

## *Application of Hotelling control charts for the quality control of a multiparameter technological process*

# Zastosowanie kart kontrolnych Hotellinga w kontroli jakości wieloparametrowego procesu technologicznego

DOI: 10.15199/62.2018.4.13

*The advantages of the Hotelling criterion over the Shewhart criterion in controlling the stability of a multi-parameter technol. process both in its particular stages and in general were evidenced on numerical examples.*

Rozpatrzono problem kontroli stabilności charakterystyk wieloparametrowego procesu technologicznego, w którym występuje korelacja pomiędzy jego parametrami. Używa się do tego celu wieloparametrowych kart kontrolnych Hotellinga. Przedstawione przykłady liczbowe wskazują na przewagę tych kart nad zwykle stosowanymi kartami Shewharta, które mogą nie ujawnić dysfunkcji procesu przy skorelowanych parametrach, co spowoduje błędną ocenę jego jakości. Przedstawiono możliwość zastosowania kart Hotellinga do oceny stabilności, zarówno kolejnych etapów badanego procesu, jak i jego całości. Przy monitorowaniu parametrów charakteryzujących jakość procesu możliwe jest wykrycie tych z nich, lub ich kombinacji, które powodują przekroczenie poziomów dopuszczalnych w statystycznej ocenie jakości kontrolowanego procesu, czyli jego niestabilność.

Statystyczna kontrola procesu technologicznego stanowi jedno z głównych zastosowań statystyki matematycznej w przemyśle i w wielu innych dziedzinach gospodarki. Na podstawie monitorowania wybranych parametrów, stanowiących statystyczne wskaźniki przebiegu procesu technologicznego, wykrywa się, czy sterowanie tym procesem zapewnia, że wytwarzane produkty spełniają wymagania norm, czy też zmiany niektórych z tych wskaźników dają podstawę przypuszczać o powstawaniu niedopuszczalnych zakłóceń o charakterze deterministycznym. Może to doprowadzić do znacznych nieprawidłowości w procesie technologicznym i w konsekwencji do spadku jakości lub wadliwości wytwarzanych produktów<sup>1, 2)</sup>.

Głównym narzędziem stosowanym w praktyce przemysłowej do wykrywania konieczności interwencji w przebieg procesu jest karta kontrolna parametru zaproponowana przez Shewharta. Sygnałem o nieprawidłowości jest wyjście monitorowanego parametru procesu poza dopuszczalny dla niego przedział wartości. Pomysł ten znalazł szerokie uznanie ze względu na jego prostotę i dosyć dużą uniwersalność. Stanowił on podstawę utworzonej normy międzynarodowej<sup>3)</sup>, która zawiera też różne modyfikacje tego sposobu. Propozycje udoskonalenia kryteriów opartych na kartach kontrolnych Shewarda autorzy przedstawili już poprzednio<sup>4, 5)</sup>.

W praktyce stosuje się obecnie trzy główne metody prowadzenia statystycznej kontroli procesów oraz ich różne modyfikacje<sup>6)</sup>. Pierwsza z nich, oparta na kryteriach Neumanna i Pearsona, stosuje kartę kontrolną Shewharta. Jest to historycznie najstarsza metoda



Prof. dr nauk tech. Eugenij T. VOLODARSKY pracuje w Katedrze Automatyki i Badań Eksperymentalnych Narodowego Technicznego Uniwersytetu Ukrainy – Politechnika Kijowska „KPI”. Jest Przewodniczącym Podkomisji „Metrologia” w Państwowej Agencji Akredytacyjnej Ukrainy, Senior member IEEE oraz Prezesem Stowarzyszenia Akademia Metrologii Ukrainy. Specjalność – systemy oprogramowania pomiarowego do monitorowania i testowania.



Doc. (em.) dr inż. Zygmunt L. WARSZA w roku 1959 ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej, a w 1967 r. uzyskał stopień doktora na tej samej uczelni. Był docentem od 1970 r. Obecnie jest głównym specjalistą w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Jest także Członkiem rzeczywistym Stowarzyszenia Akademia Metrologii Ukrainy. Specjalność – elektrotechnika, metrologia i diagnostyka techniczna.

\* Autor do korespondencji:

Zespół Badań Podstawowych, Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa, kom.: +48 692-033-661, e-mail: zlw1936@gmail.com

diagnozowania procesu technologicznego. Druga metoda polega na wielokrotnym stosowaniu analizy sekwencyjnej Walda i w praktyce wdraża się ją w postaci kart kontrolnych CUSUM<sup>7)</sup>. Wreszcie w trzeciej metodzie stosuje się tzw. wykładanie wykładnicze, czyli ważoną wykładniczo średnią krocząca (EWMA)<sup>8)</sup>. Te trzy metody i odpowiadające im algorytmy można z powodzeniem stosować w kontroli stabilności tych procesów technologicznych, w tym chemicznych, które można scharakteryzować pojedynczym wskaźnikiem jakości produktów. Przy wytwarzaniu bardziej skomplikowanych produktów, ich jakość zwykle trzeba już charakteryzować kilkoma wskaźnikami, które ponadto mogą być ze sobą skorelowane. W takich przypadkach niezależne monitorowanie poszczególnych wskaźników procesu technologicznego może prowadzić do błędnych decyzji opartych tylko na rozbieżności badanych parametrów od wartości unormowanych jako dopuszczalne dla tych wskaźników. Możliwe staje się zarówno niewykrycie stanu degradacji procesu, jak i nieuzasadnione jego zatrzymanie.

Dlatego też opracowano sposoby unikania tych niedoskonałości. Użykuje się to, stosując do oceny stabilności procesu metody kontrolne o kilkuparametrowych kryteriach. Metody te opierają się na zastosowaniu wieloparametrowych kart kontrolnych<sup>5, 9-11)</sup>, uwzględniających też korelację pomiędzy wskaźnikami jakości procesu. Wszelkie możliwości zapewniania karty kontrolne Hotellinga. Ich stosowanie nie ma wad występujących przy stosowaniu jednoparametrowych kart kontrolnych Shewharta. Karty Hotellinga nie były poprzednio stosowane szerzej w praktyce przemysłowej, gdyż wymagają przeprowadzania dosyć skomplikowanych obliczeń. Wraz z rozwojem komputerowej techniki obliczeniowej i po opracowaniu wyspecjalizowanego oprogramowania dla tych kart są one używane coraz częściej. Wybór ich granic kontrolnych zależy od dostępności *a priori* informacji o średnim odchyleniu kwadratowym parametrów badanego procesu.

Problemy związane ze stosowaniem kart kontrolnych są omówione też w polskiej literaturze<sup>12-16)</sup> i dotyczą ich także polskie normy<sup>17, 18)</sup>.

Omówiono podstawowe założenia teoretyczne i zasady tworzenia wykresów na kartach kontrolnych Hotellinga. Podano jak te wykresy konstruować w praktyce dla znanej *a priori* oraz nieznannej macierzy kowariancji. Na dwu przykładach liczbowych rozpatrzono wykrywanie zakłóceń w kilkuparametrowym procesie technologicznym we wspólnym ujęciu dla obu przypadków.

## Zasady tworzenia kart Shewharta i Hotellinga

W kontroli kilku parametrów procesu karty Shewharta można z powodzeniem stosować tylko wtedy, gdy przewiduje się, że parametry te nie są ze sobą skorelowane. Wówczas dla każdego wskaźnika zestawu kart Shewharta służących do kontroli wartości średnich ( $\bar{X}$ -karty), poziom istotności  $\alpha_i$  określa się na podstawie ogólnego poziomu istotności  $\alpha_0$  dla wektora wypadkowego  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_p)$ <sup>6)</sup>. Jeśli nie ma informacji o poszczególnych znaczeniach  $\alpha_i$  dla każdej składowej wektora, to przyjmuje się, że wszystkie są jednakowe i zdefiniowane jako  $\alpha = \alpha_0/n$ . W tym przypadku górne *UCL* (*upper controlled limit*) i dolne *LCL* (*lower controlled limit*) granice kontrolne *i*-tego parametru kontrolowanego procesu, przy założeniu rozkładu normalnego (Gaussa), określa się jako zależności (1) i (2)<sup>4)</sup>:

$$UCL_i = \mu_{0i} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_i \quad (1)$$

$$LCL_i = \mu_{0i} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_i \quad (2)$$

Zarówno wartości średnie  $\mu_{0i}$ , jak i odchylenia standardowe  $\sigma_i$  są określone bądź to przez wyniki wstępnych badań procesu, bądź też jako poziomy odniesienia podane w dokumentacji technicznej. W takich przypadkach obszary rozrzutu dopuszczalnych wartości składowych wektora  $\bar{X}$  będą odpowiadały hiperprostopadłościom o krawędziach odpowiednio  $2UCL_i$  oraz  $2LCL_i$ .

Do przetestowania hipotezy  $H_0(3)$ :

$$\mu = \mu_0 \quad (3)$$

w przypadku jednowymiarowym, w zależności od liczebności *n* próbki, przy znanej wariancji populacji generalnej stosuje się statystykę opisaną wzorem (4):

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (4)$$

Dla wielowymiarowej zmiennej losowej, jeśli lewą i prawą stronę wyrażenia (4) podniesie się do kwadratu, to otrzymuje się wyrażenie (5):

$$z^2 = n(\bar{x} - \mu_0)^2 \sigma^{-2} \quad (5)$$

W postaci macierzowej przedstawia je wzór (6):

$$T_H^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \quad (6)$$

Otrzymane wyrażenie jest ogólnym kryterium statystycznym Hotellinga (statystyka  $T_H^2$ ). Używa się go do oceny jakości procesów wieloparametrowych, w których może występować korelacja pomiędzy kontrolowanymi parametrami<sup>9)</sup>.

Wielowymiarowej zmiennej losowej odpowiada macierz kowariancji wg wzoru (7):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1}\sigma_p\sigma_1 & \rho_{p2}\sigma_p\sigma_2 & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

w której  $\rho_{ij}$  oznacza współczynnik korelacji pomiędzy wielkościami  $\bar{x}_i$  i  $\bar{x}_j$ , a  $i, j = 1, \dots, p$  to kolejne numery zbioru *p* zmiennych losowych opisujących kontrolowane parametry procesu.

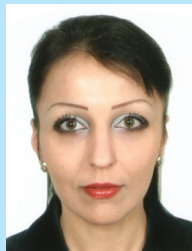
Przy znanej macierzy kowariancji  $\Sigma$ , statystyki Hotellinga mają rozkład  $\chi$ -kwadrat. W takim przypadku kontroli statystyki obiektu wieloparametrowego, położenie kontrolowanej granicy pojedynczego parametru dla danego poziomu istotności  $\alpha$  określa się bezpośrednio z tabeli kwantyli rozkładu  $\chi$ -kwadrat jako zależność (8):

$$T_{kp}^2 = \chi_{(1-\alpha), p}^2 \quad (8)$$

Kryterium  $T_H^2$  Hotellinga ma cenną w praktyce specyfikę, gdyż na podstawie znanej macierzy kowariancji parametrów kontrolnych procesu można obliczać jego wartości „punktowe”.



Prof. dr nauk tech. Larysa A. KOSHEVA pracuje w Katedrze Biocybernetyki i Medycyny Lotniczej Narodowego Uniwersytetu Lotnictwa w Kijowie (Ukraina). Jest członkiem Akademii Metrologii Ukrainy. Specjalność – metrologiczne wspomaganie pomiarów medycznych i biochemicznych, statystyczne przetwarzanie danych.



Doc. dr inż. Marina V. DOBROLYUBOVA w roku 2000 ukończyła studia na Narodowym Technicznym Uniwersytecie Ukrainy – Politechnice Kijowskiej „KPI”. W 2012 r. uzyskała stopień kandydata nauk technicznych, a w 2013 r. stopień docenta. Pracuje w Katedrze Automatyki Badań Eksperymentalnych KPI. Jest członkiem Akademii Metrologii Ukrainy. Specjalność – przetwarzanie danych statystycznych.

Przy kontroli procesu wieloparametrowego o znanej macierzy kowariancji różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą kart Shewharta i Hotellinga ilustruje przykład 1.

### Przykład 1

Jakość pewnego procesu technologicznego określa się przez monitorowanie wartości dwóch ( $p = 2$ ) jego parametrów  $x_1$  i  $x_2$ , zwanych wskaźnikami. W trakcie badań wstępnych jako referencyjne ustalano wartości średnie tych wskaźników  $\mu_1 = 2$  i  $\mu_2 = 12$ , ich odchylenia standardowe  $\sigma_1 = 0,35$  i  $\sigma_2 = 1$  oraz współczynnik korelacji między wskaźnikami  $\rho = 0,5$ . W celu oceny stabilności procesu technologicznego wykonano  $n = 10$  badań kontrolnych przeprowadzonych w regularnych odstępach czasu. Każda z podgrup kontrolnych zawierała  $n = 5$  wyników pojedynczych pomiarów. W tabeli 1 podano oceny średnich wartości wskaźników  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$  dla wszystkich 10 podgrup. Stabilność procesu technologicznego wyznaczono za pomocą kontrolnych  $\bar{X}$ -kart Shewharta, przyjmując ogólny poziom istotności statystycznej  $\alpha_0 = 0,005$ . Poziom ten dla każdego ze wskaźników, przy założeniu jego niezależności statystycznej, wynosił  $\alpha_0/2 = 0,0025$ . Górne i dolne wartości granic kontrolnych wyznaczono z zależności (9a) i (9b):

$$UCL = \mu + \sigma / \sqrt{n} \quad (9a)$$

$$LCL = \mu - \sigma / \sqrt{n} \quad (9b)$$

Table 1. The average values of  $\bar{x}_1$  and  $\bar{x}_2$  indicators

Tabela 1. Średnie wartości wskaźników  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{x}_1$	2,05	1,87	2,36	1,99	2,11	2,35	2,16	1,75	2,36	2,32
$\bar{x}_2$	12,28	11,37	10,82	11,13	12,23	13,29	12,06	12,75	13,25	13,11
$T_H^2$	0,39	2,01	24,43	4,89	0,53	9,16	1,23	10,72	8,9	7,02

Wyniosły one  $UCL_1 = 2,47$  i  $LCL_1 = 1,53$  oraz  $UCL_2 = 13,35$  i  $LCL_2 = 10,65$ . Dla wskaźników  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$  utworzono następnie  $\bar{X}$ -karty z wykresami podanymi na rys. 1. Z zakresu zmian obu wskaźników wynika, że kontrolowany proces jest sterowalny i stabilny.

Stabilność tego samego procesu technologicznego oceniono również za pomocą kart Hotellinga. Jako poziom kontrolny wybrano kwantyl rozkładu  $\chi$ -kwadrat dla poziomu istotności statystycznej  $\alpha = 0,005$  i liczby stopni swobody  $p = 2$  9), opisany zależnością (10):

$$UCL = T_{\alpha, p}^2 = \chi_{(1-\alpha), p}^2 = \chi_{(0,995), 2}^2 = 10,6 \quad (10)$$

Następnie dla każdej podgrupy obserwacji obliczono  $T_H^2$  wg wzoru (6). W przypadku kontroli dwu parametrów macierz kowariancji przybrała postać (11):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

a jej wyznacznik postać (12):

$$|\Sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2) \quad (12)$$

Macierz odwrotna przyjmuje wówczas postać (13):

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Podstawiając wartości liczbowe do wzoru (6), dla pierwszego punktu  $j = 1$  na karcie Hotellinga otrzymano macierz

$$T_{H1}^2 = 5 \begin{bmatrix} 2,05 & - \\ & 12,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,81 & -1,90 \\ -1,90 & 1,33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2,05 & 2 \\ 12,28 & 12 \end{bmatrix}$$

oraz wartość jej wyznacznika  $T_{H1}^2 = 0,39$ .

Podobnie obliczono wartości współrzędnych Hotellinga dla punktów  $j = 2, 10$ . Uzyskane wyniki przedstawiono w dolnym wierszu tabeli 1. Kartę kontrolną Hotellinga, która ilustruje te wyniki obliczeń w postaci wykresu, pokazano na rys. 2. Wynika z niego, że statystyczna kontrola procesu wykryła w podgrupach danych 3 i 8 naruszenie jego stabilności (przekroczenie dopuszczalnego zakresu zmian).

Następnie zbadano wyniki kontroli w płaszczyźnie wskaźników  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$ . Podstawą do analizy była gęstość wspólnego rozkładu normalnego w postaci hiperelipsy opisanej ogólnym wzorem (14):

$$f(\bar{X}) = (2\pi)^{-1} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp[-(\bar{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu) / 2] \quad (14)$$

Dla dwu wskaźników równanie rozrzutu danych jest elipsą, która wyznacza granice w karcie Hotellinga. Jej równanie przyjęło postać (15):

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left( \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\bar{x}_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{1}{n} \chi_{(1-\alpha), 2}^2 \quad (15)$$

Położenie punktów odpowiadających wartościom średnim dla podgrup danych w granicach tej elipsy świadczy o tym, że badany proces technologiczny jest statystycznie kontrolowalny, a rozrzut wartości jego kontrolowanych parametrów wynika z wpływu ich zmian losowych. Punkty odpowiadające podgrupom  $j = 3$  i  $j = 8$  (próbki z  $n = 5$  danymi obserwacji) znajdowały się poza elipsą testu Hotellinga (rys. 3), co wskazało na nieprawidłowość w przebiegu procesu technologicznego. Linia przerywana pokazuje prostokąt odpowiadający granicom testu Shewharta. Obie przykładowe średnie dla danych podgrup 8 i 3 wystąpiły jeszcze w granicach dopuszczalnych przez kontrolne karty Shewharta. Jak więc wynika z tego przykładu, karty Shewharta „nie wychwyciły” żadnego z obu przekroczeń jakości procesu wykrywalnych dopiero przez kartę Hotellinga.

### Wyznaczanie zmienności procesu wieloparametrowego na podstawie estymacji macierzy kowariancji dla próbki danych

W wielu praktycznych sytuacjach wariancja i kowariancja z reguły nie są znane i należy je szacować na podstawie próbek. W przypadku gdy macierz kowariancji jest nieznana, w celu otrzymania  $T_H^2$ -rozkładu stosuje się, podobnie jak dla (4), rozkład  $t$ -Studenta (16):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} \quad (16)$$

Dla przypadku wielowymiarowego używa się wektorowej formy reprezentacji statystyki. Wyznacza się nieobciążoną estymatę  $S$  macierzy  $\Sigma$ . Wówczas statystykę  $T_H^2$ -Hotellinga wyznacza się ze wzoru (17):

$$T_H^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \quad (17)$$

Jeśli hipoteza  $H_0: \mu = \mu_0$  jest prawdziwa, to wielkość (18)

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T_H^2 \quad (18)$$

ma niecentralny  $F$ -rozkład Fishera o  $p$  i  $(n-1)$  stopniach swobody. Uzyskaną dla wyrażenia (17) wartość wyznacznika  $T_H^2$  porównuje się z wartością krytyczną dla danego poziomu istotności statystycznej  $\alpha$  i liczby stopni swobody  $v_1 = p$  i  $v_2 = n-p$  ( $n-1 \geq p$ ).

Krytyczną wartość statystyki Hotellinga określa się z zależności (19):

$$T_{\alpha, p, (n-p)}^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha, p, (n-p)} \quad (19)$$

Nieobciążoną estymatę macierzy kowariancji szacuje się na podstawie wyrażenia (20):

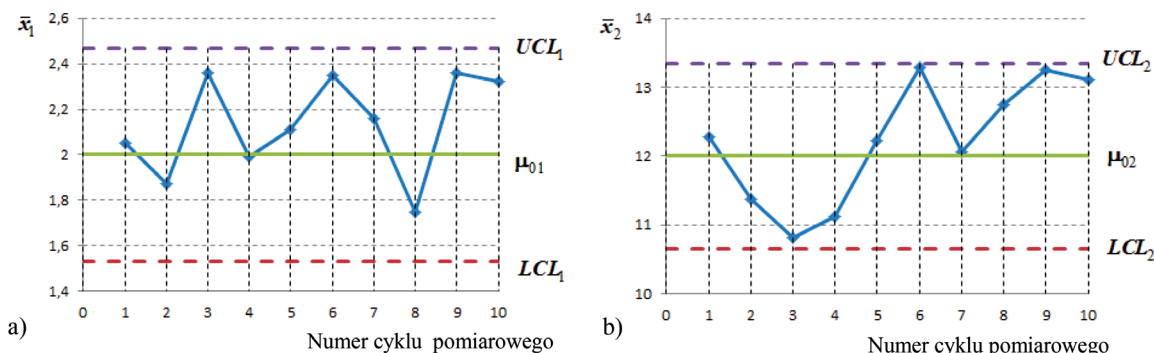


Fig. 1. Control Shewhart  $\bar{X}$ -cards, a) for the indicator  $\bar{x}_1$ ; b) for the indicator  $\bar{x}_2$

Rys. 1. Kontrolne  $\bar{X}$ -karty Shewharta, a) dla wskaźnika  $\bar{x}_1$ ; b) dla wskaźnika  $\bar{x}_2$

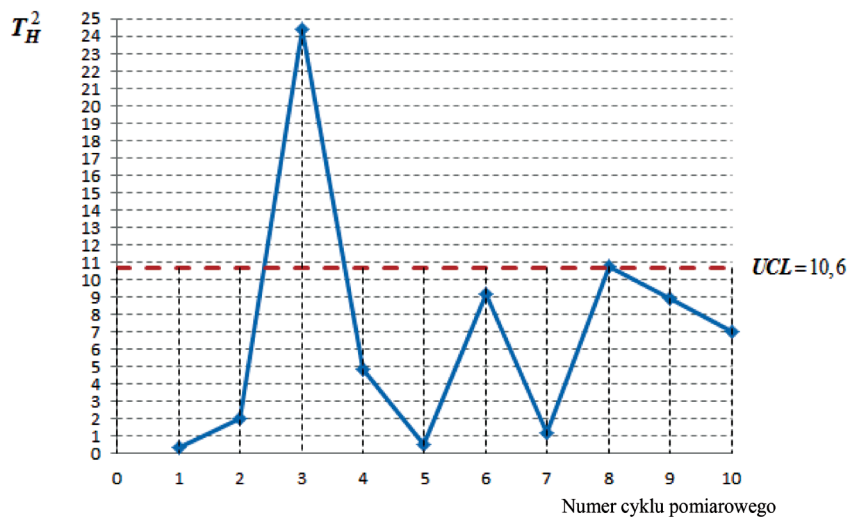


Fig. 2. Hotelling control card for two-parameter control of the technological process

Rys. 2. Karta kontrolna Hotellinga do dwuparametrowej kontroli procesu technologicznego

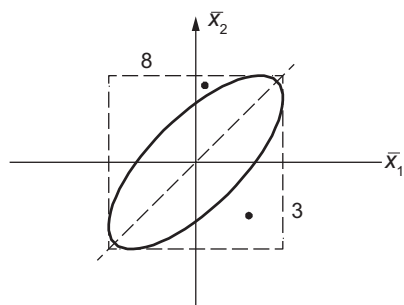


Fig. 3. The scattering limits of mean values  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  for samples  $j = \bar{1}, \bar{10}$  according to Hotelling – continues line, and Shewhard – dotted line

Rys. 3. Granice rozrzutu wartości średnich wskaźników  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  dla próbek  $j = \bar{1}, \bar{10}$  wg Hotellinga – linia ciągła i Shewharda – linia przerywana

$$S = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} x_{11} - \mu_{01} & x_{21} - \mu_{02} & \dots & x_{p1} - \mu_{0p} \\ x_{12} - \mu_{01} & x_{22} - \mu_{02} & \dots & x_{p2} - \mu_{0p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} - \mu_{01} & x_{2n} - \mu_{02} & \dots & x_{pn} - \mu_{0p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} - \mu_{01} & x_{12} - \mu_{01} & \dots & x_{1n} - \mu_{01} \\ x_{21} - \mu_{02} & x_{22} - \mu_{02} & \dots & x_{2n} - \mu_{02} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} - \mu_{0p} & x_{p2} - \mu_{0p} & \dots & x_{pn} - \mu_{0p} \end{bmatrix} \quad (20)$$

w którym  $n$  oznacza liczbę punktów obserwacji w wybranej podgrupie.

Wartość statystyki Hotellinga jako wyznacznik  $T_{Hj}^2 = |T_{Hj}^2|$ , obliczony z wyrażenia (17), porównuje się z wartością krytyczną  $T_{\alpha, p, (n-p)}^2$ . Jeśli jest większa niż wartość krytyczna, wówczas hipotezę  $H_0$  o stabilności procesu nie akceptuje się.

Aby przetestować hipotezę, czy przyczyną tej niestabilności jest  $j$ -ty wskaźnik procesu, stosuje się szczególne kryterium Hotellinga (21)<sup>8)</sup>:

$$T_{Hj}^2 = n [C_j^T (\bar{X}_j - \mu_{0j})^2] [C_j^T SC_j]^{-1} \quad (21)$$

w którym  $C_j$  oznacza wektor specjalny. Neutralizuje on wpływ wartości wszystkich wskaźników z wyjątkiem  $j$ -tego i ma postać kolumny zawierającej zera we wszystkich liniach z wyjątkiem  $j$ -tej, w której jest 1. Sprawdza się hipotezę  $T_{Hj}^2 > T_{kr}^2$ , w której wyznacznik:  $T_{Hj}^2 \equiv |T_{Hj}^2|$ .

Zastosowanie kart Hotellinga przy nieznanym odchyleniu standardowym ilustruje przykład 2. Dla znanych (zadanych) odchyłeń standardowych wskaźników jakości procesu, poprzez obliczenie statystyk Hotellinga  $T_{Hj}$ , wykryto dysfunkcję procesu w czasie rzeczywistym. W przypadku nieznanymi odchyłeń standardowych możliwość statystycznej sterowalności procesu szacuje się w ograniczonym przedziale czasu. Kryterium Hotellinga umożliwia ocenę stanu całego procesu bez wskazywania przyczyny jego odstępstwa od stanu dopuszczalnego. Karta Hotellinga nie pokazuje, z którym bezpośrednio wskaźnikiem powiązany jest nieprawidłowy przebieg procesu. Może on być również wynikiem połączonego oddziaływania kilku z nich.

### Przykład 2

Aby kontrolować proces technologiczny, zmierzono  $n$  pojedynczych wartości parametrów pobieranych w regularnych odstępach czasu. Otrzymane dane podano w tabeli 2. Wartości odchyłeń standardowych dla pierwszego i drugiego wskaźnika wyniosły  $\mu_{01} = 20$  i  $\mu_{02} = 1$ . Wykorzystując eksperymentalnie pozyskane dane, oszacowano macierz kowariancji (22):

$$S = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 14-15,3 & 12-15,3 & 16-15,3 & \dots & 19-15,3 & 9-15,3 \\ 19-16,9 & 15-16,9 & 17-16,9 & \dots & 18-16,9 & 20-16,9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14-15,3 & 19-16,9 \\ 12-15,3 & 15-16,9 \\ 16-15,3 & 17-16,9 \\ \vdots & \vdots \\ 19-15,3 & 18-16,9 \\ 9-15,3 & 20-16,9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 134,1 & -87,7 \\ -87,7 & 148,9 \end{bmatrix} \quad (22)$$

oraz ze wzoru (17) wyznaczono wartość  $S$  statystyki Hotellinga jako wyznacznik (23) tej macierzy:



Table 2. Experimental initial data of example 2

Tabela 2. Eksperymentalne dane początkowe dla przykładu 2

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{x}_j$
$x_{1t}$	14	12	16	14	15	18	22	20	19	9	15,3
$x_{2t}$	19	15	19	17	24	12	10	15	18	20	16,9

$$S = |S| = 150,98 \quad (23)$$

Na podstawie danych początkowych z tabeli 2 wyznaczono macierzową postać kryterium  $T_H^2$ -Hotellinga (24):

$$T_H^2 = 10 \begin{bmatrix} 15,3 - 20 & 16,9 - 12 \\ 15,3 - 20 & 16,9 - 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0987 & -0,0645 \\ -0,0645 & 0,1093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15,3 - 20 \\ 16,9 - 12 \end{bmatrix} \quad (24)$$

oraz obliczono wartość  $T_H^2 = 28,1$ . Wartość tę należy porównać z wartością krytyczną  $T_{\alpha, p, (n-p)}^2$ . Jeśli  $T_H^2$  jest większe niż wartość krytyczna  $T_{kr}^2$ , to hipotezy o stabilności procesu nie akceptuje się.

Wartość krytyczną w kryterium  $T_H^2$  określono dla  $\alpha = 0,05$  i liczby stopni swobody  $p = 2$ ,  $(n - p) = 8$ . Otrzymano wyrażenie (25):

$$T_{kr}^2 = \frac{2(10-1)}{10-2} 4,459 = 10,03 \quad (25)$$

oraz nierówność  $T_H^2 = 28,1 > T_{kr}^2 = 10,03$ . Oznacza ona, że badany proces technologiczny jest statystycznie niesterowalny.

Aby zidentyfikować przyczynę tej niesterowalności procesu, tj. cechę, która do tego doprowadziła, zastosowano szczególne kryterium Hotellinga. Założono kolejno  $j = 1$  i  $j = 2$ . Dla  $x_1$ ,  $C_1^r = |1 \ 0|$  i po podstawieniu do wzoru (21) otrzymano wartość

$$T_{H1}^2 = \frac{10 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 14,90 & -9,74 \\ -9,74 & 16,50 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4,7 \\ 4,9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 14,90 & -9,74 \\ -9,74 & 16,50 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}} = \frac{230,4}{14,9} = 15,48$$

Podobnie obliczono szczególną wartość współczynnika Hotellinga dla  $x_2$ :

$$T_{H2}^2 = \frac{10 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 14,90 & -9,74 \\ -9,74 & 16,50 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4,7 \\ 4,9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 14,90 & -9,74 \\ -9,74 & 16,50 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}} = \frac{240,1}{16,5} = 14,55$$

Ponieważ  $T_{H1}^2 > T_{kr}^2$  i  $T_{H2}^2 > T_{kr}^2$ , to z prawdopodobieństwem  $P = (1 - \alpha) = 0,95$  wg kryterium Hotellinga stwierdzono, że proces technologiczny jest niestabilny i wpływ na jego stabilność miały łącznie oba monitorowane wskaźniki.

Zmiany pojedynczego parametru nie zawsze są przyczyną niedopuszczalnego przebiegu procesu technologicznego. W przykładzie 1 nieprawidłowy przebieg procesu wystąpił w trzeciej i ósmej podgrupie danych (punkty 3 i 8). Obliczenia szczególnych kryteriów Hotellinga wykazały, że dla próbki 3:  $T_1^2 = 5,31$  i  $T_2^2 = 6,96$ , a dla próbki 8:  $T_1^2 = 2,56$  i  $T_2^2 = 2,81$ . W związku z tym każdy osobno z obu kontrolowanych parametrów nie był przyczyną naruszenia procesu technologicznego. Powodem był łączny wpływ ich obu.

## Podsumowanie

Karty Shewharta są szeroko stosowane do statystycznej kontroli jakości różnych procesów technologicznych. Jednak dają one poprawne wyniki tylko wówczas, gdy wystarcza jednoparametrowe monitorowanie procesu. Przy procesach wymagających kontroli

dwu lub więcej parametrów, ze względu na możliwość występowania korelacji pomiędzy wskaźnikami ich jakości, stosowanie tych kart w wielu przypadkach może dać wynik fałszywy, zarówno przy identyfikacji niestabilności statystycznej kontrolowanego procesu, jak i przy jej niewykryciu. Uzyskanie dla tego przypadku wiarygodnego wyniku wymaga zastosowania wieloparametrowych kryteriów. Do niedawna stosowanie takich kryteriów było ograniczone złożonością obliczeń. Jednak powszechność techniki komputerowej usunęła te ograniczenia.

Spośród metod wieloparametrowych zastosowanie kryterium Hotellinga pozwala określić przebieg procesu technologicznego, zarówno w całości, jak i dla poszczególnych jego etapów. Celem badania etapów tego procesu jest ujawnienie monitorowanych parametrów, lub ich kombinacji, istotnie wpływających na poziom statystycznego sterowania procesem technologicznym.

Otrzymano: 26-01-2018

## LITERATURA

- [1] D.M. Himmelblau, *Fault detection and diagnosis in chemical and petrochemical processes*, Elsevier, Amsterdam 1978.
- [2] J. Murdoch, *Control charts*, The Macmillan Press Ltd., 1979.
- [3] ISO 7870-1, -2, ..., -6:2014, *Shewhart control charts*, Part 1–6.
- [4] E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Kosheva, A. Idzkowski, *Mat. konf. SCIT Warszawa 2016, Advances in intelligent systems and computing* (red. M. Kaliczyńska), t. 543, Springer 2017, 740
- [5] E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Kosheva, *Przem. Chem.* 2017, **95**, nr 2, 336.
- [6] D.C. Montgomery, *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons, 2009.
- [7] ISO 7870-4:2011, *Control charts. Part 4. Cumulative control charts*.
- [8] C. Chatfield, *The analysis of time series. An introduction*, Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science, 2003.
- [9] J.S. Oakland, *Statistical process control*, Butterworth-Heinemann, 2007.
- [10] A.B. Yeh, D.K.J. Lin, H. Zhou, C.A. Venkataramaw, *J. Appl. Statistics* 2003, **30**, nr 5, 507.
- [11] *NIST/SEMATECH e-Handbook of statistical methods*, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>, 2012.
- [12] A. Hamrol, W. Mantura, *Zarządzanie jakością. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- [13] Praca zbiorowa *Zintegrowane zarządzanie jakością* (red. Jan Więcek), Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2007.
- [14] T. Greber, *Statystyczne sterowanie procesami. Doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA*, StatSoft Polska, Kraków 2000.
- [15] E. Gatnar, M. Walesiak, *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, 2004.
- [16] I.D. Czabak-Górska, [w:] *Innowacje w zarządzaniu i inżynierii produkcji*, t. 2 (red. R. Knosal), Oficyna Wydawnicza PTZP, Opole 2017, 281.
- [17] PN-ISO 8258:1996, *Karty kontrolne Shewharta*.
- [18] PN-ISO 7870:2006, *Karty kontrolne. Ogólne wytyczne i wprowadzenie*.