МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних
спеціальностей

Київ 2020

УДК 517.3(076.5)
В55

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

В. П. Петрусенко – канд. техн. наук, доц;

Р. В. Горідько – ст. викладач

Рецензент: П.П. Баришовець – канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено науково-методично-редакційною радою Факультету транспорту, менеджменту і логістики Національного авіаційного університету (протокол № 9 від 01.10.2019р.).

В55 **Вища математика. Інтегральнельне числення функцій однієї змінної:** методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних та економічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, В. П. Петрусенко, Р. В. Горідько. – К. : НАУ, 2020. – 56 с.

Укладено відповідно до робочих програм курсу «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв'язання типових задач розділу «Інтегральне числення функцій однієї змінної», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов'язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до робочих програм курсу «Вища математика» для студентів технічних та економічних спеціальностей.

У пропонованій методичній праці наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим програмам дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів

«Інтегральне числення функцій однієї змінної». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв’язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

План

1. Метод безпосереднього інтегрування.
2. Метод підстановки (заміни змінної).
3. Метод інтегрування частинами.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення невизначеного інтеграла, таблицю інтегралів, формули заміни змінної, інтегрування частинами; ***уміти:*** зводити інтеграли до табличних, використовуючи внесення функції під знак диференціала, застосовувати потрібну заміну в інтегралах відомих типів.

Таблиця інтегралів

1. $\int 0dx = C$	**2.** $\int dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$	**4.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
5. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$	**6.** $\int e^{x}dx = e^{x} + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	**8.** $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	**10.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
11. $\int tg\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	**12.** $\int ctg\, x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$	**14.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
15. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	**16.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$
17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть інтеграли: а) $\int\left(3\cos x-4x^2+\frac{1}{x}+5\right)dx$;

б) $\int\frac{dx}{4x^2+25}$; в) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{3}{x^2-5}\right)dx$; г) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

Розв'язання

Зводимо інтеграли до табличних.

а) $\int\left(3\cos x-4x^2+\frac{1}{x}+5\right)dx=3\int\cos x dx-4\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx+5\int dx=$

$=3\sin x-\frac{4x^3}{3}+\ln|x|+5x+C$.

б) $\int\frac{dx}{4x^2+25}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C.$

в) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{3}{x^2-5}\right)dx=\frac{2}{\sqrt{4}}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1/4}}dx-3\int\frac{1}{x^2-5}dx=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+(1/2)^2}}-3\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$

г) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}dx=$

$=\int\left(\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right)dx==\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$.

Приклад 2. Знайдіть інтеграли, використовуючи властивість інваріантності формули інтегрування: а) $\int\frac{dx}{3x+1}$; б) $\int e^{-2x}dx$; в) $\int\sin 5x\,dx$; г) $\int\cos\left(7-0,5x\right)dx$.

Розв'язання

Застосовуючи властивість інваріантності формули інтегрування $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C,\ u=\varphi(u)\Rightarrow\int f\left(u\right)du=F\left(u\right)+C,$

зокрема $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, будемо мати:

а) $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$.

б) $\int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}e^{-2x}+C = -\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

в) $\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}(-\cos 5x)+C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

г) $\int \cos\left(7-\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\sin\left(7-\frac{1}{2}x\right)+C = -2\sin\left(7-\frac{1}{2}x\right)+C.$

Приклад 3. Знайдіть інтеграли, використовуючи внесення функції під знак диференціала: а) $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$; б) $\int \sqrt[5]{(7-3x)^4}dx$;

в) $\int \left(1-x^2\right)^7 xdx$; г) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; ґ) $\int e^{\cos x}\sin xdx$; д) $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$.

Розв'язання

а) Оскільки $d(3x-2)=3dx$, тоді дістанемо інтеграл, який береться за формулою $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$:

$$\int \frac{dx}{(3x-2)^7} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-2)}{(3x-2)^7} = -\frac{1}{18(3x-2)^6}+C.$$

б) Знаходимо $d(7-3x) = -3dx$, тоді:

$$\int \sqrt[5]{(7-3x)^4}dx = \int \frac{(7-3x)^{\frac{4}{5}}d(7-3x)}{-3} = -\frac{5}{9\cdot 3}(7-3x)^{\frac{9}{5}}+C =$$

$$= -\frac{5}{27}(7-3x)^{\frac{9}{5}}+C.$$

в) Оскільки $d\left(1-x^2\right) = -2xdx,\ xdx = \frac{d\left(1-x^2\right)}{-2}$, шуканий інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int\left(1-x^2\right)^7 xdx=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^7 d\left(1-x^2\right)=-\frac{\left(1-x^2\right)^8}{16}+C.$$

г) Вираз $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}, \frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)$, тому

$$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\int e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

ґ) Знаходимо $d\left(\cos x\right)=\sin xdx, \sin xdx=-d\left(\cos x\right)$, тоді

$$\int e^{\cos x}\sin xdx=\int e^{\cos x}\left(-d\left(\cos x\right)\right)=-e^{\cos x}+C.$$

д) Враховуючи співвідношення $d\left(\ln x\right)=\frac{dx}{x}$, подамо інтеграл у вигляді $\int\cos\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}=\int\cos\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right)=\sin\left(\ln x\right)+C.$

Приклад 4. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчисліть інтеграли: а) $\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; в) $\int x\sqrt{x+1}dx$; г) $\int\frac{x^2dx}{\left(x-1\right)^{10}}$;

ґ) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$; д) $\int\sqrt{1-x^2}dx.$

Розв'язання

а) $$\int\frac{e^x}{e^x-1}dx=\left|\begin{array}{l} e^x-1=t \\ e^x=t+1 \\ x=\ln(t+1) \\ dx=d\left(\ln\left(t+1\right)\right)=\frac{1}{t+1}dt \end{array}\right|=\int\frac{t+1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}dt=$$

$$=\int\frac{1}{t}dt=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|e^x-1\right|+C\ .$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x} \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3}{t-1}dt=$$

$$=6\int\frac{t^3-1+1}{t-1}dt=6\int\frac{t^3-1}{t-1}dt+6\int\frac{dt}{t-1}=6\int\left(t^2+t+1\right)dt+6\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C\ .$$

в) $$\int x\sqrt{x+1}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\\ t^2=x+1\\ x=t^2-1\\ dx=2tdt\end{array}\right|==\int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+C=\frac{2\sqrt{\left(x+1\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(x+1\right)^3}}{3}+C.$$

г) $$\int\frac{x^2dx}{\left(x-1\right)^{10}}=\left|\begin{array}{l}t=x-1\\ x=t+1\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t+1\right)^2}{t^{10}}dt=$$

$$=\int\frac{t^2+2t+1}{t^{10}}dt=\int\frac{dt}{t^8}+2\int\frac{dt}{t^9}+\int\frac{dt}{t^{10}}=-\frac{1}{7t^7}-\frac{1}{4t^8}-\frac{1}{9t^9}+C$$

$$=-\frac{1}{7\left(x-1\right)^7}-\frac{1}{4\left(x-1\right)^8}-\frac{1}{9\left(x-1\right)^9}+C.$$

г) $$\int\frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{3+e^x}=t\\ e^x=t^2-3\\ x=\ln\left(t^2-3\right)\\ dx=\dfrac{2tdt}{t^2-3}\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t\left(t^2-3\right)}=2\int\frac{dt}{t^2-3}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}\right|+C.$$

д) Для того, щоб позбутись ірраціональності під знаком інтеграла, виконаємо тригонометричну заміну: $x=\sin t$, $t=\arcsin x, dx=\cos tdt$, тоді

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

Приклад 5. Обчисліть інтеграли методом інтегрування частинами: а) $\int x\cos 3x dx$; б) $\int(3x+2)\cdot 3^x dx$; в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\int\frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x}}$; ґ) $\int\left(x^2+x-1\right)e^{2x}dx$.

Розв'язання

У даних прикладах будемо застосовувати формулу інтегрування частинами: $\int u dv=uv-\int v du$.

а) $$\int x\cos 3x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & dv=\cos 3x dx \\ du=dx & v=\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}x\sin 3x-$$

$$-\frac{1}{3}\int\sin 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{9}\int\sin 3x d(3x)=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$$

б) $$\int(3x+2)\cdot 3^x dx=\left|\begin{array}{ll} u=3x+2 & dv=3^x dx \\ du=3dx & v=\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}(3x+2)\cdot 3^x-\frac{3}{\ln 3}\int 3^x dx=\frac{1}{\ln 3}(3x+2)\cdot 3^x-\frac{3^{x+1}}{\ln^2 3}+C.$$

в) $$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=\frac{dx}{x} & v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\end{array}\right|=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

г) $$\int\frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x}}=\left|\begin{array}{ll} u=\arccos x & dv=\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ du=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\end{array}\right|=$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arccos x-2\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=-2\arccos x\sqrt{1-x}-4\sqrt{1+x}+C.$$

г) $\int\left(x^2+x-1\right)e^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2+x-1 & dv=e^{2x}dx \\ du=\left(2x+1\right)dx & v=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right)-\frac{1}{2}\int\left(2x+1\right)e^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=2x+1 & dv=e^{2x}dx \\ du=2dx & v=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right)-\frac{1}{2}\left(\left(2x+1\right)\frac{e^{2x}}{2}-\int e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right)-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{2x}+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається первісною функцією?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Як виконується перевірка правильності знаходження невизначеного інтегралу?
4. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Сформулюйте інтеграли, що входять у таблицю невизначених інтегралів.
6. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
7. У чому полягає інтегрування методом підстановки?
8. У чому полягає метод інтегрування частинами?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграли, користуючись властивостями інтегралів та таблицею основних невизначених інтегралів.

1.1. $\int 2x^3dx$. **1.2.** $\int\sqrt[5]{x^2}dx$. **1.3** $\int\left(3x+1\right)dx$. **1.4.** $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

1.5. $\int\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx$. **1.6.** $\int\frac{3dx}{x^4}$. **1.7.** $\int\frac{2^x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}dx$.

1.8. $\int\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)dx$. **1.9.** $\int\frac{x+e^x\cdot x^5-x^4}{x^5}dx$. **1.10.** $\int\frac{dx}{6+x^2}$.

1.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$. **1.12.** $\int \frac{e^x - x\cdot 3^x}{3^x}dx$. **1.13.** $\int \frac{x^3 - x}{x^5 - 2x^3 + x}dx$.

1.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$. **1.15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x^2}}$. **1.16.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$. **1.17.** $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

Завдання 2. Знайдіть інтеграли використовуючи внесення функції під знак диференціала.

2.1. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}dx$. **2.2.** $\int \frac{20x-6}{2-3x+5x^2}dx$. **2.3.** $\int \frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^2}$.

2.4. $\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx$. **2.5.** $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$. **2.6.** $\int xe^{-x^2}dx$.

2.7. $\int e^{2x^2+2x-1}\left(2x+1\right)dx$. **2.8.** $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **2.9.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.

2.10. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. **2.11.** $\int \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-2x}}$. **2.12.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$. **2.13.** $\int \sin^6 x\cos xdx$.

2.14. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$. **2.15.** $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

2.16. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$ **2.17.** $\int \frac{e^{\operatorname{tg}x}+\operatorname{ctg}x}{\cos^2 x}dx$. **2.18.** $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$. **2.19.** $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Завдання 3. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчисліть інтеграли.

3.1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2x-1}}$. **3.2.** $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-3}}dx$. **3.3.** $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$. **3.4.** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x\left(x+1\right)}dx$.

3.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)}$. **3.6.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$. **3.7.** $\int \frac{dx}{1-\sqrt[4]{x+1}}$.

3.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$. **3.9.** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$. **3.10.** $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Завдання 4. Обчисліть інтеграли методом інтегрування частинами.

4.1. $\int x\cos 5x dx$. **4.2.** $\int x\cdot 2^{-x} dx$. **4.3.** $\int (x+2)e^{x} dx$. **4.4.** $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

4.5. $\int \ln x dx$. **4.6.** $\int \arcsin x dx$. **4.7.** $\int \mathrm{arctg} x dx$. **4.8.** $\int x\,\mathrm{arctg} x dx$.

4.9. $\int \frac{\lg x dx}{x^2}$. **4.10.** $\int x\sin^2 x dx$. **4.11.** $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$. **4.12.** $\int x^2 \sin x dx$.

4.13. $\int x^2 e^{-2x} dx$. **4.14.** $\int \left(x^3+x+1\right)e^{x} dx$. **4.15.** $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$.

Відповіді: **1.1.** $\frac{1}{2}x^4+C$. **1.2.** $\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}+C$. **1.3.** $\frac{3}{2}x^2+x+C$.

1.4. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{6}{7}x\sqrt{x}-\frac{9}{2}x+18\sqrt{x}+3\right)+C$. **1.5.** $\frac{2}{3}x\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)+C$.

1.6. $C-\frac{1}{x^3}$. **1.7.** $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}-\sqrt{x}+C$. **1.8.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C$.

1.9. $C-\frac{1}{3x^3}+e^{x}-\ln|x|$. **1.10.** $\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}}+C$. **1.11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x+C$.

1.12. $\frac{e^x}{3^x(1-\ln 3)}-\frac{x^2}{2}+C$. **1.13.** $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. **1.14.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C$.

1.15. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$. **1.16.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$. **1.17.** $C-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}x$.

2.1. $\ln\left|3x^2-7x+1\right|+C$. **2.2.** $2\ln\left|2-3x+5x^2\right|+C$. **2.3.** $\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1}+C$.

2.4. $\ln\left|x^2-x-1\right|+C$. **2.5.** $\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}+C$. **2.6.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

2.7. $\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}+C$. **2.8.** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **2.9.** $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)+C$.

2.10. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$. **2.11.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+ +C$. **2.12.** $\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

2.13. $\frac{\sin^7 x}{7}+C$. **2.14.** $-\ln(1+\cos x)+C$. **2.15.** $-\sqrt{1+2\cos x}+C$.

2.16. $\sin\ln x+C$. **2.17.** $e^{\mathrm{tg}x}+\ln|\mathrm{tg}x|+C$. **2.18.** $\ln|\arcsin x|+C$.

2.19. $-\dfrac{1}{6}\arccos^3 2x + C$. **3.1.** $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{280}\left(40x^3+24x^2+16x+16\right)+C$.

3.2. $C-2\sqrt{x-3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}$. **3.3.** $C-2\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

3.4. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$. **3.5.** $6\sqrt[6]{x-1}+3\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x-1}-1}{\sqrt[6]{x-1}+1}\right|+C$.

3.6. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$.

3.7. $C-4\sqrt[4]{x+1}-2\sqrt{x+1}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}-4\ln\left|1-\sqrt[4]{x+1}\right|$.

3.8. $C-2\sqrt[4]{x}\left(2+\sqrt[4]{x}\right)+4\ln\left|1-\sqrt[4]{x}\right|$. **3.9.** $C+\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$.

3.10. $\dfrac{2\cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}+C$. **4.1.** $\dfrac{x}{5}\sin 5x+\dfrac{1}{25}\cos 5x+C$ **4.2.** $-\dfrac{x\cdot 2^{-x}}{\ln 2}-\dfrac{2^{-x}}{\ln^2 2}+C$.

4.3. xe^x+e^x+C. **4.4.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\dfrac{4}{9}x\sqrt{x}+C$. **4.5.** $x\ln x-x+C$.

4.6. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **4.7.** $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

4.8. $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **4.9.** $-\dfrac{\lg x}{x}-\dfrac{1}{x\ln 10}+C$.

4.10. $\dfrac{1}{8}\left(2x^2-2x\sin 2x-\cos 2x\right)+C$. **4.11.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln\left|\sin x\right|+C$.

4.12. $-x^2\cos x+\quad+2x\sin x+2\cos x+C$. **4.13.** $-e^{-2x}\left(\dfrac{x^2+x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)+C$.

4.14. $e^x\left(x^3-3x^2+7x-6\right)+C$. **4.15.** $2\sqrt{x}\ln^2 x-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}+C$.

Тема 2. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

План

1. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.
2. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення та запис елементарних раціональних дробів, правило розкладу правильного раціонального дробу у суму елементарних дробів; ***уміти:*** інтегрувати вирази, що містять квадратний тричлен, раціональні дроби.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; б) $\int \frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx.$

Розв'язання

а) <u>І спосіб.</u> Виділивши із квадратного тричлена повний квадрат $x^2+4x+29=\left(x+2\right)^2+25$, враховуючи, що $d\left(x+2\right)=dx$ отримаємо:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+29}=\int \frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2+25}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}+C.$$

<u>ІІ спосіб.</u> Інтеграли виду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до табличних за допомогою підстановки $x+\frac{b}{2a}=t$.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+29}=\begin{vmatrix} x+\frac{b}{2a}=t & x=t-2 \\ x+\frac{4}{2}=t & dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{\left(t-2\right)^2+4\left(t-2\right)+29}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+25}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5}+C=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}+C.$$

б) <u>І спосіб.</u> Оскільки $\left(x^2-2x+5\right)'=2x-2$, то знайдемо такі A і B, щоб виконувалась рівність:

$4x-5=A(2x-2)+B,$

$4x-5=2Ax-2A+B.$

Звідси $\begin{cases} 4=2A, \\ -5=-2A+B. \end{cases}$ Отримаємо розв'язок $\begin{cases} A=2, \\ B=-1. \end{cases}$

Отже, $4x-5=2(2x-2)-1.$

$$\int\frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{2(2x-2)-1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{2(2x-2)}{x^2-2x+5}dx-\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=$$

$$=2\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx-\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}=2\ln\left|x^2-2x+5\right|-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}+C.$$

<u>II спосіб.</u> Застосуємо підстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int\frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx=\left|\begin{matrix} x-\dfrac{2}{2}=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int\frac{4(t+1)-5}{(t+1)^2-2(t+1)+5}dt=\int\frac{4t-1}{t^2+4}dt=$$

$$=2\int\frac{2tdt}{t^2+4}-\int\frac{dt}{t^2+4}=2\ln\left|t^2+4\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=2\ln\left|(x-1)^2+4\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C=2\ln\left|x^2-2x+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$

Приклад 2. Знайдіть інтеграли:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$; б) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$.

Розв'язання

а) <u>I спосіб.</u> Перетворимо вираз під коренем (виділимо повний квадрат), внесемо множник під знак диференціала і знайдемо за таблицею інтегралів утворений інтеграл.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=\int\frac{d(x-4)}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=$$

$$= \ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2+9}\right|+C = \ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right|+C.$$

<u>II спосіб.</u> Застосуємо підстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}} = \left|\begin{matrix} x+\dfrac{-8}{2\cdot 1}=t \\ x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{\sqrt{(t+4)^2-8(t+4)+25}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right|+C = \ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2+9}\right|+C =$$

$$= \ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right|+C.$$

<u>б) I спосіб.</u> В чисельнику перетворимо вираз, що є похідною підкореневого виразу знаменника: $\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6.$ Знайдемо такі A і B, щоб виконувалась рівність: $\begin{aligned} &A(2x-6)+B=x, \\ &2Ax-6A+B=x. \end{aligned}$

Отримаємо систему: $\begin{cases} 2A=1, \\ -6A+B=0. \end{cases}$ $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=3. \end{cases}$

Таким чином, $xdx=\left(\dfrac{1}{2}(2x-6)+3\right)dx.$

Тоді шуканий інтеграл набере вигляду:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(x^2-6x+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-6)dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9+1}} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2-6x+1\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2-6x-1\right)+3\int\frac{d\left(x-3\right)}{\sqrt{\left(x-3\right)^2-8}}=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-6x+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+$$

$$+3\ln\left|x-3+\sqrt{\left(x-3\right)^2-8}\right|+C=\sqrt{x^2-6x+1}+3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+1}\right|+C.$$

<u>II спосіб.</u> Застосуємо підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}}=\left|\begin{array}{l}x-3=t\\x=t+3\\dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{t+3}{\sqrt{\left(t+3\right)^2-6\left(t+3\right)+1}}dt=\int\frac{t+3}{\sqrt{t^2-8}}dt=$$

$$=\int\frac{t}{\sqrt{t^2-8}}dt+3\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-8}}=\int\left(t^2-8\right)^{-\frac{1}{2}}tdt+3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^2-8\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(t^2-8\right)+3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2-8\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|=$$

$$=\sqrt{t^2-8}+3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right|+C=\sqrt{\left(x-3\right)^2-8}+3\ln\left|x-3+\sqrt{\left(x-3\right)^2-8}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2-6x+1}+3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+1}\right|+C.$$

Приклад 3. Знайдіть інтеграли від раціональних дробів:

а) $\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx$; б) $\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$; в) $\int\frac{x^2-7x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$.

Розв'язання

а) $\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx.$

Оскільки підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то виділимо з нього цілу частину, тобто подамо його у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу. Виконаємо ділення:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4-3x^2+4x \\ x^4-x^2 \end{array} & \dfrac{x^2-1}{x^2-2} \\
\overline{\quad -\begin{array}{l} -2x^2+4x \\ -2x^2+2 \end{array}} & \\
\overline{4x-2} &
\end{array}
$$

Даний інтеграл набуде вигляду:

$$\int \frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx = \int\left(x^2-2+\frac{4x-2}{x^2-1}\right)dx \,.$$

Розкладемо правильний раціональний дріб на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{4x-2}{x^2-1} = \frac{4x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+\left(A-B\right)}{x^2-1}.$$

Відкинемо знаменники і прирівняємо ліву і праву частини:

$$4x-2=(A+B)x+\left(A-B\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо:

$$
\begin{array}{c|l}
x^1 & A+B=4; \\
x^0 & A-B=-2.
\end{array}
$$

Розв’язуючи систему лінійних рівнянь, одержимо значення невизначених коефіцієнтів: $A=1$; $B=3$.

Тоді : $\dfrac{4x-2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}.$

Знайдемо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int \frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx = \int\left(x^2-2+\frac{4x-2}{x^2-1}\right)dx = \int\left(x^2-2+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}-2x+\ln\left|x-1\right|+3\ln\left|x+1\right|+C \,.$$

б) $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx.$

Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Розкладання шукаємо у вигляді:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Звівши до спільного знаменника, одержимо:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x}{x(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}.$$

Відкинемо знаменники і прирівняємо ліву і праву частини:

$$x^2-1=(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0; \\ x^3 & E=0; \\ x^2 & 2A+B+D=1; \\ x^1 & C+E=0; \\ x^0 & A=-1. \end{array}$$

Розв’язуючи систему з п'яти лінійних рівнянь, знаходимо невизначені коефіцієнти: $A=-1;\ B=2;\ C=0;\ D=1;\ E=0.$

Тоді розклад дробу має вигляд:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Знаходимо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \left|\begin{array}{l} x^2+1=t \\ d(x^2+1)=dt \\ 2xdx=dt \end{array}\right| =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \int \frac{dt}{t^2} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{x^2+1} + C\ .$$

в) $\int \frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx.$

Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Розкладання шукаємо у вигляді:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}\ .$$

Звівши до спільного знаменника, одержимо:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Прирівняємо чисельники дробів:

$$x^2-7x+2 = A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)\ .$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосуємо метод частинних значень. Надамо x частинні значення $x=1,\ \ x=-2,\ \ x=3$, при яких множники обертаються в нуль, тобто підставимо ці значення в останній вираз і одержимо три рівняння:

$$\begin{array}{l|ll} x=1 & -4=-6A; & A=\frac{2}{3}; \\ x=-2 & 20=15B; & B=\frac{4}{3}; \\ x=3 & -10=10C; & C=-1. \end{array}$$

Тоді розклад дробу має вигляд:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}\ .$$

Знаходимо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int \frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx = \int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|-\ln|x-3|+C\ .$$

Запитання для самоперевірки

1. Який раціональний дріб називається правильним?
2. Які раціональні дроби називаються елементарними?
3. Як інтегруються найпростіші дроби чотирьох типів?
4. Які способи використовують при інтегруванні раціональних дробів?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграли, що містять квадратний тричлен.

1.1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. **1.2.** $\int \frac{dx}{3x^2+4x+2}$. **1.3.** $\int \frac{xdx}{x^2+4x+8}$.

1.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$. **1.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$. **1.6.** $\int \frac{\cos x dx}{14-6\sin x-\cos^2 x}$.

1.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+6x+5}}$.

Завдання 2. Обчисліть інтеграли від дробово-раціональних функцій.

2.1. $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$. **2.2.** $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$. **2.3.** $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$.

2.4. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. **2.5.** $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x-1)(x+1)^2}$. **2.6.** $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

2.7. $\int \frac{x^5dx}{x^3+2}$. **2.8.** $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$.

Відповіді: **1.1.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **1.2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{\sqrt{2}}+C$.

1.3. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{2}\right)+C$. **1.4.** $\arcsin\frac{x-3}{2}+C$.

1.5. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C$. **1.6.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sin x-3\right)+C$.

1.7. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{3}{5}+\sqrt{x^2+\frac{6}{5}x+1}\right|+C.$ **2.1.** $\frac{2}{5}\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{10}\ln\left|2x+1\right|+C.$

2.2. $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **2.3.** $\ln\left|x^2+6x+13\right|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$.

2.4. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. **2.5.** $\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\left(x+1\right)\left(x-1\right)^3\right|+C.$

2.6. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{\left(x-1\right)\left(x+3\right)^3}{\left(x+2\right)^4}\right|+C.$ **2.7.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\ln\left|x^3+2\right|+C$.

2.8. $\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

Тема 3. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

План

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування ірраціональних функцій.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** типи тригонометричних підінтегральних функцій, які раціоналізуються універсальною підстановкою та інші типи тригонометричних і ірраціональних функцій, які обчислюються у скінченому вигляді, означення та запис диференціального бінома;

уміти: інтегрувати тригонометричні функції та ірраціональні вирази.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть інтеграл $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x}$.

Розв'язання

Маємо інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ — раціональна функція двох змінних. Такі інтеграли зводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, яка називається універсальною. При цьому використовуються формули: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+5\cdot\dfrac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\dfrac{3+3t^2+5-5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{x}{2}}\right| + C.$$

Приклад 2. Знайдіть інтеграли:

а) $\int \dfrac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$.

Розв'язання

У деяких випадках знаходження інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ може бути спрощено:

– Якщо $\int R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\sin x$, тобто якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосовується підстановка $\cos x = t.$

– Якщо $\int R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\cos x$, тобто якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосовується підстановка $\sin x = t.$

– Якщо $\int R(\sin x, \cos x)$ – парна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то застосовується підстановка $\mathrm{tg}x = t$.

а) Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x.$ Застосовуємо підстановку $\cos x = t.$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx}{\sqrt{\cos x}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{\sqrt{t}} = -\int \frac{\left(1-2t^2+t^4\right)dt}{t^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\int \left(t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{7}{2}} \right)dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + C = 2\sqrt{t} + \frac{4}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{9}\sqrt{t^9} + C =$$

$$2\sqrt{t}\left(1+\frac{2t^2}{5}-\frac{t^4}{9}\right)+C = 2\sqrt{\cos x}\left(1+\frac{2\cos^2 x}{5}-\frac{\cos^4 x}{9}\right)+C.$$

б) Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Використаємо підстановку $\mathrm{tg}x = t$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} - 4\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 5\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(t-2) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C\,.$$

Приклад 3. Знайдіть інтеграли: а) $\int \sin^4 x dx$; б) $\int \cos^3 x dx$; в) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$; г) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$.

Розв'язання

Маємо інтеграли виду: $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Такі інтеграли зручно раціоналізувати такими підстановками:

– якщо n – ціле додатне непарне число, то застосовують підстановку $t = \sin x$;

– якщо m – ціле додатне непарне число, то використовується підстановка $t = \cos x$;

– якщо m і n – цілі додатні парні числа, то застосовують формули пониження степеня: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

– якщо m і n – цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне, або коли m і n – цілі непарні і від'ємні числа, то використовується підстановка $t = \operatorname{tg} x$.

а) $\int \sin^4 x dx$

У цьому випадку: $m = 4, n = 0$ – парні додатні числа. Застосуємо формулу пониження степеня:

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C =$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

б) $\int \cos^3 xdx$

У цьому випадку показники: $m = 0$, $n = 3$ – непарне число. Відокремимо від непарного степеня один множник першого степеня, скористаємося тотожністю $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ і зробимо підстановку $\sin x = t$.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

в) $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$

У цьому випадку показники: $m = 3$ – непарне число, а $n = 4$. Відокремимо від непарного степеня один множник першого степеня, скористаємося тотожністю $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ і зробимо підстановку $\cos x = t$.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x\,dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\cos^4 x \cdot \sin x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix}\right| = -\int \left(1 - t^2\right)\cdot t^4 dt = -\int \left(t^4 - t^6\right)dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right) + C =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C\ .$$

г) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^{-6} xdx$

У цьому випадку показники: $m=2$, $n=-6$ – парні, але $n=-6$ – від'ємне число. Перетворимо підінтегральну функцію, скористаємося тотожністю $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$ і застосуємо підстановку $t=tgx$.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int \mathrm{tg}^2x\cdot\left(1+tg^2x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\left|\begin{aligned}&t=tg\,x\\&dt=\frac{dt}{\cos^2 x}\end{aligned}\right|=\int\left(t^2+t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}+\frac{\mathrm{tg}^5x}{5}+C.$$

Приклад 4. Знайдіть інтеграл $\int\sin 9x\sin x\,dx$.

Розв'язання

Маємо один із інтегралів виду $\int\sin mx\cdot\cos nx\,dx$, $\int\sin mx\cdot\sin nx\,dx$, $\int\cos mx\cdot\cos nx\,dx$, де m і n – деякі числа (коефіцієнти). Такі інтеграли перетворюються в табличні за допомогою перетворення добутку тригонометричних функцій у суму за формулами:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big).$$

$$\int\sin 9x\sin x\,dx=\int\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 10x)dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos 8x\,dx-\int\cos 10x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{10}\sin 10x\right)+C=\frac{\sin 8x}{16}-\frac{\sin 10x}{20}+C.$$

Приклад 5. Знайдіть інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx$; б) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; в) $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Розв'язання

Інтеграли виду: $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональної функції змінної t за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Зокрема, інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[m]{x^n}\right)dx$ раціоналізуються підстановкою $x=t^m$.

а) заданий інтеграл підстановкою $x=t^6$ зводимо до раціонального дробу:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx = \begin{vmatrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^3\cdot 6t^5}{t^6\left(t^2+1\right)}dt = 6\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

б) застосовуємо підстановку $1+x=y^6$, після чого маємо:

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = \begin{vmatrix} 1+x=y^6 \\ x=y^6-1 \\ dx=6y^5dy \end{vmatrix} = \int \frac{\left(\left(y^6-1\right)^2+y^3\right)\cdot 6y^5}{y^2}dy =$$

$$= 6\int\left(y^{12}-2y^6+y^3+1\right)y^3dy = 6\int\left(y^{15}-2y^9+y^6+y^3\right)dy =$$

$$\frac{3}{8}y^{16} - \frac{6}{5}y^{10} + \frac{6}{7}y^7 + \frac{3}{2}y^4 + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(1+x\right)^8} - \frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(1+x\right)^5} +$$

$$+\frac{6}{7}\sqrt[6]{\left(1+x\right)^7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2} + C.$$

$$\text{в)} \int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{-4tdt}{(1+t^2)^2} \\ 1-x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4} t \frac{4tdt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Приклад 6. Знайдіть інтеграли від диференціальних біномів:

а) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$; б) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання

Маємо інтеграли виду: $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p dx$, де a, b – дійсні числа, m, n, p – раціональні числа. Такі інтеграли називаються *інтегралами від диференціального бінома*.

Інтеграл від диференціального бінома обчислюють зведенням до інтеграла від раціональної функції наступними підстановками:

1. Якщо p – ціле число, то застосовують підстановку $x = y^k$, де k – найменше загальне кратне знаменників дробів m і n;

2. Якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, то застосовують підстановку $a+bx^n = y^s$, де s – знаменник дробу p;

3. Якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число, то застосовують підстановку $ax^{-n}+b = y^s$, де s – знаменник дробу p. Щоб уникнути громіздких перетворень у цьому випадку, доцільно скористатися формулою $a+bx^n = x^n\left(ax^{-n}+b\right)$.

а) Під інтегралом стоїть диференціальний біном, причому $m = \dfrac{1}{2}, n = \dfrac{1}{3}, p = 4$. Маємо $p = 4 \in \mathbf{Z}$ (перший випадок), тому можлива підстановка $x=y^6$:

$$\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^4dx=\begin{vmatrix}x=y^6,\\ dx=6y^5dy\end{vmatrix}=6\int\left(1+y^2\right)^4y^8dy=$$

$$=\frac{6}{17}y^{17}+\frac{8}{5}y^{15}+\frac{36}{13}y^{13}+\frac{24}{11}y^{11}+\frac{2}{3}y^9+C=\frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}}+\frac{8}{5}\sqrt{x^5}+$$

$$+\frac{36}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$$

б) Перетворимо інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$.

У цьому випадку показники $m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{4};\ p=\frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ – ціле число, то ми маємо справу із другим випадком і застосуємо підстановку $1+\sqrt[4]{x}=y^s$, де s – знаменник дробу $p=\frac{1}{3}$, тобто $s=3$. Одержуємо:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\begin{vmatrix}1+\sqrt[4]{x}=y^3\\ y=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\\ \sqrt[4]{x}=y^3-1\\ x=\left(y^3-1\right)^4\\ dx=12y^2\left(y^3-1\right)^3dy\end{vmatrix}=\int\frac{y}{\left(y^3-1\right)^2}\cdot12y^2\left(y^3-1\right)^3dy=$$

$$=12\int\frac{y^3\left(y^3-1\right)^3}{\left(y^3-1\right)^2}dy=12\int y^3\left(y^3-1\right)dt=12\int\left(y^6-y^3\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.$$

в) У підінтегральному виразі знову диференціальний біном, у якому $m=-11,\ n=4,\ p=-\dfrac{1}{2}$. Оскільки $\dfrac{m+1}{n}+p=-3\in\mathbf{Z}$ (третій випадок), то використовуємо підстановку $1+x^{-4}=y^2$:

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-8}\left(1+x^{-4}\right)x^{-5}dx=\left|\begin{array}{l}1+x^{-4}=y^2,\\ x^{-5}dx=-\frac{1}{2}ydy\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(y^4-2y^2+1\right)dy=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+y\right)+C=-\frac{1}{10}\sqrt{\left(1+x^{-4}\right)^5}+$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^{-4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^{-4}}+C.$$

Приклад 7. Знайдіть інтеграли: а) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}}$.

Розв'язання

Маємо інтеграли виду $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$, які зводяться до інтегралів від функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій, за допомогою наступних тригонометричних підстановок:

– для інтеграла $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$: $x=a\sin t$ або $x=a\cos t$;

– для інтеграла $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$: $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ або $x=\mathrm{arctg}t$;

– для інтеграла $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$: $x=\dfrac{a}{\sin t}$ або $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 4\sin t \\ dx = 4\cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{16\sin^2 t \cdot 4\cos t\,dt}{\sqrt{16-16\sin^2 t}} =$

$$= \int \frac{16\sin^2 t \cdot 4\cos t\,dt}{4\cos t} = 16\int \sin^2 t\,dt = 16\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 8\int \left(1-\cos 2t\right)dt =$$

$$= 8\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Повертаємось до старої змінної і одержимо відповідь у спрощеному вигляді. Оскільки $x = 4\sin t$, то $\sin t = \frac{x}{4}$; $t = \arcsin\frac{x}{4}$;

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{4}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{16}} = \frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{16-x^2}}{4} = \frac{x\sqrt{16-x^2}}{8}.$$

Отже, остаточна відповідь має вигляд:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 8\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = 8\left(\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2\cdot 8}\right) + C =$$

$$= 8\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}} = \left| \begin{matrix} x = \frac{3}{\sin t} \\ dx = -\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt}{\sqrt{\left(\frac{9}{\sin^2 t}-9\right)^3}} =$

$$= \int \frac{-3\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{\left(\frac{9\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)^3}} = -\int \frac{3\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\left(\frac{3\cos t}{\sin t}\right)^3} = -\int \frac{3\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\frac{27\cos^3 t}{\sin^3 t}} =$$

$$= -\int \frac{\cos t\sin t\,dt}{9\cos^3 t} = -\frac{1}{9}\int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t} = \left| \begin{matrix} \cos t = z \\ -\sin t\,dt = dz \\ \sin t\,dt = -dz \end{matrix} \right| = -\frac{1}{9}\int \frac{-dz}{z^2} =$$

$$=\frac{1}{9}\int z^{-2}dz=\frac{z^{-1}}{-9}+C=-\frac{1}{9z}+C=-\frac{1}{9\cos t}+C.$$

Повертаємось до старої змінної і одержимо відповідь у найбільш простому вигляді. Оскільки $x=\frac{3}{\sin t}$, то

$$\sin t=\frac{3}{x};\ \ \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.$$

Отже, остаточна відповідь має вигляд:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}}=-\frac{1}{9\cos t}+C=-\frac{1}{9\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}}+C=-\frac{x}{9\sqrt{x^2-9}}+C\,.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які підстановки використовують при інтегруванні тригонометричних функцій?
2. Які підстановки використовують при інтегруванні ірраціональних функцій?
3. Які підстановки використовують при інтегруванні диференціального бінома?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть інтеграли.

1.1. $\int\cos^3 x\cdot\sin x dx.$ **1.2.** $\int\cos^2 x\cdot\sin^4 x dx.$ **1.3.** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx.$

1.4. $\int\cos^4\frac{x}{2}dx.$ **1.5.** $\int\sin^3 x dx.$ **1.6.** $\int\frac{dx}{\sin^6 x}.$ **1.7.** $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}.$

1.8. $\int\frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}.$ **1.9.** $\int\mathrm{tg}^5 x dx.$ **1.10.** $\int\frac{dx}{5+4\sin x}.$ **1.11.** $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

1.12. $\int\frac{dx}{1+tgx}.$ **1.13.** $\int\frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}.$ **1.14.** $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x-2\cos x+5}.$

1.15. $\int \sin 4x \cdot \sin 3x dx$. **1.16.** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **1.17.** $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

Завдання 2. Обчисліть інтеграли.

2.1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x-\sqrt[3]{x^2}}$. **2.2.** $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$. **2.3.** $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3}$.

Завдання 3. Знайдіть інтеграли від диференціальних біномів.

3.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$. **3.2.** $\int x^7\sqrt{x^4+1}\,dx$. **3.3.** $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{5/3}}$.

Завдання 4. Використовуючи тригонометричні підстановки, обчисліть інтеграли.

4.1. $\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx$. **4.2.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

Відповіді: **1.1.** $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. **1.2.** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

1.3. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{\cos^5 x}+C$. **1.4.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}\sin 2x+C$.

1.5. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **1.6.** $-\mathrm{ctg}x-\frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3x-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5x+C$.

1.7. $-8\mathrm{ctg}2x-\frac{8}{3}\mathrm{ctg}^3 2x+C$. **1.8.** $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3x-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5x+C$.

1.9. $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x-\ln|\cos x|+C$. **1.10.** $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{3}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right)+C$.

1.11. $\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x+x+C$. **1.12.** $\frac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$.

1.13. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}x-\sqrt{7}}{2\mathrm{tg}x+\sqrt{7}}\right|+C$. **1.14.** $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$.

1.15. $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$. **1.16.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)+C$.

1.17. $\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{36}\sin 9x+C$.

2.1. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{27x}\right)+C.$ **2.2.** $\frac{3}{7}\sqrt{(2x-3)^7}-$

$-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-3)^5}+\sqrt{2x-3}-3\sqrt[6]{2x-3}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}+C.$

2.3. $\frac{3}{16}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C.$ **3.1.** $3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}-\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+C.$

3.2. $\frac{1}{10}\sqrt{\left(x^4+1\right)^5}-\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C.$ **3.3.** $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x\left(2+x^3\right)^{\frac{2}{3}}}+C.$

4.1. $-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}+C$. **4.2.** $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)+C$.

Тема 4. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

План

1. Формула Ньютона-Лейбніца.
2. Методи інтегрування визначених інтегралів.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** означення визначеного інтеграла, його властивості, формулу Ньютона-Лейбніца; ***уміти:*** обчислювати визначений інтеграл, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, заміну змінної, інтегрування частинами.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть визначені інтеграли: а) $\int_1^4\left(2x-3\sqrt{x}+1\right)dx$;

б) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$; в) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$; ґ) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання

Використовуючи таблицю інтегралів та формулу Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, маємо:

а) $\int_1^4 \left(2x-3\sqrt{x}+1\right)dx = 2\int_1^4 xdx + 3\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_1^4 dx = x^2\Big|_1^4 - 2x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 + x\Big|_1^4 =$

$$= (16-1) - 2\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right) + (4-1) = 15-14+3 = 4 .$$

б) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx = \int_2^9 (x-1)^{1/3} d(x-1) = \frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_2^9 = 12-\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$.

в) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx = \int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(e-1)^5$.

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} -$

$$-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} .$$

ґ) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int_0^1 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Приклад 2. Обчисліть визначені інтеграли методом підстановки: а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; в) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$.

Розв'язання

$$\text{а)} \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{0} = 0 \\ x_2 = 4 \Rightarrow t_2 = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(1+t)-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left(2t - 2\ln|t+1|\right)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3 - (0 - 2\ln 1) = 4 - 2\ln 3.$$

$$\text{б)} \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \ln 1 = 0 \\ x_2 = e^\pi \quad \Rightarrow \quad t_2 = \ln e^\pi = \pi \end{array} \right| = \int_0^\pi \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^\pi =$$

$$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{в)} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \\ x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2} \\ x_1 = 0 \quad\quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{e^0 - 1} = \sqrt{1-1} = 0 \\ x_2 = \ln 2 \;\Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 t \cdot \frac{2t\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \left(\frac{\left(1+t^2\right)-1}{1+t^2} \right) dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(t - \operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^1 = 2\left(1 - \operatorname{arctg} 1\right) - 2\left(0 - \operatorname{arctg} 0\right) = 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{2}.$$

Приклад 3. Обчисліть визначені інтеграли методом інтегрування частинами: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$; б) $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Розв'язання

Застосовуємо формулу інтегрування частинами $\int\limits_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos 2xdx \\ du = dx & v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{\pi\sin\pi}{4} - 0 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}.$$

б) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \left(\frac{x^2\ln x}{2}\right)\Bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається визначеним інтегралом функції на відрізку?
2. Перелічіть основні властивості визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
4. У чому полягає інтегрування методом підстановки визначеного інтеграла?
5. У чому полягає метод інтегрування частинами визначеного інтеграла?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть інтеграли.

1.1. $\int\limits_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx$. **1.2.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. **1.3.** $\int\limits_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. **1.4.** $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

1.5. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **1.6.** $\int\limits_0^{\pi/8} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$. **1.7.** $\int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

1.8. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$. **1.9.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. **1.10.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$.

Завдання 2. Обчисліть визначені інтеграли методом підстановки.

2.1. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$. **2.2.** $\int\limits_{\alpha}^{\pi/4} \mathrm{ctg}^4 \varphi d\varphi$. **2.3.** $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

2.4. $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$. **2.5.** $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. **2.6.** $\int\limits_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

Завдання 3. Обчисліть визначені інтеграли методом інтегрування частинами.

3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$. **3.2.** $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$. **3.3.** $\int\limits_1^e x\ln x dx$. **3.4.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \mathrm{arctg} x dx$.

3.5. $\int\limits_0^1 x^3 e^x dx$.

Відповіді: **1.1.** $3\frac{57}{64}$. **1.2.** $\frac{7}{72}$. **1.3.** $\sqrt{e}-\sqrt[3]{e}$. **1.4.** $\ln 2$. **1.5.** 2.

1.6. $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **1.7.** 2. **1.8.** $\sin 1$. **1.9.** $\mathrm{arctg}\, e-\frac{\pi}{4}$. **1.10.** $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$.

2.1. $\frac{\pi}{6}$. **2.2.** $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\mathrm{ctg}^3\alpha}{3}-\mathrm{ctg}\,\alpha$. **2.3.** $1-\frac{\pi}{4}$. **2.4.** $\frac{81\pi}{16}$.

2.5. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **2.6.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$.

3.1. 1. **3.2.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **3.3.** $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$. **3.4.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.5.** $6-2e$.

Тема 5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

План

1. Невласні інтеграли першого роду.
2. Невласні інтеграли другого роду.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** означення невласних інтегралів першого і другого роду; ***уміти:*** обчислювати чи досліджувати на збіжність невласні інтеграли.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть невласні інтеграли, або доведіть їх розбіжність: а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\rho}}$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$; ґ) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+29}$.

Розв’язання

У даних прикладах застосуємо означенням невласного інтеграла першого роду: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

$$\text{а) } \int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{e}^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{e}^{b}\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+1\right) = 1.$$

$$\text{б) } \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x} - \int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_{1}^{b} - \ln|x+1|\Big|_{1}^{b}\right) = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\rho}}$. Якщо $\rho \neq 1$, то $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\rho}} = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}\Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\rho}\left(b^{1-\rho}-1\right)$, тому в цьому випадку

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\rho}} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\rho}\left(b^{1-\rho}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \rho<1, \\ \dfrac{1}{\rho-1}, & \text{якщо } \rho>1. \end{cases}$$

У випадку, коли $\rho = 1$: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$.

Висновок: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\rho}$ *розбіжний при* $\rho \le 1$ *та збіжний до* $\frac{1}{\rho - 1}$, *якщо* $\rho > 1$.

г) $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int\limits_0^{+\infty} te^{-t} dt = 2\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b te^{-t} dt = \left| \begin{matrix} u = t \\ dv = e^{-t} dt \\ du = dt \\ v = -e^{-t} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\lim\limits_{b \to +\infty} \left(-te^{-t} \Big|_0^b + \int\limits_0^b e^{-t} dt \right) = 2\lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{b}{e^b} - e^{-t} \Big|_0^b \right) = 2\lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{b}{e^b} - e^{-b} + 1 \right) = 1.$$

г) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29}.$$

Скористаємось тим, що

$$\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} = \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 25 + 4} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2 + 4} =$$

$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + C$. Тоді $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+5)^2 + 4} =$

$$= \lim\limits_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} \Big|_a^0 = \lim\limits_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a+5}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{2}.$$

Аналогічно $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} \Big|_0^b =$

$$= \frac{1}{2} \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+5}{2} - \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{2}.$$

Звідси $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність: а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\rho}$; г) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

Розв’язання

а) Маємо інтеграл від необмеженої функції.

$x=1-$ точка нескінченого розриву підінтегральної функції

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-1\right)=1$. Інтеграл збіжний.

б) $x=1-$ точка нескінченого розриву підінтегральної функції

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=$$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\infty$. Інтеграл розбіжний.

в) $x=0-$ точка нескінченого розриву підінтегральної функції. Нехай $\rho\neq 1$:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\rho}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\rho}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{(1-\rho)x^{1-\rho}}\Bigg|_\varepsilon^1\right)=\frac{1}{1-\rho}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\rho)\varepsilon^{1-\rho}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\rho}, \text{ якщо } \rho<1,\\ \infty, \text{ якщо } \rho>1.\end{cases}$$

У випадку, коли $\rho=1$: $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=-\infty$.

Висновок: $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\rho}$ *– розбіжний при* $\rho\geq 1$, *та збігається до* $\frac{1}{1-\rho}$, *коли* $\rho<1$.

г) Підінтегральна функція має нескінчений розрив в точці $x=0$, що лежить в середині відрізка $[-1;1]$.

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)-$$

$$-\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\varepsilon_2}^{1}e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-\lim_{\varepsilon_1\to0}\left(e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}\right)-\lim_{\varepsilon_2\to0}\left(e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}\right)=-\lim_{\varepsilon_1\to0}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}}-\frac{1}{e}\right)-$$

$-\lim\limits_{\varepsilon_2\to0}\left(e-e^{\frac{1}{\varepsilon_2}}\right)=\infty$. Інтеграл розбіжний.

Приклад 3. Дослідіть інтеграли на збіжність: а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+5x+2\sqrt{x}}$;

б) $\int\limits_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$; в) $\int\limits_0^1\frac{xdx}{1-\cos x}$.

Розв'язання

а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+5x+2\sqrt{x}}$. Підінтегральна функція має нескінчений розрив в точці $x=0$. На відрізку $[0;1]$: $x^2+5x+2\sqrt{x}\ge2\sqrt{x}$, тому $\frac{1}{x^2+5x+2\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Скористаємося результатами прикладу 2в), які залишаються вірними і для випадку, коли точка нескінченого розриву – лівий кінець інтервалу інтегрування. В нашому випадку $\rho=\frac{1}{2}<1$, тому $\int\limits_0^1\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ – збіжний. Застосовуємо теорему: якщо точка b є точкою нескінченого розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$, а для всіх точок проміжку $[a;b)$ виконується $0\le f(x)\le g(x)$ та $\int\limits_a^b g(x)dx$ – збіжний, то збіжним буде $\int\limits_a^b f(x)dx$, при цьому $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$. Тому інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+5x+2\sqrt{x}}$ – збіжний.

б) $\int\limits_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. Тут $x=0$ – точка нескінченого розриву підінтегральної функції. На проміжку $(0;1]$: $e^{\frac{1}{x}}>e$, тому $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}>\frac{1}{x^3}$

при $0 < x \le 1$. Згідно з результатами прикладу 2в), інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ – розбіжний $(\rho = 3 > 1)$. Скористаємося теоремою: якщо точка b є точкою нескінченого розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$, а для всіх точок проміжку $[a;b)$ виконується $f(x) \ge g(x) \ge 0$ та $\int\limits_a^b g(x)dx$ – розбіжний, то розбіжним буде і $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ є розбіжним.

в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-\cos x}$. Знаменник дорівнює нулю, якщо $x = 0$. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \infty$$

(за першою важливою границею $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 1$). Точка $x = 0-$ точка нескінченого розриву підінтегральної функції.

Розглянемо $f(x) = \frac{x}{1-\cos x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ і знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = 2 > 0$. Скористаємося теоремою порівняння: якщо точка b є точкою нескінченого розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$, $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ на $[a;b)$ та існує $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = l,\ 0 < l < \infty$, то обидва інтеграли або збіжні, або розбіжні. Отже, інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-\cos x}$ – розбіжний, оскільки розбіжним є $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ (приклад 2в).

Запитання для самоперевірки

1. Що називається невласним інтегралом першого роду?
2. Що називається невласним інтегралом другого роду?
3. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть невласні інтеграли або встановіть їх розбіжність.

1.1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$. **1.2.** $\int\limits_0^{\infty}e^{-3x}dx$. **1.3.** $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$. **1.4.** $\int\limits_e^{\infty}\frac{\ln^2 x dx}{x}$.

Завдання 2. Дослідіть на збіжність невласні інтеграли.

2.1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}dx$. **2.2.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+2}}$. **2.3.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x\,dx}{\sqrt{1+x^5}}$. **2.4.** $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$.

Завдання 3. Обчисліть невласні інтеграли або встановіть їх розбіжність.

3.1. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **3.2.** $\int\limits_2^6\frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$. **3.3.** $\int\limits_0^e x\ln x dx$. **3.4.** $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Завдання 4. Дослідіть на збіжність невласні інтеграли.

4.1. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1-x^3}}$. **4.2.** $\int\limits_0^1\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$. **4.3.** $\int\limits_0^e\frac{\ln^2\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Відповіді: 1.1. $\frac{1}{2}$. **1.2.** $\frac{1}{3}$. **1.3.** 1. **1.4.** Розбіжний. **2.1.** Збіжний. **2.2.** Розбіжний. **2.3.** Збіжний. **2.4.** Розбіжний. **3.1.** $\frac{\pi}{2}$. **3.2.** $\frac{40}{3}$. **3.3.** $\frac{1}{4}e^2$. **3.4.** Розбіжний. **4.1.** Збіжний. **4.2.** Збіжний. **4.3.** Збіжний.

Тема 6. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

План

1. Обчислення площ плоских фігур.

2. Довжина дуги кривої.
3. Об'єми тіл.
4. Застосування визначеного інтеграла у прикладних задачах.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** формули обчислення площ, довжин дуг, об'ємів тіл; ***уміти:*** обчислювати площу, довжину дуги плоскої кривої, об'єм тіла, застосовувати визначений інтеграл у прикладних задачах.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 - 2x;\ y = 0;\ x = 0;\ x = 3$; б) $y = x^2 - 4$; $2x + y + 1 = 0$.

Розв'язання

а) $y = x^2 - 2x;\ y = 0;\ x = 0;\ x = 3$

Фігура обмежена віссю Ox ($y = 0$) і параболою $y = x^2 - 2x$ на відрізку $[0;\, 3]$.

Побудуємо параболу. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox. Для цього надамо $y = 0$:

$$y = x^2 - 2x = 0;\quad x^2 - 2x = 0;\quad x \cdot (x - 2) = 0;\quad x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Знайдемо координати вершини параболи:

$$x_{\text{вер}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1,\quad y_{\text{вер}} = y\left(x_{\text{вер}}\right) = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Парабола $y = x^2 - 2x$ має вершину в точці з координатами $(1;\, -1)$ і гілки її спрямовано вгору. Фігура, обмежена заданими лініями зображена на рис. 1.

Площа шуканої фігури дорівнює сумі площ двох криволінійних трапецій: $S = S_1 + S_2$.

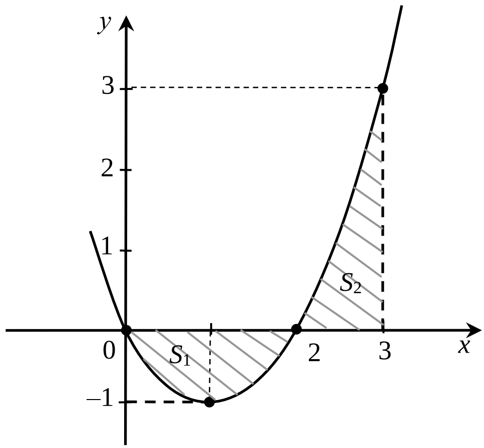

Рис. 1

Знаходимо площу:

$$S_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 == -\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) + 0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Тоді площа заданої плоскої фігури дорівнює:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

б) $y = x^2 - 4$; $2x + y + 1 = 0$.

Фігура обмежена параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $2x + y + 1 = 0$.

Знайдемо межі інтегрування, тобто точки перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему, складену з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases};$$

$x^2 - 4 = -2x - 1$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $(x+3)(x-1) = 0$; $x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

Отже, парабола і пряма перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$.

Фігура, обмежена заданими лініями зображена на рис. 2.

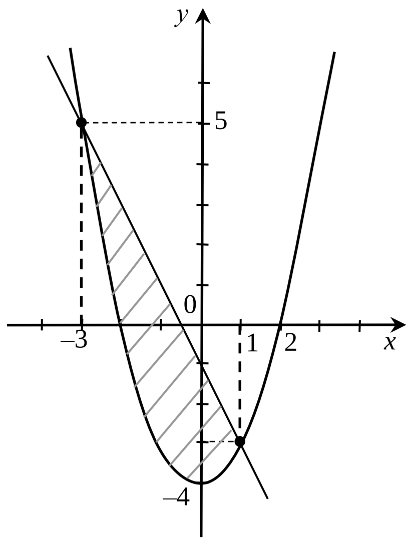

Рис.2.

Площу фігури визначаємо за формулою:

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx,$$

де лінією $y=f_2(x)$ є пряма $y=-2x-1$ (обмежує фігуру зверху), а лінією $y=f_1(x)$ є парабола $y=x^2-4$ (обмежує фігуру знизу).

$$S=\int_{-3}^{1}\left(-2x-1-\left(x^2-4\right)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{-27}{3}-9-9\right)=1\frac{2}{3}+9=10\frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Обчисліть довжину дуги кривої $y=e^x+1$ від $x=\ln\sqrt{8}$ до $x=\ln\sqrt{15}$.

Розв'язання

Застосуємо формулу $l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$. Спочатку знайдемо похідну заданої функції: $y' = \left(e^x + 1\right)' = e^x$. Підставимо похідну у формулу для обчислення дуги кривої. Межі проміжку інтегрування дорівнюють: $a = \ln\sqrt{8}$; $b = \ln\sqrt{15}$.

$$l = \int_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{15}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+e^{2x}} = t \\ e^{2x} = t^2 - 1 \\ x = \dfrac{\ln(t^2-1)}{2} \\ dx = \dfrac{tdt}{t^2-1} \\ x_1 = \ln\sqrt{8} \;\; \Rightarrow \;\; t_1 = \sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{8}}} = \sqrt{1+8} = 3 \\ x_2 = \ln\sqrt{15} \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{15}}} = \sqrt{1+15} = 4 \end{array} \right| =$$

$$= \int_3^4 t \cdot \frac{tdt}{t^2-1} = \int_3^4 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_3^4 \frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt = \int_3^4 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5} - \left(3 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5} - \ln\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла обертання: а) утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x;\ x = 1;\ x = 3$; б) утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{4}{x};\ y = 1;\ y = 4$.

Розв'язання

а) Побудуємо плоску фігуру, обмежену параболою $y^2 = 4x$ (гілки спрямовані вправо) і вертикальними прямими $x = 1;\ x = 3$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Ox цієї плоскої фігури (рис. 3).

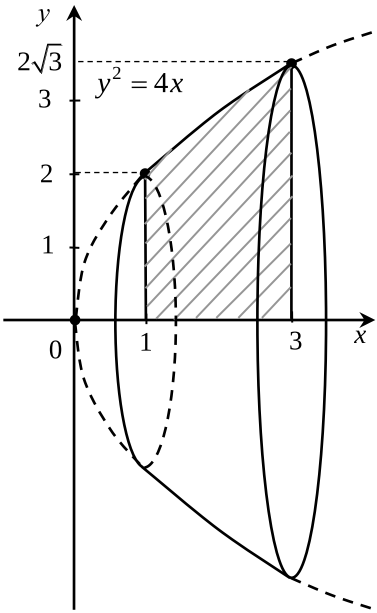

Рис. 3

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $y^2 = 4x$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Ox :

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_1^3 4x dx = 4\pi\int_1^3 x dx = 4\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 2\pi\, x^2\Big|_1^3 = 2\pi\cdot(9-1) = 16\pi.$$

б) Побудуємо плоску фігуру, обмежену гіперболою $y = \dfrac{4}{x}$ і горизонтальними прямими $y = 1$; $y = 4$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Oy цієї плоскої фігури (рис. 4). Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $x = \dfrac{4}{y}$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Oy $V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy$:

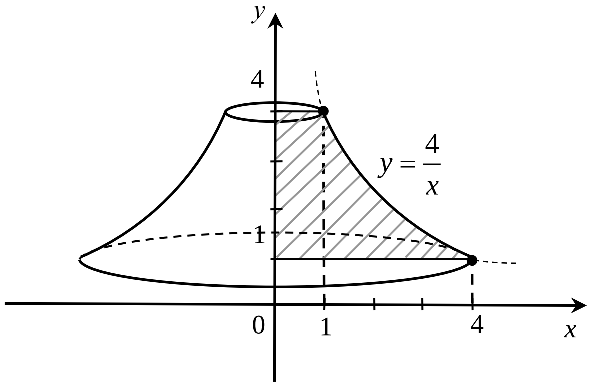

Рис. 4

$$V_y = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = \pi\int_1^4 \frac{16}{y^2} dy = 16\pi\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^4 = -16\pi\left(\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^4 = -16\pi\left(\frac{1}{4}-1\right) = 12\pi.$$

Приклад 4. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд: $V'(x) = 11,2 + 0,1\cdot e^{-0,01x}$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 100 до 200 одиниць.

Розв'язання

Зміну загальних витрат знаходимо за формулою:

$$\int_{100}^{200} V'(x)dx = \int_{100}^{200} (11,2 + 0,1e^{-0.01x})\,dx = 11,2x\Big|_{100}^{200} - \frac{0,1}{0,01}e^{-0,01x}\Big|_{100}^{200} =$$

$$= 11,2\cdot 200 - 11,2\cdot 100 - 10e^{-2} + 10e^{-1} = 2240 - 1120 - 1,35 + 3,68 = 1122,3.$$

Тобто витрати зростуть на 1122,3 грошові одиниці.

Приклад 5. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначаються формулами: $V'(t) = 6 + t^{\frac{3}{4}}$, $D'(t) = 30 - 2t^{\frac{3}{4}}$, де $V(t),\ D(t)$ виміряється мільйонами гривень, а t виміряється роками. Визначити час, за який буде отримано максимальний прибуток, та знайти цей прибуток.

Розв'язання

Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$:

$$30-2t^{\frac{3}{4}}=6+t^{\frac{3}{4}}\Rightarrow 3t^{\frac{3}{4}}=24\Rightarrow t^{\frac{3}{4}}=8\Rightarrow t_1=8^{\frac{4}{3}}=16.$$

Отже максимум прибутку підприємство отримує за 16 років. Прибуток за цей час складе:

$$P(16)=\int_0^{16}(D'(t)-V'(t))dt=\int_0^{16}(24-3t^{\frac{3}{4}})dt=(24t-3\frac{t^{7/4}}{7/4})\Big|_0^{16}=164,6.$$

Приклад 6. Яка робота виконується під час розтягування пружини на *7м*, якщо відомо, що для розтягування пружини на 1см витрачається сила $4H$.

Розв'язання. Згідно із законом Гука сила у ньютонах, яка розтягує пружину на x м, дорівнює $F=kx$. Знайдемо коефіцієнт пропорційності з умови: якщо $x=0,01$м, то $X=4$Н; тобто, $k=\dfrac{4}{0,01}=400$ і $F(x)=400x$, $0\le x\le 0,07$. Тоді, користуючись формулою $A=\int_a^b F(x)dx$, будемо мати:

$$A=\int_0^{0,07}400xlx=200x^2\Big|_0^{0,07}=200\,(0,07^2-0^2)=0,98\text{Дж}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які існують геометричні застосування визначеного інтеграла?
2. Як обчислити площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями?
3. Як обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями, навколо координатної осі?
4. Як обчислити довжину дуги плоскої кривої?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть площу, обмежену параболою $x=2y^2$ та прямою $x=4$.

Завдання 2. Обчисліть площу, що міститься між прямими $y=x+3$, $y=5-x$ та віссю Ox.

Завдання 3. Обчисліть площу, обмежену кривими

$y=e^x, y=e^{-x}$ та прямою $x=1$.

Завдання 4. Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $y=x,\ y=2x$ та $y+x=6$.

Завдання 5. Знайдіть площу, обмежену кривою $y=x^2-6x+9$ та прямою $y=9-2x$.

Завдання 6. Обчисліть площу, обмежену кривими $y=\sin x, y=\cos x$ та віссю Ox.

Завдання 7. Знайдіть довжину дуги кривої $y=\arccos e^{-x}$ від точки $x=0$ до $x=1$.

Завдання 8. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=7x-x^2-12,\ \ y=0$ навколо осі Ox.

Завдання 9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{x^2}{2}$ і $2x+2y-3=0$, навколо осі Ox.

Завдання 10. Нехай функція маргінальних витрат виробництва за певний час має вигляд: $V'(x)=80-0{,}1x$. Визначте зростання витрат виробництва при збільшенні випуску продукції від 50 до 60 одиниць.

Завдання 11. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначаються формулами: $V'(t)=-1+3\sqrt[3]{t^2},\ D'(t)=15-\sqrt[3]{t^2}$, де $V(t),\ D(t)$ вимірюються млн. грн, а t – у роках. Визначте час, за який буде отримано максимальний прибуток, та знайти цей прибуток.

Завдання 12. Знайдіть, яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 10 см, якщо для стискання пружини на 1 *см* витрачається сила 2*Н*?

Відповіді: 1. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$. **2.** 16. **3.** $e+\dfrac{1}{e}-2$. **4.** 3. **5.** $10\dfrac{2}{3}$. **6.** $2-\sqrt{2}$. **7.** $\ln\left|e+\sqrt{e^2-1}\right|$. **8.** 36π. **9.** $\dfrac{272\pi}{15}$. **10.** 745 грн. **11.** $t=8$ років, $P=51{,}2$ млн. грн. **12.** 1 Дж.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища* математика: збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А.С.К., 2011. – 480 с.

2. *Вища* математика: навч. посіб. / І.О. Ластівка, О.І. Безверхий, І.П. Кудзіновська. – К.: НАУ, 2018. – 452с.

3. *Вища* математика. У 10 ч. Ч. 3. Невизначений та визначений інтеграли : навч. посіб. / І.О. Ластівка, В.С. Коновалюк, І.Ю. Ковтонюк [та ін.]. – К. : НАУ, 2007. – 208с.

4. *Высшая* математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш.Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ, 1998.– 471 с.

5. *Денисюк В.П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 4-те вид. – К. : НАУ, 2009. – 276 с

6. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648с.

7. *Ластівка І. О.* Математика для економістів : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 2 / І. О. Ластівка, Н. І. Затула, Є. Ю. Корнілович [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 312 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних
спеціальностей**

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ПЕТРУСЕНКО Валентина Павлівна
ГОРІДЬКО Руслана Володимирівна

Підп. до друку 18.12.2019. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 3.5.
Тираж 50 пр. Замовлення № 2020/17.01

Видавець і виготівник
ФОП Клименко О.О
03680. Київ, вул. Гарматна, 45