МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти
ОС «Бакалавр»
технічних та економічних
спеціальностей

Київ 2021

УДК 51:517.9:378.37.041-057.857 (076.5)
В 558

Укладачі: *І.О. Ластівка* – д-р техн. наук, проф., зав. каф.;
О.С. Давидов – канд. фіз-мат. наук, доц.;
І.В. Шевченко – канд. екон. наук, доц.;
Т.А. Левковська – старш. викладач

Рецензент: *І.С. Клюс*

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №___ від ________ 2021 р.).

Вища математика. Диференціальні рівняння: методичні рекомендації до самостійної роботи студентів / уклад. : І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко, Т. А. Левковська. – К. : НАУ, 2021. – 76 с.

Укладено відповідно до програм навчальної дисципліни «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язування типових задач розділу «Диференціальні рівняння», запитання та завдання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання.

Для здобувачів вищої освіти технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних навичок студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійно працювати з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час розв'язування задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методами дослідження та розв'язування математичних задач.

У запропонованій методичній праці підібрано задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Матеріал кожної теми даної методичної розробки відповідає робочим програмам технічних та економічних спеціальностей дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Диференціальні рівняння». Кожна тема містить рекомендовану літературу, основні методичні рекомендації, розв'язані типові приклади, запитання та завдання для самоперевірки та завдання для самостійного виконання, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичну та методичну підтримку навчального процесу студентів.

Тема 1.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

План

1. Загальні поняття, пов'язані з диференціальними рівняннями.

Література: [1–5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен *знати:* означення та властивості диференціальних рівнянь, геометричний зміст загального і частинного розв'язків диференціальних рівнянь; ***уміти***: складати диференціальні рівняння, знаходити інтегральну криву та формулювати задачу Коші.

1.1. Загальні поняття, пов'язані з диференціальними рівняннями

При вивченні різноманітних динамічних процесів або явищ часто користуються математичними рівняннями, до яких входять незалежні величини x (змінні), залежні від них величини $y = y(x)$ (функції), а також похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ від функції $y = y(x)$. Такі рівняння, в яких шукана функція знаходиться під знаком похідної або диференціала називають *диференціальними* (термін «диференціальне рівняння введений у 1576 р. Г. Лейбніцем).

При формально-математичному підході задача знаходження розв'язків диференціальних рівнянь є задачею, оберненою до диференціювання, коли за вказаною функцією знаходиться її похідна. Найпростіша обернена задача вже зустрічалася в інтегральному численні і полягала в знаходженні первісної (невизначеного інтеграла) заданої функції $y(x)$.

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ та її похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у рівняння.

Загальна форма запису диференціального рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.1.1)$$

Рівняння (1.1) може не містити явно x або y, але обов'язково містить похідну n-го порядку $y^{(n)}$.

Диференціальне рівняння (1.1), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається *неявним диференціальним рівнянням*.

Якщо диференціальне рівняння (1.1) розв'язане відносно похідної $y^{(n)}$, то його називають рівнянням у *нормальній формі* і записують

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (1.1.2)$$

Якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних, то диференціальне рівняння називається *рівнянням у частинних похідних*. Наприклад, диференціальне рівняння першого порядку, у якому невідома функція $z = z(x, y)$ є функцією незалежних змінних x і y, має вигляд:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність, називається *розв'язком диференціального рівняння*.

Процес знаходження розв'язків називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

Графік розв'язку диференціального рівняння (1.1) або (1.2) називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому *загальний розв'язок диференціального рівняння* (1.2) містить n довільних сталих і має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння (1.2) називають розв'язок, який отримано із загального при певних фіксованих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Задачу знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння n-го порядку за заданих початкових умов

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y'_0\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,,$$

називають *задачею Коші* (y_0, y'_0, …, $y_0^{(n-1)}$ – задані дійсні числа).

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0\,,$$

то його називають *загальним інтегралом диференціального рівняння*, а якщо кожній сталій $C_1, C_2, ..., C_n$ надати певного числового значення, то такий розв'язок називають *частинним інтегралом рівняння*.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Перевірити, що функція $y = y(x)$ є розв'язком заданого диференціального рівняння:

а) $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$, $xy' + y = 2\cos 2x$;

б) $\ln x \ln y = 5$, $y \ln y dx + x \ln x dy = 0$;

в) $y = -x - \dfrac{\sin 2x}{2}$, $y'' + \operatorname{tg} x y' = \sin 2x$.

Розв'язання

а) Знайдемо похідну функції $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$:

$$y' = \frac{2\cos 2x}{x} - \frac{\sin 2x}{x^2}\,.$$

Підставимо y' та y в задане диференціальне рівняння: $x\left(\dfrac{2\cos 2x}{x} - \dfrac{\sin 2x}{x^2}\right) + \dfrac{\sin 2x}{x} = 2\cos 2x$; $2\cos 2x - \dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{x} = 2\cos 2x$;

$$2\cos 2x = 2\cos 2x\,.$$

Отже, функція $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$ – розв'язок даного диференціального рівняння.

б) Диференціюємо функцію $\ln x \ln y = 5$ та знаходимо dy:

$$\ln y \frac{dx}{x} + \ln x \frac{dy}{y} = 0, \quad dy = -\frac{y \ln y}{x \ln x} dx.$$

Підставимо dy у задане диференціальне рівняння:

$$y \ln y dx + x \ln x\left(-\frac{y \ln y}{x \ln x} dx\right) = 0; \; y \ln y dx - y \ln y dx = 0.$$

Отримали тотожність. Отже, функція $\ln x \ln y = 5$ – розв'язок даного диференціального рівняння.

в) Двічі диференціюємо функцію $y = -x - \dfrac{\sin 2x}{2}$:

$$y' = -1 - \cos 2x; \; y'' = 2\sin 2x.$$

Підставимо y' та y'' в задане диференціальне рівняння:

$$2\sin 2x + \operatorname{tg} x\left(-1 - \cos 2x\right) = \sin 2x; \; \sin 2x - 2\cos^2 x \operatorname{tg} x = 0;$$

$$2\sin x \cos x - 2\cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x} = 0; \; 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0.$$

Отримали тотожність. Отже, функція $y = -x - \dfrac{\sin 2x}{2}$ – розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 2. Показати, що функція $y = Cx^3, C \in R$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' - 3y = 0$. Знайти інтегральну криву, що проходить через точку $M_0\left(1;1\right)$.

Розв'язання

Диференціюємо задану функцію та підставляємо y' і y в задане диференціальне рівняння:

$$y' = 3Cx^2, \; 3Cx^3 - 3Cx^3 = 0.$$

Отримали тотожність. Отже, функція $y = Cx^3, C \in R$ є розв'язком даного диференціального рівняння.

Якщо $x = 1, \; y = 1$, то значення $C = 1$. Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $M_0\left(1;1\right)$, має вигляд: $y = x^3$.

Приклад 3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл, заданих рівнянням $x^2+y^2=2ax$.

Розв'язання

Диференціюємо обидві частини заданого рівняння за змінною x і визначаємо a:

$$2x+2yy'=2a\,,\ a=x+yy'\,.$$

Підставимо a у рівняння сім'ї кіл: $x^2+y^2=2x\left(x+yy'\right)$, звідси отримуємо рівняння $y^2-x^2=2xyy'$, яке і є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кіл.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''=\cos 2x$.

Розв'язання

Оскільки $y''=\dfrac{dy'}{dx}$, то рівняння рівносильне рівності $dy'=\cos 2x dx,$ інтегруючи яку, маємо:

$y'=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_1,$ де C_1 – довільна стала.

$y'=\dfrac{dy}{dx},$ або $dy=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_1\right)dx,$ тобто

$y=-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2,$ де C_2 – довільна стала.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть означення звичайного диференціального рівняння.
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Наведіть означення загального розв'язку та загального інтегралу диференціального рівняння.
4. У чому полягає задача Коші?
5. Наведіть означення частинного розв'язку та частинного інтегралу диференціального рівняння.
6. Що таке інтегральна крива?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Показати, що за будь-якого дійсного значення сталої *C*, функція $y = y(x)$ є розв'язком заданого диференціального рівняння:

а) $y = x\left(C - \ln|x|\right)$, $(x-y)dx + xdy = 0$;

б) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$.

Завдання 2. У заданій сім'ї виділити рівняння кривої, яка задовольняє заданим початковим умовам:

а) $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right) = 1$, $y(0) = 1$; б) $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$;

в) $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

Завдання 3. Розв'язати рівняння:

а) $y' + 2\,\mathrm{tg}\,3x - \sqrt{1-x} = 1$; б) $y'' = \ln(2x-3) + 5$;

в) $y''' = 3e^{\frac{2x}{3}} - 4x + 1$.

Тема 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

План

2.1. Основні поняття.
2.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
2.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
2.4. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних.
2.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.
2.6. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.

Література: [1–5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен *знати:* основні поняття і означення, види та способи розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, постановку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, теорему про існування і єдиність розв'язку; уміти: знаходити розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язувати задачу Коші.

2.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y'\right)=0, \qquad (2.1.1)$$

де x – незалежна змінна (аргумент), $y=y(x)$ – невідома функція змінної x, $F\left(x, y, y'\right)$ – задана функція змінних x, y та $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Це рівняння не розв'язане відносно похідної y' і називається *неявним рівнянням.*

Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної y', називається *нормальним рівнянням* та записується у вигляді

$$y'=f\left(x, y\right). \qquad (2.1.2)$$

Рівняння (2.1.2) можна записати так:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x, y\right), \quad -f\left(x, y\right)dx+dy=0.$$

Помножимо останнє рівняння на деяку функцію $N\left(x, y\right)\neq 0$ і отримаємо рівняння першого порядку, записане в *диференціальній формі*:

$$M\left(x, y\right)dx+N\left(x, y\right)dy=0,$$

де $M\left(x, y\right)$ і $N\left(x, y\right)$ – відомі функції.

Форми запису диференціального рівняння еквівалентні між собою.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку (2.1.1) або (2.1.2) є деяка функція, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність. Розв'язок диференціального рівняння першого порядку (2.1.1) або (2.1.2) може бути записаний у вигляді:

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0\ –\ \textit{загальний інтеграл}\ \text{або}$$

$$y=\varphi(x,\ C)\ –\ \textit{загальний розв'язок},\ C\ –\ \text{довільна стала.}$$

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Теорема (*про існування і єдиність розв'язку*). Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f_y'(x,y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини Oxy і точка $(x_0,y_0)\in D$. Тоді існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння (2.1.2), який задовольняє умову

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0)=y_0. \qquad (2.1.3)$$

Через кожну точку $(x_0,y_0)\in D$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому за межі області D, то діставатимемо різні інтегральні криві. Це показує, що рівняння (2.1.2) має безліч різних розв'язків (рис. 2.1).

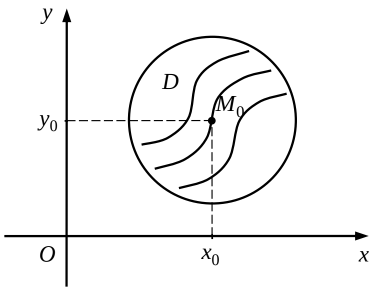

Рис. 2.1

Умову (2.1.3), згідно з якою розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває певного заданого значення y_0 в заданій точці x_0, називають *початковою умовою* і записують так:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \text{ або } y(x_0)=y_0. \qquad (2.1.4)$$

Задачу знаходження розв'язку рівняння (2.1.2), який задовольняє початкову умову (2.1.4), називають *задачею Коші.*

Геометрично розв'язання задачі Коші означає виділення з множини інтегральних кривих такої, що проходить через точку (x_0, y_0).

Розв'язок, утворений із загального розв'язку при фіксованому значенні сталої C, називають *частинним розв'язком.* Частинний розв'язок, записаний у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається *частинним інтегралом.*

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називається *особливим розв'язком*.

Особливий розв'язок неможливо визначити із загального розв'язку при жодному значенні сталої C.

2.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (2.2.1)$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Якщо обидві частини рівняння (2.2.1) домножити на $\dfrac{1}{\varphi_1(y)\, f_2(x)}$, де $\varphi_1(y)\, f_2(x) \neq 0$, то отримаємо диференціальне рівняння виду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0, \qquad (2.2.2)$$

у якому коефіцієнт біля dx залежить лише від змінної x, а коефіцієнт біля dy – тільки від змінної y. Кажуть, що в рівнянні (2.2.2) змінні відокремлені.

Проінтегрувавши рівняння (2.2.2), отримаємо співвідношення

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C. \qquad (2.2.3)$$

Формула (2.2.3) задає загальний інтеграл рівняння (2.2.1).

Зауваження. При діленні рівняння (2.2.1) на $\varphi_1(y)\, f_2(x) \neq 0$ можна втратити деякі розв'язки, які знаходяться з рівняння $\varphi_1(y)\, f_2(x) = 0$. Тому слід розв'язати рівняння $\varphi_1(y)\, f_2(x) = 0$ та встановити ті розв'язки вихідного диференціального рівняння, які не можуть бути отримані з загального розв’язку – особливі розв’язки.

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними записують ще так:

$$y' = f(x)\varphi(y), \qquad (2.2.4)$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані та неперервні на деякому інтервалі функції.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

а) $x\sqrt{y^2+2}+yy'\sqrt{x^2+2}=0$; б) $x^2(y-1)dy=y^2(x+1)dx$;

в) $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$.

Розв’язання

а) Рівняння $x\sqrt{y^2+2}+yy'\sqrt{x^2+2}=0$ запишемо у вигляді:

$$x\sqrt{y^2+2}+y\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+2}=0, \quad x\sqrt{y^2+2}dx+y\sqrt{x^2+2}dy=0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними (2.2.1), де $f_1(x)=x$, $\varphi_1(y)=\sqrt{y^2+2}$, $f_2(x)=\sqrt{x^2+2}$, $\varphi_2(y)=y$. Поділивши обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{x^2+2}\cdot\sqrt{y^2+2}\neq 0$, відокремимо змінні:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx+\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}dy=0.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}dy=C, \quad \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2+2\right)}{\sqrt{y^2+2}}=C,$$

отримуємо загальний інтеграл даного рівняння

$$\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+2}=C.$$

Якщо із загального інтеграла виразити y, то отримаємо загальний розв’язок даного рівняння:

$$\sqrt{y^2+2}=C-\sqrt{x^2+2},\quad y^2+2=\left(\sqrt{1+x^2+2}\right)^2,$$

$$y=\pm\sqrt{\left(C-\sqrt{x^2+2}\right)^2-2}\,.$$

б) $x^2\left(y-1\right)dy=y^2\left(x+1\right)dx$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (2.2.1). Відокремимо змінні, поділивши обидві частини рівняння на $x^2y^2\neq 0$ і проінтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{\left(y-1\right)}{y^2}dy=\frac{\left(x+1\right)}{x^2}dx,\quad \int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx\,,$$

$$\ln\left|y\right|+\frac{1}{y}=\ln\left|x\right|-\frac{1}{x}+\ln C,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\ln\left|\frac{Cx}{y}\right|,\quad \frac{Cx}{y}=e^{\frac{x+y}{xy}}\,.$$

Отже, $\dfrac{Cx}{y}=e^{\frac{x+y}{xy}}$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

Рівняння $x^2y^2=0$ має розв’язок $x=0$, $y=0$. Він не утворюється із загального інтеграла за жодних значень сталої *C*. Отже, розв’язок $x=0$, $y=0$ – особливий.

в) Перетворимо ліву частину рівняння $\left(y+xy\right)dx+\left(x-xy\right)dy=0$:

$$y\left(1+x\right)dx+x\left(1-y\right)dy=0\,.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (2.2.1). Відокремимо змінні, поділивши обидві частини рівняння на $xy\neq 0$ і проінтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{\left(1+x\right)}{x}dx+\frac{\left(1-y\right)}{y}dy=0\,,\quad \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0\,,$$

$$\ln\left|x\right|+x+\ln\left|y\right|-y=C,\quad \ln\left|xy\right|+x-y=C\,.$$

Отже, $xy=e^{C+y-x}$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

Рівняння $xy=0$ має розв’язок $x=0$, $y=0$. Його не можна отримати із загального інтеграла за жодних значень сталої *C*. Отже, розв’язок $x=0$, $y=0$ є особливим.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння:

а) $y' = e^{x+y}$ за умови $y(0) = 0$;

б) $\left(1 - e^{y^2}\right)dy = \dfrac{dx}{2y}$ за умови $y(0) = 0$.

Розв'язання

а) $y' = e^{x+y}$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (2.2.4). Запишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y};\; dy = e^{x+y}dx;\; e^x e^y dx - dy = 0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $e^y \neq 0$ та проінтегруємо отримане рівняння:

$$e^x dx - \frac{dy}{e^y} = 0,\quad \int e^x dx - \int e^{-y}dy = 0;\quad e^x + e^{-y} = C.$$

Використаємо початкову умову $y(0) = 0$ і знайдемо значення сталої *C:*

$$e^0 + e^0 = C,\;\; C = 2.$$

Підставимо значення сталої $C = 2$ в загальний інтеграл і отримаємо частинний інтеграл рівняння:

$$e^x + e^{-y} = 2.$$

Таким чином, із сімейства інтегральних кривих $e^x + e^{-y} = C$, вибираємо одну криву, яка проходить через точку $M_0(0;0)$.

б) $\left(1 - e^{y^2}\right)dy = \dfrac{dx}{2y}$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (2.2.1). Відокремимо змінні й проінтегруємо отримане рівняння:

$$\left(1 - e^{y^2}\right)2ydy = dx,$$

$$\int 2ydy - \int e^{y^2} 2ydy = \int dx,\;\; y^2 - \int e^{y^2} d\left(y^2\right) = x + C,$$

$$y^2 - e^{y^2} = x + C - \text{ загальний інтеграл рівняння.}$$

Використаємо початкову умову $y(0) = 0$ і знайдемо значення сталої *C:* $0 - e^0 = 0 + C,\;\; C = -1.$

Підставимо значення сталої $C=-1$ в загальний інтеграл і отримаємо частинний інтеграл рівняння:

$$y^2-e^{y^2}=x-1.$$

2.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією* k *-го виміру* відносно змінних x і y, якщо виконується тотожність

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y).$$

Наприклад, $f(x,y)=2x^2-3xy-$ однорідна функція другого виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=2(tx)^2-3(tx)(ty)=t^2\left(2x^2-3xy\right)=t^2 f(x,y);$$

функція $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}-$ однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{(tx)(ty)}}{tx-ty}=\frac{t\sqrt{xy}}{t(x-y)}=\frac{\sqrt{xy}}{x-y}=t^0 f(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.1)$$

називається *однорідним*, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ – однорідні функції одного й того самого виміру.

Однорідне рівняння (2.3.1) можна привести до рівняння з відокремлюваними змінними, якщо ввести нову невідому функцію $u=u(x)$ за допомогою заміни $u=\dfrac{y}{x}$. Тоді $y=ux,\ dy=udx+xdu$:

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0;$$

$$x^kM(1,u)dx+x^kN(1,u)(udx+xdu)=0.$$

Скорочуємо на x^k та розкриваємо дужки у другому доданку:

$$M(1,u)dx+N(1,u)udx+N(1,u)xdu=0.$$

Це рівняння перепишемо у вигляді:

$$\left(M(1,u)+N(1,u)u\right)dx+N(1,u)xdu=0.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)\,du}{M(1,u) + N(1,u)u} = 0 .$$

У розв'язку $\Phi(x, u, C) = 0$ застосовуємо заміну $u = \dfrac{y}{x}$ і отримуємо $\Phi\left(x, \dfrac{y}{x}, C\right) = 0$ – загальний інтеграл рівняння (2.3.1).

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку, записане в нормальній формі

$$y' = f(x, y), \tag{2.3.2}$$

є *однорідним,* якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

а) $\left(x^2 - 3y^2\right)y' = 2xy$; б) $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$;

в) $\left(x^2 + xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$.

Розв'язання

а) У рівнянні $\left(x^2 - 3y^2\right)y' = 2xy$ виразимо y' і отримаємо рівняння в нормальній формі (2.3.2):

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2} .$$

Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням, оскільки функція $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 - 3y^2}$ – однорідна нульового виміру:

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx)(ty)}{(tx)^2 - 3(ty)^2} = \frac{2t^2xy}{t^2\left(x^2 - 3y^2\right)} = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2} = f(x, y).$$

Для розв'язання однорідного рівняння введемо нову невідому функцію $u\left(x\right)=\frac{y}{x}$, тоді, $y=ux,\quad y'=u'x+u$.

Підставимо вирази для y та y' у задане рівняння:

$$u'x+u=\frac{2x\cdot ux}{x^2-3u^2x^2},\ u'x+u=\frac{2u\cdot x^2}{x^2\left(1-3u^2\right)},$$

$$u'x=\frac{2u}{1-3u^2}-u,\quad u'x=\frac{u+3u^3}{1-3u^2}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Інтегруємо його:

$$\int\frac{1-3u^2}{u+3u^3}du=\int\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{1-3u^2}{u\left(1+3u^2\right)}du=\int\frac{dx}{x}.$$

Знайдемо окремо інтеграл $\int\frac{1-3u^2}{u\left(1+3u^2\right)}du$. Для цього розкладемо раціональний дріб $\frac{1-3u^2}{u\left(1+3u^2\right)}$ на суму елементарних дробів:

$$\frac{1-3u^2}{u\left(1+3u^2\right)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{1+3u^2}=\frac{A\left(1+3u^2\right)+Bu^2+Cu}{u\left(1+3u^2\right)},$$

звідки за методом невизначених коефіцієнтів знайдемо:

$A=1,\ B=-6,\ C=0$. Отже,

$$\int\frac{1-3u^2}{u\left(1+3u^2\right)}du=\int\frac{du}{u}+\int\frac{-6udu}{1+3u^2}=\ln|u|-\ln\left|1+3u^2\right|=\ln\left|\frac{u}{1+3u^2}\right|.$$

Отже, після інтегрування, рівняння набуває вигляду:

$$\ln\left|\frac{u}{1+3u^2}\right|=\ln|x|+\ln|C|,\quad \frac{u}{1+3u^2}=Cx.$$

Замінивши змінну $u(x)$ на $\frac{y}{x}$, маємо загальний інтеграл даного рівняння: $\frac{\frac{y}{x}}{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx$, $\frac{y}{x^2+3y^2}=C$.

б) У рівнянні $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$ виразимо $y'=\frac{dy}{dx}$ і отримаємо рівняння в нормальній формі (2.3.2):

$$y'=\frac{y+\sqrt{xy}}{x}.$$

Права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру. Справді,

$$f(tx,ty)=\frac{ty+\sqrt{tx\cdot ty}}{tx}=\frac{t\left(y+\sqrt{xy}\right)}{tx}=\frac{y+\sqrt{xy}}{x}=f(x,y).$$

Отже, задане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням. Введемо заміну $u=\frac{y}{x}$, тоді $y=ux,\ y'=u'x+u$,

$$u'x+u=\frac{ux+\sqrt{ux^2}}{x},\ \ u'x+u=u+\sqrt{u},\ u'x=\sqrt{u},\ \frac{du}{dx}x=\sqrt{u},$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x},\ \ 2\sqrt{u}=\ln|Cx|,\ \ e^{2\sqrt{u}}=Cx.$$

Отже, $e^{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx$ – загальний інтеграл рівняння.

в) Рівняння $\left(x^2+xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$ є однорідним, оскільки функції $M(x,y)=x^2+xy+y^2$ і $N(x,y)=-x^2$ є однорідними одного виміру.

Введемо заміну $u=\frac{y}{x}$, $y=ux,\ dy=udx+xdu$:

$$\left(x^2+ux^2+u^2x^2\right)dx-x^2\left(udx+xdu\right)=0;$$

$$x^2\left(1+u+u^2\right)dx-x^2\left(udx+xdu\right)=0;\left(1+u+u^2\right)dx-udx-xdu=0;$$

$$\left(1+u+u^2-u\right)dx-xdu=0;\ \left(1+u^2\right)dx-xdu=0.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{1+u^2}=0;\ \ln|x|-\operatorname{arctg}u+C=0.$$

Ураховуючи заміну $u=\dfrac{y}{x}$, запишемо розв’язок заданого рівняння у вигляді загального інтегралу

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln|x|=C.$$

Приклад 4. Знайти розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння $\left(y^2-2xy\right)dx-x^2dy=0$ за умови $y(1)=3$.

Розв’язання

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову. Для цього спочатку знайдемо загальний розв’язок заданого рівняння.

Дане рівняння запишемо у вигляді $y'=\dfrac{y^2-2xy}{x^2}$. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, оскільки виконується тотожність:

$$f(tx,ty)=\frac{t^2y^2-2tx\cdot ty}{t^2x^2}=\frac{t^2\left(y^2-2xy\right)}{t^2x^2}=\frac{y^2-2xy}{x^2}=f(x,y).$$

Отже, рівняння $y'=\dfrac{y^2-2xy}{x^2}$ є однорідним. Зробимо заміну $u=\dfrac{y}{x}$, тоді $y=ux$, $dy=udx+xdu$. Рівняння набуває вигляду:

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{u^2x^2-2ux^2}{x^2},\ u+x\frac{du}{dx}=u^2-2u,\ x\frac{du}{dx}=u^2-3u,$$

$$\frac{du}{u(u-3)}=\frac{dx}{x}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Інтегруємо його:

$$\int \frac{du}{u(u-3)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Розкладемо дріб $\dfrac{1}{u(u-3)}$ на елементарні дроби:

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3} = \frac{A(u-3)+Bu}{u(u-3)}, \quad A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3} \text{ і}$$

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u-3}\right).$$

Тоді $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{du}{u-3} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$, $\dfrac{1}{3}\ln|u-3| - \dfrac{1}{3}\ln|u| = \ln|x| + \ln|C|$,

$$\ln\left|\sqrt[3]{\frac{u-3}{u}}\right| = \ln|Cx|.$$

Остаточно загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$\sqrt[3]{1-\frac{3x}{y}} = Cx.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші використовуємо початкову умову $y(1)=3$ і знаходимо значення сталої C:

$$C = \sqrt[3]{1-1} = 0.$$

Підставляємо знайдену сталу в загальний інтеграл рівняння:

$$\sqrt[3]{1-\frac{3x}{y}} = 0,\ \frac{3x}{y} = 1.$$

Отже, $y = 3x -$ розв'язок заданої задачі Коші.

2.4. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Рівняння вигляду:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{2.4.1}$$

є *диференціальним рівнянням, яке зводиться до однорідного.*

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0; \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Головний визначник системи має вигляд: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Розглянемо наступні випадки:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.4.2) має розв'язок і нехай їм буде точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Робимо заміну: $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$, де x_1 і y_1 – нові змінні, x_0 і y_0 – деякі константи, та підставляємо у рівняння (2.4.1):

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2x_1 + b_2y_1 + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}.$$

Оскільки x_0, y_0 – розв'язок системи (2.4.2), тобто $\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0; \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0, \end{cases}$ то маємо рівняння:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1},$$

$$\left(a_1x_1 + b_1y_1\right)dx_1 = \left(a_2x_1 + b_2y_1\right)dy_1 \quad (2.4.3)$$

яке є однорідним диференціальним рівнянням відносно змінних x_1 і y_1.

Вводимо у рівняння (2.4.3) заміну $y_1 = ux_1,\ dy_1 = udx_1 + x_1du$ та отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язок якого має вигляд: $\Phi\left(x_1, u, C\right) = 0$.

Повертаючись до усіх зроблених замін, остаточний розв'язок запишеться у вигляді: $\Phi\left(x - x_0, \dfrac{y - y_0}{x - x_0}, C\right) = 0$.

2. Якщо $\Delta = 0$, то кажуть, що рівняння системи (2.4.2) – лінійно залежні, тобто $a_1x + b_1y = \alpha\left(a_2x + b_2y\right)$, де α – деякий коефіцієнт.

Нехай $a_2x + b_2y = z$. Диференціюємо цю рівність:

$$a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right).$$

Отримані результати підставимо у рівняння (2.4.1):

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = \frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}; \quad \frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha z + c_1}{z + c_2} + \frac{a_2}{b_2};$$

$$\frac{dz}{dx} = b_2\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2} + \frac{a_2}{b_2}\right).$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Позначимо $b_2\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2} + \frac{a_2}{b_2}\right) = f(z)$. Тоді $\frac{dz}{dx} = f(z)$ або $\frac{dz}{f(z)} = dx$. Інтегруємо отриманий вираз $\int \frac{dz}{f(z)} = \int dx$ та отримаємо розв'язок у вигляді загального інтегралу $\Phi(z, x, C) = 0$.

Повертаючись до усіх зроблених замін, остаточний розв'язок запишеться у вигляді: $\Phi((a_2 x + b_2 y), x, C) = 0$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 5. Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$; б) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

Розв'язання

а) $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$ – диференціальне рівняння (2.4.1) яке зводиться до однорідного.

Розглянемо систему (2.4.2): $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0; \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

Головний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$. Отже, маємо випадок 1.

Знаходимо розв'язок системи – точку $M_0\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Робимо заміну: $x = x_1 - \frac{1}{3},\ y = y_1 + \frac{1}{3}$ та підставляємо її в вихідне диференціальне рівняння:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 - y_1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1}{x_1 - 2y_1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1};\ \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 - y_1}{x_1 - 2y_1};$$

$$\left(2x_1 - y_1\right)dx_1 = \left(x_1 - 2y_1\right)dy_1.$$

Це рівняння є однорідним відносно змінних x_1 і y_1.

Вводимо заміну $y_1 = ux_1,\ dy_1 = udx_1 + x_1du$:

$$\left(2x_1 - ux_1\right)dx_1 = \left(x_1 - 2ux_1\right)\left(udx_1 + x_1du\right);$$

$$x_1\left(2-u\right)dx_1 = x_1\left(1-2u\right)\left(udx_1 + x_1du\right);$$

$$\left(2-u\right)dx_1 - \left(u - 2u^2\right)dx_1 = \left(1-2u\right)x_1du;$$

$$\left(2 - u - u + 2u^2\right)dx_1 = \left(1-2u\right)x_1du;$$

$$\left(2 - 2u + 2u^2\right)dx_1 = \left(1-2u\right)x_1du.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{\left(1-2u\right)du}{2-2u+2u^2};\ \int\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{1}{2}\int\frac{\left(2u-1\right)du}{1-u+u^2};$$

$$\int\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-u+u^2\right)}{1-u+u^2};$$

$$\ln\left|x_1\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|u^2 - u - 1\right| + \ln\left|C\right|;\ x_1 = \frac{C}{\sqrt{u^2-u-1}}.$$

Повертаючись до усіх зроблених замін, остаточний розв'язок записуємо у вигляді:

$$x_1=\frac{C}{\sqrt{\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2-\frac{y_1}{x_1}-1}} \text{ або } x+\frac{1}{3}=\frac{C}{\sqrt{\left(\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right)^2-\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}-1}}.$$

б) Записуємо рівняння $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$ у вигляді диференціального рівняння (2.4.1):

$$y'=-\frac{x+y+1}{2x+2y-1},$$

яке зводиться до однорідного.

Головний визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$. Отже, маємо випадок 2.

Введемо заміну $x+y=z$ і диференціюємо за змінною x:

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx};\ \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1.$$

Виконуючи заміну, маємо:

$$\frac{dz}{dx}-1=-\frac{z+1}{2z-1};\ \frac{dz}{dx}=1-\frac{z+1}{2z-1};\ \frac{dz}{dx}=\frac{z-2}{2z-1};\ \frac{(2z-1)dz}{(z-2)}=dx.$$

Інтегруємо отримане диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\int\frac{(2z-1)dz}{(z-2)}=\int dx;\quad \int\left(2+\frac{3}{z-2}\right)dz=\int dx:\qquad 2z+3\ln|z-2|=x+C$$

або $2(x+y)+3\ln|x+y-2|=x+C$ – загальний інтеграл.

2.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної, називається *лінійним диференціальним рівнянням*.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$y'+p(x)y=g(x), \tag{2.5.1}$$

де $p(x)$ і $g(x)$ – задані й неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $g(x) \equiv 0$, то рівняння (2.5.1) має вигляд $y' + p(x)y = 0$ і називається *лінійним однорідним рівнянням,* а якщо $g(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то – *лінійним неоднорідним рівнянням.*

Лінійне однорідне диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними і розв'язується так:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y\,;\ \frac{dy}{y} = -p(x)dx\,;\ \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx\,;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C\,;\quad \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx}\,;$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}\,. \tag{2.5.2}$$

У розв'язку (2.5.2) C – довільна стала.

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.5.1) будемо шукати *методом варіації довільної сталої* у вигляді:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}\,, \tag{2.5.3}$$

тобто, як і розв'язок однорідного рівняння, але $C = C(x)$. Якщо (2.5.3) підставити у рівняння (2.5.1), то знайдемо $C(x)$:

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,.$$

Отримане $C(x)$ підставимо в (2.5.3) і отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.5.1) у вигляді:

$$y = \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}\,. \tag{2.5.4}$$

Одним із методів розв'язання рівняння (2.5.1) є *метод Бернуллі.*

За методом Бернуллі розв'язок лінійного рівняння (2.5.1) шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, причому одну з цих функцій обирають довільно:

$$y = u(x)\cdot v(x)\,. \tag{2.5.5}$$

Знайшовши похідну від функції (2.5.5) $y' = u'v + uv'$ і підставивши значення y і y' в рівняння (2.5.1), дістанемо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x)\,;\ \ u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = g(x)\,.$$

Вважаючи функцію $v(x)$ довільною, добираємо її так, щоб

$$v' + p\left(x\right)v = 0\,.$$

Тоді розв’язання лінійного рівняння зведеться до розв’язання системи двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

$$\begin{cases} v' + p\left(x\right)v = 0, \\ u'v = f\left(x\right). \end{cases} \qquad (2.5.6)$$

З першого рівняння знаходимо змінну $v\left(x\right)$:

$$v' = -p\left(x\right)v\,,\;\; \frac{dv}{dx} = -p\left(x\right)v\,,\;\; \frac{dv}{v} = -p\left(x\right)dx\,,\;\; \ln\left|v\right| = -\int p\left(x\right)dx\,,$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}\,.$$

З другого рівняння системи (2.5.6) знаходимо функцію $u\left(x\right)$:

$$\frac{du}{dx}v = g\left(x\right),\quad du = g\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx\,,$$

$$u = \int f\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx + C\,.$$

Остаточно маємо загальний розв’язок рівняння:

$$y = u\left(x\right)\cdot v\left(x\right) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Існує клас диференціальних рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних рівнянь.

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = g(x)y^m\,, \qquad (2.5.7)$$

де $p\left(x\right)$, $g(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку функції, m – дійсне число, $m \neq 0$, $m \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $m = 0$ рівняння (2.5.7) є лінійним, а при $m = 1$ – рівнянням з відокремлюваними змінними.

Припустимо, що $y \neq 0$ та $m \neq 0$ і $m \neq 1$. Поділивши обидві частини рівняння на y^m, отримаємо рівняння виду:

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = g(x)\,.$$

Введемо заміну $z = y^{1-m}$, тоді $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ і рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння (2.5.1) відносно нової функції z:

$$\frac{1}{1-m}z' + p(x)z = g(x) \quad \text{або} \quad z' + (1-m)p(x)z = (1-m)g(x).$$

Загальний розв'язок цього рівняння знаходимо за формулою (2.5.4):

$$z = \left((1-m)\int g(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int(1-m)p(x)dx}$$

і врахувавши заміну $z = y^{1-m}$, отримуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

Рівняння Бернуллі можна також розв'язувати методом Бернуллі, не зводячи його до лінійного рівняння.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

а) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; б) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$.

Розв'язання

а) Рівняння $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ є лінійним, тут $p(x) = -\dfrac{2y}{x+1}$, $g(x) = (x+1)^3$. Рівняння $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ – лінійне, оскільки його можна записати у вигляді рівняння (2.5.1), причому $p(x) = -\dfrac{2y}{x+1}$, $g(x) = (x+1)^3$. Застосуємо метод варіації довільної сталої, за формулою (2.5.4) знаходимо:

$$y = \left(\int (x+1)^3 e^{\int -\frac{2y}{x+1}}dx + C\right)e^{-\int -\frac{2y}{x+1}dx} = \left(\int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|}dx + C\right)e^{2\ln|x+1|} =$$

$$= \left(\int (x+1)^3 (x+1)^{-2}dx + C\right)(x+1)^2 = \left(\int (x+1)dx + C\right)(x+1)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right)(x+1)^2.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

б) Рівняння є лінійним, оскільки його можна записати у вигляді рівняння (2.5.1):

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3}, \text{ де } g(x) = \frac{2}{x}, \ f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

За методом Бернуллі розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді $y = uv,$ де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ невідомі функції, тоді $y' = u'v + uv'$.

Маємо: $u'v + uv' + \frac{2}{x} uv = \frac{1}{x^3}$, $u'v + u\left(v' + \frac{2}{x} v \right) = \frac{1}{x^3}$.

Складаємо систему $\begin{cases} v' + \dfrac{2}{x} v = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^3}. \end{cases}$

Інтегруючи перше з рівнянь системи, дістаємо:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}, \ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2dx}{x}, \ \ln|v| = -2\ln|x|, \ v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставивши значення v в друге рівняння системи, матимемо:

$$u' \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + C.$$

Отже, $y = uv = \dfrac{\ln|x| + C}{x^2}$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову:

а) $y' + 2y = x^2 + 2x, \ y\big|_{x=0} = 1$;

б) $y' \operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} x, \ y\big|_{x=0} = 0$.

Розв'язання

а) Спочатку знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння. Задане рівняння – лінійне (2.5.1), розв'язуємо його за методом Бернуллі:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' + 2uv = x^2 + 2x, \quad u'v + u(v' + 2v) = x^2 + 2x.$$

Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} v' + 2v = 0, \\ u'v = x^2 + 2x. \end{cases}$

Розв'язуємо перше з рівнянь системи:

$$v' + 2v = 0, \quad v' = -2v, \quad \frac{dv}{dx} = -2v, \quad \frac{dv}{v} = -2dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx, \quad \ln|v| = -2x, \quad v = e^{-2x}.$$

Підставивши отримане значення функції v в друге рівняння системи, дістанемо:

$$u'e^{-2x} = x^2 + 2x, \quad u' = \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}, \quad du = \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx,$$

$$\int du = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx, \ u = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx.$$

Застосовуємо до інтеграла в правій частині рівняння двічі формулу інтегрування частинами $\int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1$:

$$u = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u_1 = x^2 + 2x, & du_1 = (2x+2)dx \\ dv_1 = e^{2x}dx, & v_1 = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} - \int (x+1)e^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u_1 = x+1, & du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}dx, & v_1 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} -$$

$$-\left(\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Отже, $u = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C$.

Загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = uv = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C\right] \cdot e^{-2x},$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}.$$

Для розв’язання задачі Коші знайдемо значення сталої C, за якого частинний розв’язок задовольняє задану початкову умову:

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4} + Ce^{-2\cdot 0}, \ 1 = -\frac{1}{4} + C, \ C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}.$$

б) У рівнянні $y'\mathrm{ctg}\,x - y = 2\cos^2 x \cdot \mathrm{ctg}\,x$ помножимо ліву і праву частини на $\mathrm{tg}\,x$: $y' - y\mathrm{tg}\,x = 2\cos^2 x$, і рівняння набуде вигляду лінійного рівняння (2.5.1), де $p(x) = -\mathrm{tg}\,x$, $g(x) = 2\cos^2 x$.

Введемо заміну: $y = uv,\ y' = u'v + uv',$ тоді

$$u'v + uv' - uv\mathrm{tg}\,x = 2\cos^2 x, \quad u'v + u\left(v' - v\mathrm{tg}\,x\right) = 2\cos^2 x.$$

Складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} v' - v\mathrm{tg}\,x = 0, \\ u'v = 2\cos^2 x. \end{cases}$

Інтегруючи перше рівняння системи, дістаємо:

$$\frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,xdx, \ \int\frac{dv}{v} = \int\mathrm{tg}\,xdx, \quad \ln|v| = -\ln|\cos x|, \quad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння системи, маємо:

$$\frac{du}{dx} = 2\cos^3 x,\ du = 2\cos^3 xdx, u = 2\int\cos^2 xd\left(\sin x\right),$$

$$u = 2\int\left(1 - \sin^2 x\right)d\left(\sin x\right) = 2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right) + C = 2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C,$$

$y = \dfrac{1}{\cos x}\left(2\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + C\right)$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Застосувавши початкові умови $x = 0,\ y = 0,$ маємо $C = 0.$

Отже, $y = \dfrac{1}{\cos x}\left(2\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x\right)$ або $y = 2\mathrm{tg}\,x\left(1 - \dfrac{1}{3}\sin^2 x\right)$ – частинний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

а) $xy' - y = y^2\ln x$; б) $y' - \dfrac{1}{x}y + y^2 = 0$.

Розв'язання

а) Задане рівняння можна записати у вигляді $y' - \frac{1}{x} y = y^2 \frac{\ln x}{x}$ – рівняння Бернуллі (2.5.7), де $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $p(x) = -\frac{1}{x}$, $m = 2$. Поділимо ліву і праву частину цього рівняння на y^2: $y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$. Використаємо заміну $z = y^{-1}$, $-y^{-2} y' = z'$ та отримуємо: $-z' - \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x}$ або $z' + \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x}$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його за формулою (2.5.4):

$$z = \left(-\int \frac{\ln x}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C \right) e^{-\int \frac{dx}{x}} = \left(-\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln x} dx + C \right) e^{-\ln x} =$$

$$= \left(-\int \frac{\ln x}{x} x dx + C \right) \frac{1}{x} = \left(-\int \ln x dx + C \right) \frac{1}{x} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x dx, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = \left(-x \ln x + \int dx + C \right) \frac{1}{x} = \left(-x \ln x + x + C \right) \frac{1}{x}.$$

Отже, $y^{-1} = \frac{x - x \ln x + C}{x}$ або $y = \frac{x}{x - x \ln x + C}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

б) Перепишемо рівняння у вигляді $y' - \frac{1}{x} y = -y^2$ – рівняння Бернуллі (2.5.7), де $p(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -1$, $m = 2$. Розв'яжемо його методом Бернуллі. Введемо заміну: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, тоді

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = -u^2 v^2, \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v \right) = -u^2 v^2.$$

Складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} v' - \frac{1}{x} v = 0, \\ u'v = -u^2 v^2. \end{cases}$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=\ln|x|,\ v=x.$$

$$-\frac{du}{u^2}=xdx,\ -\int\frac{du}{u^2}=\int xdx;\ \frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2},\ u=\frac{2}{x^2+C}.$$

Отже, $y=uv=\dfrac{2x}{x^2+C}$ – загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

Приклад 9. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y'-y\cdot\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$ за умови $y(0)=1$.

Розв'язання

Зведемо задане рівняння до вигляду (2.5.7)

$$y'-y\cdot\operatorname{tg}x=-y^2\cos x.$$

Це рівняння Бернуллі, де $p(x)=-\operatorname{tg}x$, $g(x)=-\cos x$, $m=2$. Розв'яжемо його методом Бернуллі:

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',$$

$$u'v+uv'-uv\cdot\operatorname{tg}x=-u^2v^2\cos x,\quad u'v+u\left(v'-v\cdot\operatorname{tg}x\right)=-u^2v^2\cos x.$$

Складаємо систему $\begin{cases}v'-v\cdot\operatorname{tg}x=0,\\ u'v=-u^2v^2\cos x\end{cases}$ і знаходимо її розв'язок:

$$\frac{dv}{dx}=v\operatorname{tg}x,\ \frac{dv}{v}=\operatorname{tg}x\,dx,\ \ln|v|=-\ln|\cos x|,\quad v=\frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{\cos x}=-\frac{u^2}{\cos x},\quad -\frac{du}{u^2}=dx,\quad -\int\frac{du}{u^2}=\int dx,$$

$$\frac{1}{u}=x+C,\quad u=\frac{1}{x+C}.$$

Отже, $y=uv=\dfrac{1}{(x+C)\cos x}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Для розв'язання задачі Коші знайдемо значення сталої C, за якого частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову $x=0$ та $y=1$:

$$1=\frac{1}{(0+C)\cos 0},\ C=1.$$

Отже, $y=\dfrac{1}{(x+1)\cos x}$ – частинний розв'язок рівняння Бернуллі, що задовольняє умову $y(0)=1$.

2.6. *Диференціальні рівняння у повних диференціалах*

Диференціальне рівняння

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.6.1}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,. \tag{2.6.2}$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (2.6.1) має вигляд $u(x,y)=C$, де C – довільна стала.

Для того, щоб рівняння (2.6.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,. \tag{2.6.3}$$

Розглянемо тотожність (2.6.2) та прирівняємо перші доданки цих рівнянь, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx=M(x,y)dx$ або

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\,. \tag{2.6.4}$$

Рівність (2.6.4) інтегруємо за змінною x та отримаємо:

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)\,. \tag{2.6.5}$$

Формула (2.6.5) і визначає, в якому вигляді необхідно знаходити розв'язок рівняння (2.6.1).

Для знаходження $C(y)$ у рівнянні (2.6.5), потрібно прирівняти другі доданки тотожності (2.6.2), тобто розглянути умову

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\,.$$

Якщо умова (2.6.3) не виконується, то рівняння (2.6.1) треба помножити на так званий інтегрувальний множник $\mu(x,y)$, тобто

$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$. Отримали рівняння у повних диференціалах, тобто $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. При цьому, якщо вираз $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ є функцією лише змінної x, то $\mu = \mu(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}{N(x,y)}}$.

Якщо вираз $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ є функцією лише змінної y, то

$\mu = \mu(y) = e^{-\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}{M(x,y)}}$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 10. Розв'язати рівняння:

а) $\left(x\ln y - x^2 + \cos y\right)dy + \left(x^3 + y\ln y - y - 2xy\right)dx = 0$;

б) $\left(2y + xy^3\right)dx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$.

Розв'язання

а) У рівнянні маємо:

$$M(x,y) = x^3 + y\ln y - y - 2xy, \quad N(x,y) = x\ln y - x^2 + \cos y.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{y=const} = \ln y - 2x; \quad \left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_{x=const} = \ln y + 1 - 1 - 2x = \ln y - 2x.$$

Умова (2.6.3) виконується, тому задане рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Розв'язок знаходимо за формулою (2.6.5):

$$u(x,y) = \int\left(x^3 + y\ln y - y - 2xy\right)dx + C(y) = \frac{x^4}{4} + xy\ln y - xy - x^2y + C(y).$$

Знаходимо $C(y)$. Для цього диференціюємо $u(x,y)$ за змінною y:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=const} = x(\ln y + 1) - x - x^2 + C'(y) = x\ln y - x^2 + C'(y).$$

Оскільки

$$N(x,y) = x\ln y - x^2 + \cos y \text{ або } N(x,y) = x\ln y - x^2 + C'(y),$$

то $C'(y) = \cos y,\ C(y) = \sin y + C_1$.

Отже, $u(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + xy\ln y - xy - x^2 y + \sin y + C_1$ і загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$\frac{x^4}{4} + xy\ln y - xy - x^2 y + \sin y = C .$$

б) У рівнянні $\left(2y + xy^3\right)dx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$

$$M(x,y) = 2y + xy^3,\quad N(x,y) = x + x^2y^2 .$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_{y=const} = 1 + 2xy^2;\ \left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_{x=const} = 2 + 3xy^2 .$$

Умова (2.6.3) не виконується, тому знаходимо інтегрувальний множник:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2 + 3xy^2 - 1 - 2xy^2}{x + x^2y^2} = \frac{1 + xy^2}{x\left(1 + xy^2\right)} = \frac{1}{x};$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x .$$

Отже, рівняння $x\left(2y + xy^3\right)dx + x\left(x + x^2y^2\right)dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах, де

$$M(x,y) = 2xy + x^2y^3,\ N(x,y) = x^2 + x^3y^2,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2,\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3x^2y^2 .$$

Розв’язок знаходимо за формулою (2.6.5):

$$u(x,y) = \int\left(2xy + x^2y^3\right)dx + C(y) = x^2y + \frac{1}{3}x^3y^3 + C(y).$$

Визначаємо $C(y)$. Для цього диференціюємо $u(x,y)$ по змінній y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + x^3y^2 + C'(y)$.

Оскільки $N(x,y)=x^2+x^3y^2$ або $N(x,y)=x^2+x^3y^2+C'(y)$, то $C'(y)=0,\ C(y)=C_1$. Отже, $u(x,y)=x^2y+\frac{1}{3}x^3y^3+C_1$ і загальний інтеграл даного рівняння:

$$x^2y+\frac{1}{3}x^3y^3=C\ .$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть означення диференціального рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Як вони інтегруються?
2. Наведіть означення однорідного диференціального рівняння. Як воно інтегрується?
3. Які диференціальні рівняння приводяться до однорідних? Вказати метод їх розв'язку.
4. Наведіть означення лінійного диференціального рівняння першого порядку.
5. Яки основні методи розв'язання лінійного диференціального рівняння?
6. У чому полягає суть методу підстановки і методу варіації довільної сталої?
7. Який вигляд має рівняння Бернуллі? У чому полягає метод його розв'язання?
8. Що називається диференціальним рівнянням в повних диференціалах?
9. Наведіть алгоритм розв'язання диференціального рівняння в повних диференціалах.
10. Що називається інтегрувальним множником диференціального рівняння та як можна його знайти?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $y'=\sqrt{4+y^2}\ln x$; 2) $y'=\dfrac{x\sin x}{\cos^2 y}$; 3) $\left(1+x^3\right)y'=3x^2y$;

4) $xy' = \operatorname{tg} y$; 5) $y' = e^{2x-4y}$.

Завдання 2. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціальних рівнянь за умови $y\left(x_0\right) = y_0$:

1) $x\sin y = y'\left(1+x^2\right)\cos y$, $y\left(1\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{ctg} y dx - x\ln x dy = 0$, $y\left(e\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

3) $xy - y'\left(4+x^2\right) = 0$, $y\left(0\right) = 1$;

4) $\sin x dy - y\ln y dx = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

5) $\sin x\sin y dx + \cos x\cos y dy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 3. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

1) $\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx - xdy = 0$; 2) $\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0$;

3) $\left(x^2-xy+y^2\right)dx - x^2dy = 0$; 4) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$; 5) $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

Завдання 4. Розв'язати диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних:

1) $\left(6x+y-1\right)dx + \left(4x+y-2\right)dy = 0$;

2) $\left(5x-7y+1\right)dy + \left(x+y-1\right)dx = 0$;

3) $\left(2x-4y-1\right)dy - \left(x-2y+3\right)dx = 0$;

4) $\left(2x+y-1\right)dy - \left(x+2y+1\right)dx = 0$;

5) $\left(x-2y+3\right)dy + \left(2x+y-1\right)dx = 0$.

Завдання 5. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку: 1) $y' - y = 2x - x^2$; 2) $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$;

3) $y' + 3y = x^2 + 1$; 4) $y' + y = \sin x + \cos x$; 5) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Завдання 6. Розв'язати рівняння Бернуллі:

1) $y' - y\operatorname{ctg} x = y^2$; 2) $y' + \dfrac{y}{x-1} = xy^3$; 3) $2xy' + y = x^2y^{-1}$;

4) $xy' + y = y^2\ln x$; 5) $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

Завдання 7. Розв’язати диференціальні рівняння у повних диференціалах:

1) $\sin y dx + x\cos y dy = 0$; 2) $(x+y)dx-(y-x)dy=0$;

3) $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$;

4) $\left(3y^2+x\right)dy-(5-2xy)dx=0$; 5) $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx-\dfrac{2y}{x}dy=0$.

Завдання 8. Звести диференціальні рівняння до рівнянь у повних диференціалах та розв’язати їх:

1) $y^2(x-3y)dx+\left(1-3xy^2\right)dy=0$;

2) $\left(\cos\left(x+y^2\right)+3y\right)dx+\left(3y\cos\left(x+y^2\right)+3x\right)dy=0$;

3) $(2x\sin y - y\cos x+\ln x)dx+\left(x^2\cos y-\ln y-\sin x\right)dy=0$;

4) $\left(1+x^2y\right)dx+x^2(x+y)dy=0$; 5) $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$.

Тема 3
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

План

3.1. Основні поняття та означення.

3.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку.

3.3. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Література: [1–5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** поняття диференціального рівняння n-го порядку, його розв’язку, постановку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку; ***уміти***: розв’язувати диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку, лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

3.1. Основні поняття та означення

Диференціальні рівняння порядку вище першого називають *диференціальними рівняннями n-го порядку (вищих порядків*). У загальному вигляді диференціальні рівняння n-го порядку записують у неявній формі

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{3.1.1}$$

або $$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{3.1.2}$$

якщо (3.1.1) можна розв'язати відносно старшої похідної.

Розв'язок диференціального рівняння n-го порядку (3.1.2) записують у вигляді $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ – загального розв'язку, або $\Phi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$ – загального інтегралу.

Задача Коші, або задача з заданими початковими умовами $y\left(x_0\right) = y_0$, $y'\left(x_0\right) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}$, де y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ – задані дійсні числа, дає можливість знайти певні значення сталих: $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, при яких розв'язок $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ називають частинним розв'язком диференціального рівняння (3.1.2).

3.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку

Розглянемо три випадки диференціальних рівнянь, які допускають зниження порядку.

1) Нехай диференціальне рівняння записано у вигляді:

$$y^{(n)} = f(x)\,, \tag{3.2.1}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція. Його розв'язок дістають шляхом n-кратного інтегрування.

Після першого інтегрування отримуємо:

$$y^{(n-1)} = \int f\left(x\right) dx + C_1 = \varphi\left(x\right) + C_1\,.$$

Після другого інтегрування отримуємо:

$$y^{(n-2)} = \int\left(\varphi\left(x\right) + C_1\right) dx = \int \varphi\left(x\right) dx + C_1 \int dx = \psi\left(x\right) + C_1 x + C_2\,.$$

Продовжуючи процес зниження порядку, після n кроків отримуємо розв'язок даного рівняння.

2) Диференціальне рівняння виду

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0, \tag{3.2.2}$$

яке не містить шуканої функції y та похідних до k-го порядку. У цьому разі, зниження порядку робиться шляхом заміни:

$y^{(k)}=p(x)$, тоді $y^{(k+1)}=p'(x)$, і так далі, $y^{(n)}=p^{(n-k)}(x)$.

3) Диференціальне рівняння виду:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0, \tag{3.2.3}$$

що не містить у явному вигляді аргументу x, допускає зниження порядку шляхом заміни: $y'=p$, де $p=p(y)$ – нова невідома функція від y. Ураховуючи, що $y=y(x)$, маємо: $y''=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p'p$.

Тоді $y'''=\left(p'p\right)'_x=p''\dfrac{dy}{dx}p+p'\dfrac{dy}{dx}p'=p''p^2+\left(p'\right)^2 p$ і так далі.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $y'''=60x^2-2\cos 3x-1$; б) $y^{(5)}=x-1$; в) $y''=x\ln x$.

Розв'язання

а) Інтегруємо задане рівняння і отримуємо рівняння 2-го порядку:

$$y''=20x^3-\frac{2}{3}\sin 3x-x+C_1.$$

Далі інтегруємо отримане рівняння і отримуємо рівняння 1-го порядку:

$$y'=5x^4+\frac{2}{9}\cos 3x-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо:

$$y=x^5+\frac{2}{27}\sin 3x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

У розв’язку отримали стільки довільних сталих $C_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, який порядок рівняння.

б) $y^{(5)}=x-1$ – рівняння п’ятого порядку. Інтегруємо його послідовно п’ять разів:

$$y^{(4)}=\int\left(x-1\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+C_1;$$

$$y'''=\int\left(\frac{x^2}{2}-x+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2;$$

$$y''=\int\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3;$$

$$y'=\int\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}-C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3\right)dx=\frac{x^5}{120}-\frac{x^4}{24}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4;$$

$$y=\int\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^4}{24}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4\right)dx=$$

$$=\frac{x^6}{720}-\frac{x^5}{120}+C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5$$ – загальний розв’язок даного рівняння.

в) $y''=x\ln x$ – рівняння виду (3.2.1).

Послідовно інтегруючи рівняння, знаходимо:

$$y' = \int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx, \ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1 \right) dx = \int \frac{x^2}{2}\ln x dx - \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2,$$

$$\int \frac{x^2}{2}\ln x dx = \left| \begin{matrix} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{x^2}{2}dx, \ v = \dfrac{x^3}{6} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^2 dx = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18}.$$

$$y = \int \frac{x^2}{2}\ln x dx - \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2 = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2 =$$
$$= \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1 x + C_2 .$$

Приклад 2. Розв’язати рівняння:

а) $(x-2)y'' + y' = 0$; б) $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0.$

Розв’язання

а) Задане рівняння не містить явно шуканої функції y, тобто є рівнянням виду (3.2.2). Покладемо $p(x) = y',$ тоді $y'' = p'(x)$ і задане рівняння набуває вигляду диференціального рівняння першого порядку: $(x-2)p' + p = 0$ або $(x-2)\dfrac{dp}{dx} + p = 0$.

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x-2}, \quad \ln|p| = -\ln|x-2| + \ln|C_1|,$$

звідки $p = \dfrac{C_1}{x-2}$ або $y' = \dfrac{C_1}{x-2}$.

Розв'язуємо останнє рівняння $y=\int \frac{C_1}{x-2}dx$ та отримуємо загальний розв'язок заданого рівняння $y=C_1\ln|x-2|+C_2$.

б) $xy''+y'-x^2-1=0$ – рівняння виду (3.2.2).

Уводимо заміну $p(x)=y'$, тоді $y''=p'(x)$ і задане рівняння набуває вигляду: $xp'+p-x^2-1=0$ або $p'+\frac{p}{x}=\frac{x^2+1}{x}$.

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку (2.5.1). Розв'язуємо його методом варіації довільних сталих:

$$p=\left(\int \frac{x^2+1}{x}e^{\int \frac{dx}{x}}dx+C_1\right)e^{-\int \frac{dx}{x}}=\left(\int \frac{x^2+1}{x}e^{\ln x}dx+C_1\right)e^{-\ln x}=$$

$$=\left(\int \frac{x^2+1}{x}\cdot xdx+C_1\right)x^{-1}=\left(\int\left(x^2+1\right)dx+C_1\right)x^{-1}=\left(\int\left(x^2+1\right)dx+C_1\right)\frac{1}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x+C_1\right)\frac{1}{x}=\frac{x^2}{3}+1+\frac{C_1}{x}.$$

Підставляємо $p(x)=y'$: $y'=\frac{x^2}{3}+1+\frac{C_1}{x}$;

$y=\int\left(\frac{x^2}{3}+1+\frac{C_1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{9}+x+C_1\ln|x|+C_2$ – загальний розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

а) $y''y=\left(y'\right)^2-y'$; б) $2y''y-\left(y'\right)^2=1$.

Розв'язання

а) Задане рівняння не містить явно аргументу x і є рівнянням виду (3.2.3). Робимо заміну $y'=p(y)$ і маємо:

$$y''=p\frac{dp}{dy},\quad yp\frac{dp}{dy}=p^2-p.$$

Розглянемо такі випадки:

1) $p=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$, $y=C$.

2) $p\neq 0$, $y\dfrac{dp}{dy}=p-1$, $\dfrac{dp}{p-1}=\dfrac{dy}{y}$, $\ln|p-1|=\ln|y|+\ln|C_1|$,

$p-1=C_1y,\quad p=1+C_1y.$

Підставивши замість p його значення, маємо:

$$\frac{dy}{dx}=1+C_1y,\ \frac{dy}{1+C_1y}=dx,\ \ln|1+C_1y|=x+C_2.$$

Отже, $1+C_1y=e^{x+C_2}$ – загальний інтеграл даного рівняння.

Якщо покласти $\dfrac{e^{C_2}}{C_1}=C_1^*$, $-\dfrac{1}{C_1}=C_2^*$, то $y=C_1^*e^x+C_2^*$.

б) Рівняння $2y''y-(y')^2=1$ не містить явно аргументу x і є рівнянням виду (3.2.3). Вводимо заміну $y'=p(y)$ і маємо:

$$y''=p\frac{dp}{dy},\ 2yp\frac{dp}{dy}-p^2=1,\ 2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$2ypdp=\left(1+p^2\right)dy;\ \int\frac{2pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y};\ \ln\left|1+p^2\right|=\ln|y|+\ln C_1;$$

$$1+p^2=C_1y;\ p^2=C_1y-1;\ p=\pm\sqrt{C_1y-1}.$$

Переходимо до заміни: $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1},\ \dfrac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=dx,$

$$\int\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=\int dx;\ \pm\frac{1}{C_1}\int\frac{d\left(C_1y-1\right)}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=x+C_2;\ \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2.$$

Отже, $\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

3.3. Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = g\left(x\right), \qquad (3.3.1)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – деякі дійсні числа.

Якщо у рівнянні (3.3.1) $g\left(x\right) = 0$, тобто:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (3.3.2)$$

тоді рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Розглянемо розв’язання рівняння (3.3.2) на прикладі диференціального рівняння другого порядку:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (3.3.3)$$

Частинні розв’язки рівняння (3.3.3) шукатимемо у вигляді

$$y\left(x\right) = e^{\lambda x}, \qquad (3.3.4)$$

де λ – дійсна чи комплексна стала, яку треба знайти. Тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$; $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставимо (3.3.4) та отримані рівності в рівняння (3.3.3):

$$a_0 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0, \quad e^{\lambda x}\left(a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2\right) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \qquad (3.3.5)$$

Квадратне рівняння (3.3.5) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (3.3.3). Його отримують із однорідного рівняння шляхом заміни похідних шуканої функції відповідними степенями λ, а саму функцію y замінюють одиницею.

Частинні розв’язки рівняння (3.3.3) залежать від вигляду коренів λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.3.5). При цьому можливі такі випадки:

1. Якщо корені характеристичного рівняння (3.3.5) *дійсні й різні* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то частинними розв’язками рівняння (3.3.3) є функції

$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд : $y_0(x)=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

2. Якщо корені характеристичного рівняння (3.3.5) *дійсні й рівні* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то частинними розв'язками рівняння є функції $y_1(x)=e^{\lambda x}$; $y_2(x)=xe^{\lambda x}$ і загальний розв'язок рівняння (3.3.3) має вигляд: $y_0(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)$.

3. Якщо характеристичне рівняння (3.3.5) не має дійсних коренів, тобто корені рівняння *комплексно-спряжені* $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то частинними розв'язками рівняння (3.3.3) є функції $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ і загальний розв'язок рівняння (3.3.3) має вигляд:

$$y_0(x)=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Розглянемо розв'язання рівняння (3.3.1) на прикладі диференціального рівняння другого порядку:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=g(x), \tag{3.3.6}$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна знайти як суму загального розв'язку $y_0(x)$ однорідного рівняння (3.3.3) і деякого частинного розв'язку $y_{част.}(x)$ неоднорідного рівняння (3.3.1):

$$y(x)=y_0(x)+y_{част.}(x).$$

Для знаходження частинного розв'язку $y_{част.}(x)$ потрібно розглянути праву частину $g(x)$ і застосувати метод невизначених коефіцієнтів, якщо права частина має вигляд:

1. $g(x)=A_0x^s+\ldots+A_s=P(x)$ – многочлен;
2. $g(x)=Ae^{\alpha x}$ – експонента;
3. $g(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$.

У зазначених випадках частинний розв'язок шукатимемо у тому ж самому вигляді.

4. $g(x)=e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right)$ –комбінація випадків 1-3.

Частинний розв'язок $y_{част.}(x)$ неоднорідного рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=g(x)$ для окремих типів *рівнянь зі спеціальною правою частиною* можна знайти, не виконуючи операції інтегрування.

Для знаходження частинного розв’язку $y_{част.}(x)$ рівняння (3.3.6) складемо характеристичне рівняння $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ відповідного однорідного рівняння (3.3.3) і знайдемо його корені λ_1, λ_2. Окремі випадки наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вигляд функції $g(x)$ – правої частини рівняння (3.3.6)	Вигляд частинного розв’язку $y_{част.}$ рівняння (3.3.6)
1. $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$	а) $y_{част.}=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n$, якщо $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$; б) $y_{част.}=x\left(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n\right)$, якщо $\lambda_1\neq\lambda_2=0$.
2. $g(x)=e^{\alpha x}$	а) $y_{част.}=Ae^{\alpha x}$, якщо $\lambda_1\neq\alpha,\ \lambda_2\neq\alpha$; б) $y_{част.}=Axe^{\alpha x}$, якщо $\lambda_1=\alpha,\ \lambda_2\neq\alpha$; в) $y_{част.}=Ax^2e^{\alpha x}$, якщо $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$.
3. $g(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$	а) $y_{част.}=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, якщо $\lambda_1,\lambda_2\neq\pm\beta i$; б) $y_{част.}=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, якщо $\lambda_1,\lambda_2=\pm\beta i$.

Зауваження 1. Якщо у випадку 3 функція $g(x)$ містить лише один доданок із синусом або косинусом, то частинний розв’язок $y_{част.}$ все одно записують з обома доданками.

Розглянемо більш загальні випадки для рівнянь зі спеціальною правою частиною.

1. Права частина рівняння (3.3.6) має вигляд $g(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n, тобто

$$g(x)=e^{\alpha x}(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n).$$

Частинний розв'язок шукають у вигляді $y_{част.}=x^re^{\alpha x}Q_n(x)$, де $Q_n(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n$ – многочлен n-го степеня з невизначеними коефіцієнтами $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$; r – кількість коренів характеристичного рівняння $\lambda^2+p\lambda+q=0$, які дорівнюють α. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то $r=0$.

2. Права частина рівняння (3.3.6) має вигляд

$$g(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+M_m(x)\sin\beta x\right),$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, а $M_m(x)$ – многочлен степеня m, α і β – дійсні числа.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (3.3.6) має вигляд $y_{част.}=x^re^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x\right)$, де $Q_s(x), N_s(x)$ – многочлени степеня s із невизначеними коефіцієнтами ($s=\max(n,m)$), r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha+\beta i$. Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $r=0$.

Зауваження. При знаходженні $y_{част.}$ для правої частини $g(x)$ складаємо число $\alpha+\beta i$. Якщо отримане число збігається з одним із коренів характеристичного рівняння (3.3.5), то частинний розв'язок домножуємо на змінну x. Якщо таких співпадінь більше як одне, то частинний розв'язок $y_{част.}$ домножуємо на змінну x у степені, яка дорівнює кількості таких співпадінь. x.

Розглянемо розв'язок рівняння (3.3.6) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Він полягає в тому, що спочатку знаходимо розв'язок однорідного рівняння

$$y_0=C_1y_1+C_2y_2, \tag{3.3.7}$$

причому надалі сталі C_1 та C_2 розглядають як невідомі функції

$C_1(x)$ і $C_2(x)$. Далі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{g(x)}{a_0}. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему та знаходимо C_1' та C_2'. Нехай $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$, тоді:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1^*,\ C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2^*,$$

де C_1^* і C_2^* – сталі. Підставляємо значення C_1 і C_2 у (3.3.7) і отримуємо загальний розв'язок даного диференціального рівняння (3.3.6).

У випадку лінійного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами та довільною правою частиною, а саме $a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = g(x)$, його розв'язок знаходять аналогічно, тільки розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$, а система відповідно

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' = \dfrac{g(x)}{a_0}. \end{cases}$$

У випадку лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та довільною правою частиною (3.3.1), його розв'язок знаходять методом варіації довільних сталих: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$, де $y_i(x),\ i = \overline{1,n}$ – частинні розв'язки однорідного рівняння.

Система рівнянь для знаходження $C_i(x),\ i = \overline{1,n}$ має вигляд:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = \dfrac{g(x)}{a_0}. \end{cases}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 5. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання

а) Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3.$$

Маємо випадок 1, коли корені дійсні й різні. Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

б) Складемо характеристичне рівняння й знайдемо його корені:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \ (\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Маємо випадок 2, коли корені дійсні й рівні. Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

в) Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0, \ \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm 4i.$$

Маємо випадок 3, коли корені комплексно-спряжені. Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_0 = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціальних рівнянь:

а) $y'' - 6y' + 9y = 0$ за умови $y(0) = 1, \ y'(0) = 2$;

б) $y'' + 2y' + 3y = 0$ за умови $y(0) = 0, \ y'(0) = \sqrt{3}$.

Розв'язання

а) Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо відповідне характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, то загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Для знаходження розв'язку задачі Коші застосуємо початкові умови $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Знайдемо похідну від загального розв'язку рівняння і підставимо у вирази для y_0 та y_0' початкові умови:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}\left(1 + 3x\right),$$

$$\begin{cases} 1 = e^{3\cdot 0}\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right), \\ 2 = 3C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot e^{3\cdot 0}\left(1 + 3\cdot 0\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1, \\ 2 = 3C_1 + C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2 - 3C_1 = 2 - 3 = -1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = e^{3x} - x e^{3x} = e^{3x}\left(1 - x\right).$$

б) Складемо характеристичне рівняння для заданого однорідного рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Загальний розв'язок заданого однорідного рівняння має вигляд:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}\,x\right).$$

Знайдемо y':

$$y' = -e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + e^{-x}\left(-C_1\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x + C_2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x\right).$$

Для розв'язання задачі Коші застосовуємо початкові умови і знайдемо значення сталих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ -C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 - \sqrt{2}\,C_1 \sin 0 + \sqrt{2}C_2 \cos 0 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Отже, $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$

Тоді $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}} e^{-x} \sin\sqrt{2}x$ – частинний розв'язок заданого однорідного рівняння при заданих початкових умовах.

Приклад 7. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$;

б) $y'' + y' = 2x - 1$;

в) $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$;

г) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$.

Розв'язання

а) Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із загального розв'язку $y_0(x)$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ і частинного розв'язку $y_{част.}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$, тобто $y(x) = y_0 + y_{част.}$.

Для знаходження y_0 складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$.

Отже, $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння (випадок 1).

Визначаємо $y_{част.}$. У нашому випадку права частина неоднорідного диференціального рівняння має вигляд (випадок 2а, табл. 3.1): $g(x) = 5e^{3x}$ $(\alpha = 3 \neq \lambda_1 = 2;\ \ \alpha = 3 \neq \lambda_2 = 1)$ і тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді: $y_{част.} = Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт, який необхідно знайти.

Знайдемо $y'_{част.} = 3Ae^{3x}$, $y''_{част.} = 9Ae^{3x}$ і підставимо вирази в рівняння $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$:

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} \equiv 5e^{3x}, \quad 2Ae^{3x} \equiv 5e^{3x}.$$

Тотожно прирівнявши ліву і праву частини останнього рівняння, маємо $2A=5,\ \ A=\frac{5}{2}$.

Отже, $y_{част.}=\frac{5}{2}e^{3x}$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, а його загальний розв'язок має вигляд: $y=y_0+y_{част.}=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+\frac{5}{2}e^{3x}$.

б) $y''+y'=2x-1$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''+y'=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок рівняння $y''+y'=2x-1$ будемо шукати у вигляді $y(x)=y_0+y_{част.}$.

Для знаходження загального розв'язку $y_0(x)$ однорідного рівняння складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $\lambda^2+\lambda=0$, $\lambda(\lambda+1)=0$, $\lambda_1=0, \lambda_2=-1$. Тоді

$$y_0=C_1+C_2e^{-x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок $y_{част.}$ неоднорідного рівняння. Його права частина $g(x)=2x-1$ – поліном. Оскільки один із коренів характеристичного рівняння $\lambda_1=0$ (випадок 1б, табл. 3.1), то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_{част.}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx,$$

тоді $y'_{част.}=2Ax+B$, $y''_{част.}=2A$, $2A+2Ax+B\equiv 2x-1$.

$$x^0\big|\,2A+B=-1,\quad B=-3,$$

$$x^1\big|\,2A=2,\ \ A=1.$$

Отже, $y_{част.}=x^2-3x$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння і загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x.$$

в) Рівняння $y''-6y'+10y=51e^{-x}$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''-6y'+10y=0$ – відповідне йому однорідне рівняння, для якого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені: $\lambda^2-6\lambda+10=0$, $\lambda_{1,2}=3\pm i$.

Функція $y_0=e^{3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$ – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Оскільки в правій частині заданого рівняння $\alpha=-1$, а $\lambda=-1$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукатимемо у вигляді $y_{част.}=Ae^{-x}$ (випадок 2а, табл. 3.1):

$$y'_{част.}=-Ae^{-x},\quad y''_{част.}=Ae^{-x}.$$

Тоді $Ae^{-x}+6Ae^{-x}+10Ae^{-x}\equiv 51e^{-x}$, $17Ae^{-x}\equiv 51e^{-x}$, $A=\dfrac{51}{17}=3$.

Отже, $y_{част.}=3e^{-x}$ – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, а $y=e^{3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+3e^{-x}$ – загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

г) $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, $y''-2y'-8y=0$ – відповідне йому однорідне рівняння.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2-2\lambda-8=0,\quad \lambda_1=4,\ \lambda_2=-2.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння: $y_0=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$.

Права частина даного рівняння має вигляд $g(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x.$ У нашому випадку число $\pm\beta i=2i$ не збігається з $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$ (випадок 3а, табл. 3.1), тому частинний розв'язок запишемо у вигляді $y_{част.}=A\cos 2x+B\sin 2x$. Знайдемо:

$$y'_{част.}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\ y''_{част.}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Визначаємо невідомі коефіцієнти A і B:

$$\left(-4A\cos 2x-4B\sin 2x\right)-2\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)-$$
$$-8\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)\equiv 12\sin 2x-36\cos 2x,$$

$$\left(-4A-4B-8A\right)\cos 2x+\left(-4B+4A-8B\right)\sin 2x\equiv 12\sin 2x-36\cos 2x;$$

$$\begin{cases}-12A-4B=-36,\\ 4A-12B=12;\end{cases}\quad \begin{cases}3A+B=9,\\ A-3B=3;\end{cases}\quad \begin{cases}A=3,\\ B=0.\end{cases}$$

Отже, $y_{част.}=3\cos 2x$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння і $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}+3\cos 2x$ – загальний розв’язок даного рівняння.

Приклад 8. Знайти загальні розв’язки рівнянь:

а) $y''-2y'+y=x-4$; б) $y''-4y=e^{2x}$; в) $y''+4y=\cos x$;

г) $y''+4y'+3y=x+e^{2x}$.

Розв’язання

а) Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв’язку y_0 відповідного однорідного рівняння $y''-2y'+y=0$ і частинного розв’язку $y_{част.}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y''-2y'+y=x-4$, тобто $y(x)=y_0+y_{част.}$.

Для знаходження y_0 складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені: $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda_1=\lambda_2=1$. Отже, $y_0=C_1e^x+C_2xe^x$ – загальний розв’язок однорідного рівняння (випадок 2).

Для знаходження $y_{част.}$ використовуємо зауваження 2. Складаємо число $\alpha+\beta i=0+0i=0$. Оскільки це число не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв’язок шукатимемо у вигляді: $y_{част.}=Ax+B$, тоді

$$y'_{част.}=A,\; y''_{част.}=0,\; -2A+Ax+B\equiv x-4.$$

$$x^0\left|\,-2A+B=-4,\quad B=-2,\right.$$

$$x^1\left|\; A=1.\right.$$

Отже, $y_{част.}=x-2$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв’язок даного рівняння має вигляд:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+x-2.$$

б) $y''-4y=e^{2x}$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''-4y=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок рівняння $y''-4y=e^{2x}$ шукатимемо у вигляді $y(x)=y_0+y_{част.}$.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2-4=0,\ \ \lambda_1=2;\ \lambda_2=-2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (випадок 1): $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$.

Для знаходження $y_{част.}$ використовуємо зауваження 2. Складаємо число $\alpha+\beta i=2+0i=2$. Оскільки це число є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді: $y_{част.}=Axe^{2x}$, тоді

$$y'_{част.}=A\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right),$$

$$y''_{част.}=A\left(2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}\right)=A\left(4e^{2x}+4xe^{2x}\right),$$

$4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-4Axe^{2x}\equiv e^{2x}$; $4Ae^{2x}\equiv e^{2x}$. Звідси $4A=1;\ A=\dfrac{1}{4}$.

Отже, $y_{част.}=\dfrac{1}{4}xe^{2x}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}.$$

в) $y''+4y=\cos x$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''+4y=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок рівняння $y''+4y=e^{2x}$ шукатимемо у вигляді $y(x)=y_0+y_{част.}$.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2+4=0,\ \ \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-4};\ \lambda_{1,2}=\pm 2i.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (випадок 3): $y_0=e^{0x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Для знаходження $y_{част.}$ використовуємо зауваження 2. Складаємо число $\alpha+\beta i=0+i=i$. Оскільки це число не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді: $y_{част.}=A\cos x+B\sin x$, тоді

$$y'_{част.}=-A\sin x+B\cos x,\ y''_{част.}=-A\cos x-B\sin x,$$

$$-A\cos x-B\sin x+4\left(A\cos x+B\sin x\right)=\cos x;$$

$$3A\cos x+3B\sin x=\cos x.\ \text{Звідси}\ A=\frac{1}{3};\ B=0.$$

Отже, $y_{част.}=\dfrac{1}{3}\cos x$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x.$$

г) $y''+4y'+3y=x+e^{2x}$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''+4y'+3y=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок даного рівняння шукатимемо у вигляді $y\left(x\right)=y_0+y_{част.}$.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2+4\lambda+3=0,\ \lambda_1=-1;\ \lambda_2=-3.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (випадок 1) $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$.

Права частина даного рівняння складається з двох доданків: лінійної функції $g_1\left(x\right)=x$ та експоненти $g_2\left(x\right)=e^{2x}$.

Для $g_1\left(x\right)$ число $\alpha+\beta i=0+0i=0$, для $g_2\left(x\right)$ число $\alpha+\beta i=2+0i=2$. Ці числа не є коренями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_{част.}=Ax+B+Ce^{2x}$, тоді

$$y'_{част.}=A+2Ce^{2x},\ y''_{част.}=4Ce^{2x},$$

$$4Ce^{2x}+4A+8Ce^{2x}+3Ax+3B+3Ce^{2x}=x+e^{2x};$$

$$15Ce^{2x}+3Ax+4A+3B=x+e^{2x}.$$

Звідси, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, матимемо: $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{4}{9}$; $C=\frac{1}{15}$.

Отже, $y_{част.}=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}+\frac{1}{15}e^{2x}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}+\frac{1}{15}e^{2x}.$$

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок рівняння

$y''-4y'+13y=12e^{2x}\sin 3x$, якщо $y(0)=7,\ y'(0)=24$.

Розв'язання

$y''-4y'+13y=12e^{2x}\sin 3x$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''-4y'+13y=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок даного рівняння будемо шукати у вигляді $y(x)=y_0+y_{част.}$.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2-4\lambda+13=0, \quad \lambda_{1,2}=2\pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (випадок 3) $y_0=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Для знаходження $y_{част.}$ складаємо число $\alpha+\beta i=2+3i$. Це число є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді: $y_{част.}=xe^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)$. Тоді

$$y'_{част.}=2xe^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+$$
$$+xe^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+e^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right);$$

$$y''_{част.}=4xe^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+2xe^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+2e^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+2xe^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+xe^{2x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)+e^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$=2e^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+e^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right).$$

Підставимо $y_{част.}$, $y'_{част.}$ та $y''_{част.}$ у задане рівняння і після зведення подібних членів дістанемо тотожність:

$2e^{2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\equiv 12e^{2x}\sin 3x$.

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів дістанемо: $A=-2;\ B=0$.

Отже, $y_{част.}=-2xe^{2x}\cos 3x$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв’язок даного рівняння має вигляд:

$y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)-2xe^{2x}\cos 3x$ або

$y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-2x\cos 3x\right)$.

Для знаходження частинного розв’язку рівняння знаходимо $y'=2e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-2x\cos 3x\right)+$

$+e^{2x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x-2\cos 3x+6x\sin 3x\right).$

Використовуючи початкові умови, дістанемо: $C_1=7$ та $C_2=4$.

Підставимо ці значення у загальний розв’язок та отримаємо частинний розв’язок заданого рівняння:

$$y=e^{2x}\left(7\cos 3x+4\sin 3x-2x\cos 3x\right).$$

Приклад 10. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''+y=-\operatorname{ctg}^2 x$.

Розв’язання

$y''+y=-\operatorname{ctg}^2 x$ – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, а $y''+y=0$ – відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння.

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2+1=0,\ \ \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-1};\ \lambda_{1,2}=\pm i\ .$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд (випадок 3) $y_0=e^{0x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)=C_1\cos x+C_2\sin x$, де $y_1=\cos x$ і $y_2=\sin x$.

Для знаходження розв’язку неоднорідного рівняння застосуємо метод Лагранжа:

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=-\operatorname{ctg}^2 x, \end{cases}$$

$$C_1'=\operatorname{ctg}^2 x\sin x,\ C_2'=-\operatorname{ctg}^2 x\cos x\ ,$$

$$C_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_1^*,\ C_2 = \frac{1}{\sin x} + \sin x + C_2^*.$$

Знайдені C_1 і C_2 підставимо у розв'язок однорідного рівняння. Звідси загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_1^*\right)\cos x + \left(\frac{1}{\sin x} + \sin x + C_2^*\right)\sin x.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями n-го порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?
3. Сформулювати постановку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
4. Який розв'язок диференціального рівняння n-го порядку називається загальним, частинним?
5. Що називається загальним, частинним інтегралом?
6. Записати рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку і пояснити методи їх розв'язування.
7. Які рівняння називаються лінійними диференціальними рівняннями n-го порядку?
8. Які лінійні диференціальні рівняння n-го порядку називаються однорідними, неоднорідними?
9. Записати загальний розв'язок лінійного однорідного і неоднорідного диференціальних рівнянь.
10. Сформулювати методи знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.
11. Сформулювати метод варіації довільних сталих.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння:

1) $y^{V} = e^x - 1$; 2) $y^{IV} = \sin 2x$; 3) $y''' = x + \cos x$; 4) $y''' = 3^x + \sin x$;

5) $y''' = e^{3x} - \cos x$.

Завдання 2. Розв'язати диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції:

1) $x^2y''+xy'=1$; 2) $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$; 3) $y''+\dfrac{xy'}{4+x^2}=x^3$;

4) $xy''=y'+x^2$; 5) $\left(1-x^2\right)y''=2xy'$.

Завдання 3. Розв'язати диференціальні рівняння, що не містять незалежну змінну:

1) $yy''+\left(y'\right)^2=0$; 2) $y''=2y+1$; 3) $y^3y''=1$; 4) $yy''=3\left(y'\right)^2$;

5) $\left(1+y\right)y''=\left(y'\right)^2$.

Завдання 4. Розв'язати диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''+y'=x^2+1$; 2) $y''+4y=\sin 2x-2\cos 2x$;

3) $y'''-y''=-3x+1$; 4) $y''+2y'-3y=4e^{-4x}$; 5) $y''-3y'+2y=e^{2x}$.

Завдання 5. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

1) $y''-y'+y=2e^x$, якщо $y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=0$;

2) $y''+2y'-3y=4\cos 2x-7\sin 2x$, якщо $y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=0$;

3) $y''+y'=x^2-x+3$, якщо $y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=0$;

4) $y''+y'-2y=3e^x$, якщо $y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=3$;

5) $y''-y=2\sin x+2\cos x$, якщо $y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=1$.

Завдання 6. Розв'язати диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами з довільною правою частиною:

1) $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$; 2) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$; 3) $y''+4y=\operatorname{tg} 2x$;

4) $y''-y'=\dfrac{e^x}{1+e^x}$; 5) $y''-y=\dfrac{1}{1+e^x}$.

Тема 4.
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

План

4.1. Нормальна система диференціальних рівнянь.

4.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Література: [1–5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** поняття системи диференціальних рівнянь, її, розв'язку, види систем диференціальних рівнянь, постановку задачі Коші для системи рівнянь; ***уміти***: знаходити розв'язки систем диференціальних рівнянь, розв'язувати задачу Коші.

4.1. Нормальна система диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних шуканих функцій $y_i(t),\ i=\overline{1,n}$ виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

називається *нормальною системою диференціальних рівнянь*.

Розв'язком системи (4.1.1) називається сукупність n функцій $y_1, y_2, ..., y_n$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи, тобто обертають кожне рівняння системи у тотожність.

Задача Коші для системи (4.1.1) формулюється так: знайти розв'язок системи (4.1.1), який задовольняє початкові умови: $y_1(t_0) = y_1^0;\ y_2(t_0) = y_2^0; ..., y_n(t_0) = y_n^0$, де y_1^0, y_2^0, …, y_n^0 – задані числа.

4.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Система звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

де $y_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – невідомі функції незалежної змінної t, a_{ij} $\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}\right)$ – сталі величини, $f_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – задані функції незалежної змінної t.

Якщо $f_i(t)=0,$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, то маємо систему звичайних однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Послідовним виключенням $(n-1)$ невідомих функцій, система рівнянь (4.2.1) зводиться до одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку відносно однієї невідомої функції, розв’язавши яке, знаходимо одну з невідомих функцій. А потім зворотним шляхом знаходимо останні шукані функції.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Знайти загальні розв’язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

Розв’язання

а) Диференціюємо перше рівняння системи: $x'' = 2x' + 2y'$. З другого рівняння системи y' підставляємо в отримане рівняння:

$$x'' = 2x' + 2(x+3y);\ x'' = 2x' + 2x + 6y.$$

З першого рівняння даної системи:

$$2y = x' - 2x\,,\ \ y = \frac{x' - 2x}{2}\,.$$

Підставляємо y в рівняння $x'' = 2x' + 2x + 6y$:

$$x'' = 2x' + 2x + 6\cdot\frac{x' - 2x}{2} = 2x' + 2x + 3\left(x' - 2x\right) = 5x' - 4x\,.$$

Дістали $x'' - 5x' + 4x = 0$ – однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0\,,\ \lambda_1 = 4;\ \lambda_2 = 1\,.$$

Отже, $x = C_1e^{4t} + C_2e^t$.

Знаходимо $x' = 4C_1e^{4t} + C_2e^t$ та знайдені x і x' підставляємо в $y = \dfrac{x' - 2x}{2}$:

$$y = \frac{4C_1e^{4t} + C_2e^t - 2\left(C_1e^{4t} + C_2e^t\right)}{2} = \frac{2C_1e^{4t} - C_2e^t}{2} = C_1e^{4t} - \frac{1}{2}C_2e^t.$$

Відповідь запишемо у вигляді: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^t \\ -\dfrac{e^t}{2} \end{pmatrix}$.

б) Диференціюємо перше рівняння системи:

$$x'' = 3x' - y' + z'\,.$$

Підставимо в це рівняння значення похідних x', y', z' з рівнянь вихідної системи:

$$x'' = 3\left(3x - y + z\right) - \left(x + y + z\right) + \left(4x - y + 4z\right),$$

$$x'' = 12x - 5y + 6z\,.$$

Диференціюємо отримане рівняння:

$$x''' = 12x' - 5y' + 6z'$$

та підставимо в нього значення похідних x', y', z' з рівнянь вихідної системи:

$$x''' = 12\left(3x - y + z\right) - 5\left(x + y + z\right) + 6\left(4x - y + 4z\right),$$

$$x''' = 55x - 23y + 31z\,.$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ x'' = 12x - 5y + 6z, \\ x''' = 55x - 23y + 31z. \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

Перші два рівняння цієї системи запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x' - 3x = -y + z, \\ x'' - 12x = -5y + 6z \end{cases}$$

і з неї знаходимо y і z. Для цього перше рівняння домножуємо на 6 і віднімаємо його від другого рівняння:

$$\begin{cases} x' - 3x = -y + z, \\ x'' - 6x' + 6x = y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x'' - 6x' + 6x, \\ z = x'' - 5x' + 3x. \end{cases} \qquad (4.2.3)$$

Підставимо y і z у третє рівняння системи (4.2.2):

$$x''' = 55x - 23y + 31z = 55x - 23\left(x'' - 6x' + 6x\right) + 31\left(x'' - 5x' + 3x\right);$$

$$x''' = 8x'' - 17x' + 10x \text{ або } x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0; \ \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda^2 - 7\lambda + 10\right) = 0;$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 5.$$

Тоді,

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}.$$

Знаходимо похідні:

$$x' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{5t}, \ x'' = C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 25C_3 e^{5t}.$$

Підставимо знайдені значення x, x', x'' у систему рівнянь (4.2.3) і знаходимо y і z:

$$\begin{cases} y = x'' - 6x' + 6x = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ z = x'' - 5x' + 3x = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} + 11C_3 e^{5t}. \end{cases}$$

Відповідь запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 11e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо на прикладах ще один метод розв'язування систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами – метод Ейлера.

Приклад 2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь за методом Ейлера:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

Розв'язання

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Складаємо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0; \ \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 1.$$

Коли $\lambda_1 = 4$, частинний розв'язок шукаємо вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{4t} \\ \alpha_2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Вихідна система відносно α_1 і α_2 має вигляд:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ 4\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Якщо $\alpha_1 = C_1, \ \alpha_2 = C_1$, тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.

Коли $\lambda_2 = 1$, частинний розв'язок шукаємо вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 e^{t} \\ \beta_2 e^{t} \end{pmatrix}.$$

Вихідна система відносно β_1 і β_2 має вигляд:

$$\begin{cases}\beta_1 = 2\beta_1 + 2\beta_2, \\ \beta_2 = \beta_1 + 3\beta_2;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1 + 2\beta_2 = 0, \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 0;\end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -2\beta_2 .$$

Якщо $\beta_1 = C_2$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}C_2$, тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ -\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$.

Отже, загальний розв'язок даної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ -\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^t; \\ y = C_1 e^{4t} - \frac{1}{2} C_2 e^t. \end{cases}$$

б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

Складаємо характеристичне рівняння системи:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\quad \lambda^2 + 9 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 3i -$ комплексно-спряжені корені.

Коли $\lambda_1 = 3i$, тоді частинний розв'язок шукаємо вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{3it} \\ \alpha_2 e^{3it} \end{pmatrix}.$$

Вихідна система відносно α_1 і α_2 має вигляд:

$$\begin{cases} 3i\alpha_1 = \alpha_1 - 5\alpha_2, \\ 3i\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2; \end{cases}$$

$3i\alpha_1 = \alpha_1 - 5\alpha_2$, $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = \frac{C_1(1-3i)}{5}$, тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{3it} \\ \frac{1-3i}{5} e^{3it} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t + i \sin 3t \\ \frac{1-3i}{5}(\cos 3t + i \sin 3t) \end{pmatrix} =$$

$$=C_1\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \frac{1}{5}\cos 3t+\frac{3}{5}\sin 3t\end{pmatrix}+iC_1\begin{pmatrix}\sin 3t\\ -\frac{3}{5}\cos 3t+\frac{1}{5}\sin 3t\end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв’язок даної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \frac{1}{5}\cos 3t+\frac{3}{5}\sin 3t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin 3t\\ -\frac{3}{5}\cos 3t+\frac{1}{5}\sin 3t\end{pmatrix}.$$

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y.\end{cases}$

Складаємо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-2\lambda+1=0;\ \lambda_1=\lambda_2=1.$$

Частинний розв’язок шукаємо вигляді: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1 t)e^t\\ (\alpha_2+\beta_2 t)e^t\end{pmatrix}$.

Тоді з першого рівняння системи:

$$\beta_1 e^t+(\alpha_1+\beta_1 t)e^t=3(\alpha_1+\beta_1 t)e^t-(\alpha_2+\beta_2 t)e^t;$$

$$\beta_1+\alpha_1+\beta_1 t=3\alpha_1+3\beta_1 t-\alpha_2-\beta_2 t.$$

$$\begin{cases}\beta_1+\alpha_1=3\alpha_1-\alpha_2,\\ \beta_1 t=3\beta_1 t-\beta_2 t;\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\\ -2\beta_1=-\beta_2.\end{cases}$$

Нехай $\beta_1=C_1$, тоді $\beta_2=2C_1$, $C_1=2\alpha_1-\alpha_2$. Якщо $\alpha_2=C_2$ то $2\alpha_1=C_1+C_2$, $\alpha_1=\dfrac{C_1+C_2}{2}$.

Отже, загальний розв’язок даної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{C_1+C_2}{2}+C_1 t\right)e^t\\ (C_2+2C_1 t)e^t\end{pmatrix}.$$

Розглянемо більш детально на прикладах знаходження розв’язку систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Приклад 3. Розв’язати систему диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^{-t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2t. \end{cases}$

Розв'язання

а) Диференціюємо перше рівняння системи: $x'' = -5x' + 2y' + e^{t}$. Підставимо в отримане рівняння замість похідної y' її значення з другого рівняння вихідної системи: $x'' = -5x' + 2x - 12y + 2e^{-2t} + e^{t}$.

З першого рівняння вихідної системи виразимо y:

$$2y = x' + 5x - e^{t};\ y = \frac{x' + 5x - e^{t}}{2}$$

і підставимо його рівняння $x'' = -5x' + 2y' + e^{t}$:

$$x'' = -5x' + 2x - 6x' - 30x + 6e^{t} + 2e^{-2t} + e^{t} = -11x' - 28x + 7e^{t} + 2e^{-2t}$$

або $x'' + 11x' + 28x = 7e^{t} + 2e^{-2t}$.

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$x'' + 11x' + 28x = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені:

$$\lambda^{2} + 11\lambda + 28 = 0,\ \lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = -7.$$

Отже, $x_0 = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$.

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукатимемо у вигляді $x_{част.} = Ae^{t} + Be^{-2t}$, тоді:

$$x'_{част.} = Ae^{t} - 2Be^{-2t};\ x''_{част.} = Ae^{t} + 4Be^{-2t}.$$

Знайдені $x_{част.}$, $x'_{част.}$ та $x''_{част.}$ підставимо у неоднорідне диференціального рівняння $x'' + 11x' + 28x = 7e^{t} + 2e^{-2t}$:

$$Ae^{t} + 4Be^{-2t} + 11Ae^{t} - 22Be^{-2t} + 28Ae^{t} + 28Be^{-2t} = 7e^{t} + 2e^{-2t},$$

$$12Ae^{t}-18Be^{-2t}=7e^{t}+2e^{-2t}.$$

Звідси $12A=7,\ A=\dfrac{7}{12};\ -18B=2,\ B=-\dfrac{1}{9}$. Отже, $x_{част.}=\dfrac{7}{12}e^{t}-\dfrac{1}{9}e^{-2t}$ – частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння та $x=x_0+x_{част.}=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{12}e^{t}-\dfrac{1}{9}e^{-2t}$ – загальний розв’язок неоднорідного рівняння.

Знаходимо $x'=-4C_1e^{-4t}-7C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{12}e^{t}+\dfrac{2}{9}e^{-2t}$.

Значення x і x' підставляємо в співвідношення $y=\dfrac{x'+5x-e^{t}}{2}$:

$$y=-2C_1e^{-4t}-\frac{7}{2}C_2e^{-7t}+\frac{7}{24}e^{t}+\frac{1}{9}e^{-2t}+\frac{5}{2}C_1e^{-4t}+\frac{5}{2}C_2e^{-7t}+$$
$$+\frac{35}{24}e^{t}-\frac{5}{18}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{t}=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{15}{12}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t};$$
$$y=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{15}{12}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Відповідь запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-7t} \\ -e^{-7t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{7}{12}e^{t}-\frac{1}{9}e^{-2t} \\ \frac{5}{12}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

б) Для знаходження розв’язку застосуємо метод Ейлера.

Спочатку розв’яжемо однорідну систему: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y. \end{cases}$

Складаємо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,\ (2-\lambda)(3-\lambda)-2=0;\ \lambda^2-5\lambda+4=0;\ \lambda_1=4,\ \lambda_2=1.$$

Коли $\lambda_1=4$, частинний розв’язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1e^{4t} \\ \alpha_2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Вихідна система відносно α_1 і α_2 має вигляд:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ 4\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 .$$

Якщо $\alpha_2 = C_1$, то $\alpha_1 = 2C_1$, тоді $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.

Аналогічно отримаємо частинний розв'язок, коли $\lambda_2 = 1$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} .$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{5t} \\ be^{5t} \end{pmatrix}.$$

Підставимо цей розв'язок у перше рівняння заданої системи:

$$5ae^{5t} = 3ae^{5t} + 2be^{5t} + 4e^{5t};\ 2a - 2b = 4 .$$

Підставимо цей розв'язок у друге рівняння заданої системи:

$$5be^{5t} = ae^{5t} + 2be^{5t};\ 3b = a .$$

З рівнянь $2a - 2b = 4$ і $3b = a$ знаходимо $b = 1;\ a = 3.$ Тому

$$\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

в) Для знаходження розв'язку розглянемо метод Ейлера. Спочатку розв'яжемо однорідну систему. Складаємо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (5-\lambda)(1-\lambda) + 3 = 0;\ \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0;\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2 .$$

Коли $\lambda_1 = 4$, частинний розв'язок шукаємо вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{4t} \\ \alpha_2 e^{4t} \end{pmatrix},\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0;\ \alpha_1 = 3\alpha_2 .$$

Якщо $\alpha_2 = C_1$ то $\alpha_1 = 3C_1$, тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.

Аналогічно отримаємо частинний розв'язок, коли $\lambda_2 = 2$,

Отже, загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t} \\ b_1 e^{3t} + b_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3a_1 e^{3t} - a_2 e^{-t} = 5a_1 e^{3t} + 5a_2 e^{-t} - 3b_1 e^{3t} - 3b_2 e^{-t} + 2e^{3t}, \\ 3b_1 e^{3t} - b_2 e^{-t} = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t} + b_1 e^{3t} + b_2 e^{-t} + e^{t}. \end{cases}$$

Звідси маємо:

$$\begin{cases} 3a_1 = 5a_1 - 3b_1 + 2, \\ -a_2 = 5a_2 - 3b_2, \\ 3b_1 = a_1 + b_1, \\ -b_2 = a_2 + b_2 + 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2b_1, \\ a_2 = -2b_2 - 1, \\ 2a_1 = 3b_1 - 2, \\ 2a_2 = b_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4, \\ a_2 = -\dfrac{1}{5}, \\ b_1 = -2, \\ b_2 = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Тому: $\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{3t} - \dfrac{1}{5} e^{-t} \\ -2e^{3t} - \dfrac{2}{5} e^{-t} \end{pmatrix}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4e^{3t} - \dfrac{1}{5} e^{-t} \\ -2e^{3t} - \dfrac{2}{5} e^{-t} \end{pmatrix}.$$

г) Спочатку розв'яжемо однорідну систему. Складаємо характеристичне рівняння системи та знайдемо його корені:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, $-\lambda(2-\lambda) + 2 = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Частинний розв'язок однорідної системи шукаємо вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ \alpha_2 e^{(1+i)t} \end{pmatrix}.$$

Маємо: $\alpha_1(1+i) = 2\alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_2 = \alpha_1(-1+i)$.

Якщо $\alpha_1 = C_1$ то $\alpha_2 = C_1(-1+i)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{(1+i)t} \\ C_1(-1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t(\cos t + i\sin t) \\ (-1+i)e^t(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ -e^t(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^t + a_2 t + a_3 \\ b_1 e^t + b_2 t + b_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_1 e^t + a_2 = 2a_1 e^t + 2a_2 t + 2a_3 + b_1 e^t + b_2 t + b_3 + e^t, \\ b_1 e^t + b_2 = -2a_1 e^t - 2a_2 t - 2a_3 + 2t. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи маємо: $\begin{cases} a_1 = 2a_1 + b_1 + 1, \\ 0 = 2a_2 + b_2, \\ a_2 = 2a_3 + b_3; \end{cases}$

з другого рівняння цієї системи маємо: $\begin{cases} b_1 = -2a_1, \\ b_2 = -2a_3, \\ 0 = -2a_2 + 2. \end{cases}$

Знаходимо невизначені коефіцієнти:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ b_1 = -2;\ b_2 = -2;\ b_3 = -1.$$

Тому $\begin{pmatrix} x_{част.} \\ y_{част.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + t + 1 \\ -2e^t - 2t - 1 \end{pmatrix}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ -e^t(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t + t + 1 \\ -2e^t - 2t - 1 \end{pmatrix}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається нормальною системою диференціальних рівнянь?
2. Яка система диференціальних рівнянь називається однорідною, неоднорідною?
3. У чому полягає метод виключення змінних?
4. Сформулювати задачу Коші для системи рівнянь.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки системи однорідних диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки системи неоднорідних диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{2t}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \cos 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища* математика: Збірник задач: навч. посібник. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. *Вища* математика: навч. посібник / І. О. Ластівка, О. І. Безверхий, І. П. Кудзіновська. – К. : НАУ, 2018. – 452 с.

3. *Денисюк В. П.* Вища математика: підручник: у 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 4-те вид., стереот. – К. : НАУ- друк, 2009. – 276 с.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.

5. *Математика* для економістів : навч. посібник У 3 ч. Ч. 2 / І. О. Ластівка, Н.І. Затула, Є.Ю. Корнілович [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 312 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти
ОС «Бакалавр»
технічних та економічних
спеціальностей

Укладачі:
ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ДАВИДОВ Олександр Сергійович
ШЕВЧЕНКО Ірина Вікторівна
ЛЕВКОВСЬКА Тетяна Андріївна