АНАЛОГИ ПРОСТИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

Мельник А.І.
Національний авіаційній університет, Київ
Науковий керівник – Олійник О.П., ст.викладач

Ключові слова: фізичні явища, тригонометричний сплайн, інтерполяція

Вчені та інженери часто досліджують такі фізичні явища як світло та звук. Їх часто описують періодичними функціями вигляду $g(x)$: $g(x+T)=g(x)$ при довільних значеннях змінної x, де $T-$ період функції, оскільки вони володіють періодичністю. Найчастіше розглядають періодичні функції з періодом 2π, оскільки для періодичної функції $g(x)$ з періодом T функція вигляду $f(x)=g(\frac{Tx}{2\pi})$ матиме уже період 2π: $f(x+2\pi)=g(\frac{Tx}{2\pi}+T)=g(\frac{Tx}{2\pi})=f(x)$ [1, c. 327]. Найпростішими прикладами функцій з періодом 2π являються $\sin(ix)$ та $\cos(ix)$, де $i\in Z$. Тому для періодичної і кусково-неперервної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ актуальним є ряд Фурьє $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cdot\cos(ix)+b_i\cdot\sin(ix))$, де коефіцієнти a_i та b_i обчислюють за формулами Ойлера: $a_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(ix)dx$ та $b_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(ix)dx$ при $i=0,1,2,...,$ $a_0=a_i$ при $i=0.$

Клас тригонометричних многочленів порядку n має вигляд $T_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot\cos(kt)+b_k\cdot\sin(kt))$, де a_k, b_k - довільні дійсні числа. Прийнявши для визначення типу інтерполяційної сітки на відрізку $[0;2\pi]$ індикатор I, маємо: I набуває значення 0, 1. При цьому кожному многочлену $T_n(t)$ ставлять у відповідність Р-тригонометричні функції 1-го і 2-го роду [2, с. 70]. Розглянемо поліноміальний аналог простого тригонометричного сплайна $s_{1.1}t_r(T_n,\Delta_N^1,t)$ [2, с. 82]. Нехай на відрізку $[0;2\pi]$ задано сітку $\Delta_N^1=\left\{t_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{N}$, де $t_j^{(1)}=\frac{\pi}{N}(2j-1)$. Одночасно з сіткою Δ_N^1 розглянемо і сітку $\Delta_N^{\circ}=\left\{t_j^{(0)}\right\}_{j=1}^{N}$, де $t_j^{(0)} = \frac{2\pi}{N}(j-1)$. І нехай у вузлах сітки Δ_N^1 задані значення функції $f(x_j) = f_j$. Будують поліноміальний аналог $s_{p_1}(f, \Delta_N^1, t)$ простого тригонометричного сплайна $s_{1.1}t_r(T_n, \Delta_N^1, t),$ задавши на відрізку $\left[t_1^{(0)}, t_2^{(0)}\right]$ пряму $y = kt + b$ з кутовим коефіцієнтом $k,$ де $k < \infty,$ яка інтерполює функцію $f(t)$ в першому вузлі сітки Δ_N^1. Рівняння такої прямої має вигляд $y_1(t) = f_1 + k(t - t_1^{(0)})$ [2, с. 82].

Обчисливши значення функції у другому вузлі сітки Δ_N°, одержують $Y_1(t_2^{(0)}) = f_1 + k(t_2^{(0)} - t_1^{(0)}) = f_1 + k\left(\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi}{N}\right) = f_1 + k \cdot \frac{\pi}{N}$. На відрізку $\left[t_2^{(0)}, t_3^{(0)}\right]$ будують пряму $y_2(t)$, яка набуває в точці $t_2^{(0)}$ значення $y_2(t_2^{(0)}) = f_1 + k \cdot \frac{\pi}{N}$ і інтерполює функцію $f(t)$ у другому вузлі сітки Δ_N^1.

Повторюючи даний процес N раз, будують ламану $L(k,t)$, яка містить переломи у вузлах сітки Δ_N°, а у вузлах сітки Δ_N^1 інтерполює функцію $f(t)$. Побудована таким чином ламана залежатиме від значення параметра $k,$ який можна визначити виходячи із умов мінімізації будь-якого функціонала. Наприклад, в ролі такого функціонала можна застосовувати функціонали вигляду: $\Phi_p\left[f, L(k,t)\right] = \left\{\int_0^{2\pi} \left|f(t) - L(k,t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$ [2, с. 83]. Знаходячи значення $k = k_0(p)$ при якому цей функціонал досягає мінімуму, будують ламану $L[k_0(p), t],$ яка інтерполює функцію $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N°.

Зауважимо, що ламана $L[k_0(p), t]$ співпадає з простим тригонометричним сплайном $s_{1.1}t_r(T_n, \Delta_N^1, t)$ у випадку, коли мінімізується функціонал $F_2[f, L(k,t)],$ який характеризує середньоквадратичне відхилення ламаної $L[k_0(p), t]$ від інтерполяційної функції $f(t)$.

Список використаних джерел:

1. Численные методы. Использование MATLAB, 3-е издание. : Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с. : ил. – Парал. тит. англ.

2. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали: Монографія. – ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.