=\sin\dfrac{2}{x}$.

Приклад 5.5. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{x-a}$.

Приклад 5.6. $y=x-\dfrac{x+1}{|x+1|}$.

Приклад 5.7. $y=\dfrac{|x-4|}{x^2-16}$.

Приклад 5.8. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-3}}-3}{2^{\frac{1}{x-3}}+3}$.

Приклад 5.9.

$$y=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, \text{ï ðè } x\le 2, \\ x, \quad \text{ï ðè } x>2. \end{cases}$$

Приклад 5.10.

$$y=\begin{cases} x^2+1, \text{ï ðè } x>1, \\ x+1, \text{ï ðè } x<1, \\ 3, \quad \text{ï ðè } x=1. \end{cases}$$

Завдання 6. Задані функції довизначте в точці $x=0$, щоб вони стали неперервними у цій точці.

Приклад 6.1. $f\left(x\right)=\dfrac{\text{tg}5x}{x}$.

Приклад 6.2. $f\left(x\right)=\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{x}$.

Приклад 6.3. $f\left(x\right)=\dfrac{4x^3-3x}{6x}$.

Тема 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

План

1. Похідна. Геометричний та економічний зміст похідної.
2. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.
3. Диференціювання функцій, заданих неявно, параметрично. Похідна оберненої функції. Логарифмічне диференціювання.
4. Диференціал функції.
5. Похідні та диференціали вищих порядків.

Література: [2]; [4]; [5]; [6]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** означення похідної функції, її геометричний та економічний зміст, основні правила диференціювання, таблицю похідних, означення та запис диференціала функції; ***уміти:*** знаходити похідну різних функцій, знаходити диференціал функції, наближено обчислювати значення функцій, знаходити похідні та диференціали вищих порядків.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a; b)$. Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу x приросту Δx, $x + \Delta x \in (a; b)$. Знайдемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ *у точці* x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

Функція, яка має скінченну похідну в точці x, називається *диференційовною* в цій точці. Знаходження похідної від функції називають *диференціюванням цієї функції*.

Похідну позначають так: $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою у цьому проміжку.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної $k = \operatorname{tg}\alpha$ до графіка цієї функції, проведеної в *точці дотику* $(x_0;\ f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Рівняння нормалі за умови, що $f'(x) \neq 0$, записується так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Розглянемо поняття, що ілюструють *економічний зміст похідної*.

Маргінальною вартістю називають гранично можливу вартість в умовах хоча б постійного відтворення виробництва певної продукції. Аналогічно визначаються маргінальний дохід та маргінальний прибуток. Позначимо $V(x)$ – витрати, $D(x)$ – дохід,

$P(x)$ – прибуток виробництва x одиниць продукції. Отже, похідні $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ дорівнюють маргінальній вартості, маргінальному доходу та маргінальному прибутку відповідно.

Розглянемо ще одну економічну інтерпретацію похідної, а саме задачу про продуктивність праці. Нехай функція $g = g(x)$ – кількість виробленої продукції g за час τ, тоді продуктивність праці в момент часу τ_0 визначають як граничне значення середньої продуктивності за період часу від τ_0 до $\tau_0 + \Delta\tau$, коли $\Delta\tau \to 0$:

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta\tau} = g'(\tau_0).$$

Отже, продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу.

Зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції в точці встановлює така теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, то вона в цій точці неперервна.

З теореми випливає, що неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційовності в цій точці. Це означає, що в точках розриву функція не має похідних, тобто вона не диференційована.

Основні правила диференціювання. Нехай $c = \text{const}$ і функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x. Тоді:

1. $c' = 0$.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(cu)' = cu'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in R$. 2) $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$.

3) $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$.

4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

5) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

6) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

8) $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

9) $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

12) $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

13) $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f[\varphi(x)]$ – складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x. *Похідна складеної функції* дорівнює похідній функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну цього аргументу за незалежною змінною: $(f(\varphi(x)))'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$.

Нехай неявна функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$ і воно не розв’язне відносно функції y. Тоді похідну від *неявно заданої функції* можна знайти, диференціюючи по x обидві частини рівняння і враховуючи те, що y є функцією від x. У результаті диференціювання отримаємо рівняння першого степеня, яке розв’яжемо відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Нехай $y = f(x)$ і $x = g(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Похідні від *взаємно обернених функцій* обернені за величиною:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

де індекси x і y вказують, за якою змінною відбувається диференціювання.

Нехай залежність y від x задана *параметрично* у вигляді $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ – функціями однієї незалежної змінної t, $t \in [\alpha;\ \beta]$. Задання функціональної залежності між двома змінними, які, своєю чергою, є функціями однієї й тієї самої допоміжної змінної t, називається *параметричним*, а допоміжна змінна — *параметром*.

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(t) = \psi(\hat{\mathrm{O}}(x))$ з проміжним аргументом $t = \hat{\mathrm{O}}(x)$, тому за формулою похідної складеної функції маємо

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t) \cdot \hat{\mathrm{O}}'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Функція вигляду $y = (f(x))^{\varphi(x)}$ $(f(x) > 0),$ де основа і показник змінюються одночасно з незалежною змінною, називається *степенево-показниковою*. Вираз $(\ln y(x))' = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ називається *логарифмічною похідною* функції $y(x)$.

Щоб знайти похідну степенево-показникової функції, потрібно її прологарифмувати: $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$.

Диференціюючи цю тотожність по x і пам’ятаючи, що в лівій частині рівності стоїть складена функція від x, дістаємо:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \varphi(x).$$

Домножуючи обидві частини отриманої рівності на $y = (f(x))^{\varphi(x)}$ дістаємо: $y'(x) = (f(x))^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \dfrac{f'(x)}{f(x)} \varphi(x) \right).$

Логарифмічне диференціювання може бути застосоване для знаходження похідних дробово-раціональних функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Згідно з означенням похідної (6.1) маємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = f'(x)$. Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу α, тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = f'(x) + \alpha, \ \Delta y = f'(x)\Delta \mathrm{x} + \alpha\Delta \mathrm{x}. \qquad (6.2)$$

Перший доданок у формулі (6.2) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Диференціалом dy або $df(x)$ функції $y = f(x)$ у точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ у цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (6.3)$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу (6.3) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (6.4)$$

Формула (6.4) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної, тобто $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Нехай функції $y = f(u),\ u = \varphi(x)$ мають похідні $f'(u)$ і $\varphi'(x)$. Тоді $y'(x) = f'(u)\cdot\varphi'(x)$. Помноживши обидві частини рівності на dx, дістанемо: $dy = f'(u)\cdot\varphi'(x)dx$, але $\varphi'(x)dx = du$, і тому $dy = f'(u)du$, тобто диференціал dy має такий само вигляд, як і у випадку, коли величина u є незалежною змінною.

Диференціал функції $y = f(u)$ зберігає однаковий вигляд незалежно від того, є її аргумент u незалежною змінною чи функцією від іншої змінної. Ця властивість називається *інваріантністю* (тобто незмінністю) *форми диференціала*.

Оскільки $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x)dx$. При достатньо малих значеннях Δx має місце наближена рівність $\Delta y \approx dy$. Звідси випливає формула для наближеного обчислення значення функції

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Нехай на інтервалі $(a;b)$ задана функція $f(x)$. Її похідна, якщо вона існує на інтервалі $(a;b)$, є неперервною функцією $f'(x)$, яку називають *першою похідною* (*похідною першого порядку*). Якщо перша похідна має, своєю чергою, похідну на інтервалі $(a;b)$, то остання називається *другою похідною від* $y = f(x)$ (*похідною від* $f(x)$ *другого порядку*): $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ або $y'' = (y')'$.

Похідною порядку n *функції* $f(x)$ (n*-ю похідною*) називається перша похідна від похідної $f(x)$ порядку $(n-1)$: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ або $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Якщо йдеться про фіксоване значення x_0, то символ $f^{(n)}(x_0)$ означає похідну n-го порядку від $f(x)$ у точці x_0.

Для обчислення похідної вищого порядку потрібно попередньо знайти похідні всіх нижчих порядків. В окремих випадках можна знайти загальних вираз для похідної n-го порядку.

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f\left(x\right)$, де x – незалежна змінна. Тоді її *перший диференціал*, або *диференціал першого порядку* $dy = f'\left(x\right)dx$. Розглядаючи $df(x)$ як функцію від x, візьмемо диференціал $d(df(x))$. Якщо цей диференціал існує, то він називається *диференціалом другого порядку,* або *другим диференціалом* від функції $f(x)$ і позначається d^2y. Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d\left(dy\right) = d\left(f'\left(x\right)dx\right) = \left(f'\left(x\right)dx\right)_x' dx =$$
$$= f''\left(x\right)dxdx = f''\left(x\right)dx^2.$$

Диференціалом n*-го порядку* $d^n y$ називається диференціал від диференціала (n – 1)-го порядку як функції x:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}\left(x\right)dx^n.$$

Отже, диференціал n-го порядку дорівнює добутку похідної n-го порядку по незалежній змінній x на n-ий степінь диференціала цієї незалежної змінної.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть похідні функцій.

Приклад 1.1. $y=\sqrt[3]{x^5}$.

Приклад 1.2. $y=3\sin x+5\cos x$.

Приклад 1.3. $y=\left(2+3x\right)^4$.

Приклад 1.4. $y=-3x^5-\dfrac{5}{x}-\sqrt[3]{x}$.

Приклад 1.5. $y=\dfrac{e^x}{\mathrm{tg}x}$.

Приклад 1.6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}$.

Приклад 1.7. $y=\ln\sqrt{\sin 3x}$.

Приклад 1.8. $y=\ln\left(\ln^3 x\right)$.

Приклад 1.9. $y=\sin x\ln x$.

Приклад 1.10. $y=x^2e^{-2x}$.

Приклад 1.11. $y=3\,\mathrm{tg}\,x^4$.

Приклад 1.12. $y=5^{\sqrt{x}+x}$.

Приклад 1.13. $y=\ln\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$.

Приклад 1.14. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

Приклад 1.15. $y=\log_{\cos x}\sin x$.

Приклад 1.16. $y=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

Завдання 2. Знайдіть похідні функцій, заданих неявно.

Приклад 2.1.
$x^3+y^3-2x-5y+4=0$.

Приклад 2.2.
$\cos\left(xy\right)+5x=0$.

Приклад 2.3. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$.

Приклад 2.4. $5^{x+y}=5^x-5^y$.

Приклад 2.5. $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Приклад 2.6. $x^y=y^x$.

Приклад 2.7. $\dfrac{x+1}{y^2}=\mathrm{tg}\,xy$.

Приклад 2.8. $2y\ln y=x$.

Приклад 2.9. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

Приклад 2.10. $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$.

Завдання 3. Знайдіть похідні функцій, заданих параметрично.

Приклад 3.1. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$

Приклад 3.2. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t. \end{cases}$

Приклад 3.3. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

Приклад 3.4. $\begin{cases} x = 2t^2 + 5, \\ y = \sqrt{1-3t^2}. \end{cases}$

Приклад 3.5. $\begin{cases} x = \ln\left(1-t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Приклад 3.6. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$

Завдання 4. Застосовуючи логарифмічне диференціювання, знайдіть похідні функцій.

Приклад 4.1. $y = 3x^{\cos 3x}$.

Приклад 4.2. $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Приклад 4.3. $y = \left(\sin 4x\right)^{\sqrt{x}}$.

Приклад 4.4. $y = \left(\operatorname{tg} 2x\right)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

Приклад 4.5. $y = \dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x+1\right)}{x^3\left(x-2\right)}$.

Приклад 4.6. $y = \sqrt{\dfrac{\left(x+1\right)x}{x-3}}$.

Завдання 5. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x - \dfrac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Завдання 6. Складіть рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$, проведеної у точці $M\left(-9;-8\right)$.

Завдання 7. Знайдіть диференціал функцій.

Приклад 7.1. $y = 5x^4 - e^{2x}$.

Приклад 7.2. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-3x}{1+3x}}$.

Приклад 7.3. $y = \arccos e^{\sqrt{2x}}$.

Приклад 7.4. $y = \left(1-\ln\sin x\right)\sin x$.

Завдання 8. За допомогою диференціала функції обчисліть наближено.

Приклад 8.1. $\operatorname{arctg} 0,98$.

Приклад 8.2. $\sin 31^\circ$

Приклад 8.3. $\sqrt[4]{15,8}$

Приклад 8.4. $\ln 1,01$

Завдання 9. Знайдіть похідні другого порядку функцій.

Приклад 9.1. $y = 3x^3 + 2x^2 - 4$. **Приклад 9.2.** $y = e^{-x}$.

Приклад 9.3. $y = \cos^2 x$. **Приклад 9.4.** $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x$.

Приклад 9.5. $y = -\dfrac{12}{x+5}$. **Приклад 9.6.** $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Приклад 9.7. $x + 2y = xy$. **Приклад 9.8.** $y = \ln(x + y)$.

Завдання 10. Знайдіть диференціали другого порядку функцій.

Приклад 10.1. $y = -8x^5 + 2x - 3$. **Приклад 10.2.** $y = xe^{-3x}$.

Приклад 10.3. $y = \cos^2(x+5)$. **Приклад 10.4.** $y = \dfrac{2^x}{2^x + 7}$.

Завдання 11. Для функції витрат підприємства (у грн.) $V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$ визначте маргінальну вартість та обчисліть величину маргінальної вартості при виробництві $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 150$ одиниць продукції.

Завдання 12. Визначте маргінальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів обчислюється за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – роздрібна вартість одного виробу.

Тема 7. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В ЕКОНОМІЦІ

План

1. Теореми про диференційовні функції.
2. Правило Лопіталя.
3. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіка функції.
4. Застосування диференціального числення функцій до задач економіки.

Література: [1 – 7]; [10].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 7 студент повинен ***знати:*** теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, правило Лопіталя, алгоритм дослідження функції за допомогою похідної, застосування похідної в економіці; ***уміти:*** розкривати невизначеності, використовуючи правило Лопіталя, досліджувати функції за допомогою похідної та будувати графіки функцій, застосовувати диференціальне числення функцій до задач економіки.

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на деякому інтервалі $(a; b)$ і досягає свого найбільшого (або найменшого) значення у внутрішній точці ξ цього інтервалу: $a < \xi < b.$ Якщо в точці ξ похідна функції $f(x)$ існує, то вона дорівнює нулю: $f'(\xi) = 0.$

Геометричний зміст теореми Ферма. Якщо в точці $x = \xi$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(\xi;\ f(\xi))$ паралельна осі абсцис.

Теорема Ролля. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b],$ диференційовна в усіх його внутрішніх точках і має на кінцях відрізка однакові значення, то на інтервалі $(a;b)$ існує хоча б одне значення $x = \xi,$ для якого $f'(\xi) = 0.$

Геометричний зміст теореми Ролля. На лінії $y = f(x),$ де функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, знайдеться точка, в якій дотична паралельна осі абсцис.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх його внутрішніх точках, то в інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одне значення $x = \xi,$ для якого

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Якщо деяка крива є графіком неперервної на $[a; b]$ функції, що має похідну на $(a; b),$

то на цій кривій існує точка з абсцисою ξ $(a<\xi<b),$ така, що дотична до кривої в цій точці паралельна хорді, яка стягує кінці кривої $(a;\ f(a))$ і $(b;\ f(b)).$

Рівність $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ $(a<\xi<b)$ називають *формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів*. Вона виражає той факт, що приріст функції на інтервалі дорівнює добутку похідної в деякій проміжній точці інтервалу на приріст незалежної змінної.

Економічний зміст теореми Лагранжа. Нехай функція $y=f\left(x\right)$ виражає залежність випуску продукції y від витрат x деякого специфічного ресурсу. Якщо обсяг витрат збільшити з a одиниць до b одиниць, то різниця $f(b)-f(a)$ виражає відповідну зміну випуску.

Відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ показує, на скільки одиниць в середньому змінюється випуск продукції, якщо витрати зросли на одну одиницю. Іншими словами, відношення – це середня продуктивність ресурсу на проміжку $(a;b)$.

Гранична продуктивність ресурсу дорівнює значенню похідної функції випуску за даного рівня витрат. Якщо витрати ресурсу становлять ξ одиниць, то $f'(\xi)$ – відповідна гранична продуктивність.

На основі теореми Лагранжа можна стверджувати, що для процесу виробництва, що описується функцією випуску $y=f\left(x\right)$, неперервною на $\left[a;b\right]$ і диференційовною в $(a;b)$, існує принаймні один рівень витрат ξ, за якого гранична продуктивність відповідного ресурсу збігається з його середньою продуктивністю на $\left[a;b\right]$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні в усіх його внутрішніх точках $x\in(a;\ b),$ причому $\varphi'(x)\neq 0,$ то існує така точка $\xi\in(a;\ b),$ що $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Теорема (правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні та мають похідні в усіх точках $x \neq a$ з околу точки $x = a,$ а в самій точці дорівнюють нулю або нескінченності. Тоді границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження. Теорема справедлива і в тому випадку, коли $a = \infty$.

Якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ знову є невизначеністю виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ і похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ функцій задовольняють умовам правила Лопіталя, то для обчислення границі можна застосувати правило Лопіталя вдруге, тобто $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, які називаються *основними.* Якщо потрібно розкрити невизначеності виду $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}), $(\infty-\infty)$, то їх спершу зводять до основних, а лише потім застосовують правило Лопіталя.

Невизначеність виду $(0\cdot\infty)$ можна звести до основних невизначеностей так:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right),\ \lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Невизначеності виду (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}) для степенево-показникової функції $f(x)^{g(x)}$ за допомогою логарифмування функції зводять до невизначеності виду $(0\cdot\infty)$, а саме:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}\ (f(x) > 0)\ \text{і}\ \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

Невизначеність виду $(\infty-\infty)$ за допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Наприклад,

$$f(x)-g(x)=(\infty-\infty)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Необхідні умови зростання та спадання функції.

1) Якщо диференційовна функція зростає на інтервалі $(a;b)$, то $f'(x)\geq 0$ на цьому інтервалі.

2) Якщо диференційовна функція спадає на інтервалі $(a;b)$, то $f'(x)\leq 0$ на цьому інтервалі.

Достатні умови зростання та спадання функції.

1) Якщо $f'(x)>0$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a;\ b)$.

2) Якщо $f'(x)<0$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;\ b)$..

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками)*, або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* (*критичними точками першого роду*).

Значення $f(x_0)$ називається *локальним максимумом* функції $f(x)$, якщо знайдеться таке число $\varepsilon>0$, що для всіх $h\in(0,\varepsilon)$ виконуються умови $f(x_0-h)<f(x_0)$, $f(x_0+h)<f(x_0)$. Точка x_0 – точка *локального максимуму* функції $f(x)$.

Значення $f(x_0)$ називається *локальним мінімумом* функції $f(x)$, якщо знайдеться таке число $\varepsilon>0$, що для всіх $h\in(0,\varepsilon)$

виконуються умови $f(x_0-h) > f(x_0)$, $f(x_0+h) > f(x_0)$. Точка x_0 – точка *локального мінімуму* функції $f\left(x\right)$.

Локальний максимум і локальний мінімум функції називають *локальним екстремумом* функції, а точку *локального максимуму* чи *локального мінімуму* функції називають точкою *локального екстремуму.*

Необхідна умова локального екстремуму. Якщо функція $f\left(x\right)$ у точці x_0 має локальний екстремум, то похідна $f'(x_0)$ перетворюється на нуль або не існує.

Достатні умови локального екстремуму. Якщо x_0 – критична точка функції $f\left(x\right)$ і при переході через цю точку зліва направо похідна змінює знак з «+» на «–», то функція $f\left(x\right)$ у точці x_0 має локальний максимум; якщо з «–» на «+», то – локальний мінімум. Якщо знак похідної при переході через точку x_0 не змінюється, то функція $f\left(x\right)$ у точці x_0 екстремуму не має.

Щоб знайти *найбільше* і *найменше* значення функції $y = f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$, потрібно:

1) знайти критичні точки функції $f\left(x\right)$, які належать інтервалу $\left(a;b\right)$;

2) обчислити значення функції $f\left(x\right)$ у знайдених критичних точках та на кінцях відрізка в точках a і b;

3) серед цих значень вибрати найбільше та найменше.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку ще називають відповідно *абсолютним максимумом* і *абсолютним мінімумом.*

Не слід плутати локальний максимум (мінімум) із найбільшим (найменшим) значеннями функції на відрізку – локальних максимумів (мінімумів) вона може мати декілька, тоді як найбільше (найменше) значення, якщо воно існує, єдине.

Графік функції $y = f(x)$ називається *опуклим* (*угнутим*) на інтервалі $(a;b)$, якщо він розміщений нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці *M* з абсцисою $x \in (a;b)$.

Точка $P\left(b;\ f(b)\right)$ графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину, від угнутої, називається *точкою перегину*.

Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на інтервалі $(a;b)$, тоді:

1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a;\ b)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;b)$, то крива $y = f(x)$ угнута на $(a;\ b)$.

У точці перегину друга похідна дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує, називають *критичними точками другого роду.*

Достатні умови існування точки перегину. Нехай x_0 – критична точка другого роду функції $y = f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Пряма L називається *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо відстань δ від точки $M(x;\ y)$ кривої до прямої *L* наближається до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Розрізняють *вертикальні, похилі* та *горизонтальні асимптоти*.

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm a} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x\to\pm a} f(x) = -\infty$.

Пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо існують границі $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$. Зокрема, якщо $k=0$, то $y=b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ і пряма $y=b$ – *горизонтальна асимптота* кривої $y=f(x)$.

Схема повного дослідження функції та побудова її графіка

Для повного дослідження функції і побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

1) вказати область визначення функції;
2) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
3) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
4) знайти точки розриву функції і вказати їх характер; знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують);
5) дослідити функцію на монотонність і екстремум;
6) визначити інтервали опуклості й угнутості, точки перегину;
7) побудувати графік функції.

Вивчення економічних питань, таких, наприклад, як визначення динаміки попиту населення на даний товар, якщо змінилася його ціна або змінилися доходи населення, дослідження діапазону взаємозамінюваності ресурсів виробництва, визначення ефективності певних витрат, прогнозування зміни прибутку підприємства під впливом різних чинників тощо, призводить до з'ясування питання, на скільки відсотків зміниться одна величина, якщо друга збільшиться на 1%. Характеристика, що дає відповідь на це питання, називається *еластичністю* $E_x(y)$ відповідної функції:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}y' \text{ або } E_x(y)=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Отже, коефіцієнт еластичності показує відносну зміну досліджуваного економічного показника внаслідок одиничної відносної зміни економічного чинника, від якого він залежить, за незмінності інших факторів, що впливають на нього. Наприклад, еластичність функції $y=3x+4$ дорівнює $E_x(y)=\dfrac{x}{3x+4}\cdot 3=\dfrac{3x}{3x+4}$. Якщо $x=2$, то коефіцієнт еластичності дорівнює 0,6, тобто якщо x змінюється з 2 до 2,02, то значення функції збільшується приблизно на 0,6 %.

Еластичність функції застосовують при аналізі попиту та пропозиції. Так, якщо вивчається залежність попиту Q на товар від його ціни p, то цю залежність можна зобразити функцією $Q = Q(p)$.

Еластичність попиту за ціною $E_p(Q)$ виражає відносну зміну попиту на будь-який товар зі зміною ціни на 1 % і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію: $E_p(Q) = \frac{p}{Q}Q' = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}$.

Можливі три види попиту залежно від величини $|E_p(Q)|$:

1) якщо $|E_p(Q)| > 1$, то попит вважається еластичним відносно ціни;

2) якщо $|E_p(Q)| = 1$, то попит вважається нейтральним;

3) якщо $|E_p(Q)| < 1$, то попит вважається нееластичним.

Аналогічно еластичності попиту визначається *еластичність пропозиції* $E_p(S) = \frac{p}{S}S' = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}$.

Еластичність попиту за доходом $E_R(Q) = \frac{dQ}{Q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{Q}\frac{dQ}{dR}$ виражає відносну зміну попиту на будь-який товар або послугу в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1 %.

Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від’ємна – малоцінні (низькоякісні).

Наприклад, високий додатний коефіцієнт еластичності попиту за доходом у галузі означає, що її внесок в економічне зростання більший, ніж частка в структурі економіки, й вона має шанси на розширення й розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від’ємне значення, то на неї очікують застій і перспектива скорочення виробництва.

За допомогою еластичності можна знайти відносну похибку функції δy за заданою похибкою знаходження аргументу δx:

$\delta y = \left| E_x\left(y\right) \right| \delta x$, де $\left| E_x\left(y\right) \right|$ – еластичність функції, $\delta x = \left| \dfrac{\Delta x}{x} \right|$ – відносна похибка знаходження аргументу x.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Перевірте справедливість теореми Ролля для функції $y = 1 + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}$ на відрізку $\left[1;\, 5\right]$.

Завдання 2. Перевірте справедливість теореми Лагранжа для функції $y = \sqrt{x+1}$ на відрізку $\left[0;\, 7\right]$.

Завдання 3. Запишіть формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ і $\varphi(x) = x^2 + 4$ на відрізку $\left[0; 2\right]$ і знайдіть значення ξ.

Завдання 4. Перевірте справедливість формули Коші для функцій $f(x) = x^2$ і $\varphi(x) = x^2 + 1$ на відрізку $\left[1;\, 2\right]$.

Завдання 5. Знайдіть границі, використовуючи правило Лопіталя.

Приклад 5.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{e^x - e}$.

Приклад 5.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Приклад 5.3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.

Приклад 5.4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + x - 1}{x^2 + 5}$.

Приклад 5.5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln\left(x - a\right)}{\ln\left(e^x - e^a\right)}$.

Приклад 5.6. $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$.

Приклад 5.7. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 2x$.

Приклад 5.8. $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Приклад 5.9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin x\right)^x$.

Приклад 5.10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x\right)^{2\cos x}$.

Приклад 5.11. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$.

Приклад 5.12. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$.

Завдання 6. Знайдіть інтервали монотонності функцій.

Приклад 6.1. $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

Приклад 6.2. $y = x(1+\sqrt{x})$.

Приклад 6.3. $y = x^2 e^{-x}$.

Приклад 6.4. $y = (x - 2\sin x)$.

Завдання 7. Дослідіть на екстремум функції.

Приклад 7.1. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Приклад 7.2. $y = 3x + \dfrac{1}{x^3}$.

Приклад 7.3. $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

Приклад 7.4. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Завдання 8. Знайдіть найбільше і найменше значення функцій у зазначених інтервалах.

Приклад 8.1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-4;\, 0]$.

Приклад 8.2. $y = x + \dfrac{4}{x^2}$, $[1;\, 3]$.

Приклад 8.3. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0;\, 1]$.

Приклад 8.4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x}$, $[0;\, 1]$.

Завдання 9. Знайдіть точки перегину та інтервали опуклості та угнутості графіка функцій.

Приклад 9.1. $y = x^5 + 5x - 6$.

Приклад 9.2. $y = \ln\left(4 + x^2\right)$.

Приклад 9.3. $y = \left(x + 1\right)e^{x+1}$.

Приклад 9.4. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

Завдання 10. Знайдіть асимптоти кривих.

Приклад 10.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Приклад 10.2. $y = x \operatorname{arctg} 2x$.

Приклад 10.3. $y = 3\sqrt{x^2 + 1}$.

Приклад 10.4. $y = xe^{-x}$.

Завдання 11. Дослідіть функції та побудуйте їх графіки.

Приклад 11.1. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Приклад 11.2. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Приклад 11.3. $y = \ln\left(x^2 + 2x\right)$.

Приклад 11.4. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

Приклад 11.5. $y = 16x - \left(x - 1\right)^3$.

Приклад 11.6. $y = \sin x + \cos x$.

Завдання 12. А*наліз функції витрат*. Витрати виробництва визначені функцією $v(x)=2x^3-24x-10$. Знайдіть інтервали, в яких функція витрат зростає та спадає.

Завдання 13. *Мінімізація середньої вартості одиниці продукції*. Загальна вартість вироблених q одиниць продукту A визначається функцією $C=100000+1500q+0,2q^2$ (у грн). Скільки одиниць q продукції треба випускати, щоб мінімізувати середню вартість одиниці продукції?

Завдання 14. Цементний завод виробляє x т цементу за день. Згідно з договором, він повинен щодня поставляти будівельній фірмі не менше 20 т цементу. Виробничі потужності заводу такі, що він не може випускати більше 90 т на день. Визначте, за якого обсягу виробництва питомі витрати будуть найбільшими (найменшими), якщо функція витрат має вигляд $v(x)=-x^3+98x^2+200x$.

Примітка. Питомі витрати – це середні витрати на одиницю продукції, тобто на 1 т цементу.

Завдання 15. Шляхом досліджень було встановлено, що функція попиту $q(p)=3p-2$, а функція пропозиції $s(p)=p+6$, де q та s – кількість товару, p – ціна цього товару. Визначте:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту та пропозиції цієї ціни;

в) зміни прибутку при збільшенні ціни на 10 % від рівноважної.

Завдання 16. Шляхом досліджень було встановлено, що функція попиту $q(p)=\dfrac{p+9}{p+2}$, а функція пропозиції $s(p)=p-3$, де q та s – кількість товару, p – ціна цього товару. Визначте:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту та пропозиції цієї ціни;

в) зміни прибутку при зменшенні ціни на 25 % від рівноважної.

Завдання 17. Витрати бензину y (л) автомобіля на 100 км шляху залежно від швидкості x (км/год) задається функцією

$y = 18 - 0,3x + 0,003x^2$. Оцініть відносну похибку обчислення витрат бензину за швидкості $x = 90$ км/год з точністю до 5 %.

Тема 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Частинні похідні, економічний зміст частинних похідних функції двох змінних.
3. Повний диференціал функції та його застосування.
4. Локальні екстремуми функції двох змінних.
5. Найбільше та найменше значення функції.
6. Умовний екстремум функції двох змінних.

Література: [1–3]; [7]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 8 студент повинен ***знати:*** означення функції багатьох змінних, її границі, поняття частинних похідних та правила їх знаходження, економічний зміст частинних похідних, означення повного диференціалу та його застосування до наближених обчислень, поняття локального екстремуму, алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум; ***уміти:*** знаходити область визначення функцій багатьох змінних, їх частинні похідні, повний диференціал функції, застосовувати його до наближених обчислень, досліджувати функції двох змінних на екстремуми, визначати найбільше та найменше значення функцій.

Нехай задано дві множини: множина D упорядкованих пар чисел (x, y) і множина $E \subset R$. Якщо відомий закон, за яким кожній парі чисел $(x, y) \in D$ відповідає певне число $z \in E$, тоді кажуть, що на множині D визначено *функцію двох змінних* x і y, яку позначають $z = f(x, y)$.

Областю визначення функції $z = f\left(x, y\right)$ називають множину пар (x, y) значень x та y, для яких ця функція визначена, і позначають $D(f)$ або D. Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Аналогічно визначається поняття функції трьох і більшої кількості змінних. Так, якщо кожній точці $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, або $u = f\left(M\right)$, $M \in R^n$. Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *незалежні змінні*, або *аргументи,* u – *залежна змінна*, або *функція*.

Графіком функції $z = f\left(x, y\right)$ у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M(x, y, f(x, y))$, проекції яких (x, y) належать області D. Отже, функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні простору R^3, проекцією якої на площині Oxy є множина D.

Точка M_0 називається *внутрішньою точкою* множини D, якщо вона належить множині D разом із деяким своїм околом. Область D називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою. Лінію, що обмежує область D, називають *межею* цієї області. Область D разом з її межею називається *замкненою* областю.

Число A – *границя функції* $z = f\left(x, y\right)$ у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ (або при $M \to M_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M\left(x, y\right) \in D$, які задовольняють умову $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ виконується нерівність $\left| f\left(M\right) - A \right| < \varepsilon$. Границя функції позначається $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right) = A$.

Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні теоремам для функції однієї змінної.

Функція $u = f\left(M\right)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо вона визначена в цій точці та її околі і справджується рівність

$\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ (незалежно від способу прямування точки M до точки M_0).

Точки, в яких функція неперервна, називаються *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується – *точками розриву* цієї функції.

Функція $u = f(M)$ називається *неперервною в області D*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Частинною похідною функції багатьох змінних по одній з них називається границя відношення відповідного частинного приросту Δ_x чи Δ_y функції до приросту цієї змінної Δx чи Δy, якщо приріст змінної прямує до нуля. Так, для функції двох змінних, якщо вважати, що один із аргументів x або y залишається сталим, наприклад, $y = \mathrm{const}$, тоді функція $z = f(x, y)$ є функцією однієї змінної x і для неї можна, за відомими правилами, обчислювати похідну в точці $M(x, y)$.

Згідно з означенням, якщо існують границі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y,$$

то вони називаються *частинними похідними за змінними x і y функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$*. Позначаються частинні похідні так: $z'_x = f'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $z'_y = f'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$, де

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k},\ \ \Delta_{x_k} u = f(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n).$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y в кожній точці області D, то їх називають *частинними похідними першого порядку*, і ці похідні можна розглядати як функції змінних x і y, які також можуть мати частинні похідні за змінними x і y.

Якщо існують частинні похідні функцій $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ за змінними x і y, то їх називають *частинними похідними другого порядку* функції $z = f(x,y)$ і позначають:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}.$$

Похідні z''_{xy}, z''_{yx} називають *мішаними частинними похідними другого порядку.* Якщо ці похідні існують у деякому околі точки $M(x,y)$ і неперервні в самій точці $M,$ то в цій точці $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Економічним змістом частинних похідних є поняття *частинних еластичностей* функції двох змінних. Їх вводять аналогічно еластичності функції однієї змінної.

Нехай функції $z_1 = f_1\left(p_1, p_2\right)$ і $z_2 = f_2\left(p_1, p_2\right)$ виражають попит на товари *A* і *B*, який залежить від ціни на ці товари. Частинні еластичності попиту відносно цін p_1 і p_2 мають вигляд:

$$E_{11} = \frac{p_1}{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial p_1}, \; E_{12} = \frac{p_2}{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial p_2}, \; E_{21} = \frac{p_1}{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial p_1}, \; E_{22} = \frac{p_2}{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial p_2}.$$

Частинна еластичність E_{11} попиту на товар *A* відносно його ціни приблизно означає відсоток підвищення (зниження) попиту на товар *A,* якщо його ціна зростає на 1 %, а ціна товару *B* не змінюється.

Частинна еластичність E_{12} попиту на товар *A* відносно ціни *B* приблизно означає відсоток підвищення (зниження) попиту на товар *A,* якщо ціна товару *B* зростає на 1 %, а ціна товару *A* не змінюється.

У економічній теорії прикладом функції двох змінних є *виробнича функція* $Q = Q\left(x, y\right)$, де x – кількість одиниць праці, які можуть вимірюватися робочими годинами або річною вартістю праці, y – сума капіталу, вкладеного фірмою у виробництво, Q –

кінцевий результат цього виробництва, наприклад кількість одиниць виготовленої фірмою продукції.

Частинна похідна першого порядку $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – гранична продуктивність праці за фіксованої продуктивності капіталу, або *маргінальна продуктивність праці*. Частинна похідна $\frac{\partial Q}{\partial y}$ – гранична продуктивність капіталу за фіксованої продуктивності праці, або *маргінальна продуктивність капіталу*.

Прибутки виробництва зростають, якщо $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} > 0$.

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y) \in D$ називається вираз $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, де Δx, Δy – прирости незалежних змінних.

Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною* в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

де A_1, A_2 – сталі, які не залежать від $\Delta x, \Delta y$, а α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Якщо хоча б одне з чисел A_1, A_2 відмінне від нуля, то сума $A_1 \Delta x + A_2 \Delta y$ є головною лінійною відносно $\Delta x, \Delta y$ частиною приросту диференційовної функції. Ця головна частина приросту функції називається *повним диференціалом*.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x, y)$, $f'_y = f'_y(x, y)$ і $\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$.

Оскільки прирости незалежних змінних Δx та Δy є диференціалами незалежних змінних x та y ($dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$), то повний диференціал можна подати у вигляді:

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \text{, або } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно визначається повний диференціал функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$, де $dx_1 = \Delta x_1, ..., \; dx_n = \Delta x_n$.

За допомогою повного диференціала можна обчислювати наближене значення функції: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df(x, y)$ або $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Функція $z = f(M)$ має *локальний максимум* (*локальний мінімум*) у точці M_0 $(M \neq M_0)$, якщо існує δ-окіл точки M_0, який належить області D, що для будь-якої точки M з цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – точка локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, то значення $f(x_0, y_0)$ називається *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції.

Точки максимуму та мінімуму функції називають також *точками екстремуму*, а *локальні максимум* і *мінімум* функції $z = f(M)$ називають відповідно її *локальними екстремумами*.

Необхідні умови екстремуму. Функція $z = f(M)$ має екстремум лише у точках, у яких $f'_x(M_0) = 0, \; f'_y(M_0) = 0$ та у точках, де похідні не існують.

Точка $M_0(x_0, y_0)$, у якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x(M_0) = 0, \; f'_y(M_0) = 0$, називається *стаціонарною точкою* функції $f(x, y)$. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками*.

Достатні умови екстремуму. Нехай у стаціонарній точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і деякому її околі функція $f\left(x, y\right)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Позначимо

$$f''_{xx}(M_0)=A,\ f''_{xy}(M_0)=B,\ f''_{yy}(M_0)=C,\quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція $z = f\left(x, y\right)$ має екстремум, причому максимум при $f''_{xx}\left(M_0\right) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}\left(M_0\right) > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f\left(x, y\right)$ у точці M_0 екстремуму не має;

3) якщо $\Delta = 0$, то ніякого висновку зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена й неперервна в замкненій обмеженій області D. Функція $z = f(x, y)$ в області D досягає свого *найбільшого* та *найменшого значень*, причому у внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму.

Для визначення найбільшого та найменшого значень функції потрібно:

1) знайти стаціонарні точки всередині області D і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше (найменше) значення функції на межі області D;

3) порівняти отримані значення функції і вибрати серед них найбільше та найменше.

Нехай треба знайти екстремум функції $f\left(x, y\right)$, коли змінні x та y задовольняють умові $\varphi\left(x, y\right) = 0$, що називається *рівнянням зв'язку.* Якщо функція за заданого рівняння зв'язку має екстремум, то його називають *умовним екстремумом функції*.

Для знаходження умовного екстремуму функції застосовують *метод множників Лагранжа* (*метод Лагранжа*), який полягає у такому:

1) складаємо *функцію Лагранжа* вигляду $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, де λ – множник Лагранжа;

2) знаходимо стаціонарні точки функції Лагранжа з системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0;\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0;\\ \varphi(x,y)=0;\end{cases}$$

3) для знайдених λ досліджуємо знак другого диференціала $d^2L(x,y,\lambda)$ функції Лагранжа, враховуючи, що між dx та dy існує співвідношення, що виникає з рівняння зв'язку: $0=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy$. Якщо у стаціонарній точці $d^2L>0$ ($d^2L<0$), то маємо точку умовного мінімуму (максимуму).

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть область визначення функцій.

Приклад 1.1. $z=\ln(x+y)$. **Приклад 1.2.** $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

Приклад 1.3. $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$. **Приклад 1.4.** $z=x+\sin y$.

Завдання 2. Знайдіть границі функцій.

Приклад 2.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{4}{x^2+y^2}$. **Приклад 2.2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$.

Приклад 2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(y-x)}{y-x}$. **Приклад 2.4.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{(x+y)^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$.

Завдання 3. Знайдіть частинні похідні першого порядку.

Приклад 3.1. $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5$.

Приклад 3.2. $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

Приклад 3.3. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Приклад 3.4. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.

Приклад 3.5. $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$.

Приклад 3.6. $z = (x + y)^{xy}$.

Приклад 3.7. $z = \sin\frac{x^2}{y}\cos\frac{y}{x^2}$.

Приклад 3.8. $u = e^{x^2 + xy + xyz}$.

Завдання 4. Знайдіть повний диференціал функції.

Приклад 4.1. $z = \sqrt{x^3 + y^3}$

Приклад 4.2. $u = (xy)^z$.

Приклад 4.3. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Приклад 4.4. $z = \operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$.

Завдання 5. Обчисліть наближено.

Приклад 5.1. $(0{,}98)^{3{,}02}$.

Приклад 5.2. $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$.

Приклад 5.3. $\ln\left(0{,}09^3 + 0{,}99^3\right)$

Приклад 5.4. $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$.

Завдання 6. Знайдіть частинні похідні другого порядку.

Приклад 6.1. $z = \frac{3x}{y + 3}$.

Приклад 6.2. $z = \sin^2(x - 2y)$.

Приклад 6.3. $z = e^{y^2 + \sin x}$.

Приклад 6.4. $z = x^2 \ln(x + y)$.

Приклад 6.5. $z = xe^y + ye^x$.

Приклад 6.6. $z = \frac{x^4 - 8xy^3}{x + 2y}$.

Приклад 6.7. $z = (2x - 5y)^6$.

Приклад 6.8. $u = x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3$.

Завдання 7. Визначте екстремуми функцій.

Приклад 7.1. $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5$.

Приклад 7.2. $z = 2xy - 3x - 2y^2 + 10$.

Приклад 7.3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

Приклад 7.4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Приклад 7.5. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$ **Приклад 7.6.** $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$

Завдання 8. Знайдіть найбільше та найменше значення функцій в області D.

Приклад 8.1. $z = x - 2y + 5$,
$D = \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$.

Приклад 8.2. $z = xy + x + y$,
$D = \{1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3\}$.

Приклад 8.3. $z = x^2 - y^2 + 8$,
$D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$.

Приклад 8.4. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$,
$D = \{y = 8,\ y = 2x^2\}$.

Завдання 9. Знайдіть умовні екстремуми функцій.

Приклад 9.1.
$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4,$
якщо $x + y + 3 = 0.$

Приклад 9.2. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$,
якщо $3x + y = 2.$

Приклад 9.3. $z = xy$,
якщо $x + y = 1.$

Приклад 9.4. $z = 2x + y$,
якщо $x^2 + y^2 = 1.$

Завдання 10. Задано функцію попиту $z_1 = f(p_1; p_2) = 30 - 3p_1 + 2p_2$ на товар *А*. Визначте зміну попиту на товар *А* при $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, якщо:

а) ціна товару *А* зростає на 1 %, а ціна товару *В* не змінюється;
б) ціна товару *В* зростає на 1 %, а ціна товару *А* не змінюється.

Завдання 11. Кількість одиниць Q випущеної продукції визначається за формулою $Q = 3x^2y + xy^2$, де x – кількість одиниць праці, y – сума капіталу, вкладеного у виробництво. Визначте маргінальну продуктивність праці й маргінальну продуктивність капіталу. З'ясуйте, чи зростатимуть прибутки виробництва, якщо $x = 50,\ y = 120$.

Завдання 12. На підприємстві виготовляють два види продукції у кількостях x і y відповідно. Вартість одиниці продукції першого виду – 80 грн., а другого – 95 грн. Функція витрат має вигляд

$V(x,y)=2x^2-xy+y^3$. Обчисліть максимальний прибуток від реалізації цієї продукції.

Тема 9. ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

План

1. Основні поняття фінансової математики.
2. Нарощення та дисконтування за простими відсотками.
3. Нарощення та дисконтування за складними відсотками.

Література: [8]; [12].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 9 студент повинен ***знати:*** сутність і значення основних понять фінансової математики, потрібних для здійснення фінансових розрахунків та оцінювання грошових потоків; ***уміти:*** виконувати розрахунки нарощення й дисконтування на основі простих і складних відсоткових та облікових ставок за різних умов постановки задачі.

Фінансова математика – це наука, яка вивчає методи обчислення вартісних і часових параметрів фінансових, інвестиційних і торговельних операцій з урахуванням часу, інфляції валютних курсів, відсотків та інших умов виконання договорів. Іншими словами, фінансова математика вивчає методи розв’язування задач, що постають під час планування та проведення фінансово-економічних розрахунків. Ці методи дозволяють ефективно здійснювати інвестиційну діяльність, проводити проектний аналіз та управління фінансами й фінансовими активами.

Предметом вивчення фінансової математики є гроші, цінні папери, різні операції з ними на фінансовому ринку.

Теоретичною основою фінансової математики є методи нарахування простих і складних відсотків, схема фінансової ренти, принципи часової вартості грошей і принципи фінансової еквівалентності.

Методи фінансової математики застосовують тоді, коли в обчисленнях повинні бути враховані три параметри: вартісні характеристики (суми платежів та позичок), часові дані (дати й терміни виплат, тривалість пільгових періодів, відстрочки платежів тощо), а також відсоткові ставки.

На практиці методи фінансової математики досить широко застосовуються в банківській справі, у страхуванні, в роботі інвестиційних та торговельних організацій, а також при аналізі роботи фінансових установ, процесів на біржах і валютних ринках.

Прикладами застосування фінансово-економічних розрахунків є розрахунок кінцевих сум грошей, які знаходяться на депозитах, кредитних рахунках та в цінних паперах; визначення альтернативних напрямків вкладень або еквівалентних умов проведення операції; аналіз наслідків зміни умов фінансової операції; розрахунок показників дохідності фінансових активів та вартості фінансових ресурсів тощо.

Головною категорією фінансової математики є *відсотки*, або *відсоткові гроші* – сума, що сплачується за користування коштами, або абсолютна величина доходу з капіталу.

Відсоткова ставка – це відношення відсоткових грошей, отриманих за певний період часу, до величини капіталу

$$i = \frac{I}{Pn}, \qquad (9.1)$$

де P – початковий капітал, I – сума доходу, яку інвестор бажає одержати від свого капіталу, n – термін фінансової операції в роках.

Якщо дохід I отримано за d днів, то відсоткова ставка обчислюється за формулою

$$i = \frac{I}{P} \cdot \frac{N}{d}, \qquad (9.2)$$

де N – кількість днів у році (360 чи 365 днів).

Залежно від способу вибору часової бази N і терміну користування позикою d існує декілька варіантів відсоткових розрахунків:

- англійська практика – річна база 365 (366) днів, а кількість днів у місяці відповідає календарній. Такий варіант дає так звані *точні відсотки* з так званою *точною кількістю* днів позики.

- французька практика – річна база 360 днів, а кількість днів у місяці відповідає календарній. У цьому випадку відсотки стають більшими, ніж у першому. Такий варіант дає так звані *звичайні відсотки* з точною кількістю днів позики;

- німецька практика – річна база 360 днів, а тривалість місяця приймається рівною 30 дням. Такий варіант дає звичайні відсотки з так званою *наближеною кількістю* днів позики.

День видачи позики та день її погашення приймається за один день.

Дохід I, який може бути отриманий з капіталу за відомої відсоткової ставки, обчислюємо з формул (9.1), (9.2):

$$I = Pin \text{ або } I = Pi\frac{d}{N}. \qquad (9.3)$$

Існує два способи нарахування відсотків – *звичайний (декурсивний*) та *авансовий (антисипативний)*. За звичайного способу відсотки нараховуються наприкінці кожного періоду нарахування. У світовій практиці більш поширений саме такий спосіб. За авансового – відсотки нараховують на початку кожного періоду нарахування. Такий спосіб нарахування відсотків найчастіше застосовують при угодах з дисконтними цінними паперами або в періоди високої інфляції.

Відсоткові ставки при обох способах нарахування відсотків можуть бути простими або складними.

Якщо приймається *проста відсоткова ставка*, то відсотки нараховують лише на початковий капітал P (нарощення відбувається за арифметичною прогресією). База нарахування не змінюється. При нарахуванні відсотків за *складною відсотковою ставкою* відсотки нараховують кожного періоду на початковий капітал P і на відсоткові гроші, нараховані попередніми періодами нарахувань (нарощення відбувається за геометричною прогресією). База нарахування після кожного періоду змінюється.

Нарощення вихідної суми P – це процес збільшення грошей за рахунок нарахування відсотків за відсотковою ставкою i.

Нарощення відбувається протягом n років (періодів), а нарахування відсотків – один раз на рік.

Нарощену суму за простою відсотковою ставкою за n періодів обчислюють за формулою

$$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P(1 + ni). \qquad (9.4)$$

Формула (9.4) є *формулою нарощення простих відсотків*, або *формулою простих відсотків*, множник $(1+ni)$ – *множник нарощення простих відсотків.*

Зазвичай за відсотковий період приймається один рік. Якщо термін угоди не дорівнює цілому числу років, то формула (9.4) має вигляд

$$S = P\left(1+\frac{d}{N}i\right). \tag{9.5}$$

Якщо встановлена дискретна ставка, то нарощену суму обчислюють за формулою

$$S = P\left(1+\sum_{t=1}^{k} n_t i_t\right). \tag{9.6}$$

Формули нарощення (9.1) – (9.6) застосовують при звичайному нарахуванні відсотків. Якщо має місце авансовий спосіб, то застосовують не відсоткову, а облікову ставку *r*. Нарощену суму визначають за формулою

$$S = P\left(\frac{1}{1-nr}\right). \tag{9.7}$$

Дисконтування – це процес, обернений до процесу нарощення відсотків. Під дисконтуванням розуміють спосіб визначення суми *P* на деякий момент за умови, що в майбутньому при нарахуванні на неї відсотків вона могла б становити нарощену суму *S*. Суму *P*, отриману шляхом дисконтування нарощеної суми *S*, називають *теперішньою*.

Дисконтування буває математичне й банківське. За *математичного дисконтування* розв'язують задачу, обернену до задачі визначення нарощеної суми.

Постановка задачі: яку суму потрібно дати в борг сьогодні або інвестувати на *n* років, щоб при нарахуванні на неї відсотків за ставкою *i* одержати нарощену суму *S*?

Із формули нарощення простих відсотків (9.4) отримуємо формулу для математичного дисконтування

$$P = \frac{S}{1+ni} = S\cdot\frac{1}{1+ni}. \tag{9.8}$$

Вираз $\dfrac{1}{1+ni}$ у формулі (9.8) називають *дисконтним множником*. Він показує, яку частку становить початкова сума позики в кінцевій величині боргу.

Для короткотермінових кредитів із формули (9.5) маємо

$$P = \frac{S}{1+\frac{d}{N}i}.$$

За *банківського дисконтування* відсотки нараховують на суму, що підлягає оплаті наприкінці терміну фінансової операції. Формула визначення дисконтованих сум при використанні простої облікової ставки має вигляд (з формули (9.7))

$$P = S\left(1-nr\right),$$

де $\left(1-nr\right)$ – дисконтний множник.

При нарахуванні відсотків за складною відсотковою ставкою в кожен період нарахування відсотків змінюється база подальшого нарахування доходу, оскільки сума нарахованих відсотків приєднується до початкової суми. Отже, порівняно з нарахуванням відсотків за простою відсотковою ставкою, процес нарощення капіталу за складними відсотками відбувається значно швидше. Приєднання нарахованих відсотків до суми з використанням складних відсотків називають *капіталізацією* відсотків.

Розрізняють річну капіталізацію (відсотки нараховуються й додаються до первісної суми раз на рік), піврічну, квартальну, місячну та щоденну. У цьому випадку нараховуватися відсотки також можуть декурсивним і антисипативним способами.

Розглянемо декурсивний спосіб нарахування складних відсотків. Нарощену суму за складною відсотковою ставкою за n періодів обчислюють за формулою

$$S = P\left(1+i\right)^n. \tag{9.9}$$

Формула (9.9) є *формулою нарощення складних відсотків*, або *формулою простих відсотків*, $\left(1+i\right)^n$ – множник нарощення.

Якщо термін угоди не дорівнює цілому числу років, то формула (9.9) має вигляд $S = P\left(1+i\right)^{\frac{d}{N}}$.

Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, то формула (9.9) набуває вигляду $S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n\cdot m}$, де j – номінальна річна відсоткова ставка, $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n\cdot m}$ – множник нарощення.

Номінальна ставка не дає повної картини про реальну прибутковість фінансової операції у вигляді повних річних відсотків. Тому вводять поняття ефективної відсоткової ставки, яка відображає реальну дохідність операції за рік.

Отже, *ефективна ставка складних відсотків* i_e – це річна ставка складних відсотків, яка дозволяє отримати такий самий дохід, як і при m-разовому нарахуванні відсотків за номінальною ставкою $\frac{j}{m}$.

Якщо відсотки капіталізуються m разів на рік щоразу за ставкою $\frac{j}{m}$, то прирівнявши відповідні множники нарощення, з одержаного рівняння виразимо ефективну ставку i_e та номінальну ставку j відповідно:

$$(1+i_e)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{n\cdot m},\ i_e = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1,\ j = m\left((1+i_e)^{\frac{1}{m}} - 1\right).$$

Ці формули відображають зв’язок між ефективною та номінальною ставками.

При використанні складних відсотків нарощення може відбуватися й антисипативним методом. Загальні формули визначення нарощеної суми мають вигляд:

$$S = P\cdot\frac{1}{(1-r)^n} \text{ або } S = P\cdot\frac{1}{(1-r)^{\frac{d}{N}}},$$

де r – облікова ставка складного відсотка.

Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, то $S = P\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{n\cdot m}}$,

де f – номінальна облікова ставка складного відсотка.

Як і у випадку простих відсотків, розглядають математичне й банківське дисконтування. Формула для визначення дисконтованої суми на основі складної відсоткової ставки, як і в разі використання простої відсоткової ставки, може бути отримана з формул нарощення. Так, якщо в операції застосовувалася складна відсоткова ставка, то формули для математичного дисконтування мають вигляд: $P = \frac{S}{(1+i)^n}$ або $P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n \cdot m}}$, де

$\frac{1}{(1+i)^n}$, $\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n \cdot m}}$ – дисконтні множники складних відсотків.

Банківське дисконтування при використанні складної облікової ставки здійснюється за формулою $P = S(1-r)^n$ або $P = S \cdot (1-r)^{\frac{d}{N}}$, де $(1-r)^n$ – дисконтний множник. Якщо дисконтування відбувається m разів на рік, то $P = S \cdot \left(1-\frac{f}{m}\right)^{n \cdot m}$, де $\left(1-\frac{f}{m}\right)^{n \cdot m}$ – дисконтний множник.

Зв'язок між ефективною та номінальною обліковими ставками визначається з рівності дисконтних множників:

$$(1-r)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{n \cdot m}, \ r = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^m, \ f = m\left(1-(1-r)^{\frac{1}{m}}\right).$$

Ефективна облікова ставка завжди менша за номінальну.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Вкладено 5000 грн під простий річний відсоток 10%. Яку суму отримає вкладник через 5 років?

Завдання 2. Вкладник розмістив особисті заощадження у банку на 5 років. Сума вкладу становить 800 грн. Яку суму отримає вкладник через 5 років, якщо банк здійснює нарахування за простою річною відсотковою ставкою у 14 %?

Завдання 3. Підприємство отримало у банку позику 30 000 грн на 6 місяців під 8 % річних простих відсотків. Визначте дохід банку та суму боргу.

Завдання 4. Вкладник розмістив особисті заощадження у розмірі 1200 грн у банку на 200 днів. Яку суму отримає вкладник через 200 днів, якщо банк нараховує річні прості відсотки у 19 %?

Завдання 5. Суму в 100 грн поклали під простий відсоток 10 % річних на 2,5 року. Потім накопичену суму поклали під простий відсоток 16 % річних на наступні T місяців. Наприкінці терміну одержали накопичену суму в 140 грн. Чому дорівнює T?

Завдання 6. Початкова сума боргу 16 120 грн. Через 30 днів планується погасити 16 299 грн. Визначте доходність операції для кредитора у простій відсотковій і простій обліковій ставці. Рік не високосний.

Завдання 7. Банк нараховує складні відсотки за номінальною ставкою 16 % річних. Визначте діючу ставку складних відсотків, якщо складні відсотки нараховуються щомісячно; щоквартально; за півріччя.

Завдання 8. Депозит у розмірі 5000 грн покладено в банк на 3 роки. Визначте суму нарахованих відсотків за цей період, якщо річна ставка складних відсотків становить 10 %.

Завдання 9. Визначте ефективну відсоткову ставку, якщо номінальна відсоткова ставка дорівнює 10 % і складні відсотки нараховуються щопівроку; щоквартально.

Завдання 10. На одному з рахунків у банку протягом 10 років накопичено 10 000 грн. Яка теперішня сума грошей була на рахунку, якщо відсоткова ставка 5 %?

Завдання 11. Фінансовий інструмент на суму 5 млн грн, термін платежу настає через 5 років. Обчисліть теперішню вартість, отриману при щоквартальному дисконтуванні за номінальною обліковою ставкою 15 % та ефективну облікову ставку.

Завдання 12. Яку суму грошей треба внести зараз, щоб накопичити 150 001 грн за 21 рік, якщо складна відсоткова ставка із щоквартальним нарахуванням дорівнює 19,8 %?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів: Навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2002. – 400 с.

2. *Валєєв К. Г.* Вища математика: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий [та ін.]. – К. : КНЕУ, 2002 – 606 с.

3. *Васильченко І. П.* Вища математика для економістів: підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика: Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.

5. *Дубовик В. П.* Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 480 с.

6. *Коршунова Н. И.* Математика в экономике / Н. И. Коршунова, В. С. Плясунова. – М. : Издательство «Вита-Пресс», 1996. – 368 с.

7. *Кремер Н. Ш.* Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 471 с.

8. *Крисак Я. В.* Фінансові потоки : навч. посіб. / Я. В. Крисак, І. О. Ластівка. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «Нау-друк», 2009. – 88 с.

9. *Кулініч Г. Л.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посібник: У двох книгах. Книга 1 / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – К. : Либідь, 1994. – 312 с.

10. *Ластівка І. О.* Математика для економістів : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 1 / І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, І. В. Шевченко [та ін.]. – К.: НАУ, 2012. – 432 с.

11. *Ластівка І. О.* Математика для економістів : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 2 / І. О. Ластівка, Н. І. Затула, Є. Ю. Корнілович [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 312 с.

12. *Молдавська О. В.* Фінансова математика : конспект лекцій / О. В. Молдавська. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2008. – 76 с.

Навчальне видання

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини»,

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ШЕВЧЕНКО Ірина Вікторівна