МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРБЕЗПЕКИ, КОМП'ЮТЕРНОЇ
ТА ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ
Завідувач випускової кафедри
________________ І. А. Жуков
«______» _____________2020 р.

ДИПЛОМНА РОБОТА
(ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)

ВИПУСКНИКА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ МАГІСТР
ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ 123 «КОМП'ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ»

Тема: «Оптимальна екстраполяція параметрів мережевого трафіку на фоні завад»

Виконавець: студент, КС-231(М), Захарчук Ольга Вікторівна
(студент, група, прізвище, ім'я, по батькові)

Керівник: к.т.н., доцент, Андреєв Володимир Ілліч
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по батькові)

Нормоконтролер: ________________ Малярчук В.О.
(підпис) (ПІБ)

Засвідчую, що у дипломній роботі немає запозичень праць інших авторів без відповідних посилань
Студент _________ Захарчук О.В.
(підпис) (ПІБ)

Київ 2020

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії

Кафедра комп'ютерних систем та мереж

Спеціальність 123 "Комп'ютерна інженерія"

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
________________ І. А. Жуков
«______» _____________2020 р.

ЗАВДАННЯ

на виконання дипломної роботи

Захарчук Ольги Вікторівни

1. Тема роботи: "Оптимальна екстраполяція параметрів мережевого трафіку на фоні завад"

затверджена наказом ректора від « 25» вересня 2020 року № 1793/ст.

2. Термін виконання роботи: з 05.10.2020 р. по 30.12.2020 р.
3. Вихідні дані до роботи: Відомі моделі і алгоритми моніторингу та екстраполяції трафіку в КМ.
4. Зміст пояснювальної записки: Вступ, аналіз відомих методів екстраполяції, огляд розроблених методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на тлі завад, практична частина перевірки дієздатності та ефективності розроблених методів екстраполяції статичного імітаційного моделювання, висновки по роботі.
5. Перелік обов'язкового графічного (ілюстративного) матеріалу: Матеріали представленні у вигляді презентації в *Power Point.*

6. Календарний план-графік:

№ з/п	Завдання	Термін виконання	Підпис керівника
1.	Ознайомитися з постановкою задачі, розробити календарний план виконання роботи	05.10-07.10	
2.	Виконати пошук літературних джерел	08.10-09.10	
3.	Розробити 1 розділ ПЗ	10.10-19.10	
4.	Розробити 2 розділ ПЗ	20.10-09.11	
5.	Розробити 3 розділ ПЗ	10.11-26.11	
6.	Оформити графічний матеріал для презентації	27.11-04.11	
7.	Роздрукувати ПЗ, отримати відгуку керівника, проходження нормоконтролю	07.12-08.12	
8.	Розробити текст доповіді, підготовити презентацію	09.12-10.12	
9.	Передзахист на кафедрі	11.12	
10.	Отримати рецензію, усунути зауваження, здати документацію секретарю ЕК	14.12-18.12	
11.	Захист	22.12	

7. Дата видачі завдання: « 05 » жовтня 2020 р.

Керівник дипломної роботи ______________ Андреєв В.І.
(підпис керівника) (ПІБ)

Завдання прийняв до виконання ____________ Захарчук О.В.
(підпис випускника) (ПІБ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до дипломної роботи магістра «Оптимальна екстраполяція параметрів мережевого трафіку на фоні завад»: 94 сторінок, 09 рисунків, 08 таблиць, 36 джерел літератури.

ТРАФІК КОМП'ЮТЕРНОЇ МЕРЕЖІ, ОПТИМАЛЬНА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ, НЕСТАЦІОНАРНИЙ СИГНАЛ, ВИПАДКОВІ ПЕРЕШКОДИ, МІНІМАЛЬНА ДИСПЕРСІЯ ПОМИЛКИ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ.

Мета дипломної роботи - розроблення методів оцінювання характеристик нестаціонарного трафіку в локальних комп'ютерних мережах.

Завдання дипломної роботи – аналітичний огляд відомих моделей і алгоритмів моніторингу та екстраполяції трафіку в КМ; розроблення математичної моделі випадкового нестаціонарного процесу і необхідної апріорної інформації для забезпечення процесу оптимальної екстраполяції та ефективності, що дасть змогу підвищити надійність, контроль, діагностику комп'ютерних систем та мереж, їх пристроїв і компонентів; розроблення методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на фоні завад; розроблення рекурсивного способу й алгоритму оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на фоні завад; оцінювання характеристик нестаціонарного трафіку локальних КМ для підвищення надійності та ефективності їх роботи; розроблення організаційно-технічних заходів для практичної реалізації отриманих результатів.

Об'єкт дослідження - процес оцінювання характеристик трафіку локальних КМ.

Предмет дослідження - методи, моделі оцінювання характеристик нестаціонарного трафіку в локальних КМ.

Методи дослідження - вирішення поставлених у дипломній роботі завдань базується на використанні методів теорії імовірності та математичної статистики, класичного методу складання систем рівнянь оптимізації та наборів необхідних і достатніх умов існування екстремумів, методу найменших квадратів, методу статистичного імітаційного моделювання.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Розроблено методи й алгоритми оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на фоні завад, які дозволяють за рахунок використання запропонованої автором математичної моделі за двома попередніми спостереженнями та набором апріорної інформації прогнозувати оптимальне третє значення процесу з мінімальною дисперсією похибки екстраполяції.

2. Подальший розвиток, теоретичне обґрунтування та розробка рекурсивного методу екстраполяції характеристик випадкових нестаціонарних процесів, який дозволяє прогнозувати оптимальні четверте і п’яте значення процесу з мінімальними похибками.

3. Розроблено метод довизначення апріорної імовірнісної інформації про фрагмент трафіку реальної локальної КМ без знання його математичної моделі й оцінювання характеристик на базі методу двопараметричної екстраполяції в оперативному режимі. Відносна похибка екстраполяції лежить у межах, придатних для практики.

Практичне значення отриманих результатів полягає в обґрунтуванні набору вхідних та апріорних даних для розрахунку кількісних і якісних показників методів та алгоритмів оптимальної екстраполяції. Можливості використовувати двопараметричний метод оптимальної екстраполяції для реальної локальної КМ в оперативному режимі. Запропоновано алгоритм, який на базі наведеної методики екстраполяції і за наявності спеціального обладнання та програмного забезпечення сервера дозволить перерозподіляти трафік між користувачами або інтерфейсами при наближенні параметрів трафіку до максимально дозволених.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

ВНС	-	Випадкові нестаціонарні сигнали
КМ	-	Комп’ютерна мережа
СВП	-	Стаціонарні випадкові процеси
НВП	-	Нестаціонарні випадкові сигнали
СІМ	-	Статичне імітаційне моделювання
TCP/IP	-	Набір протоколів мережі Інтернет
OSI	-	Абстрактна мережева модель для комунікацій і розробки мережевих протоколів
$L(\vec{\alpha}, \lambda)$	-	Функція Лагранжа
N	-	Кількість попередніх спостережень
$X(t)$	-	Випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозується
$\xi(t)$	-	Випадкова завада, що спотворює дані спостереження
$Y(t)$	-	Випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається
$\Delta t = t_n - t_1$	-	Інтервал спостереження
$\tau = t_{n+1} - t_n$	-	Інтервал екстраполяції (прогнозу)
$M[Y(t)] = m(t)$	-	Математичне сподівання
$D[Y(t)]$	-	Дисперсія сигналу
α_{opt}	-	Оптимальний параметр екстраполяції
ε	-	Похибка екстраполяції
$D_\varepsilon(\alpha)$	-	Дисперсія похибки екстраполяції
$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}$	-	Мінімальна дисперсія похибки екстраполяції ε при α_{opt}
$D[Y_3^*]$	-	Дисперсія оптимального екстрапольованого значення $Y(t_3)$

ВСТУП

Актуальність теми. Розвиток сучасних інформаційних технологій комп’ютерних систем та мереж, сучасних та наступного покоління, постійно супроводжується зростанням вимог до їх якості, надійності та ефективності функціонування [1-15]. Виконання цих вимог у значній мірі залежить від методів екстраполяції трафіку комп’ютерних мереж (КМ).

У теперішній час існує багато методів екстраполяції: методи прогнозування, що базуються на згладжувані та ковзаючому середньому, регресійні методи екстраполяції, методи Бокса - Дженкінса (*ARIMA*, *ARMA*); методи екстраполяції, що базуються на використанні нейронних мереж.

Аналіз наукових джерел показав, що класичні методи екстраполяції такі, як статистичні та регресійні методи, мають ряд суттєвих недоліків: низьку ефективність, складність та негнучкість, малопридатність для екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів. Відсутність адаптивної моделі екстраполяції без участі експерта, придатність для екстраполяції тільки для певного типу задач. Методи екстраполяції Бокса-Дженкінса також мають суттєвий недолік: для їх ефективної роботи необхідно мати досить велику передісторію спостережень за процесом, що обмежує можливості методу. Методи екстраполяції, що базуються на використанні нейронних мереж, хоча й позбавлені багатьох недоліків, що властиві класичним методам екстраполяції, також мають ряд недоліків: логічні правила функціонування нейтронної мережі недоступні для експерта, алгоритм логічних правил генерують великі об’єми цих правил, що суттєво ускладнює їх подальший аналіз.

До того ж, всі ці методи можуть давати достовірний результат екстраполяції нестаціонарного процесу лише на одне значення в майбутньому при наявності значної передісторії спостережень за процесом. Одержання декількох наступних за екстрапольованим значень процесу в майбутньому з високою долею ймовірності викликає складності.

В той же час, як показав аналіз існуючих наукових праць, залишаються недостатньо висвітленими та реалізованими наступні актуальні проблеми комп’ютерних мереж: оптимальна екстраполяція трафіку комп'ютерних мереж по мінімальній кількості попередньої інформації на тлі можливих завад; самодіагностування КМ в процесі функціонування в штатному режимі; самовідновлення до рівня вимог якості функціонування КМ без втручання обслуговуючого персоналу; побудова інтелектуальних та експертних систем забезпечення якості КМ та інші.

На сучасному рівні розвитку комп'ютерні мережі розглядаються як мережеві системи масового обслуговування телекомунікаційних процедур [16, 17, 18, 19, 20]. А всю сукупність процесів обслуговування телекомунікаційних процедур в них об'єднується одним загальним поняттям «обслуговування трафіку даних».

Щоб позбавитись від недоліків методів екстраполяції, які наведені вище, необхідно розробляти нові методи екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, які були б позбавлені недоліків існуючих методів екстраполяції та були б універсальними і не потребували великої передісторії спостережень за процесом.

З вищевикладеного видно, що вибрана тема дипломної роботи є актуальною.

Мета і завдання дослідження. Метою дипломної роботи є розробка методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції нестаціонарного трафіку комп'ютерних мереж на тлі випадкових завад. Для досягнення цієї мети ставляться і вирішуються наступні задачі:

1. Аналіз відомих методів екстраполяції випадкових стаціонарних і нестаціонарних процесів.

2. Розробка методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на тлі завад.

3. Розробка рекурсивного методу і алгоритму оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на тлі завад.

4. Розробка методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів на тлі завад на базі функцій Лагранжа.

5. Експериментальне дослідження методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів.

Об'єктом дослідження є комп'ютерні мережі та нестаціонарні випадкові процеси , які відбуваються з трафіком.

Предметом дослідження вибрані методи та алгоритми екстраполяції випадкових процесів в трафіках КМ.

Методи дослідження: автором дипломної роботи обрані методи, які найбільш відповідають змісту, формі та характеру поставлених задач. Серед головних з них необхідно звернути увагу: методи теорії ймовірності та математичної статистики; класичний метод складання систем рівнянь оптимізації та набори необхідних та достатніх умов існування екстремумів; метод максимальної правдоподібності; метод статистичного імітаційного моделювання на персональних комп’ютерах.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що**:**

1. Розроблені методи і алгоритми оптимальної екстраполяції випадкових процесів в нестаціонарних трафіках КМ на фоні завад, які дозволяють по двом попереднім спостереженням та набору апріорної інформації прогнозувати оптимальне третє значення трафіку з мінімальною похибкою.

2. Розроблений рекурсивний метод і алгоритм оптимальної екстраполяції випадкових процесів в нестаціонарних трафіках КМ на фоні випадкових завад, який дозволяє прогнозувати оптимальні четверте і п’яте значення трафіку з мінімальними похибками.

3. Розроблені методи і алгоритми оптимальної екстраполяції випадкових процесів в нестаціонарному трафіку КМ на базі функцій Лагранжа, який дозволяє ефективно досліджувати вплив випадкових завад на основні показники процесу екстраполяції.

4. На базі запропонованих методів оптимальної екстраполяції розроблені програми в системах *Excel* і *MathCAD,* за допомогою яких показана працездатність та ефективність цих методів.

5. Запропонований набір апріорної інформації трафіку КМ, необхідний для процесу оптимальної екстраполяції.

Практичне значення отриманих результатів:

1. В системі *MathCAD* розроблені прикладні програми для статистичного імітаційного моделювання нестаціонарних процесів трафіку КМ для однопараметричного та двопараметричного методів екстраполяції ПСІМ-1, ПСІМ-2. Ці прикладні

програми не тільки обчислюють основні показники процесу оптимальної екстраполяції, але і з допомогою графіків наглядно ілюструють результати екстраполяції та процеси що відбуваються.

2. В системі *MathCAD* розроблені прикладні програми для статистичного імітаційного моделювання нестаціонарних процесів трафіку КМ для рекурсивного методу екстраполяції ПСІМ-3, ПСІМ-4. Ці прикладні програми дозволяють на основі апріорної інформації та результату першої екстраполяції отримати прогнозні значення четвертої та п’ятої точок трафіку і, крім того , побудувати графіки трафіку, трафіку з завадою, графіки екстрапольованих параметрів оптимізації α_i.

3. В системі *MathCAD* розроблені прикладні програми для статистичного імітаційного моделювання нестаціонарних процесів трафіку КМ для двопараметричної та однопараметричної екстраполяції на базі функцій Лагранжа ПСІМ-2Л, ПСІМ-3Л.

4. Запропонований набір вхідних та апріорних даних для розрахунку якісних показників методів оптимальної екстраполяції.

5. Проведені експериментальні дослідження впливу варіації апріорної інформації нестаціонарного трафіку на якісні показники методів оптимальної екстраполяції.

РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ ВІДОМИХ МЕТОДІВ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

1.1. Постановка задачі

Метою першого розділу є аналітичний огляд і аналіз відомих методів екстраполяції визначення напряму і формулювання основних задач досліджень.

Основним напрямком досліджень є розробка нових методів екстраполяції трафіку комп'ютерних мереж по мінімальній кількості вимірювань, з урахуванням впливу випадкової завади, з малою похибкою процесу екстраполяції.

Основними задачами досліджень є:

1. Розробка методів оптимальної екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, які б дозволяли по двом вимірюванням та апріорній інформації екстраполювати третє значення процесу з малою похибкою.

2. Розробка рекурсивного методу оптимальної екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, який би дозволяв по двом вимірюванням та апріорній інформації, а також результатам першої екстраполяції екстраполювати четверте та п'яте значення випадкового процесу.

3. Розробка методів оптимальної екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад на базі функцій Лагранжа.

4. Експериментальне дослідження впливу варіації параметрів апріорної інформації трафіку комп'ютерної мережі на кількісні та якісні параметри процесу екстраполяції.

В підрозділі 1.2 буде проведений аналіз типів процесів.

В підрозділі 1.3 розглядаються часові ряди, як результат спостереження за процесом.

В підрозділі 1.4 будуть показані властивості мереженого трафіку, та показано, що в трафіку комп'ютерних мереж (КМ) відбуваються випадкові нестаціонарні процеси.

В підрозділі 1.5 виконано огляд та аналіз існуючих методів екстраполяції різних процесів.

Далі робляться висновки по аналізу існуючих методів екстраполяції та вказуються їх недоліки, вказуються основний напрям та основні задачі досліджень.

1.2. Аналіз типів процесів

В матеріальному навколишньому світі безперервно відбуваються різноманітні фізичні процеси. Усі ці процеси $X(t)$, що спостерігаються в різноманітних технічних галузях та характеризують фізичні процеси, поділяються на детерміновані та випадкові [21].

Детермінований процес визначається однією єдиною реалізацією, що описана заданою функцією часу. На практиці через вплив на процес різноманітних внутрішніх та зовнішніх факторів, процеси мають квазідетермінований характер, реалізації якого можуть бути описані функціями часу наступного виду

$$\psi(t, a_1,\ldots, a_n),$$

де $a_1,\ldots, a_n$ - незалежні від часу ймовірносні параметри.

Випадковий процес, на відміну від детермінованого, представлений у вигляді випадкової функції

$$X(t, \omega),$$

де t - час;

$\omega \in \Omega$, Ω - простір елементарних подій.

Функція $X(t, \omega)$ в будь-який момент часу може приймати різні значення з відомим або невідомим законом розподілу.

Випадкові процеси, з врахуванням змін ймовірносних характеристик у часі, поділяють на стаціонарні (СВП) та нестаціонарні випадкові процеси (НВП). Випадковий процес є стаціонарним, якщо його математичне очікування $M[X(t)]$ та дисперсія $D[X(t)]$ незалежні від часу та кореляційна функція $k_x(t_1,t_2)$ залежна лише від часового зсуву, тобто

$$M[X(t)] = const,$$

$$D[X(t)] = const,$$

$$k_x(t_1,t_2) = k_x(\tau),$$

$$\tau = [t_2\text{-}t_1].$$

Якщо ці умови не виконуються, такий процес є нестаціонарним [21, 22].

Прогнозування, або екстраполяція – це передбачення значень параметрів об’єкту, що спостерігається. Сутність задачі екстраполяції може бути представлена наступним чином: відомі значення фізичної величини, що спостерігається в дискретні моменти часу t_i, t_{i+1}, t_{i+2},…., t_n. Необхідно передбачити значення цієї фізичної величини в моменти часу, що знаходяться за моментом часу t_n , тобто в майбутньому з певним ймовірносним допуском [23].

Вирішення задач екстраполяції випадкових процесів – прогнозування майбутніх значень фізичних величин процесу, що спостерігається, займають важливе місце як в теорії випадкових процесів, так і в практичному використанні цієї теорії в рішеннях практичних задач надійності, діагностиці, контролю якості комп’ютерних мереж, обробці сигналів на тлі завад та інших задач в різних галузях науки та техніки. На сьогоднішній день найбільш повно вивчені задачі екстраполяції випадкових стаціонарних процесів без завад, також існують практичні результати екстраполяції цих процесів на тлі стаціонарних завад.

Недостатньо вивченими залишаються задачі екстраполяції випадкових нестаціонарних процесів (ВНП) на тлі стаціонарних та нестаціонарних завад. В той же час саме ці задачі найбільш актуальні в різноманітних галузях науки та техніки, таких як контроль працездатності комп’ютерних мереж, обробка звукових сигналів на тлі завад, та багатьох інших.

Окремі результати по вирішенню цих задач поки що не отримали практичного використання через свою складність. Тому існує необхідність розробити нові методи екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, які були б простішими та надійнішими за існуючі на сьогоднішній день методи екстраполяції.

1.3. Часові ряди, як результат спостереження за процесом

Основою для аналізу та екстраполяції технічних, соціально-економічних, фінансових та багатьох інших видів процесів виступають часові ряди вимірів параметрів процесів або статистичних даних.

Часовий ряд – це сукупність рівновіддалених одне від одного спостережень, або спостережень зі змінним періодом, які характеризують поведінку в часі процесу або об'єкта в обраному числовому інтервалі [24]. Кожен часовий ряд може бути описаний за допомогою моделі, яка буде використана для екстраполяції значення певної змінної в майбутньому.

Часові ряди, що описують фінансово-економічні процеси, є, як правило, обмеженими в розмірах (декілька десятків або сотень значень), а ряди, що описують технічні системи, мають практично необмежену довжину.

Проміжок часу між вимірами, або моментами реєстрації статистичних даних, називають періодом дискретизації вимірів T_s. Період дискретизації або постійний, або змінюється у часі.

Чим більшим є період дискретизації, тим біднішим, з точки зору частотного наповнення, є часовий ряд даних. В технічних системах період дискретизації можливо обрати за допомогою теореми Котельникова – Шеннона

$$T_s \leq \frac{1}{2f_{max}},$$

де f_{max} – максимальна частота гармонічної складової сигналу, яка необхідна для подальшого аналізу процесу, що досліджується.

Необхідно зазначити, що при невеликих значеннях періоду дискретизації може виникнути значна лінійна залежність між вимірами, що приведе до лінійно залежних стовпчиків вимірів, що робить неможливою адекватну оцінку на основі ряду даних. Тому значення T_s завжди є компромісним, тобто не занадто великим, щоб не втратити інформативність сигналу, але й не занадто маленьким, щоб не виникла лінійна залежність між вимірами.

Слід зазначити, що масштаби часу, в яких протікають процеси, можуть суттєво відрізнятись, але методи аналізу відповідних часових рядів залишаються практично однаковими.

Принципові відмінності часового ряду від послідовності спостережень, що утворюють випадкову вибірку, полягає в наступному:

1. По-перше, на відміну від елементів випадкової вибірки члени часового ряду не є незалежними.

2. По-друге, члени часового ряду не обов'язково є однаково розподіленими.

В даній роботі в якості часового ряду розглядається сукупність спостережень за мережевим трафіком.

1.4. Властивості мережевого трафіку

Рішення все більш широкого кола задач управління різноманітних систем та об'єктів в різних галузях техніки, науки, освіти, фінансів та інших галузей людської діяльності базуються на інформаційних технологіях, які набули в наш час значного розвитку. Технічною базою для їх практичного використання є комп'ютери, пов'язані між собою в комп'ютерні мережі різного типу – локальні, корпоративні, глобальні. Саме вони відіграють все більш значну роль для забезпечення ефективної спільної роботи в різних галузях.

Сучасні комп'ютерні мережі надають можливості своїм користувачам на базі звичайних персональних комп'ютерів спільно працювати з базами даних, здійснювати спільну роботу над різноманітними проектами, проводити відеоконференції, створювати потужні обчислювальні кластерні системи та багато іншого. Все це функціонує на комп'ютерних мережах, що використовують пакетну комутацію, та зазвичай, на базі універсального сімейства протоколі *TCP/IP*.

Окрім цього, практично в кожній такій комп'ютерній мережі відбувається стрімке збільшення кількості комп'ютерів різного призначення, користувачів, об'єму інформації, що передається в комп'ютерній мережі. Це призводить до збільшення інтенсивності трафіку в мережі та погіршення якості мереженох послуг. Звідси постає задача аналізу та ефективного керування трафіком в комп’ютерних мережах, а це потребує проведення експериментальних досліджень мереженого трафіку, причому не тільки в режимі оперативного моніторингу, а й для прогнозування його поведінки в майбутньому. З цим пов’язана задача вдосконалення відповідного науково-методичного та програмного забезпечення аналізу та моделювання поведінки трафіку.

Дослідження по цій проблемі велися та ведуться дуже активно багатьма вченими в усьому світі (Л.І. Абросімов, В.В. Крилов, О.И. Шелухін, А.В. Осін, А.К. Скуратов, Н.А. Оліфер, В.Г. Оліфер, М. Шварц, К. Парк, Дж. Медхі та ін.). Але в цих дослідженнях багато питань або досліджені недостатньо повно, або орієнтовані на вирішення вузькоспеціалізованих задач. Так, достатньо обмеженим є арсенал статистичних методів, що використовуються для аналізу трафіку з метою його подальшої екстраполяції. Математичні моделі трафіку будуються на припущені про його стаціонарність. Все це свідчить про необхідність подальших досліджень по даній проблематиці та в цілому визначає актуальність тематики даної роботи [25].

Динамічні процеси, що відбуваються в комп’ютерних мережах, мають складну природу. Вони здебільшого є стохастичними та нестаціонарними. Такі властивості трафіку виникають через не детермінованості системи в цілому, а також неможливості довгострокового прогнозування дій, що здійснюються алгоритмами обробки трафіку [26]. До таких слід віднести алгоритми, що використовуються в різноманітних реалізаціях протоколів сімейства *TCP/IP*: генерація трафіку протоколами транспортного рівня, управління трафіком на проміжних мережених пристроях, динамічна маршрутизація, тощо. В наслідок цього процеси, що відбуваються в комп’ютерних мережах, знаходяться під постійним впливом регулюючих та збуджуючих стохастичних впливів, що обумовлюють складні флуктуації процесів, що досліджуються.

На сьогоднішній день немає загальної теорії дослідження, моделювання трафіку та методів створення систем динамічного управління в комп’ютерних мережах. Управління трафіком має здійснюватись на всіх рівнях *OSI* - моделі міжмережевої взаємодії, оскільки використання на канальному рівні вбудованих механізмів моніторингу перевантаження каналу суттєво підвищує його продуктивність. Також самі мережеві додатки, коли в них є зворотній зв'язок, також можуть здійснювати контроль за навантаженням. Всі ці методи є по суті додатковими вбудованими керуючими контурами, об'єднання яких в єдину систему управління дозволяє ефективніше використовувати можливості каналу.

Таким чином, оперативне динамічне керування в мережах з комутацією пакетів може бути здійснено на основі оцінки параметрів трафіку, що спостерігається, так і агрегованого потоку інформації.

1.5. Методи екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів

На сьогоднішній день існує декілька загальновизнаних та найбільш розповсюджених методів екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів [27, 28]:

1. Статистичні методи (методи прогнозування, що базуються на згладжуванні, експоненційному згладжуванні та ковзаючому середньому).

2. Регресійні методи.

3. Методи Бокса - Дженкінса (*ARIMA, ARMA*).

4. Методи прогнозування, що базуються на використанні нейронних мереж.

1.5.1. Методи прогнозування, що базуються на згладжуванні, експоненційному згладжуванні та ковзаючому середньому

"Наївні" методи прогнозування. В основі такого методу екстраполяції лежить припущення, що деякий останній період процесу, що спостерігається та прогнозується, найкраще описує майбутнє екстрапольоване значення цього процесу, тому в таких моделях прогноз, як правило, є дуже простою функцією від значень змінної, що прогнозується, в найближчому минулому. Цей метод може бути описаний наступним чином

$$Y(t+1) = Y(t),$$

де $Y(t+1)$ – значення процесу, що спостерігається в наступний період часу, тобто в майбутньому;

$Y(t)$ – реальне значення процесу, що спостерігається, в теперішній момент часу.

Такий метод екстраполяції базується на припущенні, що “надалі буде, як є зараз”.

Але такий примітивний метод екстраполяції має дуже низьку точність. До того ж він не враховує випадкові флуктуації та не враховує тренди, якщо вони є.

“Наївні” методи екстраполяції, в яких присутні спроби урахування тренду можуть бути представленими в наступному вигляді

$$Y(t+1) = Y(t)+[Y(t)-Y(t-1)],$$

$$Y(t+1) = Y(t)*[Y(t)/Y(t-1)],$$

де $Y(t+1)$ – значення процесу, що спостерігається в наступний період часу, тобто в майбутньому;

$Y(t)$ – реальне значення процесу, що спостерігається, в теперішній момент часу;

$Y(t-1)$ - значення процесу, що спостерігався в попередній період часу.

Хоча в цьому методі екстраполяції враховано вплив тренду, але точність такого методу екстраполяції все одно залишається низькою.

Середнє та ковзаюче середнє значення. Найпростішим методом екстраполяції, що базується на простому усередненні, є наступний метод

$$Y(t+1) = (1/(t))*[Y(t)+Y(t-1)+...+Y(1)],$$

де $Y(1)$ – найперший момент спостереження.

Цей метод, на відміну від найпростішого “наївного” методу екстраполяції, в основу якого покладено принцип “надалі буде, як є зараз”, цьому методу відповідає принцип “надалі буде, як було в середньому за останній час”. Такий метод екстраполяції більшу стійкість до випадкових флуктуацій, ніж звичайні “наївні” методи екстраполяції, оскільки в ньому згладжується випадкові викиди спостерігає мого процесу відносно середнього. Але, незважаючи на це, цей метод має ті ж недоліки, що і “наївні” методи екстраполяції.

В приведеній вище формулі вважалося, що значення процесу, що спостерігається, усереднюються по достатньо довгому інтервалу часу. Але досить часто значення процесу, що спостерігається, із недалекого минулого краще описують екстрапольоване значення, ніж більш старі значення цього процесу. В такому випадку можливо використовувати для екстраполяції майбутніх значень ковзаюче середнє значення

$$Y(t+1) = (1/(T+1))[Y(t)+Y(t-1)+...+Y(t-T)],$$

де T – кількість відліків часу назад.

Сутність цього методу в тому, що він враховує для екстраполяції майбутнього значення лише найближче минуле (на T відліків в минуле).

Досить часто використовується метод екстраполяції, що базується на експоненціальних середніх значеннях, який постійно адаптується до спостережень за рахунок нових значень. Цей метод може бути представлений у вигляді

$$Y(t+1) = aY(t)+(1-a)\ Y^*(t),$$

де $Y(t+1)$ – значення процесу, що спостерігається в наступний період часу, тобто в майбутньому;

$Y(t)$ – реальне значення процесу, що спостерігається, в теперішній момент часу;

$Y^*(t)$ – значення минулої екстраполяції на момент часу t;

a – постійна згладжування ($0 <= a <= 1$).

Цей метод використовує внутрішній параметр a, який визначає залежність екстраполяції від більш старих даних, до того ж вплив даних на прогноз експоненціально зменшується з віком даних. У випадках, коли значення a наближується до 1, такий метод екстраполяції стає подібним до “наївного” методу, а у випадках, коли a наближується до 0, значення екстрапольованого значення відповідає значенню, одержаному при попередній екстраполяції.

Зазвичай, якщо проводиться екстраполяція методом експоненційного згладжування, то на деякому тестовому наборі даних виконується екстраполяція для a = [0.01, 0.02, ..., 0.98, 0.99] та відслідковується, при якому значенні a точність екстраполяції найвища. Це значення a використовується для екстраполяції надалі.

Незважаючи на те, що ще й метод враховує значення постійної згладжування, точність його залишається невисокою.

Описані вище методи мають досить низьку точність, до того ж вони малопридатні для екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів.

1.5.2. Методи екстраполяції Хольта та Брауна

В середині XX сторіччя Хольт запропонував вдосконалений метод екстраполяції, що базується на експоненційному згладжуванні. В запропонованому методі значення рівня та тренду згладжуються за допомогою експоненційного згладжування. При цьому параметри згладжування у них різні.

Цей метод може бути описаний наступною формулою

$$\begin{cases} \Omega_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(\Omega_{t-1} - T_{t-1}), \\ T_t = \beta(\Omega_t - \Omega_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \\ \hat{Y}_{t+p} = \Omega_t + pT_t, \end{cases}$$

де перше рівняння описує згладжений ряд загального рівня, що описує процес, що спостерігається;

друге рівняння призначене для оцінки тренду;

третє рівняння визначає екстраполяцію параметра на p відліків по часу вперед.

Постійні згладжування в методі Хольта відіграють ту ж роль, що й постійна в простому експоненційному згладжуванні. Ці параметри підбираються шляхом перебору по цим параметрам з якимось визначеним шагом. Але є можливість використовувати менш складні в сенсі обчислення алгоритми. Головне, що завжди можливо підібрати таку пару параметрів, яка б давала більшу точність методу екстраполяції на тестовому наборі даних, а далі використовувати цю пару параметрів при екстраполяції значень реального процесу. Частим випадком методу Хольта є метод Брауна, коли а=β.

1.5.3. Метод Вінтерса

Хоча описаний вище метод двох параметричного експоненційного згладжування, що носить назву методу Хольта, і не є зовсім простим, порівняно до наївних методах екстраполяції, або на методах, що базуються на усередненні, він має суттєвий недолік – він не дозволяє враховувати сезонні коливання при екстраполяції, тому що не може бачити їх в передісторії процесу. Тому цей метод був розширений до трьохпараметричного експоненційного згладжування. Цей метод одержав назву метод Вінтерса. В цьому методі робиться спроба враховувати сезонні складові в даних спостереження.

Система рівнянь, що описує цей метод, має наступний вигляд

$$\begin{cases} \Omega_t = \alpha \dfrac{Y_t}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(\Omega_{t-1} - T_{t-1}), \\ T_t = \beta(\Omega_t - \Omega_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \\ S_t = \gamma \dfrac{Y_t}{\Omega_t} + (1 - \gamma)S_{t-s}, \\ \hat{Y}_{t+p} = (\Omega_t + pT_t)S_{t-s+p}. \end{cases}$$

Дріб в першому рівнянні служить для виключення сезонності з процесу, що спостерігається - $Y(t)$. Після того, як була виключена сезонність, метод екстраполяції працює з “чистими” даними, в яких відсутні сезонні коливання. Сезонні коливання з’являються у фінальній екстраполяції, коли “чиста” екстраполяція, яка була здійснена за методом Хольта, перемножується з сезонним коефіцієнтом.

1.5.4. Регресійні методи екстраполяції

Крім описаних вище методів екстраполяції, що базуються на експоненційному згладжуванні, використовуються регресійні методи екстраполяції. Сутність такого класу методів може бути описано так: існує змінна, значення якої екстраполюється Y

(залежна змінна) та відібраний заздалегідь комплект змінних, від яких ця змінна залежить - X_1, X_2, ..., X_N (незалежні змінні). Головне в цьому методі – вміти формалізувати.

Модель, на якій базується метод множинної регресії в загальному випадку можна представити виразом

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) + \varepsilon,$$

де Y - змінна, значення якої екстраполюється;

X_1, X_2, ..., X_N , - комплект змінних, від яких залежить змінна, що екстраполюється;

ε – компонента похибки.

В спрощеному варіанті лінійної регресійної моделі залежність змінної, що екстраполюється, від незалежних змінних, має вигляд

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_N X_N + \varepsilon,$$

де β_0, β_1, β_2,…, β_{N} - коефіцієнти регресії, що підбираються;

ε - компонента похибки.

Для побудови регресійних моделей екстраполяції необхідно мати базу даних спостережень наступного виду, приведену у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

База даних спостережень

/п.	Змінні				
	незалежні				залежна
	1				2
	1	2	.	N	Y
	1 1	1 2	.	1 n	Y 1
	1 1	1 2	.	1 n	Y 1

Продовження таблиці 1.1

	1				2
	2 1	2 2	.	2 *n*	*Y* 2
	.	.	.	.	.
	m 1	*m* 2	.	*m* *n*	*Y* *m*

За допомогою таблиці попередніх спостережень можливо підібрати, наприклад, методом найменших квадратів, коефіцієнти регресії. Налаштувавши тим самим модель екстраполяції.

При використанні регресійних методів екстраполяції слід обов’язково перевіряти на адекватність знайдені моделі. Існують різноманітні способи такої перевірки, але обов’язковим є статистичний аналіз залишків, тест Дарбіна – Уотсона. Також для перевірки адекватності моделі слід мати незалежний набір контрольних прикладів, на яких можливо перевіряти якість роботи моделі.

1.5.5. Методи екстраполяції Бокса - Дженкінса (*ARIMA*)

В 60-х роках XX сторіччя було запропоновано принципово новий та достатньо потужний клас методів екстраполяції вченими Г.Е.П. Боксом (*G.E.P. Box*) и Г.М. Дженкінсом (*G.M. Jenkins*). У цей клас входять декілька методів, найбільш відомим з яких є метод *ARIMA*. В класичному варіанті цього метода не використовуються незалежні змінні, метод спирається лише на інформацію, яка міститься на передісторії процесу, що спостерігається. Це обмежує можливості метода. В наш час з’явилися новітні методи *ARIMA*, які дозволяють брати до уваги незалежні змінні. Методологія *ARIMA* не передбачає чіткого методу екстраполяції, а лише передбачає загальний клас моделей, що описують процес, що спостерігається, та дозволяє виражати значення змінної в теперішній момент часу через її попередні значення. Далі алгоритм методу екстраполяції, підлаштовує внутрішні параметри, сам обирає найбільш придатну модель екстраполяції. Як зазначалося вище, існує ціла ієрархія методів екстраполяції Бокса – Дженкінса, яку логічно можливо визначити наступним чином

$$AR(p)+MA(q) \rightarrow ARMA(p,q) \rightarrow ARMA(p,q) \rightarrow ARIMA(p,d,q) \rightarrow ...,$$

де *AR(p)* -авторегресивна модель порядку *p*.

Модель має вигляд

$$Y(t)=f_0+f_1*Y(t\text{-}1)+f_2*Y(t\text{-}2)+...+f_p*Y(t\text{-}p)+ \varepsilon(t),$$

де $Y(t)$ – залежна змінна у момент часу t;

$f_0, f_1, f_2,\ldots, f_p$ - параметри процесу, що спостерігається;

$\varepsilon(t)$ - помилка від впливу змінних, які не враховуються в даній моделі.

Задача полягає в тому, щоб визначити параметри процесу $f_0, f_1, f_2,\ldots, f_p$. Ці параметри можливо оцінити різними способами. Найправильніше шукати їх через систему рівнянь Юла - Уолкера, для складання цієї системи буде потрібно провести розрахунок значень автокореляційної функції. Можна вчинити простішим способом - порахувати їх методом найменших квадратів. Модель має вигляд

$$Y(t)= e(t)\text{-}\omega_1*e(t\text{-}1)\text{-}\omega_2*e(t\text{-}2)\text{-}...\text{-}\ \omega_p*e(t\text{-}p),$$

де $Y(t)$ -залежна змінна у момент часу t;

$\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_p$ - оцінювані параметри.

1.5.6. Авторегресійне ковзне середнє *ARMA*(p, q)

Під позначенням *ARMA*(p, q) мається на увазі модель, що містить p авторегресійних складових та q ковзаючих середніх.

Більш детально модель *ARMA* (p, q) включає моделі *AR*(p) і *MA*(q)

$$X_t = c + e_t + \sum_{i=1}^{q} \Theta_i e_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{y=i},$$

де e_t - значення помилки.

Зазвичай значення помилки e_t вважають незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, узятими з нормального розподілу з нульовим середнім: $e_t \sim N(0, \sigma^2)$, де σ^2 - дисперсія. Це припущення можна послабити, але це може привести до зміни властивостей моделі. Наприклад, якщо не припускати незалежності і однакового розподілу помилок, поведінка моделі суттєво змінюється.

1.5.7. Моделі *ARIMA* та *ARFIMA* (*p, d, q*)

ARIMA (*Autoregressive integrated moving average*) - інтегрована модель авторегресії - змінного середнього - модель і методологія аналізу часових рядів. Є розширенням моделей *ARMA* для нестаціонарних часових рядів, які можна зробити стаціонарними взяттям різниць деякого порядку від вихідного часового ряду (так звані інтегровані). Модель *ARIMA* (*p, d, q*) означає, що різниці часового ряду порядку *d* підкоряються моделі *ARMA* (*p, q*).

Підхід *ARIMA* до часових рядах полягає в тому, що в першу чергу оцінюється стаціонарність ряду. Різними тестами виявляються наявність поодиноких коренів і порядок інтегрованості тимчасового ряду (зазвичай обмежуються першим або другим порядком). Далі при необхідності (якщо порядок інтегрованості більше нуля) ряд перетворюється взяттям різниці відповідного порядку і вже для перетвореної моделі будується деяка *ARMA*-модель, оскільки передбачається, що отриманий процес є стаціонарним, на відміну від вихідного нестаціонарного процесу інтегрованого процесу порядку *d*.

При аналізі та екстраполяції значень процесу зі складною структурою, часто використовуються моделі классу *ARIMA*(*p, d, q*) (авторегресійне інтегрування ковзаючого середнього - *Autoregressive Integrated Moving Average*) порядку (*p, d, q*), які моделюють різноманітні ситуації, що зустрічаються при аналізі стаціонарних та нестаціонарних процесів [31]. Залежно від аналізованого ряду модель *ARIMA*(*p, d, q*) може трансформуватися до авторегресійної моделі *AR*(*p*), моделі ковзного середнього *MA*(*q*) або змішаній моделі *ARMA*(*p, q*). При переході від нестаціонарного процесу до стаціонарного значення параметра *d*, що визначає порядок різниці, приймається рівним 0 або 1, тобто цей параметр має тільки цілочисельні значення. Зазвичай обмежуються вибором між d = 0 або d = 1. Проте з поля зору дослідників випадає ситуація, коли параметр d може приймати дробові значення.

Для ситуацій, коли параметр d приймає дробові значення, було запропоновано новий клас моделей *ARFIMA*(p, d, q) (F: *fractional* - дріб), що допускає можливість нецілого параметра d і авторегресійний дріб інтегрований процес ковзного середнього. Використання такої моделі екстраполяції підвищує її точність порівняно зі звичайною моделлю *ARIMA*(p, d, q).

Ці методи екстраполяції є ефективними, коли вихідні дані – значення спостережень процесу, перевищують 50 спостережень та параметри моделі не змінюються з плином часу [29].

1.5.8. Методи екстраполяції, що базуються на використанні нейронних мереж

В наш час набули популярність методи екстраполяції, що будуються на використанні штучних нейронних мереж.

Штучні нейронні мережі є мережею елементів – штучних нейронів, що пов'язані між собою синаптичними зв'язками. Мережа обробляє вхідну інформацію та в процесі зміни свого стану в часі, в результаті чого змінюється внутрішній стан мережі та формуються вихідні впливи.

На вхід нейтронної мережі зазвичай подається набір параметрів, що характеризує значення процесу, що спостерігається, та на основі якого можливо здійснювати екстраполяцію. В якості виходу нейтронної мережі виступає екстрапольоване значення в наступний момент часу. При використанні нейронних мереж досить легко досліджувати залежність величини, що екстраполюється, від незалежних змінних.

До переваг методів екстраполяції, що базуються на використанні нейронних мереж, можна віднести ефективність метода – він успішно працює там, де інші методи, наприклад, статистичні, регресійні або методи Бокса - Дженкінса малоефективні.

Також вагомою перевагою нейронних мереж полягає в тому, що математична модель, згідно з якою проводиться екстраполяція майбутніх значень процесу, що спостерігається, будується адаптивно під час навчання нейтронної мережі, без участі експерта. При цьому нейронній мережі надаються дані, що описують процес, із бази даних, а нейронна мережа сама підлаштовується під ці дані.

Існує спеціалізоване програмне забезпечення для екстраполяції, що будується на використанні нейронних мереж.

До недоліків нейронних мереж можна віднести їх не детермінованість, тобто після навчання такої мережі ми отримаємо "чорну скриньку", яка якимось чином працює, але логіка її роботи скрита від експерта. Хоча існують алгоритми добичі знань у вигляді логічних правил із нейтронної мережі, вони є досить складними, до того ж такі набори правил можуть мати дуже великий обсяг.

Висновки за розділом

1. Аналітичний огляд літературних джерел показав, що відомі класичні методи екстраполяції, такі, як статистичні та регресійні методи, мають ряд суттєвих недоліків:

1.1. Низька ефективність.

1.2. Складність та негнучкість методу.

1.3. Малопридатність для екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів.

1.4. Відсутність адаптивної, тобто автоматичної побудови моделі екстраполяції без участі експерта.

1.5. Придатність метода екстраполяції тільки для певного типу задач.

2. Методи екстраполяції Бокса - Дженкінса також мають суттєвий недолік: для їх ефективної роботи необхідно мати досить велику передісторію (або навчальну вибірку) спостережень за процесом, що обмежує можливості методу.

3. Методи екстраполяції, що базуються на використанні нейронних мереж, хоча й позбавлені багатьох недоліків, що властиві класичним методам екстраполяції, також мають ряд недоліків:

1.1. Не детермінованість методів екстраполяції, тобто логічні правила функціонування нейтронної мережі недоступні для експерта.

1.2. Алгоритми логічних правил генерують великі об’єми цих правил, що суттєво ускладнює їх подальший аналіз.

До того ж, всі ці методи екстраполяції можуть давати достовірний результат екстраполяції нестаціонарного процесу лише на одне значення в майбутньому при наявності значної передісторії спостережень за процесом. Одержання декількох наступних за екстрапольованим значень процесу в майбутньому з високою долею ймовірності викликає складності. Щоб позбавитись від недоліків, які наведені вище, необхідно розробити нові методи екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, які були б позбавлені недоліків існуючих методів екстраполяції та були б універсальними.

РОЗДІЛ 2
РОЗРОБКА МЕТОДІВ І АЛГОРИТМІВ ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ НА ТЛІ ЗАВАД

2.1. Постановка задачі

Метою цього підрозділу є надання загальної характеристики постановки задач другого розділу. Для досягнення мети ставляться і порівнюються поміж собою два методи оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад при N попередніх значеннях процесу, що спостерігається, і певної апріорної інформації щодо процесу, що екстраполюється, та завади.

Задача оптимальної екстраполяції розв'язується у такій загальній постановці. Приймаються такі припущення:

1) Відомі результати N попередніх спостережень випадкового нестаціонарного процесу $X(t)$ на тлі завади $\xi(t)$.

2) Завада вважається випадковим стаціонарним процесом з апріорно відомими математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$M[\xi(t)] = m_\xi(t),$$

$$K_\xi(t_1 , t_2) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\tau),$$

де σ_ξ^2 - дисперсія (потужність) завади;

$\rho_\xi(\tau)$ - нормована кореляційна функція завади

$$\tau = t_2 - t_1,$$

де t_1, t_2 - моменти часу попередніх спостережень.

3) Математичне сподівання випадкового нестаціонарного процесу (ВНП) $M[X(t)]$, дисперсія $D[X(t)]$ і кореляційна функція $K_X(t_i\ ;\ t_j)$ вважаються апріорно відомими.

4) Екстрапольоване значення ВНП $Y^*(t_3)$ розглядається як *n*- параметрична функція *N* значень $Y(t_1)$, $Y(t_N)$ ВНП, що спостерігається, $(N > n)$

$$Y^*(t_{N+1}) = Y_{N+1}[Y(t_1), Y(t_N), \alpha_1, \alpha_n],$$

де α_1, α_n - параметри оптимізації вибору $Y^*(t_{N+1})$ за певним критерієм, далі використовується векторне позначення $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_n)$.

5) В ролі критерію оптимізації виступає показник точності екстраполяції, який при використанні методу максимальної правдоподібності приводить до такого оптимального вибору параметрів і критеріїв оптимізації

$$D_{1\min}(\alpha_{1opt}, \alpha_{nopt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} D_1(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} M[Y^*(t_{N+1}) - Y_{N+1}]^2 \ , \qquad (2.1)$$

$$D_{2\min}(\alpha_{1opt}, \alpha_{nopt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} D_2(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} M[Y^*(t_{N+1}) - Y_{N+1}]^2 \ . \qquad (2.2)$$

Операції пошуку максимально точних екстрапольованих значень (2.1), (2.2) дозволяють знайти оптимальні значення параметрів α_1, α_n, тобто

$$\vec{\alpha}_{1opt} = \underset{\overrightarrow{\alpha_1}}{\arg\min D_1(\overrightarrow{\alpha_1})},$$

$$\vec{\alpha}_{2opt} = \underset{\overrightarrow{\alpha_{21}}}{\arg\min D_2(\overrightarrow{\alpha_2})}.$$

При цих припущеннях загальна постановка задачі оптимальної екстраполяції має такий вигляд. Відомі наступні дані:

1. Апріорна інформація щодо ймовірнісних характеристик $X(t)$.

2. Апріорна інформація щодо ймовірнісних характеристик $\xi(t)$.

3. Аналітична форма процесу

$$Y(t) \ = Y[X(t), \xi(t)].$$

4. Використовуються критерії максимальної точності екстраполяції (2.1), (2.2).

5. Використовується класичний метод пошуку координат екстремуму функції n змінних.

Необхідно довизначити апріорну інформацію і застосувати класичний метод пошуку координат екстремумів (2.1), (2.2) і знайти:

1. Оптимальні значення $\vec{\alpha}_{1opt}$, $\vec{\alpha}_{2opt}$.

2. Мінімальні значення $D_{1\min}(\vec{\alpha}_{1opt})$, $D_{2\min}(\vec{\alpha}_{2opt})$.

3. Вибрати критерії ефективності отриманих методів і алгоритмів оптимізації екстраполььованих значень $Y^*_{opt}(t_3)$.

4. Виконати порівняльну оцінку ефективності методів оптимальної екстраполяції ВНП.

Зрозуміло, що задача оптимальної екстраполяції ВНП в умовах, коли спостерігають N_1 значень, прогнозують N_2 значення, в такій загальній постановці є дуже складною, і повинна розв'язуватись за методом математичної індукції. Враховуючі не стаціонарність випадкового процесу самою простою задачею, очевидно, є задача оптимальної екстраполяції при $N_1 = 2$, $N_2 = 1$.

Тому в підрозділі 2.2 виконується конкретизація вихідних даних для цієї простої задачі і вона розв'язується для випадку $n = 1$, коли використовується тільки один параметр оптимізації і умова нормування для вибору оптимального значення α_{1opt} і, відповідно

$$Y^*_{3opt} = Y_3(Y_1, Y_2, \alpha_1).$$

В підрозділі 2.2 параметр оптимізації α_{opt} іноді може бути від'ємним, а це може порушити вимогу нормування. Тому в підрозділі 2.3 розглядається модернізований метод оптимальної однопараметричної екстраполяції, в якому параметр α_{opt} не може бути від'ємним.

В підрозділі 2.4 отримане рішення узагальнюється на випадок $n = N = 2$. Цей метод отримав назву двопараметричної оптимальної екстраполяції.

2.2. Метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад

Метою даного підрозділу є розробка методу однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад по мінімальному набору попередніх спостережень (їх необхідно мати два - Y_1, Y_2) [30, 31, 32].

Для досягнення цієї мети в підрозділі будуть введені основні позначення випадкових величин, що екстраполюються, їх вірогідні параметри, набір необхідної апріорної інформації про випадковий нестаціонарний сигнал і отримані математичні вирази для оптимальної екстраполяції наступного значення Y^*_3, та його ймовірнісних параметрів.

Екстраполяція випадкових процесів займає центральне місце як в теорії випадкових процесів, так і в додатках цієї теорії до рішення практичних задач надійності, діагностування, контролю якості, обробки сигналів на тлі завад та інших задач. В даний час відносно непогано вирішені задачі екстраполяції випадкових стаціонарних процесів без завад, та екстраполяції цих процесів на тлі стаціонарних завад.

Недостатньо розробленими є задачі екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів (ВНС) на тлі стаціонарних і нестаціонарних завад. В той же час саме ці задачі найбільш актуальні при контролі працездатності комп'ютерних мереж, обробці звукових сигналів на тлі завад, в інших технічних царинах.

Окремі відомі результати по екстраполяції ВНС на тлі завад мало застосовуються на практиці через свою складність. Тому мета цього розділу – розробити метод оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, в зручній для практичного використання формі.

В основу методу, що пропонується, поставлено задачу визначення оптимального вагового коефіцієнта α_{opt} за критерієм мінімуму дисперсії $minD_\varepsilon(\alpha)$ похибки оптимального прогнозованого (екстрапольованого) значення випадкового нестаціонарного сигналу на тлі завад.

Конкретизація постановки задачі оптимальної екстраполяції випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС) на тлі завади має наступний вигляд.

Введемо такі основні позначення:

$X(t)$– випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозуються;

$\xi(t)$ – випадкова завада, що спотворює дані спостережень;

$Y(t)$ – випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається,;

t_i, $i = 1, n$ – i-й момент спостереження;

$Y(t_i) = Y_i$ – i - e значення $Y(t)$ в момент часу спостереження t_i;

Y_{n+1} – $Y(t_{n+1})$ – значення $Y(t)$, що прогнозується (екстраполюється);

$\Delta t = t_n - t_1$ – інтервал спостереження;

$\tau = t_{n+1} - t_n$ – інтервал екстраполяції (прогнозу);

$M[Y(t)] = m(t)$ – математичне сподівання $Y(t)$;

$D[Y(t)] = M[Y(t) – m(t)]^2$ – дисперсія $Y(t)$;

$k(t_i , t_j) = M\{[Y(t_i) - m(t_i)][Y(t_j) – m(t_j)]\}$ – кореляційна функція $Y(t)$;

$k_\xi (t_i , t_j) = M\{[\xi(t_i) - m_\xi][\xi(t_j) – m_\xi]\}$ – кореляційна функція завади $\xi(t)$;

$M[\xi(t)] = m_\xi (t)$ – математичне сподівання завади $\xi(t)$.

На рис. 2.1 показані всі основні характеристики і параметри екстраполяції НВС. Неважко помітити різницю X_{n+1} від Y_{n+1} , та вплив завади $\xi(t)$ на характеристики $Y_{n+1.}$ Для спрощення на рис. 2.1 показано два спостереження ($n = 2$), в результаті спостереження отримують значення Y_1 , Y_2 замість істинних значень X_1 , X_2 , по яким необхідно визначити X_3 , але насправді оптимально спрогнозувати значення Y^*_3.

Задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий спосіб по значенням Y_1, Y_2, що спостерігаються, отримати оцінку Y^*_3 майбутнього значення Y_3. З постановки задачі зрозуміло, що найкраща екстраполяція включає не тільки прогнозування Y_3, а й зменшення похибки екстраполяції $\varepsilon = Y_3^* - X_3$.

Для коректної постановки задачі введено такі припущення:

1. Сигнал, що спостерігають, розглядається як «адитивна суміш» сигналу $X(t)$ і завади $\xi(t)$ [5]

$$Y(t) = X(t) + \xi(t)\,. \tag{2.3}$$

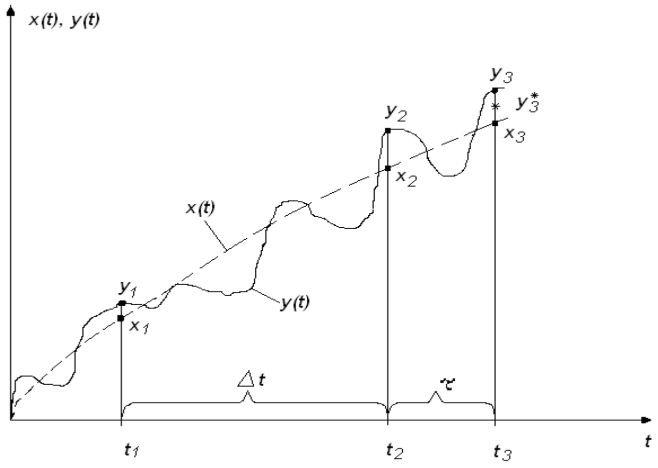

Рис. 2.1. Основні характеристики і параметри екстраполяції

випадкового нестаціонарного сигналу

2. Оцінку Y_3^* істинного значення X_3 в момент часу t_3 розглядаємо як лінійну комбінацію (функцію) попередніх значень, що спостерігають

$$Y_3^* = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 . \qquad (2.4)$$

3. Вважаємо, що параметри α_1 , α_2 задовольняють вимозі нормування $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тоді $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, а оцінка

$$Y_3^* = Y_2 + \alpha(Y_1 - Y_2) . \qquad (2.5)$$

Оцінка Y_3^* по формулі (2.5) має наглядне фізичне пояснення: Y_2 – опорне значення, $\alpha(Y_1 - Y_2)$ – «добавка», яка є добутком різниці $\Delta Y_{12} = Y_1 - Y_2$ значень сигналу на інтервалі спостереження та параметру екстраполяції α.

4. Припускають, що завада $\xi(t)$ являє собою випадковий стаціонарний гаусовський сигнал з характеристиками

$$M[\xi(t)] = m_\xi = 0,$$

$$M[\xi(t_1), \xi(t_2)] = k_\xi\,(\Delta t),$$

де $k_\xi\,(\Delta t)$ – кореляційна функція завади, що визначається за формулою

$$k_\xi(\Delta t) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\Delta t) , \qquad (2.6)$$

де дисперсія (потужність) завади

$$\sigma_\xi^2 = D[\xi(t)],$$

$r_\xi(\Delta t)$ – нормована кореляційна функція завади, інтервал часу

$$\Delta t = t_2 - t_1 .$$

5. Припустимо, що математична модель *X(t)* має вигляд

$$X(t) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i t^{\gamma_i} , \tag{2.7}$$

де $q=1$, детерміновані параметри задання нелінійності і нестаціонарності сигналу γ_0, γ_1 задовольняють умовам: $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 2$, а коефіцієнти a_0, a_1 являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовські розподіли з такими, відповідно, математичними сподіваннями і дисперсіями

$$M(a_0) = m_0 ,$$

$$D(a_0) = \sigma_0^2 ,$$

$$M(a_1) = m_1 ,$$

$$D(a_1) = \sigma_1^2 .$$

6. Для визначеності припустимо, що $\gamma_0 = 0$, а $\gamma_1 = \gamma$, тоді числові характеристики НВС приймають такий конкретний вигляд

$$M[X(t)] = m_0 + m_1 (t)^\gamma = m(t) , \tag{2. 8}$$

$$\begin{aligned} k_X(t_i, t_j) &= M\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\} = M\{[X(t_i)X(t_j) - \\ &- X(t_j)m(t_i) - X(t_i)m(t_j) + m(t_i)m(t_j)]\} = M[X(t_i)X(t_j)] - m(t_i)m(t_j) , \end{aligned} \tag{2.9}$$

де через t_i , t_j позначені *i -ий* та *j - ий* моменти спостережень.

$$M[X(t_i)X(t_j)] = M\{[a_0 + a_1 t_j^\gamma][a_0 + a_1 t_i^\gamma]\} =$$
$$= M[a_0^2 + a_0 a_1 t_i^\gamma + a_0 a_1 t_j^\gamma + a_1^2 t_i^\gamma t_j^\gamma] = m_0^2 + D_0 +$$
$$+ m_0 m_1 t_i^\gamma + m_0 m_1 t_j^\gamma + (m_1^2 + D_1)(t_i t_j)^\gamma = m_0^2 + D_0 +$$
$$+ (m_1^2 + D_1)(t_i t_j)^\gamma + m_0 m_1 t_i^\gamma + m_0 m_1 t_j^\gamma \quad , \qquad (2.10)$$

$$m(t_i)m(t_j) = (m_0 + m_1 t_i^\gamma)(m_0 + m_1 t_j^\gamma)(t_i t_j)^\gamma =$$
$$= m_0^2 + m_0 m_1 t_i^\gamma + m_0 m_1 t_j^\gamma + m_1^2 (t_i t_j)^\gamma \quad . \qquad (2.11)$$

Підставляючи (2.10) та (2.11) в (2.9), отримаємо

$$k_X(t_i, t_j) = D_0 + D_1 (t_i t_j)^\gamma = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^\gamma \, . \qquad (2.12)$$

7. Враховуємо те, що НВС та завада є незалежними сигналами, тоді

$$M\{[X(t_i) - m(t_i)][\xi(t_j) - m_\xi]\} = 0 \, .$$

Якщо характеристики НВС (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) та завади (2.6) відомі, припущення (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) виконуються, коректно ставити задачу оптимізації оцінки (2.5) значення $Y(t)$ в наступний момент часу t_{n+1} шляхом оптимального вибору параметру оптимізації α по відповідному критерію оптимізації.

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_3^* необхідно вибрати критерій оптимізації та використати α як керовану змінну оптимізації.

Найбільш розповсюдженим і відповідаючи змісту цієї задачі є метод максимальної правдоподібності [5], який при обраних вхідних даних приводить до використання середньоквадратичного критерію методу найменших квадратів у вигляді квадрату відстані між Y_3 та Y_3^* в евклідовому просторі

$$D(\varepsilon) = M[(Y_3 - Y_3^*)^2] \, . \qquad (2.13)$$

За змістом критерій (2.13) є дисперсією похибки екстраполяції ε

$$D_\varepsilon(\alpha) = M\{Y_3 - [Y_2 + \alpha(Y_1 - Y_2)]\}^2 \, .$$

Для розв’язання задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції однієї змінної. Беремо похідну від D_ε по α, та прирівнюємо її до нуля, (це є необхідною умовою екстремуму [6]), враховуючи те, що друга похідна більша нуля, (це є достатньою умовою екстремуму для функції одного аргументу [6]) вирішуємо отримане рівняння відносно α

$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha)}{\partial \alpha} = M\{2(Y_3 - [Y_2 + \alpha(Y_1 - Y_2)])[-(Y_1 - Y_2)]\} =$$
$$= M[Y_3(Y_1 - Y_2) - Y_2(Y_1 - Y_2) - \alpha(Y_1 - Y_2)^2] = 0 \quad . \tag{2.14}$$

Використовуючи властивість математичного сподівання декількох випадкових величин запишемо рівняння (2.14) у вигляді

$$M[Y_3(Y_1 - Y_2)] - M[Y_2(Y_1 - Y_2)] - \alpha M[Y_1 - Y_2]^2 = 0 \, .$$

Тоді

$$\alpha M[Y_1 - Y_2]^2 = M[Y_3(Y_1 - Y_2)] - M[Y_2(Y_1 - Y_2)],$$
$$\alpha M[Y_2 - Y_1]^2 = M[Y_2(Y_2 - Y_1)] - M[Y_3(Y_2 - Y_1)]. \tag{2.15}$$

З (2.15) обчислюємо α_{opt}

$$\alpha_{opt} = \frac{M[Y_2(Y_2 - Y_1)] - M[Y_3(Y_2 - Y_1)]}{M[(Y_2 - Y_1)^2]} \quad . \tag{2.16}$$

При обчисленні математичних сподівань в формулі (2.16) враховують наступні співвідношення для характеристик випадкових процесів

$$M[Y_i] = m_0 + m_1 t_i^{\gamma} \, , \tag{2.17}$$

$$D[Y(t_i)] = \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_i^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_{\xi}^2 \, , \tag{2.18}$$

$$M[Y_i \cdot Y_j] = r_{ij} = m_i m_j + k_Y(t_i, t_j) \, , \tag{2.19}$$

$$M[Y_i^2] = m_i^2 + \sigma_Y^2 \, , \tag{2.20}$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_{\xi}^2 \, , \tag{2.21}$$

$$k_y(t_i, t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^{\gamma} + \sigma_{\xi}^2 r_{\xi}(t_i - t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^{\gamma} + \sigma_{\xi}^2 e^{-\frac{t_j - t_i}{\Delta t_{\xi}}} \, , \tag{2.22}$$

де Δt_ξ – інтервал кореляції завади.

З урахуванням (2.17) – (2.22) в кінцевому результаті для α_{opt} отримуємо

$$\alpha_{opt} = \frac{M[Y_2^2] - M[Y_1Y_2] - M[Y_2Y_3] + M[Y_1Y_3]}{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1Y_2]}. \qquad (2.23)$$

Чисельник формули (2.23) дорівнює

$$\begin{aligned} &m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 - m_{Y_1}m_{Y_2} - k_Y(t_1,t_2) - m_{Y_2}m_{Y_3} - k_Y(t_2,t_3) + \\ &+ m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3) = (m_{Y_2} - m_{Y_1})(m_{Y_2} - m_{Y_3}) + \\ &+ \sigma_{Y_2}^2 + k_Y(t_1,t_3) - k_Y(t_1,t_2) - k_Y(t_2,t_3). \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Знаменник формули (2 - 36) дорівнює

$$\begin{aligned} &m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] = \\ &= m_{Y_2}^2 - 2m_{Y_1}m_{Y_2} + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1,t_2) = \\ &= (m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1,t_2). \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Підставивши вирази (2.24) та (2.25) у (2.23), в кінцевому результаті отримаємо

$$\alpha_{opt} = \frac{(m_{Y_2} - m_{Y_1})(m_{Y_2} - m_{Y_3}) + \sigma_{Y_2}^2 + k_Y(t_1,t_3) - k_Y(t_1,t_2) - k_Y(t_2,t_3)}{(m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1,t_2)}. \qquad (2.26)$$

Перевіримо виконання необхідної умови існування екстремуму. Для цього у формулі (2.14) розкриємо круглі дужки

$$\begin{aligned} &M[Y_1Y_3] - M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_2] + M[Y_2^2] - \alpha_{opt}M[Y_1^2 - 2Y_1Y_2 + Y_2^2] = \\ &= M[Y_1Y_3] - M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_2] + M[Y_2^2] - \alpha_{opt}M[Y_1^2] + 2\alpha_{opt}M[Y_1Y_2] - \\ &- \alpha_{opt}M[Y_2^2] = 0. \end{aligned} \qquad (2.27)$$

У виразі (2.27) замінимо математичні сподівання на їх значення (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha} = [m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)] - [m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)] - \\ &- [m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] + (1 - \alpha_{opt})(m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) - \\ &- \alpha_{opt}(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + 2\alpha_{opt}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] = 0. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Якщо необхідна умова існування екстремуму (2.28) виконується, то можна перевіряти достатню умову існування екстремуму. А якщо необхідна умова не виконується, то функція одного аргументу не має екстремуму і подальші дії оптимальної екстраполяції можна не виконувати.

Перевіримо виконання достатньої умови існування екстремуму. Для цього від виразу (2.14) візьмемо другу похідну

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial D_{\varepsilon}^{2}(\alpha)}{\partial \alpha^{2}} = M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1 Y_2] = \\
&= m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2[m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)] = \\
&= m_{Y_2}^2 - 2m_{Y_1} m_{Y_2} + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2) = \\
&= (m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2) > 0\,.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Якщо вираз (2.29) більше нуля, то достатня вимога існування екстремуму виконується [6] і можна продовжувати процес екстраполяції. Екстремум — найбільше та найменше значення функції на заданій множині.

Дисперсію оцінки Y_3^* отримують за наступною формулою

$$D[Y_3^*] = D[\alpha Y_1 + (1 - \alpha Y_2)] = D[\alpha Y_1] + D[(1 - \alpha) Y_2] + 2D\{(\alpha Y_1)[(1 - \alpha) Y_2)]\} = \alpha_{opt}^2 \sigma_{Y_1}^2 + (1 - \alpha_{opt})^2 \sigma_{Y_1}^2 + 2\alpha_{opt}(1 - \alpha_{opt}) k_Y(t_1 t_2)\,.$$

При оптимальному значенні параметра екстраполяції α_{opt} дисперсія похибки екстраполяції приймає мінімальне значення, яке визначається за наступною формулою

$$
\begin{aligned}
&D_{\varepsilon}(\alpha_{opt})_{\min} = M[(Y_3 - Y_3^*)^2] = M[Y_3^2 - 2Y_3Y_3^* + (Y_3^*)^2] = M[Y_3^2 - 2Y_3(\alpha Y_1 + \\
&+Y_2 - \alpha Y_2) + (\alpha Y_1 + Y_2 - \alpha Y_2)^2] = M[Y_3^2 - 2(\alpha Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 - \alpha Y_2 Y_3) + \\
&+\alpha^2 Y_1^2 + Y_2^2 + \alpha^2 Y_2^2 + 2\alpha Y_1 Y_2 - 2\alpha^2 Y_1 Y_2 - 2\alpha Y_2^2] = M[Y_3^2 - 2\alpha Y_1 Y_3 - \\
&-2Y_2Y_3 + 2\alpha Y_2 Y_3 + \alpha^2 Y_1^2 + Y_2^2 + \alpha^2 Y_2^2 + 2\alpha Y_1 Y_2 - 2\alpha^2 Y_1 Y_2 - 2\alpha Y_2^2] = \\
&= M[Y_3^2] - 2\alpha M[Y_1Y_3] - 2M[Y_2Y_3] + 2\alpha M[Y_2Y_3] + \alpha^2 M[Y_1^2] + \\
&+M[Y_2^2] + \alpha^2 M[Y_2^2] + 2\alpha M[Y_1Y_2] - 2\alpha^2 M[Y_1Y_2] - 2\alpha M[Y_2^2] = \\
&= m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 - 2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)] - 2[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)] + \\
&+2\alpha[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)] + \alpha^2(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \alpha^2(m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) + \\
&+2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] - 2\alpha^2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] - 2\alpha[m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2] = \\
&= m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + \alpha^2(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) - 2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)] - 2(1-\alpha)[m_{Y_2}m_{Y_3} + \\
&+k_Y(t_2,t_3)] + 2\{\alpha(1-\alpha)[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\} + (1-\alpha)^2[m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2]\,.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Ефективність оптимального способу екстраполяції пропонується оцінювати за наступними формулами системи оцінювання ефективності екстраполяції.

Відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_{\varepsilon}(\alpha_{opt})_{\min}}\ . \tag{2.31}$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , $D_{\varepsilon}(\alpha_{opt})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

Відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]}\ . \tag{2.32}$$

Відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_{\varepsilon}(\alpha_{opt})_{\min}}\,. \tag{2.33}$$

Для оцінки середньої величини похибки екстраполяції використовують абсолютну похибку

$$\Delta m = m_3 - m_3^*,$$

та відносну похибку

$$\delta_m = \frac{\Delta m}{m_3}.$$

Розробимо структурну схему алгоритму методу однопараметричної оптимальної екстраполяції нестаціонарного випадкового сигналу на тлі завад. Структурна схема алгоритму наведена на рис. 2.2. Розглянемо її роботу.

Перш за все необхідно ввести апріорну інформацію (блок 2): t_1, t_2 - часові відліки спостережень сигналу, та t_3 - момент часу для екстраполяції значення Y_3^*; m_0, m_1 - математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, а σ_0, σ_1 - їх середньоквадратичні відхилення; σ_ξ - середньоквадратичне відхилення завади; γ - коефіцієнт нелінійності випадкового сигналу.

Далі за допомогою стандартної процедури *MathCAD rnorm* (блок 3) формуються випадкові значення a_0, a_1, що мають гаусовський розподіл, по апріорним даним m_0, m_1, σ_0, σ_1 відповідно.

Знаючи значення a_0, a_1 за формулами (2.17), (2.18) обчислюються математичні очікування m_{Y1}, m_{Y2}, m_{Y3} та D_{Y1}, D_{Y2}, D_{Y3} дисперсії для відповідних моментів часу - t_1, t_2, t_3 (блок 4). Далі за формулою (2.22) обчислюються значення трьох кореляційних функцій - $k_y(t_1, t_2)$, $k_y(t_1, t_3)$, $k_y(t_2, t_3)$ (блок 5) і за допомогою стандартної функції *rnorm* формують 15 значень випадкової завади ξ (блоки 6, 7), які у подальшому використовуються для обчислення 15 значень $X(t)$, $Y(t)$ (блоки 8, 9) за формулами (2.7), (2.3). Після цього за формулами (2.26) обчислюються значення α_{opt} (блок 10), та перевіряються достатня та необхідна умови існування екстремуму функції $D_\varepsilon(\alpha)$ (блок 11-12).

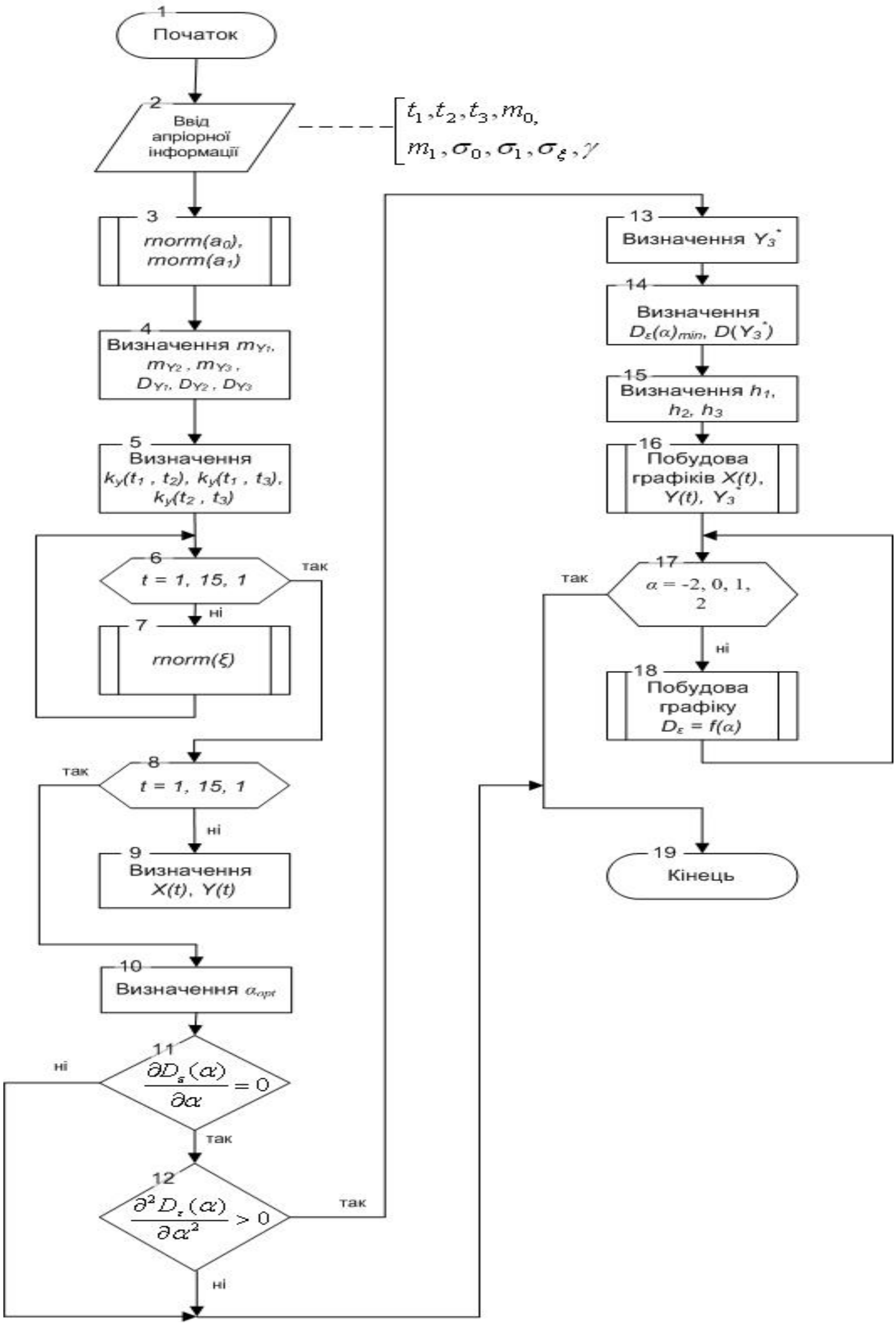

Рис.2.2. Структурна схема алгоритму однопараметричної екстраполяції випадкового нестаціонарного сигналу на тлі завад

Якщо ці умови не виконуються, то обчислення закінчується (блок 19), а якщо виконується, то далі обчислюється Y_3^* за формулою (2.4) (блок 13), дисперсія похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$ за формулою (2.30) та дисперсія екстрапольованого значення Y_3^* - $D[Y_3^*]$ за формулою (2.28) (блок 14). І, наприкінці, обчислюються критерії ефективності - h_1, h_2, h_3 за формулами (2.31), (2.32), (2.33) відповідно (блок 15). Далі за допомогою стандартної функції "графік" будується сумісний графік з 15-ма точками $X(t)$, $Y(t)$, Y_3^* (блок 16) і графік $D_\varepsilon = f(\alpha)$ (блок 16), який ілюструє, що екстраполяція, дійсно оптимальна, так як на графіку існує абсолютний мінімум функції похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$. На цьому робота алгоритму закінчується (блок 19).

Далі наведено програмний модуль статистичного імітаційного моделювання ПСІМ-1 для способу однопараметричної екстраполяції випадкового нестаціонарного процесу на тлі завад. Розглянемо вихідні дані та результати обчислень в результаті роботи.

Вихідні дані:

1. Математичне сподівання

$$m_o := 1, m_1 := 0.02.$$

2. Моменти часу спостереження

$$t_1 := 6, t_2 = 10, t_3 = 12.$$

3. Середньоквадратичні значення

$$\sigma_0 := 0.3, \sigma_1 := 0.002, \sigma_2 := 0.01.$$

4. Кількість точок t побудови графіку

$$t := 0, 1 \ldots 15,$$

$$M0 := m_0, M1 := m_1,$$

$$\gamma := 0.5, \Delta\tau\xi := 4.$$

5. Дисперсія похибки

$$D_0 = \sigma_0^2, D_1 = \sigma_1^2, D_2 = \sigma_\xi^2.$$

Задаються параметри процесу $X(t)$

$$A0 := rnorm(1, 1, 0.3),$$

$$A0 := (0.868309),$$

$$A0 := 0.71456,$$

$$A1 := \mathrm{rnorm}(1, 0.02, 0.002),$$

$$A1 := (0.018641),$$

$$A1 := 0.020087,$$

$$X(t) := A0 + A1 * t^{\gamma}.$$

Обчислюється математичне очікування спостерігаємого процесу $Y(t)$ для всіх моментів спостереження t

$$M(t) := M0 + M1 * t^{\gamma},$$

$$M(t1) := 1.04899,$$

$$M(t2) := 1.063246,$$

$$M(t3) := 1.069282,$$

$$D0 := (\sigma_0)^2 = 0.09,$$

$$D1 := (\sigma_1)^2 = 0.000004,$$

$$D2 := (\sigma_2)^2 = 0.0001.$$

Обчислюється дисперсія спостерігаємого процесу $Y(t)$ для всіх моментів спостереження t

$$D(t) := D0 + D1 * t^{2\gamma} + D2,$$

$$D(t1) = 0.090124,$$

$$D(t2) = 0.09014,$$

$$D(t3) = 0.090148.$$

Задаються параметри завади ξ

$$n := 16,$$

$$\xi(t) := rnorm(n, 0, 0.01).$$

Записуємо отримані результати у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Результати, отримані в процесі обчислення завади ξ

Параметр $\xi\,(n)$	Параметр ξ_N	Порядковий номер
-0.004733	-0.013781	0
-0.009515	0.003803	1
-0.016857	0.004377	2
0.000435	0.017603	3
-0.001206	-0.00551	4
0.005564	0.015465	5
0.021918	-0.018216	6
0.008087	0.013079	7
0.009851	-0.010489	8
0.008622	-0.004591	9
0.009156	-0.010522	10
0.00673	-0.010522	11
-0.010443	-0.012421	12
0.000691	0.004241	13
-0.007556	-0.019166	14
0.006967	-0.001239	15

Задаються параметри процесів, що відбувається $X(t)$ та процесу, що спостерігається $Y(t)$

$$Y(\mathrm{t}) := X(t) + \xi_{\mathrm{t}},$$

$$t := 0,\ 1,\ \ldots 15,$$

$$n := t.$$

Записуємо отримані результати у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Результат обчислення процесів, що відбувається $X(t)$ та процесу, що спостерігається $Y(t)$

n	*t*	*X(t)*	*Y(t)*
0	0	0.71456	0.700779
1	1	0.734647	0.73845
2	2	0.742967	0.747344
3	3	0.749352	0.766955
4	4	0.754734	0.748261
5	5	0.759476	0.764986
6	6	0.763763	0.779228
7	7	0.767705	0.749489
8	8	0.771375	0.784454
9	9	0.774821	0.754332
10	10	0.778081	0.782672
11	11	0.781181	0.770659
12	12	0.784143	0.771722
13	13	0.786985	0.791226
14	14	0.789719	0.770553
15	15	0.792357	0.791118

Показник ступеня e для обчислення впливу завади ξ на кореляційну функцію Ki

$$\Delta\tau := 4,$$

$$\beta_1 := \frac{t2 - t1}{\Delta\tau},$$

$$\beta_1 = 1,$$

$$\beta_2 := \frac{t3 - t1}{\Delta\tau},$$

$$\beta_2 = 1.5,$$

$$\beta_3 := \frac{t3 - t2}{\Delta\tau},$$

$$\beta_2 = 0.5.$$

Обчислення кореляційної функції Ki

$$K1 := D0 + D1 * \sqrt{t1 * t2} + D2 * e^{-\beta 1},$$

$$K1 = 0.090068,$$

$$K2 := D0 + D1 * \sqrt{t1 * t3} + D2 * e^{-\beta 2},$$

$$K2 = 0.090056,$$

$$K3 := D0 + D1 * \sqrt{t2 * t3} + D2 * e^{-\beta 3},$$

$$K3 = 0.090104.$$

Обчислення оптимального параметра екстраполяції α_{opt}

$$A := \frac{\big(M(t2) - (t1)\big) * \big(M(t2) - M(t3)\big) + D(t2) + K2 - K1 - K3}{(\mathrm{M(t2)} - \mathrm{M(t1)})^2 + D(t2) + D(t1) - 2K1},$$

$$A = -\ 0.187055.$$

Обчислення екстрапольованого значення Y_3^*

$$D32 := A^2 * D(t1) + (1 - A)^2 * D(t2) + 2 * A * (1 - A) * K1,$$

$$D32 = 0.090172,$$

$$b := M(t1)^2 + D(t1),$$

$$c := M(t2)^2 + D(t2),$$

$$\mathrm{d} := M(t1) * M(t3) + K2,$$

$$\mathrm{e} := M(t2) * M(t3) + K3,$$

$$\mathrm{f} := (M(t1) * M(t2) + K1).$$

Обчислення дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon min$

$$D_\varepsilon(A) := M(t3)^2 + D(t3) + A^2 * b + (1 - A)^2 * c - 2 * A * d - 2 * (1 - A) * e \ldots + 2 * [A * (1 - A) * f],$$

$$D_\varepsilon(A) = 0.000104,$$

$$D42 := D_\varepsilon(A).$$

Обчислення ефективності оптимальної екстраполяції

$$H1 = \frac{D(Y_3)}{D_\varepsilon min},$$

$$H1 := \frac{D(t3)}{D42},$$

$$H1 = 867.710179.$$

Обчислення зменшення дисперсії екстрапольованого значення порівняно зі спостерігаємим значенням $H2 = D(Y3)/D(Y^*)$

$$H2 := \frac{D(t3)}{D32},$$

$$H2 = 0.999739.$$

Обчислення екстрапольованого значення Y_3^*

$$Y_{opt}(t3) \coloneqq Y(t2) + A * \big(Y(t1) - Y(t2)\big),$$

$$Y_{opt}(t3) = 0.783316.$$

Екстрапольоване значення $Y_3^* = Y_{opt}(t3)$.

Обчислення дисперсії оптимального екстрапольованого значення $D(Y_3^*)$

$$D32 := A^2 * D(t1) + (1 - A)^2 * D(t2) + 2 * A * (1 - A) * K1,$$

$$D32 = 0.090172,$$

$$b := M(t1)^2 + D(t1),$$

$$c := M(t2)^2 + D(t2),$$

$$\mathrm{d} := M(t1) * M(t3) + K2,$$

$$\mathrm{e} := M(t2) * M(t3) + K3,$$

$$\mathrm{f} := (M(t1) * M(t2) + K1).$$

Обчислення дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon min$

$$D_\varepsilon(A) \coloneqq M(t3)^2 + D(t3) + A^2 * b + (1-A)^2 * c - 2 * A * d - 2 * (1-A) * e \ldots + 2 * [A * (1-A) * f],$$

$$D_\varepsilon(A) = 0.000104,$$

$$D42 := D_\varepsilon(A).$$

Обчислення ефективності оптимальнї екстраполяції $H = \frac{D(Y_3)}{D_\varepsilon min}$

$$H1 := \frac{D(t3)}{D42},$$

$$H1 = 867.710179.$$

Обчислення зменшення дисперсії екстрапольованого значення порівняно зі спостерігаємим значенням $H2 = D(Y3)/D(Y^*)$

$$H2 := \frac{D(t3)}{D32},$$

$$H2 = 0.999739,$$

$$\alpha := -1, -0.99 \ldots 1,$$

$$D_\varepsilon(A) \coloneqq M(t3)^2 + D(t3) + A^2 * b + (1-A)^2 * c - 2 * A * d - 2 * (1-A) * e \ldots + * [A * (1-A) * f].$$

У розділ 3.1 проаналізовано отримані результати дослідження та наведено приклад роботи методу однопараметричної оптимальної екстраполяції нестаціонарного випадкового сигналу на тлі завад.

2.3. Модернізований метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад

Метою підрозділу 2.3 є розробка модернізованого методу одно параметричної оптимальної екстраполяції, в якому б параметр α_{opt} не міг би мати від'ємне значення.

Для досягнення цієї мети в підрозділі 2.3 використовуються ті ж самі основні позначення випадкових величин, що екстраполюються, їх вірогідні параметри та набір апріорної інформації про випадковий нестаціонарний сигнал, що і в підрозділі

2.2. Але при нормуванні параметрів оптимізації α_1 та α_2 приймаються інші позначення: $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_1 = 1 - \alpha$.

Цей метод слід застосовувати, коли при використанні однопараметричного методу (підрозділ 2.2) коефіцієнт оптимізації $\alpha_{opt} < 0$.

Модернізований метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад використовує такі ж самі основні позначення, як і в підрозділі 2.2, а характеристики і параметри екстраполяції випадкового нестаціонарного сигналу пояснюються (рис. 2.1). Для коректної постановки задачі введені також припущення (1, 2, 4, 5, 6, 7), що і в підрозділі 2.2.

Вважаємо, що параметри α_1 , α_2 задовольняють вимозі нормування $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, тоді $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_1 = 1 - \alpha$.

Таким чином, для оптимізації оцінки $Y_3{*}$ необхідно вибрати критерій оптимізації та використати α як керовану змінну оптимізації.

Найбільш розповсюдженим і таким, що відповідає змісту цієї задачі, є метод максимальної правдоподібності [5], який при обраних відомих даних приводить до використання середньоквадратичного критерію методу найменших квадратів у вигляді квадрату відстані між Y_3 та $Y_3{*}$ у евклідовому просторі

$$D(\varepsilon) = M[(Y_3 - Y_3^*)^2]. \qquad (2.34)$$

За змістом критерій (2.34) є дисперсією похибки екстраполяції ε

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(\alpha) &= M\{Y_3 - [Y_1 + \alpha(Y_2 - Y_1)]\}^2 = M[(Y_3 - Y_1 - \alpha(Y_2 - Y_1)]^2 = \\ &= M[Y_3^2 + Y_1^2 + \alpha^2(Y_2 - Y_1)^2 - 2Y_1Y_3 - 2\alpha Y_3(Y_2 - Y_1) + 2\alpha Y_1(Y_2 - Y_1)] = \\ &= M[Y_3^2] + M[Y_1^2] + \alpha^2\{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1Y_2]\} - 2M[Y_1Y_3] - \\ &- 2\alpha\{M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_3]\} + 2\alpha\{M[Y_1Y_2] - M[Y_1^2]\}. \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Для розв’язання задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції однієї змінної. Беремо похідну від D_ε по α з формули (2.35), та прирівнюємо її до нуля, враховуючи те, що друга похідна більша нуля, вирішуємо отримане рівняння відносно α

$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha)}{\partial \alpha} = 2\alpha\{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1Y_2]\} -$$
$$-2\{M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_3]\} + 2\{M[Y_1Y_2] - M[Y_1^2]\} = 0 \quad (2.36)$$

Тоді, розділивши ліву і праву частини рівняння (2.36) на 2, отримаємо

$$\alpha\{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1Y_2]\} = \{M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_3]\} -$$
$$-\{M[Y_1Y_2] - M[Y_1^2]\} . \quad (2.37)$$

З рівняння (2.37) обчислюємо α_{opt}

$$\alpha_{opt} = \frac{M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_3] - M[Y_1Y_2] + M[Y_1^2]}{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1Y_2]} . \quad (2.38)$$

При обчисленні математичних очікувань в формулі (2.38) враховують наступні співвідношення для характеристик випадкових процесів

$$M[Y_i] = m_0 + m_1 t_i^{\gamma} , \quad (2.39)$$

$$D[Y(t_i)] = \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_i^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_{\xi}^2 , \quad (2.40)$$

$$M[Y_i \cdot Y_j] = r_{ij} = m_i m_j + k_Y(t_i, t_j) , \quad (2.41)$$

$$M[Y_i^2] = m_i^2 + \sigma_Y^2 , \quad (2.42)$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_{\xi}^2 , \quad (2.43)$$

$$k_y(t_i, t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^{\gamma} + \sigma_{\xi}^2 r_{\xi}(t_i - t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^{\gamma} + \sigma_{\xi}^2 e^{-\frac{t_j - t_i}{\Delta t_{\xi}}} , \quad (2.44)$$

де Δt_{ξ} – інтервал кореляції завади.

З урахуванням (2.39), (2.40), (2.41), (2.42), (2.43), (2.44) в кінцевому результаті для α_{opt} отримаємо чисельник формули (2.38)

$$m_{Y_2} m_{Y_3} + k_Y(t_2, t_3) - m_{Y_1} m_{Y_3} - k_Y(t_1, t_3) - m_{Y_1} m_{Y_2} -$$
$$- k_Y(t_1, t_2) + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 = (m_{Y_1} - m_{Y_2})(m_{Y_1} - m_{Y_3}) +$$
$$+ \sigma_{Y_1}^2 + k_Y(t_2, t_3) - k_Y(t_1, t_3) - k_Y(t_1, t_2) . \quad (2.45)$$

Знаменник формули (2.38) дорівнює

$$m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2[m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)] =$$
$$= m_{Y_2}^2 - 2m_{Y_1} m_{Y_2} + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2) =$$
$$= (m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2)\,. \tag{2.46}$$

Підставивши вирази (2.43), (2.44), (2.45) та (2.46) у формулу (2.36), в кінцевому результаті отримаємо

$$\alpha_{opt} = \frac{(m_{Y_1} - m_{Y_2})(m_{Y_1} - m_{Y_3}) + \sigma_{Y_1}^2 + k_Y(t_2, t_3) - k_Y(t_1, t_3) - k_Y(t_1, t_2)}{(m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2)}\,. \tag{2.47}$$

Виконаємо перевірку виконання необхідної умови існування екстремуму функції одного аргументу. Для цього у формулу (2.36) підставимо значення математичних очікувань, тоді отримаємо

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha} = \alpha_{opt}\{(m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) + (m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) - [m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)]\} -$$
$$-[m_{Y_2} m_{Y_3} + k_Y(t_2, t_3)] + [m_{Y_1} m_{Y_3} + k_Y(t_1, t_3)] + [m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)] - \tag{2.48}$$
$$-(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) = 0\,.$$

Друга похідна $\frac{\partial^2 D_\varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha^2}$ повинна бути більше нуля (це є достатньою умовою існування екстремуму) і буде мати такий вигляд

$$\frac{\partial^2 D_\varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha^2} = M[Y_2^2] + M[Y_1^2] - 2M[Y_1 Y_2] =$$
$$= m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2[m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)] =$$
$$= m_{Y_2}^2 - 2m_{Y_1} m_{Y_2} + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2) =$$
$$= (m_{Y_2} - m_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2k_Y(t_1, t_2) > 0\,. \tag{2.49}$$

При оптимальному значенні параметра похибка екстраполяції мінімальна та приймає мінімальне значення

$$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min} = M[(Y_3 - Y_3^*)^2] = M[Y_3^2] + M[Y_1^2] + \alpha^2\{M[Y_2^2] + M[Y_1^2] -$$
$$-2M[Y_1Y_2]\} - 2M[Y_1Y_3] - 2\alpha\{M[Y_2Y_3] - M[Y_1Y_3]\} + 2\alpha\{M[Y_1Y_2] -$$
$$-M[Y_1^2]\} = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 + \alpha^2\{[m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2 + m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2[m_{Y_1}m_{Y_2} +$$
$$+k_Y(t_1,t_2)]]\} - 2[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)] - 2\alpha\{[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)] - [m_{Y_1}m_{Y_3} + \qquad (2.50)$$
$$+k_Y(t_1,t_3)]\} + 2\alpha\{[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] - (m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2)\} = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + m_{Y_1}^2 +$$
$$+\sigma_{Y_1}^2 + \alpha^2(m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) + \alpha^2(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) - 2\alpha^2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] - 2[m_{Y_1}m_{Y_3} +$$
$$+k_Y(t_1,t_3)] - 2\alpha[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)] + 2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)] + 2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_2} +$$
$$+k_Y(t_1,t_2)] - 2\alpha(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + (1 + \alpha^2 - 2\alpha)(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + \alpha^2(m_{Y_2}^2 +$$
$$+\sigma_{Y_2}^2) + 2\alpha[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)](1-\alpha) - 2[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)](1-\alpha) -$$
$$-2\alpha[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)]\ .$$

Дисперсію оцінки Y_3^* отримують за наступною формулою

$$D[Y_3^*] = D[(1-\alpha)Y_1 + \alpha Y_2] = D[(1-\alpha)Y_1] + D[\alpha Y_2] + 2D\{[(1-$$
$$-\alpha)Y_1](\alpha Y_2)\} = (1-\alpha_{opt})^2\sigma_{Y_1}^2 + \alpha_{opt}^2\sigma_{Y_2}^2 + 2\alpha_{opt}(1-\alpha_{opt})k_Y(t_1,t_2)\ . \qquad (2.51)$$

Ефективність оптимального способу екстраполяції пропонується оцінювати за наступними формулами системи оцінювання ефективності екстраполяції.

Відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}}\ , \qquad (2.52)$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3;

$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

Відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]}. \qquad (2.53)$$

Відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу за формулою (2.53), що буде спостерігатися у момент часу t_3, та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}}.$$

Для оцінки середньої величини похибки екстраполяції використовують абсолютну похибку

$$\Delta m = m_3 - m_3^*,$$

та відносну похибку

$$\delta_m = \frac{\Delta m}{m_3}.$$

Структурна схема алгоритму для модернізованого методу екстраполяції буде такою ж, як і для методу однопараметричної екстраполяції в підрозділі 2.2 (рис 2.2) за винятком того, що параметри α_{opt}, $\frac{\partial^2 D_\varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha^2}$, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$, $D[Y_3^*]$ визначаються за іншими формулами: (2.47), (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) відповідно. Відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора обчислюється за формулою (2.52).

У розділі 3.2 наведено приклад роботи модернізованого методу однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад.

2.4. Двопараметричний метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад

Метою цього підрозділу є розробка нового методу двопараметричної екстраполяції НВС [33, 34, 35, 36], який не має недоліків методу одно параметричної екстраполяції і дає меншу дисперсію похибки екстраполяції.

Для досягнення цієї мети в підрозділі прийняті такі ж самі позначення випадкових величин, що і в підрозділі 2.2, їх вірогідні параметри, набір апріорної інформації про ВНС, отримані математичні формули для визначення керованих параметрів екстраполяції α_{1opt} та α_{2opt} , та за їх допомогою обчислюється екстрапольоване значення Y_3* та його ймовірнісні параметри $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$. В підрозділі 2.2 був запропонований однопараметричний метод екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів на тлі завад. Експерименти показали, що в цьому методі керуючий параметр α може бути як позитивним $\alpha > 0$ так і від'ємним $\alpha < 0$. Якщо $\alpha < 0$, то вимога нормування $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ втрачає сенс і при цьому результат екстраполяції може бути спотвореним, чи задача взагалі не має рішення. У цьому підрозділі пропонується двопараметричний метод екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів (НВС) на тлі завад, у якому розглядаються обидва керуючі параметри оптимізації α_1 і α_2 та не виконується їх нормування.

Задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий спосіб по значенням Y_1 і Y_2, що екстраполюються, отримати оцінку Y_3* майбутнього значення Y_3. З постановки задачі зрозуміло, що найкраща екстраполяція включає не тільки прогнозування Y_3, а й зменшення похибки спостереження $\varepsilon = Y_3 - Y_3*$.

Для коректної постановки задачі введемо такі припущення:

1. Сигнал, що спостерігається, розглянемо як «адитивну суміш» сигналу $X(t)$ і завади $\xi(t)$ [5]

$$Y(t) = X(t) + \xi(t) . \quad (2.54)$$

2. Оцінку Y_3* істинного значення X_3 в момент часу t_3 розглянемо як лінійну комбінацію (функцію) попередніх значень, що спостерігають

$$Y_3^* = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 . \quad (2.55)$$

3. Припускають, що завада $\xi(t)$ являє собою випадковий стаціонарний гаусовський сигнал з характеристиками

$$M[\xi(t)] = m_\xi = 0,$$

$$M[\xi(t_1), \xi(t_2)] = k_\xi(\Delta t) , \quad (2.56)$$

де $k_\xi(\Delta t)$ – кореляційна функція завади, що визначається за формулою

$$k_\xi(\Delta t) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\Delta t), \tag{2.57}$$

де σ_ξ^{2} – дисперсія (потужність) завади $\sigma_\xi^2 = D[\xi(t)]$;

$r_\xi(\Delta t)$ – нормована кореляційна функція завади;

Δt – інтервал часу спостереження $\Delta t = t_2 - t_1$.

4. Припустимо, що математична модель $X(t)$ має вигляд

$$X(t) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i t^{\gamma_i}, \tag{2.58}$$

де $q=1$, детерміновані параметри задання нелінійності і нестаціонарності сигналу γ_0, γ_1 задовольняють умовам: $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 2$, а коефіцієнти a_0, a_1 являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовські розподіли з такими, відповідно, математичними сподіваннями і дисперсіями

$$M(a_0) = m_0,$$

$$D(a_0) = \sigma_0^2,$$

$$M(a_1) = m_1,$$

$$D(a_1) = \sigma_1^2.$$

5. Для визначеності припускають, що $\gamma_0 = 0$, а $\gamma_1 = \gamma$, тоді числові характеристики НВС приймають такий конкретний вигляд

$$M[X(t)] = m_0 + m_1 t^\gamma = m(t), \tag{2.59}$$

$$D[X(t)] = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t^{2\gamma} = \sigma^2(t), \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} k_X(t_i, t_j) = M\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - \\ - m(t_j)]\} = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^\gamma \end{aligned}, \tag{2.61}$$

де через t_i, t_j позначені i*-ий* та j*-ий* моменти спостережень.

Враховуючи те, що ВНС та завада є незалежними, тоді

$$M\{[X(t_i) m(t_i)][\xi(t_j) - m_\xi]\} = 0.$$

Якщо характеристики ВНС (2.59), (2.60), (2.61) та завади (2.57) відомі, припущення (2.54), (2.55), (2.56), (2.57), (2.58) виконуються, коректно ставити задачу оптимізації оцінки (2.55) значення $Y(t)$ в наступний момент часу t_{n+1} шляхом оптимального вибору параметрів оптимізації α_1 , α_2 по відповідному критерію оптимізації.

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_3* необхідно вибрати критерій оптимізації та використати α_1 , α_2 як керовані змінні оптимізації.

Найбільш розповсюдженим і таким, що відповідає змісту цієї задачі, є метод максимальної правдоподібності [5], який при обраних вхідних даних приводить до використання середньоквадратичного критерію методу найменших квадратів у вигляді квадрату відстані між Y_3* та Y_3 в евклідовому просторі

$$D(\varepsilon) = M[(Y_3 - Y_3^*)^2] \quad . \tag{2.62}$$

Для розв'язання задачі оптимізації необхідно враховувати наступні співвідношення для характеристик випадкових сигналів, що спостерігаються

$$M[Y_i] = m_0 + m_1 t_i^{\gamma} \ , \tag{2.63}$$

$$D[Y(t_i)] = \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_i^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_\xi^2 \ , \tag{2.64}$$

$$M[Y_i \cdot Y_j] = r_{ij} = m_i m_j + k_Y(t_i, t_j) \ , \tag{2.65}$$

$$M[Y_i^2] = m_i^2 + \sigma_{Y_i}^2 \ , \tag{2.66}$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_i^{2\gamma} + \sigma_\xi^2 \ , \tag{2.67}$$

$$k_y(t_i, t_j) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 (t_i t_j)^{\gamma} + \sigma_\xi^2 r_\xi (t_i - t_j) \ , \tag{2.68}$$

$$r_\xi(t_i - t_j) = e^{-\frac{t_j - t_i}{\Delta t_\xi}} \ , \tag{2.69}$$

де Δt_ξ – інтервал кореляції завади.

З урахуванням (2.69) співвідношення (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.67), (2.68) буде мати такий вигляд

$$k_y(t_i,t_j)=\sigma_0^2+\sigma_1^2(t_it_j)^\gamma+\sigma_\xi^2 e^{-\frac{t_j-t_i}{\Delta t_\xi}} . \qquad (2.70)$$

Для розв'язання задачі оптимізації використаємо класичний метод знаходження мінімуму функції двох змінних. Беремо похідні від D_ε по α_1 , α_2 та прирівнюємо їх до нуля (це є необхідною умовою екстремуму [6])

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial\alpha_1}=0 ,$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial\alpha_2}=0 ,$$

враховуючи те, що другі похідні будуть мати наступний вигляд

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1} ,$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} ,$$

вирішуємо систему рівнянь другого порядку відносно α_1 , α_2 , отримуємо α_{1opt} , α_{2ot2}. Підставимо у вираз (2.62) замість Y_3* його значення (2.55). Тоді отримаємо

$$D_\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2)=M[(Y_3-\alpha_1Y_1-\alpha_2Y_2)^2] . \qquad (2.71)$$

Візьмемо похідні від $D_\varepsilon(\alpha_1 , \alpha_2)$ з формули (2.71) по α_1 та α_2 , і прирівняємо їх нулю і отримаємо формули (2.72), (2.73)

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1}=M\{2(Y_3-\alpha_1Y_1-\alpha_2Y_2)(-Y_1)\}=0 , \qquad (2.72)$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_2}=M\{2(Y_3-\alpha_1Y_1-\alpha_2Y_2)(-Y_2)\}=0 . \qquad (2.73)$$

Використовуючи властивості математичного сподівання для виразів (2.69), (2.70) та перемножуючи вирази у фігурних дужках, отримаємо

$$M[\alpha_1 Y_1^2 + \alpha_2 Y_1 Y_2 - Y_1 Y_3] = 0 \ , \tag{2.74}$$

$$M[\alpha_1 Y_1 Y_2 + \alpha_2 Y_2^2 - Y_2 Y_3] = 0 \ , \tag{2.75}$$

$$\begin{cases} M[\alpha_1 Y_1^2 + \alpha_2 Y_1 Y_2] = M[Y_1 Y_3] \\ M[\alpha_1 Y_1 Y_2 + \alpha_2 Y_2^2] = M[Y_2 Y_3] \end{cases} . \tag{2.76}$$

У системі рівнянь (2.76) замінюючи математичні сподівання $M[Y_1^2]$, $M[Y_1Y_2]$, $M[Y_1Y_3]$, $M[Y_2^2]$, $M[Y_2Y_3]$ їх значеннями, отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_1[m_{Y_1}^2 + D_{Y_1}] + \alpha_2[m_{Y_1} m_{Y_2} + k(t_1, t_2)] = m_{Y_1} m_{Y_3} + k_Y(t_1, t_3) \\ \alpha_1[m_{Y_1} m_{Y_2} + k(t_1, t_2)] + \alpha_2[m_{Y_2}^2 + D_{Y_2}] = m_{Y_2} m_{Y_3} + k_Y(t_2, t_3) \end{cases} . \tag{2.77}$$

Систему рівнянь (2.74), (2.75) зручно розв'язувати у матричній формі

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} = b_1 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = b_2 . \end{cases} \tag{2.78}$$

Вирішуючи систему рівнянь (2.78) відносно α_1 і α_2 по правилу Крамера, отримаємо

$$\alpha_{1opt} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{12}} = \frac{b_1 \ a_{22} - b_2 \ a_{12}}{a_{11} \ a_{22} - a_{21} \ a_{12}} \ , \tag{2.79}$$

$$\alpha_{2opt} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{12}} = \frac{a_{11} \ b_2 - b_1 \ a_{21}}{a_{11} \ a_{22} - a_{21} \ a_{12}} \ . \tag{2.80}$$

Перевіримо виконання необхідної умови існування екстремуму функції двох аргументів. Для цього перші похідні від функції $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2)$ повинні дорівнювати нулю (2.77)

$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_{1opt}} = \alpha_{1opt}\left[m_{Y_1}^2 + D_{Y_1}\right] + \alpha_{2opt}\left[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)D_{Y_1}\right] -$$
$$-\left[m_{Y_1}m_{Y_3} + k_Y(t_1,t_3)\right] = 0$$
$$\frac{\partial D_{\varepsilon}(\alpha_{1opt},\alpha_{2opt})}{\partial \alpha_{2opt}} = \alpha_{1opt}\left[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)\right] + 2\alpha_{2opt}\left[m_{Y_2}^2 + D_{Y_2}\right] -$$
$$-\left[m_{Y_2}m_{Y_3} + k_Y(t_2,t_3)\right]. \tag{2.81}$$

Тепер розглянемо другі похідні від $\partial^2 D_{\varepsilon}(\alpha_1, \alpha_2)$, отримаємо наступну матрицю

$$A_{12}(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 D(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1^2} = M[Y_1^2]\,; & \dfrac{\partial^2 D(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = M[Y_1Y_2] \\ \dfrac{\partial^2 D(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = M[Y_2Y_1]\,; & \dfrac{\partial^2 D(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_2^2} = M[Y_2^2] \end{vmatrix}. \tag{2.82}$$

Розглянемо достатню умову екстремуму функції двох змінних [6].

Якщо функція $f(x_1, x_2)$ має в деякій окрузі точки (α_1, α_2) безперервні другі часткові похідні і якщо в цій точці виконується необхідна умова, то у випадку, коли другий диференціал

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\bigg|(\alpha_1,\alpha_2)^{\Delta x_i \Delta x_k},$$

є позитивно визначеною квадратичною формою, то функція $f(x_1, x_2)$ має в цій точці мінімум.

Квадратична форма від n дійсних чи комплексних змінних $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є многочлен виду

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\alpha_k\,, \tag{2.83}$$

де A – матриця других часткових похідних (2.82),

$x' \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [\alpha_k]$ – матриця – рядок,

$$x \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \{\alpha_i\}$$ – матриця – стовпчик .

Тоді квадратична форма від 2-х дійсних змінних α_1 , α_2 у відповідності до виразу (2.83) де n = 2 для матриці других часткових похідних буде мати такий вигляд

$$x'Ax = a_{11}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{21}\alpha_2\alpha_1 + a_{22}\alpha_2^2 = M[Y_1^2]\alpha_1^2 + M[Y_1Y_2]\alpha_1\alpha_2 + \\ +M[Y_1Y_3^*]\alpha_2\alpha_1 + M[Y_2^2]\alpha_2^2 > 0. \tag{2.84}$$

У формулі (2.84), замінюючи математичні сподівання їх значеннями, отримуємо

$$x'Ax = (m_{Y_1}^2 + D_{Y_1})\alpha_1^2 + [m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\alpha_1\alpha_2 + \\ +[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\alpha_1\alpha_2 + (m_{Y_2}^2 + D_{Y_2})\alpha_2^2 = (m_{Y_1}^2 + \\ +D_{Y_1})\alpha_1^2 + (m_{Y_2}^2 + D_{Y_2})\alpha_2^2 + 2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\alpha_1\alpha_2 > 0 . \tag{2.85}$$

При оптимальному значенні параметрів α_{1opt} , α_{2opt} похибка екстраполяції мінімальна та враховуючи формулу (2.85) приймає мінімальне значення

$$D_\varepsilon(\alpha_{1opt},\alpha_{2opt})_{\min} = M[(Y_3 - \alpha_{1opt}Y_1 - \alpha_{2opt}Y_2)^2] = \\ =\mathrm{M}[Y_3^2 + 2\alpha_{1opt}^2Y_1^2 + \alpha_{2opt}^2Y_2^2 - 2\alpha_{1opt}Y_1Y_3 - 2\alpha_{2opt}Y_2Y_3 + \\ +2\alpha_{1opt}\alpha_{2opt}Y_1Y_2] = m_{Y_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 + \alpha_{1opt}^2(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + \alpha_{2opt}^2(m_{Y_2}^2 + \\ +\sigma_{Y_2}^2) - 2\alpha_{1opt}[m_{Y_1}m_{Y_3} + k(t_1,t_3)] - 2\alpha_{2opt}[m_{Y_2}m_{Y_3} + k(t_2,t_3)] + \\ +2\alpha_{1opt}\alpha_{2opt}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k(t_1,t_2)] . \tag{2.86}$$

Дисперсію оцінки Y_3* отримаємо за наступною формулою

$$D[Y_3^*] = D[\alpha_{1opt}Y_1 + \alpha_{2opt}Y_2] = D[\alpha_{1opt}Y_1] + D[\alpha_{2opt}Y_2] + \\ +2D[(\alpha_{1opt}Y_1)(\alpha_{2opt}Y_2)] = \alpha_{1opt}^2\sigma_{Y_1}^2 + \alpha_{2opt}^2\sigma_{Y_2}^2 + 2\alpha_{1opt}\alpha_{2opt}k_Y(t_1,t_2). \tag{2.87}$$

Ефективність двопараметричного методу оптимальної екстраполяції, як і раніше, зручно оцінювати за формулами h_1 – відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}} , \tag{2.88}$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3;

$D_\varepsilon(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt})_{min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції;

h_2 – відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]} , \tag{2.89}$$

h_3 – відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{\min}} . \tag{2.90}$$

Розробимо структурну схему алгоритму методу двопараметричної оптимальної екстраполяції нестаціонарного випадкового сигналу на тлі завад. Структурна схема алгоритму наведена на рис. 2.3. Розглянемо її роботу.

Перш за все необхідно ввести апріорну інформацію (блок 2). Перелік апріорної інформації описаний в структурній схемі рис 2.3. Далі за допомогою стандартної процедури *MathCAD rnorm* (блок 3), формується випадкові значення a_0, a_1, що мають гаусовський розподіл, по апріорним даним m_0, m_1, σ_0, σ_1 відповідно. Знаючи значення a_0, a_1 за формулами (2.59), (2.60) обчислюються математичні очікування m_{Y1}, m_{Y2}, m_{Y3} та D_{Y1}, D_{Y2}, D_{Y3} дисперсії для відповідних моментів часу - t_1, t_2, t_3 (блок 4). Далі за формулами (2.60) обчислюються значення трьох кореляційних функцій - $k_y(t_1, t_2)$, $k_y(t_1, t_3)$, $k_y(t_2, t_3)$ (блок 5) і за допомогою стандартної функції *rnorm* формують 15 значень випадкової завади ξ (блоки 6, 7), які у подальшому використовують-ся для обчислення 15 значень $X(t)$, $Y(t)$ (блоки 8, 9) за формулами (2.58), (2.54).

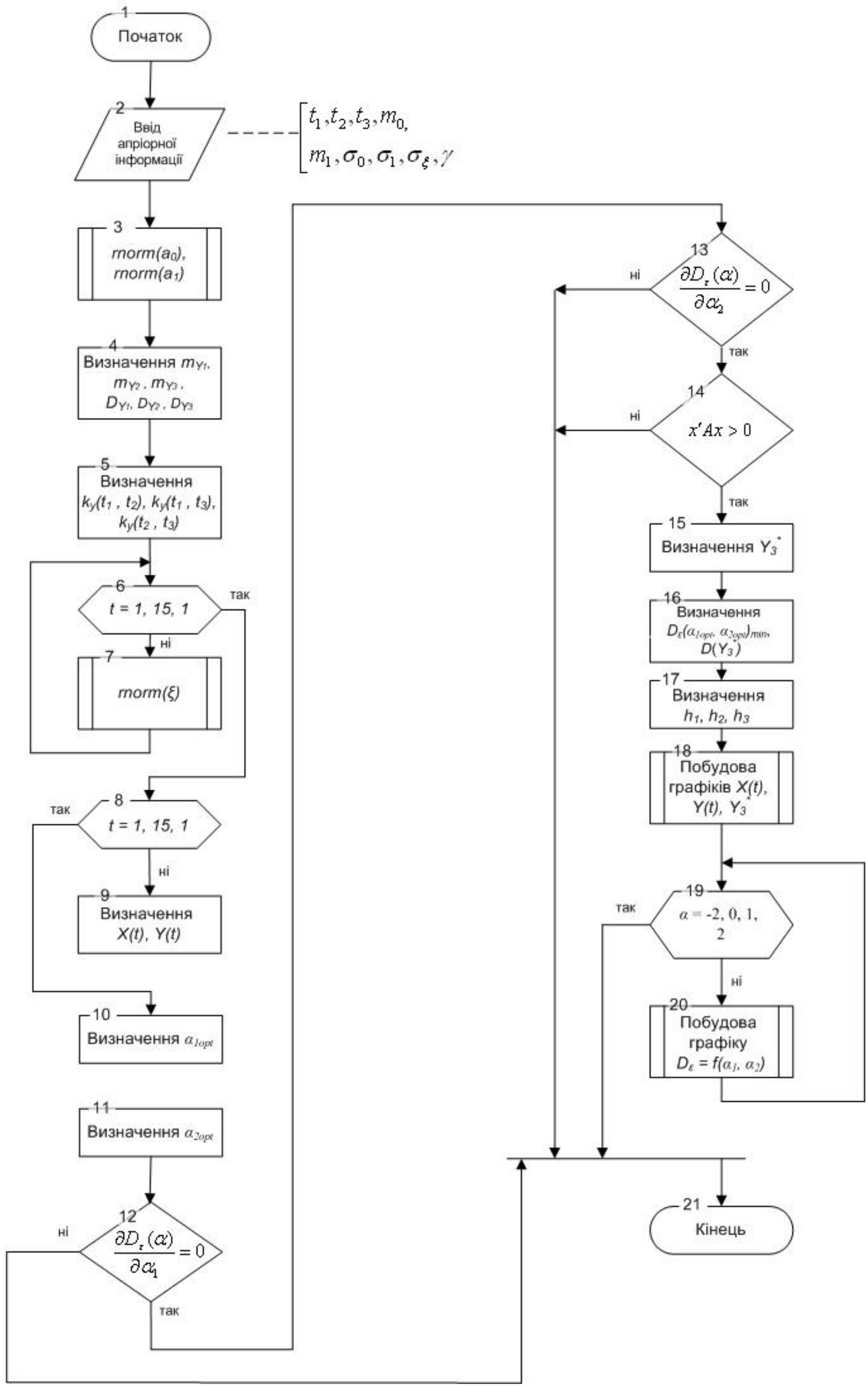

Рис.2.3. Структурна схема алгоритму двопараметричної екстраполяції випадкового нестаціонарного сигналу на тлі завад

Після цього за формулами (2.79) обчислюються значення α_{1opt} (блок 10), за формулами (2.80), (2.81) – значення α_{2opt} (блок 11) та перевіряються необхідна (блоки 12, 13) та достатня умови існування екстремуму функції двох аргументів $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2)_{min}$ (блок 14). Якщо ці умови не виконуються, то обчислення закінчується і управління передається блоку 21. Далі визначається екстрапольоване оптимальне значення Y_3^* за формулою (2.55) (блок 15), дисперсія похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt})_{min}$ за формулою (2.86) та дисперсія екстрапольованого значення Y_3^* - $D[Y_3^*]$ за формулою (2.87) (блок 16).

Після цього обчислюються параметри якості екстраполяції - h_1, h_2, h_3 за формулами (2.88), (2.89), (2.90) відповідно (блок 17). Далі за допомогою стандартної функції “графік” будується сумісний графік з п’ятнадцятьма точками $X(t)$, $Y(t)$, Y_3^* (блок 18) і трьохмірний графік $D_\varepsilon = f(\alpha_1, \alpha_2)$ (блок 20), який ілюструє, що екстраполяція дійсно оптимальна, так як на графіку існує мінімум функції $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2)$. На цьому робота алгоритму закінчується (блок 21).

Далі наведено програмний модуль статистичного імітаційного моделювання ПСІМ-2 для способу двопараметричної екстраполяції випадкового нестаціонарного процесу на тлі завад. Розглянемо вихідні дані та результати обчислень в результаті роботи.

Вихідні дані:

1. Математичне сподівання

$$m_o := 1, m_1 := 0.02.$$

2. Моменти часу спостереження

$$t_1 := 6, t_2 = 10, t_3 = 12.$$

3. Середньоквадратичні значення

$$\sigma_0 := 0.3, \sigma_1 := 0.002, \sigma_2 := 0.01.$$

4. Кількість точок t побудови графіку

$$t := 0, 1 \ldots 15,$$

$$M0 := m_0, M1 := m_1,$$

$$\gamma := 0.5,\ \Delta\tau\xi := 4.$$

5. Дисперсія похибки

$$D_0 = \sigma_0^2,\ D_1 = \sigma_1^2,\ D_2 = \sigma_\xi^2.$$

Задаються реалізації параметрів ВНП $X(t)$

$$A0 := rnorm(1, 1, 0.3),$$

$$A0 := (0.868309),$$

$$A0 := 0.71456,$$

$$A1 := rnorm(1, 0.02, 0.002),$$

$$A1 := (0.018641),$$

$$A1 := 0.020087,$$

$$X(t) := A0 + A1 * t^{\gamma}.$$

Обчислюється математичне очікування спостерігаємого процесу $Y(t)$ для всіх моментів спостереження t

$$M(t) := M0 + M1 * t^{\gamma},$$

$$M(t1) := 1.070103,$$

$$M(t2) := 1.100327,$$

$$M(t3) := 1.113882,$$

$$D0 := (\sigma_0)^2 = 0.09,$$

$$D1 := (\sigma_1)^2 = 0.000004,$$

$$D2 := (\sigma_2)^2 = 0.0001.$$

Обчислюється дисперсія спостерігаємого процесу $Y(t)$ для всіх моментів спостереження t

$$D(t) := D0 + D1 * t^{2\gamma} + D2,$$

$$D(t1) = 0.090124,$$

$$D(t2) = 0.0902,$$

$$D(t3) = 0.09023.$$

Задаються параметри завади ξ

$$n := 16,$$

$$\xi(t) := rnorm(n, 0, 0.01).$$

Записуємо отримані записуємо у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Результати, отримані в процесі обчислення завади ξ

Параметр $\xi\,(n)$	Параметр ξ_N	Порядковий номер
1	2	3
-0.004733	-0.013781	0
-0.009515	0.003803	1
-0.016857	0.004377	2
0.000435	0.017603	3
-0.001206	-0.00551	4
0.005564	0.015465	5
0.021918	-0.018216	6
0.008087	0.013079	7
0.009851	-0.010489	8
0.008622	-0.004591	9
0.009156	-0.010522	10
0.00673	-0.010522	11
-0.010443	-0.012421	12
0.000691	0.004241	13
-0.007556	-0.019166	14
0.006967	-0.001239	15

Задаються параметри процесів, що відбувається $X(t)$ та процесу, що спостерігається $Y(t)$

$$Y(\mathrm{t}) := X(t) + \xi_{\mathrm{t}},$$

$$t := 0,\ 1,\ \ldots 15,$$

$$n := t.$$

Показник ступеня e для обчислення впливу завади ξ на кореляційну функцію Ki

$$\Delta\tau := 4,$$

$$\beta_1 := \frac{t2 - t1}{\Delta\tau},$$

$$\beta_1 = 1\,,$$

$$\beta_2 := \frac{t3 - t1}{\Delta\tau}.$$

Записуємо отримані результати у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Результат обчислення процесів, що відбувається $X(t)$ та процесу, що спостерігається $Y(t)$

n	*t*	*X(t)*	*Y(t)*
1	2	3	4
0	0	0.71456	0.700779
1	1	0.734647	0.73845
2	2	0.747191	0.751568
3	3	0.757901	0.755504
4	4	0.76757	0.761097
5	5	0.776332	0.782042
6	6	0.784968	0.800433
7	7	0.79229	0.774774
8	8	0.800675	0.813754
9	9	0.808076	0.797587
10	10	0.815233	0.819824

Продовження таблиці 2.4

1	2	3	4
11	11	0.822179	0.811657
12	12	0.828938	0.816517
13	13	0.835529	0.83977
14	14	0.84197	0.822804
15	15	0.848275	0.847036

$$\beta_2 = 1.5,$$

$$\beta_3 := \frac{t3 - t2}{\Delta\tau},$$

$$\beta_2 = 0.5\,.$$

Обчислення кореляційної функції Ki

$$K1 := D0 + D1 * \sqrt{t1 * t2} + D2 * e^{-\beta 1},$$

$$K1 = 0.090107\,,$$

$$K2 := D0 + D1 * \sqrt{t1 * t3} + D2 * e^{-\beta 2},$$

$$K2 = 0.090102,$$

$$K3 := D0 + D1 * \sqrt{t2 * t3} + D2 * e^{-\beta 3},$$

$$K3 = 0.090175.$$

Обчислення оптимальних параметрів екстраполяції α_{1opt} та α_{2opt}

$$\propto 11 := M(t1)^2 + D(t1)\,,$$

$$\propto 12 := M(t1) * M(t2) + K1\,,$$

$$\propto 22 := M(t1) * M(t2) + K2\,,$$

$$\propto 21 := M(t2)^2 + D(t2)\,,$$

$$b1 := M(t1) * M(t3) + K2\,,$$

$$b2 := M(t2) * M(t3) + K3\,,$$

$$\propto 1 := \frac{b1 * \propto 22 - b2 * \propto 12}{\propto 11 * \propto 22 - \propto 12 * \propto 21},$$

$$\propto 2 := \frac{b2 * \propto 11 - b1 * \propto 21}{\propto 11 * \propto 22 - \propto 12 * \propto 21},$$

$$\propto 1 = -0.037851\,,$$

$$\propto 2 = 1.048406\,,$$

$$\propto 1 + \propto 2 = 1.010555\,.$$

Обчислення екстрапольованого значення Y_3^*

$$Y_{31opt}^*(t3) := \propto 1 * Y(t1) + \propto 2 * Y(t2),$$

$$Y_{31opt}^*(t3) \;=\; 0.829211\,.$$

Обчислення дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon min$

$$D_\varepsilon(\propto 1, \propto 2) := M(t3)^2 + D(t3) + \propto 1^2 * \propto 11 + \propto 2^2 * \propto 22 - 2 * \propto 1 * b1 - 2 * \propto 2 * b2 \ldots + 2 * \propto 1 *$$

$$* \propto 2 * \propto 12,$$

$$D_\varepsilon(\propto 1, \propto 2) = 0.000094.$$

Обчислення ефективності оптимальної екстраполяції

$$H1 = \frac{D(Y_3)}{D_\varepsilon min},$$

$$H11 := \frac{D(t3)}{D_\varepsilon(\propto 1, \propto 2)},$$

$$H11 = 962.125565.$$

Обчислення зменшення дисперсії екстрапольованого значення порівняно зі спостерігаємим значенням $H2 = D(Y3)/D(Y^*)$

$$H21 := \frac{D(t3)}{D_\varepsilon(\propto 1, \propto 2)},$$

$$H21 = 0.97946.$$

Обчислення відношення дисперсії похибки екстраполяції до різниці дисперсій спостерігаємого та екстрапольованого значень $H3=(D(Y3)-D(Y^*))/D\varepsilon min$

$$H31 := \frac{(D(t3) - D3)}{D_\varepsilon(\propto 1, \propto 2)},$$

$$H31 = -20.176978.$$

Значення параметрів $X(t)$, $Y(t)$, $Yopt(t3)$ в точках спостереження

$$X(t1) = 0.784968,$$

$$X(t2) = 0.815233,$$

$$X(t3) = 0.828938,$$

$$Y(t1) = 0.800433,$$

$$Y(t2) = 0.819824,$$

$$Y(t3) = 0.816517,$$

$$Y31_{opt}(t3) \coloneqq \propto 1 * Y(t1) * \propto 2 * Y(t2),$$

$$Y31_{opt}(t3) = 0.829211,$$

$$D1\propto(\propto 11, \propto 22) \coloneqq M(t3)^2 + D(t3) + \propto 11^2 * \propto 11 \ldots + \propto 22^2 * \propto 22 - 2 * \propto 11 * b1 - 2 * \propto 22 *$$

$$* b2 + 2 * \propto 11 * \propto 22 * \propto 12,$$

$$\propto 11 \coloneqq 0, 0.1 \ldots 1,$$

$$\propto 22 \coloneqq 0, 0.1 \ldots 1,$$

$$fd(\propto 11, \propto 22) \coloneqq D_\varepsilon(\propto 11, \propto 22).$$

У розділі 3.3 наведено приклад роботи двопараметричного методу оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад.

Висновки за розділом

1. Запропоновано три нових методи оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад: однопараметричний метод оптимальної екстраполяції, модернізований однопараметричний метод оптимальної екстраполяції та двопараметричний метод оптимальної екстраполяції.

2. Перевагою запропонованих однопараметричної та двопараметричної екстраполяції відносно до більшості існуючих методів екстраполяції є те, що для них достатньо мати два попередніх значення процесу (Y_1, Y_2) для екстраполяції третього значення Y_3*.

3. В кожному з запропонованих методів розроблено структуру схем алгоритмів, які дозволили провести експеримент за допомогою системи *MathCAD*.

4. Доведена працездатність та ефективність запропонованих методів завдяки статистичному імітаційному моделюванню в системі *MathCAD*.

5. Завдяки імітаційному моделюванню можливо проводити дослідження впливу зміни різних вхідних параметрів на параметри процесу екстраполяції: екстрапольоване значення Y_3^*; дисперсія екстрапольованого значення $D[Y_3^*]$; дисперсія похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$; відношення сигнал/шум – h_1; відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3^*]$ – h_2; відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції – h_3.

6. Графіки залежності $X(t)$, $Y(t)$, Y_{opt} від часу t візуально демонструють зв’язок процесів зміни фізичного сигналу без завади $X(t)$, сигналу, що спостерігається $Y(t)$ з оптимальним екстрапольованим значенням Y_3^*, який позначається Y_{opt}.

7. Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha)$ від параметра α для однопараметричних методів наглядно вказує на те, що дисперсія похибки екстраполяції має мінімум в точці α_{op}.

8. Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha)$ від параметрів α_1 та α_2 для двопараметричного методу наглядно вказує на те, що дисперсія похибки екстраполяції має мінімум при значеннях $\alpha_{1\mathrm{opt}}$ та $\alpha_{2\mathrm{opt}}$.

9. Модернізований однопараметричний метод екстраполяції позбавлений недоліку однопараметричного методу в якому α_{opt} може бути від'ємним.

10. Двопараметричний метод порівняно з однопараметричними методами має ряд переваг:

1.1. На сумісних графіках $X(t)$, $Y(t)$, Y_{opt} від часу t видно, що екстрапольоване значення Y_3^* розташоване ближче до реального значення процесу $X(t)$ відносно процесу, що спостерігається $Y(t)$ для двох параметричного методу порівняно з одно параметричним.

1.2. Параметр $h1$ – відношення сигнал шум має більше значення (для однопараметричного методу $h1$ = 867,9, для двопараметричного $h1$ = 1127.7).

1.3. Дисперсія похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{1opt},\alpha_{2opt})_{min}$ зменшується в двопараметричному методі відносно одно параметричного метода (0,000104 – для однопараметричного методу, 0.00008 – для двопараметричного методу).

Висновки 1 – 10 дозволяють стверджувати, що мета, поставлена у розділі 2, виконана.

11. Недоліком запропонованих методів одно параметричної та двопараметричної екстраполяції є те, що вони не дозволяють виконувати екстраполяцію послідуючих значень процесу в часі (Y_4*, Y_5*, …).

12. Запропоновані методи однопараметричної та двопараметричної екстраполяції вимагають знання деякої апріорної інформації про процес, що екстраполюється.

РОЗДІЛ 3
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ДІЄЗДАТНОСТІ ТА ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ СТАТИСТИЧНОГО ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

3.1. Експериментальна перевірка однопараметричного метода екстраполяції методом статичного імітаційного моделювання

Для того, щоб перевірити дієздатність та ефективність метода був проведений експеримент 1 методом статистичного імітаційного моделювання (СІМ). В експерименті 1 була поставлена задача – методом СІМ в системі *MathCAD* встановити часові залежності наступних випадкових величин : X_i, Y_i (i = 1…15), оптимального екстрапольованого значення Y_3*, а також значення α_{opt}, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$, $D[y_3^*]$, h_1, h_2, h_3 для інтервалу кореляції завади $\Delta\tau_\xi =$ 0,5 с.

Початковими даними для МСІМ вибрані такі значення величин:

t_1 = 6 с ; t_2 = 10 с – часові відліки вимірювання параметрів X_i і Y_i;

t_3 = 12 с – момент часу для екстраполяції значення Y_3;

m_0 = 1 *В*; = 0,02 *В* / $\sqrt{c}$ – математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, що мають гаусовський розподіл, а σ_0 = = 0,3 *В*, σ_1 = 0,002 *В* – їх середньоквадратичні відхилення;

σ_ξ = 0,01 В – середньоквадратичне відхилення завади;

γ = 0,5 – коефіцієнт не лінійності.

За допомогою стандартної функції *MathCAD rnorm* {*n, M, y*}, де число реалізацій вибране n = 1; M – математичне очікування; $y = \sigma_i$ – середньоквадратичне відхилення НВС, обчислюються значення коефіцієнтів a_0 і a_1 і п'ятнадцять значень завади ξ .

Всі результати експерименту наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Результати першого експерименту

Параметр	Результат
1	2
a_0	0,71456
a_1	0,020087
$X(t_1)$	0,763763
$X(t_2)$	0,778081
$X(t_3)$	0,784143
$Y(t_1)$	0,779228
$Y(t_2)$	0,782672
$Y(t_3)$	0,771722
$M[Y(t_1)]$	1,04899
$M[Y(t_2)]$	1,063246
$M[Y(t_3)]$	1,069282
$D[Y(t_1)]$	0,090124
$D[Y(t_2)]$	0,09014
$D[Y(t_3)]$	0,090148
$k_y(t_1 , t_2)$	0,090068
$k_y(t_1 , t_3)$	0,090056
$k_y(t_2 , t_3)$	0,090104
α_{opt}	- 0,187055
Y_3^*	0,783316
$D[Y_3^*]$	0,090172
$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$	0,000104
h_1	867,9101
h_2	0,999739
h_3	- 0,226351
$\xi\ (6)$	0,0015465

Продовження таблиці 3.1

1	2
$\xi\,(10)$	0,004591
$\xi\,(12)$	-0,012421

На рис. 3.1 наведені графіки X_i, Y_i (при i = 1…15) $Y_{opt} = Y_3^*$.

На рис. 3.2 наведений графік $D_\varepsilon(\alpha_{\mathrm{opt}}) = f\,(\alpha)$.

З вищесказаного можна зробити наступні висновки:

1. В підрозділі 2.2 запропонований новий метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад, який по двом попереднім значенням сигналу Y_1, Y_2, що спостерігаються, дозволяє отримати третє прогнозне значення сигналу Y_3*, та його ймовірнісні параметри: $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{\mathrm{opt}})_{\mathrm{min}}$. Тому основна мета підрозділу 2.2 – виконана.

2. Запропонований метод одно параметричної екстраполяції передбачає перевірку виконання необхідної та достатньої умов існування мінімуму дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{\mathrm{opt}})_{\mathrm{min}}$.

3. На основі запропонованого методу розроблена структурна схема алгоритму однопараметричної екстраполяції.

4. На основі структурної схеми алгоритму однопараметричної екстраполяції проведено експеримент методом СІМ з використанням системи *MathCAD.*

5. Метод СІМ дозволяє отримати не тільки числові характеристики процесу екстраполяції, але й побудувати суміщений графік випадкових величин $X(t)$, $Y(t)$, Y_3*, наведений на рис. 3.1, що дає наглядне уявлення про процеси, що моделюються. З графіка рис. 3.1 видно, що в момент екстраполяції t = 12 с екстрапольоване значення $Y_3^* = Y_{opt}$ розташоване ближче до реального сигналу $X(12)$ ніж $Y(12)$.

6. Метод СІМ дозволяє отримати двомірний графік $D_\varepsilon(\alpha)$ (рис. 3.2), з якого наглядно видно, що дисперсія похибки екстраполяції є мінімальною при $\alpha = \alpha_{\mathrm{opt}}$.

7. Коефіцієнт h_1 = 867.7 великий (табл. 3.1.), що свідчить про те, що на виході екстраполятора гарне відношення «сигнал – шум».

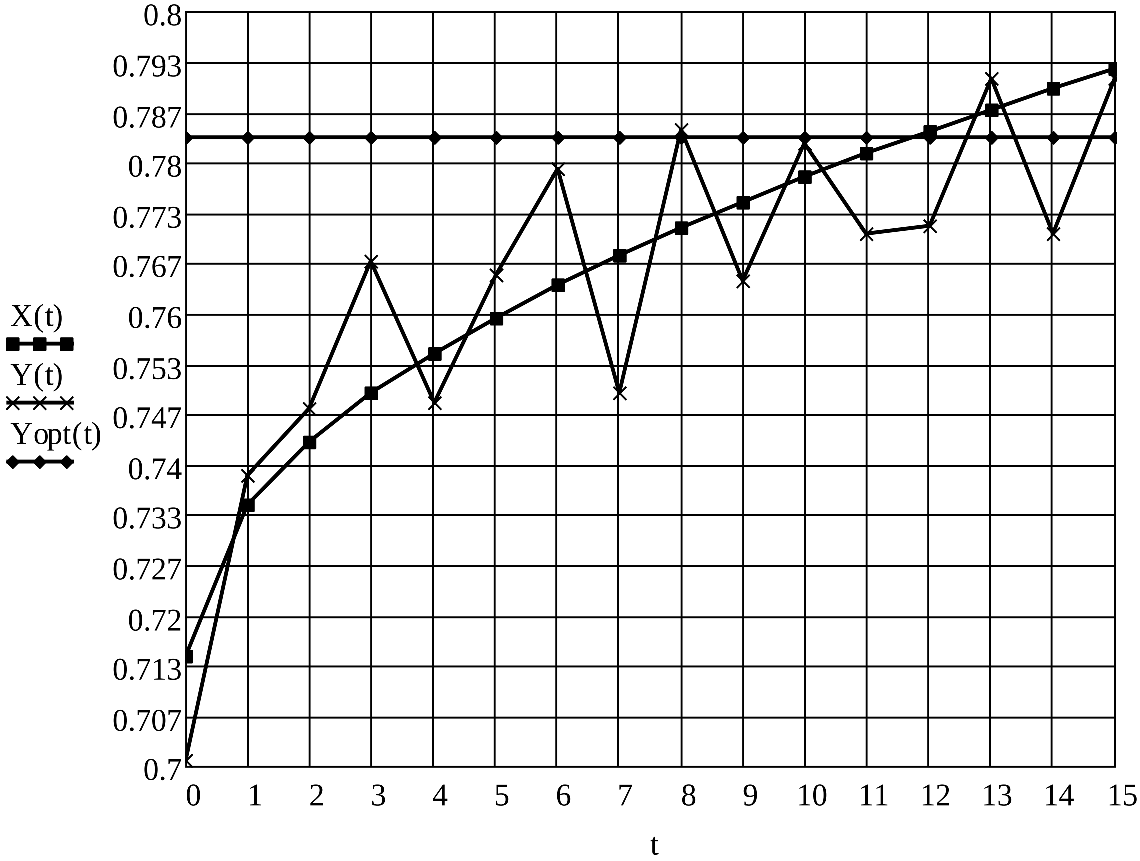

Рис. 3.1. Графіки залежності $X(t)$, $Y(t)$, Y_{opt} від часу t

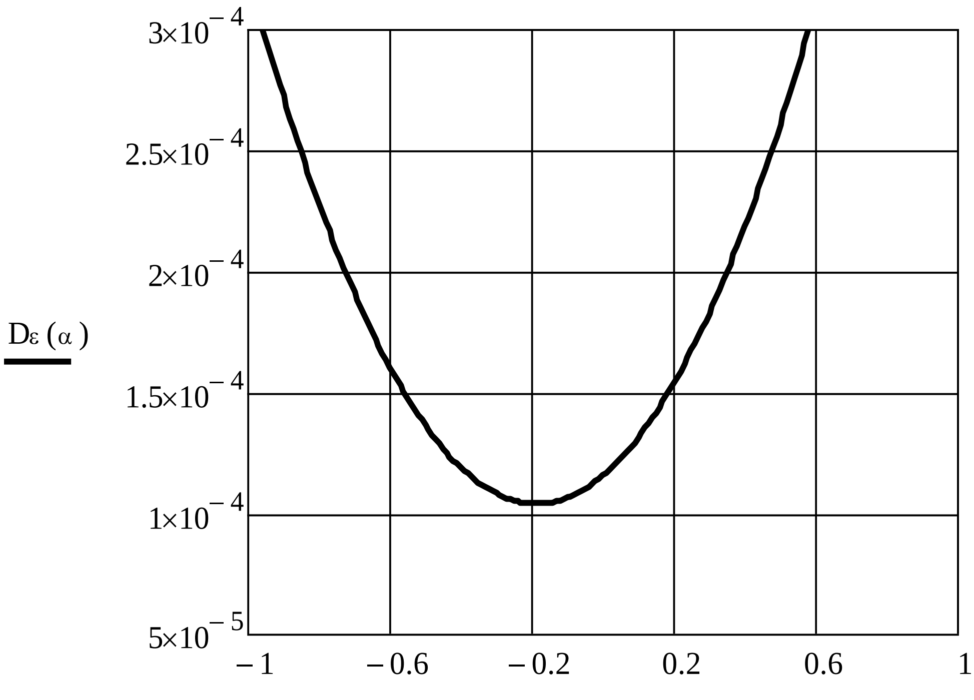

Рис. 3.2. Графік залежності $D_{\varepsilon}(\alpha)$ від параметра α

8. Коефіцієнт h_2 = 0.999 (табл. 3.1.). Це свідчить про те, що метод однопараметричної екстраполяції дозволяє обчислювати не тільки оптимальне прогнозоване значення Y_3* , але також прогнозувати дисперсію майбутнього (екстрапольованого) значення $D[Y_3*]$.

9. Таким чином, в цьому підрозділі результати експерименту вказують на те, що метод однопараметричної екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів на тлі завад працює ефективно, тому мета підрозділу 2.2. досягнута.

3.2. Експериментальна перевірка дієздатності модернізованого параметричного метода екстраполяції методом СІМ

Для того, щоб перевірити дієздатність та ефективність метода був проведений експеримент методом СІМ. В експерименті була поставлена наступна задача – методом СІМ в системі *MathCAD* встановити часові залежності наступних випадкових величин : X_i, Y_i (i = 1…15), оптимального екстрапольованого значення Y_3*, а також значення α_{opt}, $D_\varepsilon(\alpha_{\text{opt}})_{\min}$, $D[Y_3^*]$, h_1, h_2, h_3 для інтервалу кореляції завади $\Delta\tau_\xi$ = 0,5 с.

Початковими даними для СІМ вибрані такі значення величин:

t_1 = 6 с ; t_2 = 10 с – часові відліки вимірювання параметрів X_i і Y_i;

t_3 = 12 с – момент часу для екстраполяції значення Y_3;

m_0 = 1 *В* ; m_1 = 0,02 *В* / $\sqrt{c}$ – математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, що мають гаусовський розподіл, а σ_0 = = 0,3 *В* , σ_1 = 0,002 *В* – їх середньоквадратичні відхилення;

σ_ξ = 0,01 *В* – середньоквадратичне відхилення завади;

γ = 0,5 – коефіцієнт нелінійності.

За допомогою стандартної функції *MathCAD rnorm* {*n, M, y*}, де число реалізацій вибране *n* = 1; *M* – математичне очікування; у = σ_i – середньоквадратичне відхилення НВС, обчислюються значення коефіцієнтів a_0 і a_1 і п’ятнадцять значень завади ξ .

Всі результати експерименту наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Результати другого експерименту

Параметр	Результат
1	2
a_0	0,71456
a_1	0,020087
$X(t_1)$	0,763763
$X(t_2)$	0,778081
$X(t_3)$	0,784143
a_0	0,71456
$Y(t_1)$	0,779228
$Y(t_2)$	0,782672
$Y(t_3)$	0,771722
$M[Y(t_1)]$	1,04899
$M[Y(t_2)]$	1,063246
$Y(t_1)$	0,779228
$M[Y(t_3)]$	1,069282
$D[Y(t_1)]$	0,090124
$D[Y(t_2)]$	0,09014
$D[Y(t_3)]$	0,090148
$k_y(t_1 , t_2)$	0,090068
$M[Y(t_3)]$	1,069282
$k_y(t_1 , t_3)$	0,090056
$k_y(t_2 , t_3)$	0,090104
α_{opt}	1,187055
Y_3^*	0,783316
$D[Y_3^*]$	0,090172
$k_y(t_1 , t_3)$	0,090056
$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$	0,000104

Продовження таблиці 3.2

1	2
h_1	867,9101
h_2	0,999739
h_3	-0,226351
ξ (6)	0,0015465
$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$	0,000104
ξ (10)	0,004591
ξ (12)	-0,012421

На рис. 3.3 наведені графіки X_i, Y_i (при i = 1…15) $Y_{opt} = Y_3^*$.

На рис. 3.4 наведений графік $D_\varepsilon(\alpha_{opt}) = f(\alpha)$.

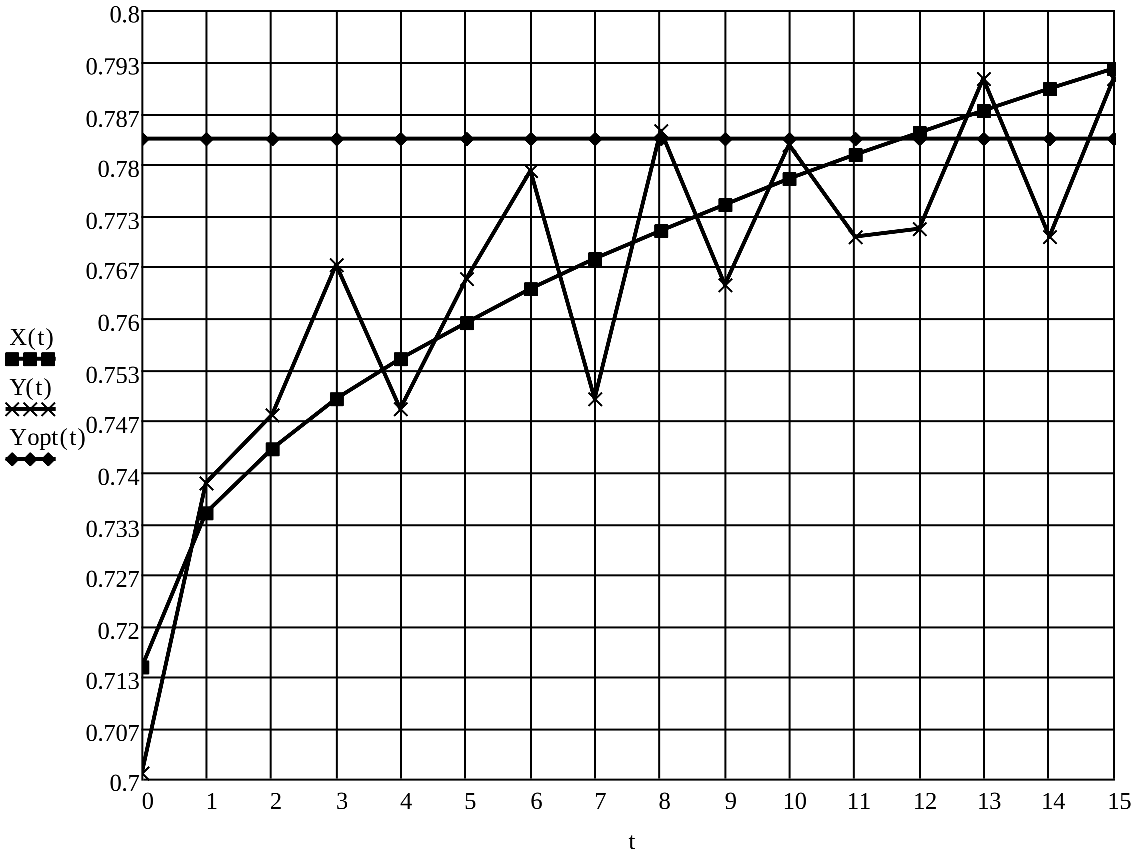

Рис. 3.3. Графіки залежності $X(t)$, $Y(t)$, Y_{opt} від часу t

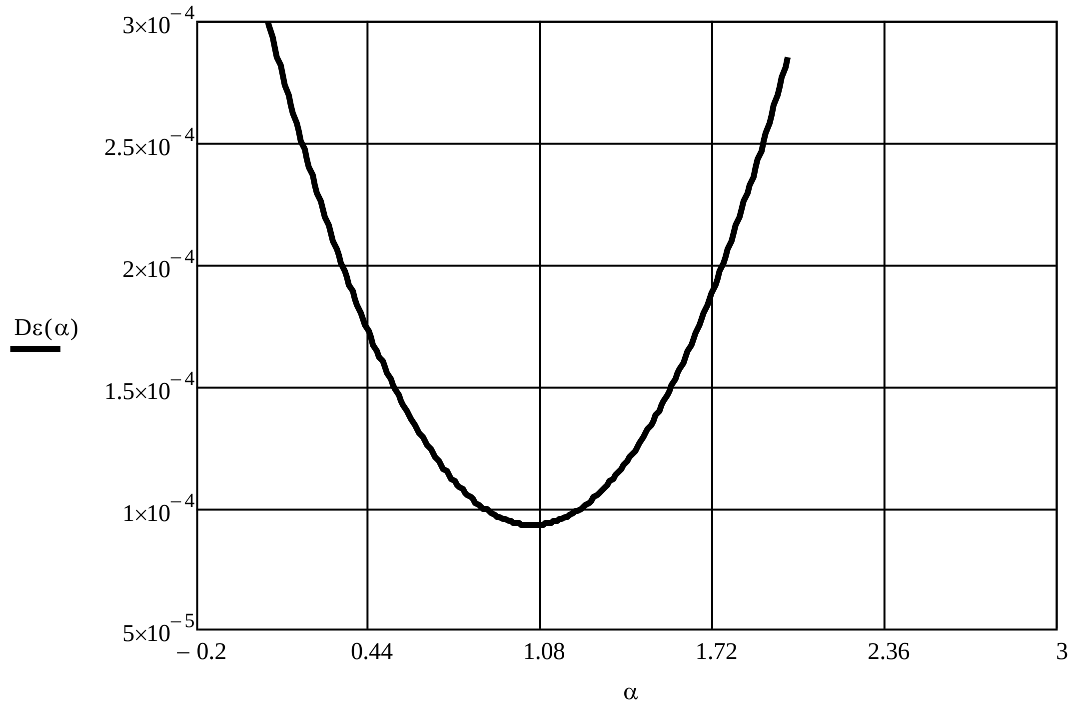

Рис. 3.4. Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha)$ від параметра α

З вищесказаного можна зробити наступні висновки:

1. В підрозділі 2.3 запропонований новий модернізований метод одно параметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів, який позбавлений недоліків, що відносяться до одно параметричного методу екстраполяції, розробленого в підрозділі 2.2. Тому мета, поставлена у підрозділі 2.3, досягнута.

2. Запропонований новий модернізований метод однопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів, який по двом попереднім значенням сигналу Y_1 та Y_2, що спостерігаються, отримати третій – прогнозне значення сигналу Y_3*, та його ймовірнісні параметри: $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$. До того ж, параметри оптимізації α_{opt} буде завжди приймати позитивне значення.

3. Запропонований новий метод однопараметричної екстраполяції передбачає обов'язкову перевірку виконання необхідної та достатньої умов існування мінімуму дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$.

4. Структурна схема алгоритму модернізованого методу екстраполяції має такий же вигляд, як і для методу в підрозділі 2.2, але формули визначення основних ймовірнісних параметрів – інші.

5. На основі структурної схеми модернізованого алгоритму однопараметричної екстраполяції та основних співвідношень, запропонованих у підрозділі 2.3 проведено експеримент методом СІМ з використанням системи *MathCAD*

6. Метод СІМ дозволяє отримати не тільки числові характеристики процесу екстраполяції, які наведені у табл. 3.2, але й побудувати суміщений графік випадкових величин $X(t)$, $Y(t)$ та Y_3*, приведений на рис. 3.3. цей графік дає наглядне уявлення про процеси, що моделюються. З графіку, рис. 3.3 видно, що в момент екстраполяції t = 12 с екстрапольоване значення $Y_3^* = Y_{opt}$ розташоване ближче до реального сигналу $X(12)$ ніж $Y(12)$.

7. З порівняння однойменних параметрів $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$, h_1 , h_2 з табл. 3.1 і табл. 3.2 видно, що вони однакові

8. Метод СІМ дозволяє отримати двомірний графік $D_\varepsilon(\alpha)_{min}$ (рис 3.4), з якого видно що дисперсія похибки екстраполяції є мінімальною при $\alpha = \alpha_{opt}$.

9. В цьому підрозділі результати експерименту вказують на те, що модернізований метод однопараметричної екстраполяції НВС на тлі завад працює ефективно (показує таку ж ефективність, що і метод однопараметричної екстраполяції, запропонованого в підрозділі 2.2), тому мета підрозділу 2.3 досягнута.

3.3. Експериментальна перевірка дієздатності двопараметричного методу екстраполяції методом СІМ

Для того, щоб перевірити дієздатність та ефективність метода був проведений експеримент. В експерименті була поставлена наступна задача – методом СІМ в системі *MathCAD* встановити часові залежності наступних випадкових величин: X_i, Y_i (i = 1…15), оптимального екстрапольованого значення Y_3*, а також значення α_{1opt},α_{2opt} , $D_\varepsilon(\alpha_{1opt},\alpha_{2opt})_{min}$ $D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$, $D[y_3^*]$, h_1, h_2, h_3 для інтервалу кореляції $\Delta\tau_\xi$ = 0,5 с.

Початковими даними для методу СІМ вибрані такі значення величин:

t_1 = 6 с ; t_2 = 10 с – часові відліки вимірювання параметрів X_i і Y_i;

t_3 = 12 с – момент часу для екстраполяції значення Y_3;

m_0 = 1 B; m_1 = 0,02 B / $\sqrt{c}$ – математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, що мають гаусовський розподіл, а σ_0 = = 0,3 B, σ_1 = 0,002 B – їх середньоквадратичні відхилення;

σ_ξ = 0,01 B – середньоквадратичне відхилення завади;

γ = 0,7 – коефіцієнт не лінійності.

За допомогою стандартної функції *MathCAD rnorm* {*n*, *M*, *y*}, де число реалізацій вибране *n* = 1; *M* – математичне очікування; $y = \sigma_i$ – середньоквадратичне відхилення НВС, обчислюються значення коефіцієнтів a_0 і a_1 і п'ятнадцять значень завади ξ.

Всі результати експерименту наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Результати третього експерименту

Параметр	Результат
1	2
a_0	0,71456
a_1	0,020087
$X(t_1)$	0,784968
$X(t_2)$	0,815233
$X(t_3)$	0,828938
$Y(t_1)$	0,800433
$Y(t_2)$	0,819824
$Y(t_3)$	0,816517
$M[Y(t_1)]$	1,070103
$M[Y(t_2)]$	1,100237
$M[Y(t_3)]$	1,113882
$D[Y(t_1)]$	0,090149
$D[Y(t_2)]$	0,0902
$D[Y(t_3)]$	0,09023
$k_y(t_1 , t_2)$	0,090107

Продовження таблиці 3.3

1	2
$k_y(t_1\ ,\ t_3\ )$	0,090102
$k_y(t_2\ ,\ t_3\ )$	0,090175
α_{opt1}	-0,037851
α_{opt2}	1,048406
Y_3^*	0,829211
$D[Y_3^*]$	0,092122
$D_\varepsilon(\alpha_{opt})_{min}$	0,000094
h_1	962,125565
h_2	0,97946
h_3	-20,176978
$\xi\ (6)$	0,015465
$\xi\ (10)$	0,004591
$\xi\ (12)$	-0,012421

На рис. 3.5 наведені графіки X_i, Y_i (при i = 1…15) та $Y_{opt}(t) = Y_3*$.

На рис. 3.6 наведений графік $D_\varepsilon = f(\alpha_1, \alpha_2)$.

З матеріалів підрозділу 2.4 можна зробити наступні висновки:

1. В підрозділі 2.4 розроблено новий метод двопараметричної оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, який не містить недоліків методів, запропонованих у підрозділах 2.2 та 2.3. Цей метод двопараметричної оптимальної екстраполяції по двом попереднім значенням сигналу Y_1 та Y_2, що спостерігаються, дозволяє визначити прогнозне оптимальне значення сигналу Y_3* , та його ймовірності параметри: $D[Y(t_3)]$, $D[Y_3^*]$, $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt})_{min}$. Тому основна мета підрозділу 2.4 – виконана.

2. Запропонований метод двопараметричної оптимальної екстраполяції передбачає перевірку виконання необхідної та достатньої умов існування мінімуму дисперсії похибки екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}\ ,\ \alpha_{2opt})_{min}$. Оскільки функція $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}\ ,\ \alpha_{2opt})$ має два аргументи ($\alpha_{1opt}\ ,\ \alpha_{2opt}$), то для перевірки достатньої умови існування мінімуму недостатньо того, щоб другі похідні були більше нуля. Достатньо, щоб квадратична

форма матриці других похідних була позитивно визначеною. В підрозділі 2.4 отримані математичні вирази, які дозволяють виконувати ці дві перевірки.

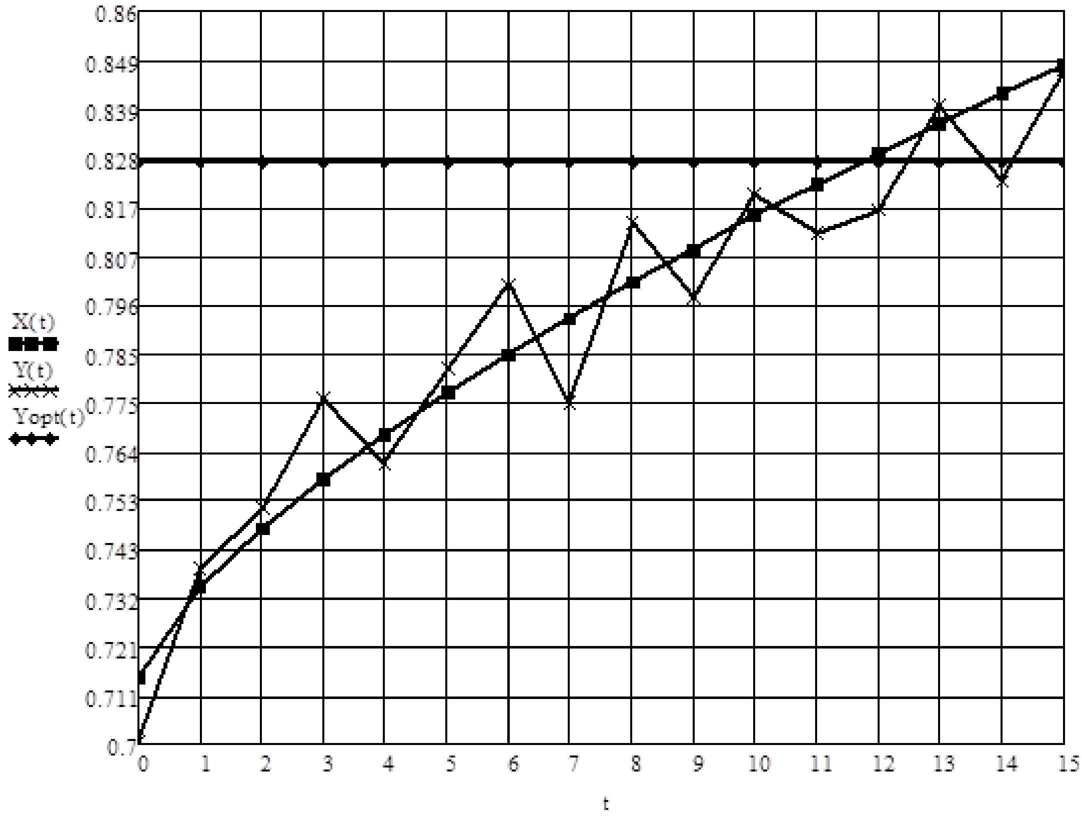

Рис. 3.5. Графіки залежності $X(t)$, $Y(t)$, Y_{opt} від часу t

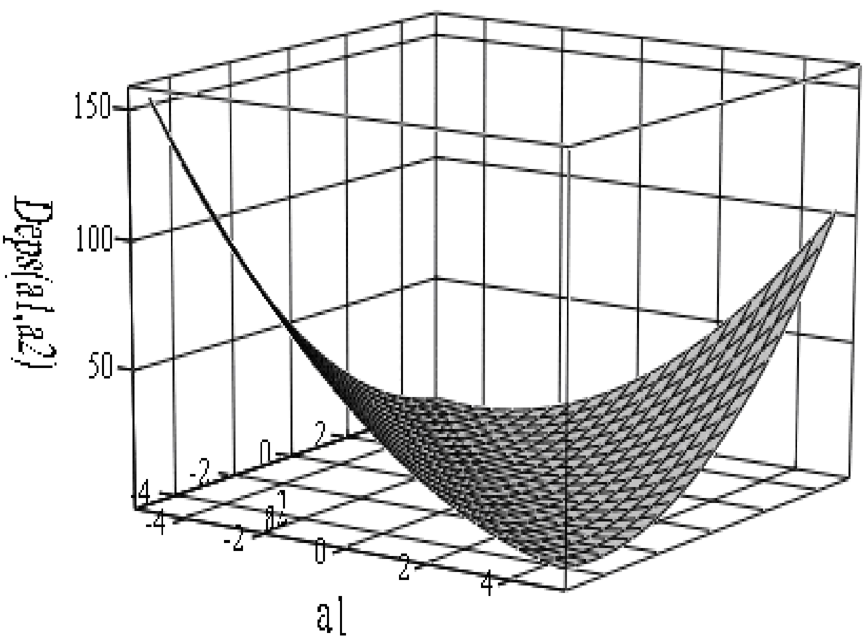

Рис. 3.6. Графік залежності D_ε від параметрів α_1 та α_2

3. На основі методу двопараметричної оптимальної екстраполяції ВНС розроблена структурна схема алгоритму екстраполяції.

4. На основі структурної схеми алгоритму двопараметричної екстраполяції проведено експеримент методом СІМ з використанням системи *MathCAD.*

5. В результаті експерименту отримані не тільки числові характеристики процесу екстраполяції, але й побудований графік випадкових величин $X(t)$, $Y(t)$ та Y_3*, приведений на рис. 3.5, який дає наглядне уявлення про процеси моделювання. З цього графіку видно, що в момент екстраполяції $t = 12$ с екстрапольоване значення $Y_3* = Y_{opt}$ розташоване ближче до реального сигналу $X(12)$ ніж $Y(12)$.

6. В експерименті отримано трьохмірний графік $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2)$ (рис 3.6), з якого видно, що дисперсія похибки екстраполяції є мінімальною при $\alpha = \alpha_{1opt}$, α_{2opt} і дорівнює 0,000094. Цей параметр на порядок менше, ніж в експерименті для однопараметричного методу. Це доводить, що двох параметричний метод екстраполяції є більш ефективний, ніж одно параметричний.

7. Коефіцієнт $h_1 = 962{,}1$ є великий, що говорить про те, що на виході екстраполятора гарне відношення «сигнал – шум». Цей параметр набагато більше, ніж в перших двох експериментах. Це доводить, що двопараметричний метод екстраполяції є більш ефективний, ніж однопараметричний.

8. Коефіцієнт $h_2 = 0{,}979$. Він менше, ніж в перших двох експериментах.

9. Таким чином, результати останнього експерименту вказують на те, що метод двопараметричної екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів на тлі завад для довільного значення коефіцієнта нелінійності γ працює ефективно, тому мету, поставлену в розділі 2.4 досягнуто.

Висновки за розділом

В даному розділі описано результати трьох нових методів оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад: однопараметричний метод оптимальної екстраполяції, модернізований однопараметричний метод оптимальної екстраполяції та двопараметричний метод оптимальної екстраполяції. Перевагою запропонованих однопараметричної та двопараметричної екстраполяції відносно до більшості існуючих методів екстраполяції є те, що для них достатньо мати два попередніх значення процесу (Y_1, Y_2) для екстраполяції третього значення Y_3*5.

Результати експерименту вказують на те, що модернізований метод однопараметричної екстраполяції НВС на тлі завад працює ефективно (показує таку ж ефективність, що і метод однопараметричної екстраполяції. Результати останнього експерименту вказують на те, що метод двопараметричної екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів на тлі завад для довільного значення коефіцієнта нелінійності γ працює також ефективно.

ВИСНОВКИ

Вирішено завдання розроблення моделей, методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції ВНП та оцінювання характеристик трафіку локальної КМ на фоні завад. Розроблено математичну модель ВНП і 3 методи оптимальної екстраполяції цього процесу, які дозволяють за двома значеннями ВНП та набору апріорної імовірнісної інформації виконати оптимальну екстраполяцію третьої, четвертої і п'ятої точок процесу. Розроблено методику оцінювання характеристик трафіку локальної КМ. Основні наукові і практичні результати дипломної роботи:

1. Виконано аналіз відомих методів екстраполяції випадкових процесів та виявлено їх недоліки.

2. Розроблено математичну модель випадкового нестаціонарного процесу і необхідної апріорної інформації для забезпечення процесу оптимальної екстраполяції ВНП.

3. Запропоновано два нові методи та алгоритми оптимальної екстраполяції випадкового нестаціонарного процесу на фоні завади - однопараметричний і двопараметричний – на базі із запропонованою математичною моделлю і відомої апріорної імовірнісної інформації ВНП. Розроблено схеми алгоритмів та програми моделювання ВНП і процесу екстраполяції з використанням методу статистичного імітаційного моделювання і системи *MathCAD*, за допомогою яких виконано два експерименти і показано, що запропоновані методи виявилися ефективними, а найвищу ефективність має метод двопараметричної екстраполяції.

Для оцінювання характеристик нестаціонарного трафіку КМ в оперативному режимі запропоновано набір апріорних даних і алгоритм довизначення невідомих імовірнісних параметрів для точки екстраполяції. Показано, що на базі довизначених параметрів трафіку можливе використання двопараметричного методу оптимальної екстраполяції для реальної КМ в оперативному режимі. Запропоновано алгоритм, який на базі пропонованої методики і наявності спеціального обладнання та програмного забезпечення сервера дозволить перерозподіляти трафік між користувачами чи інтерфейсами при наближенні параметрів трафіку до максимально дозволених.

Результати експериментальних досліджень, запропонованих методів і алгоритмів оптимальної екстраполяції трафіку локальної КМ, підтвердили адекватність їх розробленим моделям і алгоритмам, дозволили виявити закономірності, корисні властивості та можливість практичного використання методів, алгоритмів і розроблених програм.

СПИСОК БІБЛІОГРАФІЧНИХ ПОСИЛАНЬ ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бакланов И.Г. NGN: принцыпы построения и организации. / И.Г. Бакланов под. ред. Ю.Н. Чернышова.-М.:Эко-Трендз, 2008. – 400 с. : ил.

2. Росляков А.В., Ванюшин С.В., Самсонов М.Ю., Шибаева И.В., Чечнева И.А. Сети следующего поколения *NGN* / А.В. Росляков, С.В. Ванюшин, М.Ю. Самсонов, И.В. Шибаева, И.А. Чечнева под ред. Рослякова А.В.-М.: Эко-Трендз, 2008. – 424 с. : ил.

3. Хайкин С. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е изд. / С. Хайкин: Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 864 с. : ил.

4. Люггер Д.Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е изд. / Д.Ф. Люггер: Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2008. – 1104 с. : ил.

5. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд. / С. Хайкин: Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2008. – 1104 с. : ил.

6. Тюхтин М.Ф. Интернет-телевидение / М.Ф. Тюхтин. – М. : Горячая линия - Телеком, 2008. – 335 с.

7. Хелд Д. Технологии передачи данных, 7-е изд. / Д. Хелд: Пер. с англ. под общ. ред. А.Куленко. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург.-2006. – 720 с.

8. Солонин В. IP телефония / В. Солонин – Электрон. текстовые данные Інтерет-ресурс: - Режим доступу: http//cnews.ru/reviews/ip2003/part2/ip-pbx.shtml вільний.

9. Деарт В.Ю. *МТ*1.ультисервисные сети / В.Ю. Деарт. – М. : Изд-во МТУСИ.- 2007. – 204 с.

10. Бакланов И.Г. Тестирование и диагностика систем связи / И.Г. Бакланов. – М. : Эко-Трендз, 2001. – 384 с. : ил.

11. Столингс В. Современные компьютерные сети / В. Столингс - СПб.: Питер, 2003. – 783с.

12. Інтелектуальні системи : підручник / за ред. В.В. Литвин, В.В. Пасічник, Ю.В. Яцишин. – Львів : «Новий Світ-2000», 2009. – 406 с.

13. Задачі оптимального проектування надійних мереж. / за ред. Н.З. Шора. – К. : Наукова думка, 2005. – 230 с.

14. Международный стандарт ГОСТ 27.205-97. Надежность в технике. Проектная оценка сложных систем с учетом технического и программного обеспечения и оперативного персонала. Основные положения. Международный совет по стандартизации, метрологии и сертификации.1998.-21с.

15. ISO/IEC 7498-2-89. Информационные технологии. Взаимосвязь открытых систем. Базовая эталонная модель. Часть 2. Архитектура информационной безопасности, 1989.

16. Теория телетрафика : учебник для вузов, 2-е изд. / Б.С. Лившиц , А.П. Пшеничников, А.Д. Харкевич. – М. : Связь, 1979. – 224 с. : ил.

17. Олифер Н.А. Средства анализа и оптимизации локольных сетей / Н.А. Олифер – М. : Центр информационных технологий, 1998. – 120 с.

18. Даниліна Г.В., Гузій М.М., Ігнатов В.О., Милокум Я.В. Методи і алгоритми оптимального управління трафіком в обчислювальних мережах. / Г.В. Даниліна, М.М. Гузій, В.О. Ігнатов, Я.В. Милокум.- Проблеми інформатизації та управління. – -К. : НАУ, 2006. –вип. 17. С. 32 – 37.

19. Даниліна Г.В., Гузій М.М., Жуков І.А.,Ігнатов В.О. Моделювання перехідних режимів трафіку комп'ютерної мережі./ Г.В. Даниліна, М.М. Гузій, І.А. Жуков, В.О Ігнатов. Информационные технологии и безопасность: Сборник научных трудов.- К.: НАН Украины, Институт проблем регистрации информации,2006, Иып.9.- С.84-87.

20. Даниліна Г.В., Гузій М.М., Ігнатов В.О., Милокум Я.В.Оцінювання ефективності використання ліній зв'язку в обчислювальних мережах. / Г.В. Даниліна, М.М. Гузій, В.О. Ігнатов, Я.В Милокум. - Проблеми інформатизації та управління.- К.: НАУ, 2006, Вип..18 .С.54 – 59.

21. Прохоренков А.М., Качала Н.М. Использование методов нечеткой логики для определения классификационных характеристик случайных процессов. / А.М.

Прохоренков, Н.М. Качала - М.: Вестник МГТУ, т.9, №3, 2006 г. С.514-521. (514-515).

22. Бокс Дж., Дженкинс Л. Анализ временных рядов (в 2-ч томах). / Дж. Бокс, Л. Дженкинс. - М.: Мир, 1972 г. - 456С. (42-43).

23. Бокс Дж., Дженкинс Л. Анализ временных рядов (в 2-ч томах). / Дж. Бокс, Л. Дженкинс. - М.: Мир, 1972 г. - 456С. (15).

24. Бідюк П.І.,Савенков О.І., Баклан І.В. Часові ряди: моделювання та прогнозування. / П.І. Бідюк, О.І. Савенков, І.В. Баклан. – К.: ЕКМО, 2004 р. – 144С. (с3-4).

25. Репин Дмитрий Сергеевич. Анализ и моделирование трафика в корпоративных компьютерных сетях : диссертация кандидата технических наук : 05.13.01 / Д.С. Репин; [Место защиты: Моск. гос. гор. ун-т].- Москва, 2008.- 143 с.: ил. РГБ ОД, 61 09-5/560.

26. А.С. Понизовкин. Свойства динамических процессов в компьютерных сетях и методы управления [Інтерет-ресурс]. - Режим доступу: http://www.ict.edu.ru/vconf/files/tm01_417.doc вільний.

27. Методы прогнозирования [Інтерет-ресурс]. - Режим доступу: http://www.neuroproject.ru/ forecasting_tutorial.php вільний.

28. Методы прогнозирования [Інтерет-ресурс]. - Режим доступу: http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/411 вільний.

29. Аверин Евгений Геннадиевич. Автореферат по магистерской работе Анализ моделей прогнозирования для системы мониторинга опасных ситуаций на территории Донецкой области [Інтерет-ресурс]. - Режим доступу: http://masters.donntu.edu.ua/2005/fvti/averin/diss/index.htm вільний.

30. Ігнатов В.О., Андреєв О.В., Андреєв В.І. Метод оптимальної екстраполяції випадкових сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2010. – Вип. 2(30). – С. 79-84.

31. Патент на корисну модель 55212 Україна, МПК(2009) *G*01*S* 7/36, *G*06*C* 17/00. Спосіб оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / Ігнатов В.О., Андреєв О.В., Гузій М.М., Андрєєв В.І. заявник та патентовлас-

ник Національний авіаційний університет – №u201006043 заявл. 19.05.2010, опубл. 10.12.2010, Бюл. №23. – 16 с.

32. Патент на корисну модель 60390 Україна, МПК *G*06*G* 7/30(2006.01), *G*05*B* 13/02(2006.01), *G*03*B*15/02(2006.01). Цифровий оптимальний екстраполятор нестаціонарного трафіку комп'ютерних мереж / Гузій М.М., Ігнатов В.О., Андреєв О.В., Андрєєв В.І. заявник та патентовласник Національний авіаційний університет – №u201006549 заявл. 28.05.2010; опубл. 25.06.2011, Бюл. №12. – 12 с.

33. Ігнатов В.О., Андреєв О.В., Андреєв В.І. Метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2010. – Вип. 4(32). – С. 41-46.

34. Патент на корисну модель 62878 Україна, МПК(2011.01) *G*06*C* 3/00, *G*01*S* 17/00 Спосіб двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, І.А.Жуков, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв. Заявник та патентовласник Національний авіаційний університет – №u201014719 заявл. 08.12.2010; опубл. 26.09.2011, Бюл. №18. – 16 с.

35. Андреев А.В., Андреев В.И., Гузий Н.Н., Ігнатов В.А. Цифровой оптимальный экстраполятор нестационарного трафика компьютерных сетей / А.В. Андреев, В.И. Андреев, Н.Н. Гузий, В.А. Ігнатов // Комп'ютерні системи та мережні технології (*CSNT*-2010): міжнар. наук.-техн. конф., 15-17 червня 2010р.: тези допов. – Київ, 2010. – С. 12.

36. Андреєв О.В. Спосіб двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / О.В. Андреєв // Політ-2011: міжнар. науково-практич. конф. молодих учених та студентів, 7-9 квітня 2011р.: тези допов. – К.: НАУ, 2011. – С. 224.