

Міністерство освіти і науки України
Національний авіаційний університет
Факультет екологічної безпеки, інженерії та технологій
Кафедра аерокосмічної геодезії

ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ
Завідувач випускової кафедри
д. ф.-м. н., проф. Железняк О.О.
« ____ » _____ 2020 р.

ДИПЛОМНА РОБОТА
(ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)
ЗДОБУВАЧА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ МАГІСТРА
ЗА ОПП «ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ»

Тема: «Глобальні гравітаційні аномалії динамічної фігури Землі»

Виконавець: студент групи ГС-208М Лятушинський Богдан Володимирович

Керівник: к.ф.-м.н. Терещенко Андрій Олександрович

Нормоконтролер: к.-ф.м.н., ст. дослідник Великодський Ю. І.

Київ 2020

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет екологічної безпеки інженерії та технологій
Кафедра аерокосмічної геодезії
Спеціальність 193 «Геодезія та землеустрій»
Освітньо-професійна програма «Геоінформаційні системи і технології»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач випускової кафедри

д. ф.-м.н., проф.

_____ Железняк О.О.

« _____ » _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ

на виконання дипломної роботи

Лятушинський Богдан Володимирович

1. Тема дипломної роботи: «Глобальні гравітаційні аномалії динамічної фігури Землі» затверджена наказом ректора від 25 жовтня 2019 р. №2499/ст.
2. Термін виконання роботи: з 25.10.2019 по 4.02.2020 р.
3. Вихідні дані до роботи: моделі гравітаційного поля Землі.
4. Зміст пояснювальної записки
5. Перелік обов'язкового графічного (ілюстративного) матеріалу: таблиці, рисунки.

6. Календарний план-графік

№ пор.	Завдання	Термін виконання	Відмітка про виконання
1.	Опрацювання спеціальної літератури за тематикою дипломної роботи.	25.10.2019 – 31.10.2019	Виконано
2.	Підготовка матеріалів першого розділу дипломної роботи	1.11.2019 – 11.11.2019	Виконано
3.	Підготовка матеріалів другого розділу дипломної роботи	12.11.2019 – 30.11.2019	Виконано
4.	Розробка практичної частини	1.12.2019 – 20.01.2020	Виконано
5.	Оформлення роботи	21.01.2020 – 29.01.2020	Виконано
6.	Подання дипломної роботи керівнику та рецензенту	3.02.2020	Виконано
7.	Нормоконтроль	3.02.2020	Виконано
8.	Розробка презентації, написання доповіді	4.02.2020	Виконано

7. Дата видачі завдання: 25.10.2019 р.

Керівник дипломної роботи к.ф.-м.н. _____ Терещенко А. О.

(підпис керівника)

Завдання прийняв до виконання _____ Лятушинський Б. В.

(підпис виконавця)

Реферат

Пояснювальна записка до дипломної роботи «Глобальні гравітаційні аномалії динамічної фігури Землі» містить 75 сторінок, 24 рисунки, 7 таблиць, 35 використаних джерел.

Об'єкт дослідження: динамічна фігура Землі.

Предмет дослідження: апроксимація сили тяжіння на поверхні Землі.

Мета дипломної роботи:

- ознайомитись з основними властивостями потенціалу сили тяжіння, застосуванням супутникових технологій для вивчення зовнішнього гравітаційного поля Землі, розкладанням гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями;
- дати характеристику особливостям аномальної складової гравітаційного поля Землі;
- на основі окремих моделей гравітаційного поля Землі розв'язати задачу про визначення параметрів земного еліпсоїда інерції – таких як головні моменти інерції та орієнтація осей еліпсоїда, виконати оцінку точності знайдених параметрів.

Актуальність дипломної роботи полягає в тому, що вивчення глобальних гравітаційних аномалій є одним з важливих способів отримання інформації про внутрішню будову Землі.

Отримані результати: описано основні властивості потенціалу сили тяжіння; застосування супутникових технологій для вивчення зовнішнього гравітаційного поля Землі; розкладання гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями; охарактеризовано глобальні властивості аномальної складової гравітаційного поля; розв'язана задача про визначення головних моментів інерції та орієнтації осей еліпсоїда інерції Землі.

Ключові слова: поле сили тяжіння, гравітаційний потенціал, гравітаційна аномалія, тензор інерції, еліпсоїд інерції.

Зміст

Реферат	4
Вступ	6
Розділ 1. Потенціал сили тяжіння та його властивості	8
1.1. Силоне поле. Поняття потенціалу, рівневих поверхонь, силових ліній	8
1.2. Сила тяжіння.....	10
1.3. Види потенціалів тяжіння	12
1.4. Властивості потенціалів тяжіння.....	14
1.5. Основні властивості кульових і сферичних функцій	15
1.6. Розкладання довільної функції в ряд за сферичними функціями.....	17
1.7. Класифікація сферичних функцій	22
1.8. Нормування сферичних функцій.....	29
1.9. Потенціал сили тяжіння і методи її визначення	30
1.10. Характеристика гравітаційного поля Землі і його зміни в часі	33
1.11. Розкладання гравітаційного потенціалу в ряд за кульовими функціями.....	38
Розділ 2. Проблема визначення зовнішнього гравітаційного поля і фігури Землі.....	40
2.1. Властивості збуреного потенціалу	43
2.2. Зв'язок між збуреним потенціалом і складовими ухилення виска ...	43
2.3. Нормальні висоти, аномалії висот. Зв'язок між збуреним потенціалом і аномалією висоти.....	46
2.4. Геоїд і квазігеоїд.....	47
2.5. Тензор і еліпсоїд інерції Землі.....	49
2.6. Головні осі, головні моменти і тензор інерції Землі	50
2.7. Параметри динамічної фігури і тензор інерції Землі	52
2.8. Супутникова альтиметрія.....	55
2.9. Орбіти штучного супутника	55
2.10. Визначення тесеральних гармонік і розташування станцій.....	59
2.11. Місія CHAMP	61
2.12. Місія GRACE.....	62
2.13. Місія GOCE	65
Розділ 3. Визначення параметрів та орієнтації еліпсоїда інерції Землі... 67	67
Висновки	72
Список використаних джерел.....	73

Вступ

Як відомо, геодезія, вирішуючи основну задачу – визначення фігури і зовнішнього гравітаційного поля Землі та їх змін у часі, інтегрується із всіма науками про Землю. Особливо велику і чи не основну роль відіграють геодезичні методи та результати вимірювань у вирішенні актуальних проблем такої галузі знань в науках про Землю, як геодинаміка, що має теоретичне і практичне значення. Щоб визначати параметри гравітаційного поля, обчислювати координати точок на земній поверхні та адекватно розуміти як відбуваються структуроутворюючі тектонічні процеси на Землі, необхідно точно знати, як змінюється форма нашої планети і чи змінюється взагалі. При розгляді ключових проблем геодинаміки форма нашої планети представляє істотний інтерес, так як форма нерозривно пов'язана з будовою та геодинамічними процесами, з історією виникнення та еволюцією Землі.

Об'єкт дослідження в дипломній роботі була динамічна фігура Землі.

Предмет дослідження – апроксимація сили тяжіння на поверхні Землі.

При виконанні дипломної роботи ставились такі задачі:

- ознайомитись з основними властивостями потенціалу сили тяжіння, застосуванням супутникових технологій для вивчення зовнішнього гравітаційного поля Землі, розкладанням гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями;
- дати характеристику особливостям аномальної складової гравітаційного поля Землі;
- на основі окремих моделей гравітаційного поля Землі розв'язати задачу про визначення параметрів земного еліпсоїда інерції – таких як головні моменти інерції та орієнтація осей еліпсоїда, виконати оцінку точності знайдених параметрів.

Актуальність дипломної роботи полягає в тому, що вивчення глобальних гравітаційних аномалій є одним з важливих способів отримання інформації про внутрішню будову Землі.

В дипломній роботі розв'язана задача про визначення параметрів земного еліпсоїда інерції – таких як головні моменти інерції та орієнтація осей еліпсоїда, виконана оцінка точності знайдених параметрів. Вказані параметри були отримані для деяких моделей гравітаційного поля Землі – EGM2008, EGM-IERS, EIGEN-6C, EIGEN-6C2.

Розділ 1. Потенціал сили тяжіння та його властивості

1.1. Силоне поле. Поняття потенціалу, рівневих поверхонь, силових ліній

Під фізичним полем розуміється особлива форма матерії, що зв'язує частинки речовини в єдину систему і передає з кінцевою швидкістю дію одних частинок на інші, тобто здійснює взаємодію частинок. До фізичних полів відносять електромагнітне, гравітаційне та ядерне (мезонне), яке здійснює взаємодію між нуклонами. Поле може бути стаціонарним (сталим), якщо в кожній точці простору воно не змінюється з плином часу, або нестаціонарним, якщо така зміна має місце. Поле може бути скалярним або векторним в залежності від характеру досліджуваної величини. Як приклад скалярного поля можна навести поле розподілу температур або поле розподілу густини. Характерними фізичними прикладами векторних полів є поле швидкостей, поле електричної напруженості, поле гравітаційних сил і т. д. Вивчення силових полів тяжіння і сили тяжіння необхідне для вирішення ряду завдань космонавтики та геодезії, пов'язаних із визначенням фігури Землі та інших космічних тіл. Будь-яке силоне поле визначається прискоренням в кожній точці простору, тобто силою, що діє на одиничну масу, вміщену в цю точку. Цю силу (прискорення) будемо позначати через g . Вона є векторною величиною, тобто окрім чисельного значення характеризується напрямком у просторі. Векторну величину сили \vec{g} можна представити через скалярні величини, якщо її виразити у вигляді складових по трьом заданим ортогональним прямокутним координатним осям x, y, z :

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad (1.1)$$

де g_x, g_y, g_z – проекції вектора g на осі координат; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, спрямовані відповідно вздовж осей x, y, z .

Таким чином, для визначення \vec{g} в будь-якій точці простору необхідно знати три величини: g_x, g_y, g_z . Вивчення властивостей силових полів значно полегшується, якщо замість трьох функцій: g_x, g_y, g_z розглядати тільки одну

функцію R , яка пов'язана з проекціями сили (прискорення) на координатні осі x, y, z співвідношеннями:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = g_x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = g_y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = g_z. \quad (1.2)$$

Функція R отримала назву потенціальної функції або потенціалу. Отже, потенціал може бути визначений як функція, частинні похідні якої по осях координат рівні проекціям сили (прискорення) на відповідні осі. З огляду на зв'язок (1.2) між потенціалом і складовими сили (прискорення), можна сказати, що потенціал повністю характеризує силове поле. Покажемо, що різниця потенціалів (як і потенціал) має цілком певний фізичний зміст.

$$R(x, y, z) = \text{const} \quad (1.3)$$

Отриманий вираз, що встановлює функціональну залежність між координатами в просторі, можна розглядати як рівняння деякої поверхні, яка має таку властивість, що у будь-якій її точці сила тяжіння спрямована по нормалі до поверхні. Така поверхня отримала назву рівневої. Потенціал на рівній поверхні всюди зберігає постійне значення, і робота при переміщенні точкового маси по цій поверхні дорівнює нулю. Змінюючи значення постійної в (1.3), будемо отримувати різний рівень поверхні.

Звідси робимо висновок, що відстань між двома сусідніми нескінченно близькими рівними поверхнями обернено пропорційна діючій силі. Криві, дотичні до яких збігаються з напрямом сили G , називаються силовими лініями. Силкові лінії ортогональні до рівних поверхонь. Нескінченно малий відрізок силової лінії визначається формулою (1.4).

$$\frac{d}{n} = \frac{dR}{g} \quad (1.4)$$

формула (1.4) дозволяє отримати повне значення діючої сили.

$$g = +\frac{dR}{dn} \quad ; \quad g = -\frac{dR}{dn} \quad (1.5)$$

Таким чином, щоб отримати повне значення діючої сили, потрібно взяти похідну від потенціальної функції по нормалі до рівної поверхні. Знак похідної $+$ або $-$ визначається напрямом нормалі, по якому береться похідна: якщо

похідна від потенціалу береться у напрямку зовнішньої нормалі, слід поставити знак «мінус» в (1.5), якщо внутрішньої, то знак буде «плюс».

1.2. Сила тяжіння

Як відомо, тяжіння є невід'ємною властивістю матерії. Тяжіння управляє рухом, планет і зірок. Закон гравітаційного взаємодії між окремими матеріальними частинками був встановлений Ньютоном і отримав найменування закону всесвітнього тяжіння. Цей закон можна сформулювати таким чином: дві «частинки» з масами m і m' взаємно притягуються з силою, пропорційною добутку цих мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними. Під «частинкою» тут маються на увазі тіла, розмірами яких можна знехтувати в порівнянні з відстанню між ними, так звані матеріальні точки. Нехай ми маємо дві матеріальні точки, маси яких відповідно рівні m і m' . Масу m будемо називати масою, яка притягує, а m' масою, яка притягується. Якщо під r розуміти відстань між цими точками, а під F – величину сили тяжіння, то закон Ньютона може бути записаний в наступному вигляді:

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \quad (1.6)$$

Коефіцієнт пропорційності G називається гравітаційною сталою, чисельна величина якої не залежить ні від фізичних, ні від хімічних властивостей мас m і m' , ні від величини і напрямку швидкості їх рухів (за умови, що величини швидкостей не наближаються до швидкості світла), ні від властивостей і ступеня заповнення середовища, що розділяє ці маси. Значення цієї сталої визначається тільки від обраної системи одиниць довжини, маси, часу. Так, в міжнародній системі одиниць СІ:

$$f = (6.673 \pm 0.003) * 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$$

Найбільш точне значення гравітаційної постійної отримано з лабораторних вимірювань сили тяжіння між двома відомими масами за допомогою крутильних терезів. Відповідно до формули (1.6) сила тяжіння є функцією тільки координат взаємнопритягуючих частинок, вона не залежить

від часу. Отже, закон Ньютона включає в себе припущення про миттєве поширення взаємодій. Оскільки швидкості, з якими нам доводиться мати справу, малі в порівнянні зі швидкістю світла, будемо виходити з виразу про нескінченність останньої, що відповідає закону всесвітнього тяжіння Ньютона. Маса, що входить в формулу (1.6), називається гравітаційною. У фізиці силу прийнято визначати за другим законом механіки (закону інерції), за яким сила F дорівнює вираз маси m на прискорення a :

$$F = ma \quad (1.7)$$

Маса в співвідношенні називається інертною масою; вона характеризує динамічні властивості тіла, є мірою інерції тіла: при постійній силі F чим більше маса тіла m , тим меншого прискорення воно набуває, тим повільніше змінюється стан його руху (тим більше його інерція). Досвід показав, що гравітаційна маса і інертна маса з дуже великою точністю (до 10^{-12}) еквівалентні. Внаслідок еквівалентності цих мас в гравіметричних приладах чутливий елемент однаково реагує на прискорення тяжіння і на викликані рухом підстави приладу інерціальні прискорення. При вимірах за допомогою гравіметричних приладів, встановлених на кораблі, літаку та інших рухомих об'єктах виникає проблема поділу цих прискорень. В подальшому масу m' точки, яка притягується, вважатимемо рівною одиниці. Величина сили тяжіння F , з якою точкова маса F притягує одиничну масу ($m' = 1$), визначається формулою

$$F = G \frac{m}{r^2} \quad (1.8)$$

Сила F направлена від притягнутої точки до притягуючої. У цьому випадку, як видно з формули (1.7), сила буде чисельно дорівнювати прискоренню. Силове поле матеріальної точки повністю визначається законом всесвітнього тяжіння (1.6). Визначення вектора сили тяжіння точки одиничної маси тілом, що знаходиться від точки на відстані, порівнянній з його розмірами, є надзвичайно складним завданням. Будь-яка точка, що знаходиться всередині тіла, притягує одиничну масу відповідно до закону

Ньютона, але сила тяжіння всього тіла визначається значно складнішим чином. Величина цієї сили і її напрямок залежить як від будови притягуючого тіла, так і від його зовнішньої форми. Для визначення вектора сили тяжіння тіла доводиться весь його об'єм розбивати на елементарні об'єми, що приймаються за точки. У цьому випадку доводиться знати проєкції сили тяжіння точкової маси на осі координат.

Величина сили тяжіння визначається за формулою

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.9)$$

1.3. Види потенціалів тяжіння

Потенціал тяжіння точкової маси m (рис. 1)

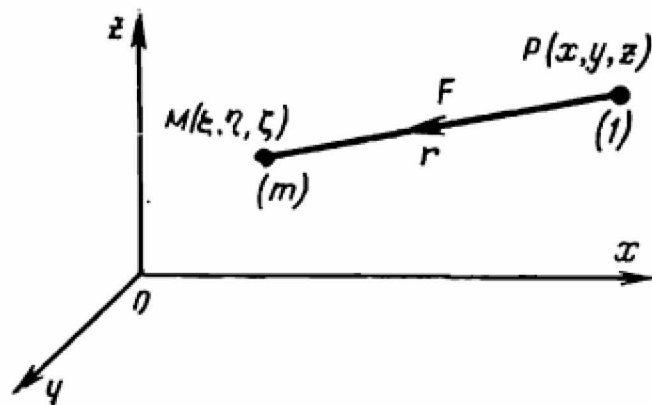


Рис. 1

визначається формулою:

$$V = G \frac{m}{r} \quad (1.10)$$

Потенціал тяжіння точкової маси є скінченою і неперервною функцією координат точки P , якщо тільки притягуюча точка не збігається ні з однією з притягуючих мас. Те ж саме справедливо і для похідних від V по координатам (x, y, z) .

$$V = G \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{r} \quad (1.11)$$

Формула (1.11) показує одну важливу властивість потенціалу – скалярність, тобто потенціал, рівний діючій силі, дорівнює арифметичній сумі потенціалів складових.

$$V = G \iiint_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} \quad (1.12)$$

На підставі формули (1.12) можна зробити висновок, що для визначення потенціалу будь-якого тіла необхідно знати форму поверхні, що обмежує дане тіло, і густину в кожній точці як всередині тіла, так і на його поверхні.

Різницю потенціалів сили тяжіння між точками, розташованими на скінченій відстані, має простий фізичний зміст: вона являє собою роботу, яка здійснюється силою тяжіння при переміщенні одиничної маси з однієї точки в іншу. Ця робота буде позитивною при $r < r_0$ і буде дорівнювати нулю при переміщенні по замкнутому контуру. При віддалені точки P_0 на нескінченно велику відстань

$$r_0 \rightarrow \infty, \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} V(P_0) = 0, \quad \int_{\infty}^P dV = V(P)$$

Отже, потенціал сили тяжіння в даній точці P чисельно рівний роботі, яку виконує сила тяжіння при переміщенні одиничної маси із нескінченості в дану точку.

$$F_s = \frac{dV}{ds} \quad (1.13)$$

де F_s – складова сили притягання у напрямку s , рівна похідній потенціалу в цьому напрямку.

$$F = \pm \frac{dV}{dn} \quad (1.14)$$

Формула (1.14) означає, що повне значення сили тяжіння дорівнює складовій потенціалу по напрямку нормалі до рівневої поверхні, яка проходить через дану точку. Знак «плюс» відповідає за напрямком внутрішньої нормалі, а знак «мінус» – зовнішньої.

1.4. Властивості потенціалів тяжіння

Потенціал простого шару. Подібно до того, як це було доведено для потенціалу об'ємних мас, можна довести, що потенціал простого шару неперервний і скінчений на всьому просторі, зовні притягуючих мас задовольняє рівнянню Лапласа і має неперервні похідні всіх порядків, на нескінченності є функцією регулярною.

Похідна потенціалу V за довільним напрямку:

$$\frac{\partial V}{\partial l} = f \iint_0 \mu \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial l} d\sigma = -f \iint_{\sigma} \mu \frac{\cos(r, l)}{r^2} d\sigma \quad (1.15)$$

є проекцією сили тяжіння простого шару в напрямку l . У тому випадку, коли притягуюча точка перетинає поверхню простого шару, перші похідні потенціалу зазнають розриву.

$$\frac{dV_e}{dl} - \frac{dV_i}{dl} = -4\pi f \mu \cos(n, l) \quad (1.16)$$

формула Пуассона дозволяє обчислити величину стрибка похідної потенціалу простого шару при перетині притягуючої точки поверхні шару.

Якщо похідну потенціалу брати у напрямку зовнішньої нормалі до поверхні шару, то $\cos(n, l) = +1$, отримаємо:

$$\frac{dV_e}{dl} - \frac{dV_i}{dl} = -4\pi f \mu \quad (1.17)$$

Перелічимо основні властивості потенціалів тяжіння:

1. Потенціали тяжіння об'ємних мас і простого шару неперервні, однозначні і скінчені у всьому просторі.
2. Зовні притягуючих мас потенціали тяжіння мають неперервні похідні всіх порядків.
3. Перші похідні потенціалу тяжіння об'ємних мас неперервні в усьому просторі.
4. Перші похідні потенціалу тяжіння простого шару зазнають розриву при перетині шару.

5. Другі похідні потенціалу тяжіння об'ємних мас змінюються стрибком там, де стрибком змінюється густина.

6. Потенціали сили тяжіння в зовнішньому просторі задовольняють рівнянню Лапласа.

$$\Delta V = 0$$

7. Усередині притягуючих мас потенціал сили тяжіння задовольняє рівнянню Пуассона.

$$\Delta V = -4\pi G\delta$$

де δ – об'ємна густина в даній точці.

8. На нескінченності потенціали тяжіння є регулярними функціями, тобто задовольняють умовам

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right| = GM$$

1.5. Основні властивості кульових і сферичних функцій

В теорії потенціала широке застосування набули так звані кульові і сферичні функції.

Кульовою функцією ступеня n називається цілий однорідний многочлен ступеня n в змінних x, y, z , який задовольняє рівняння Лапласа.

В силу основних властивостей однорідних функцій має місце формула

$$S_n(x, y, z) = p^n S_n\left(\frac{x}{p}; \frac{y}{p}; \frac{z}{p}\right) \quad (2.18)$$

Нехай x, y, z – прямокутні координати зовнішньої точки P , а p, θ, λ – сферичні координати точки (див.рис.2).

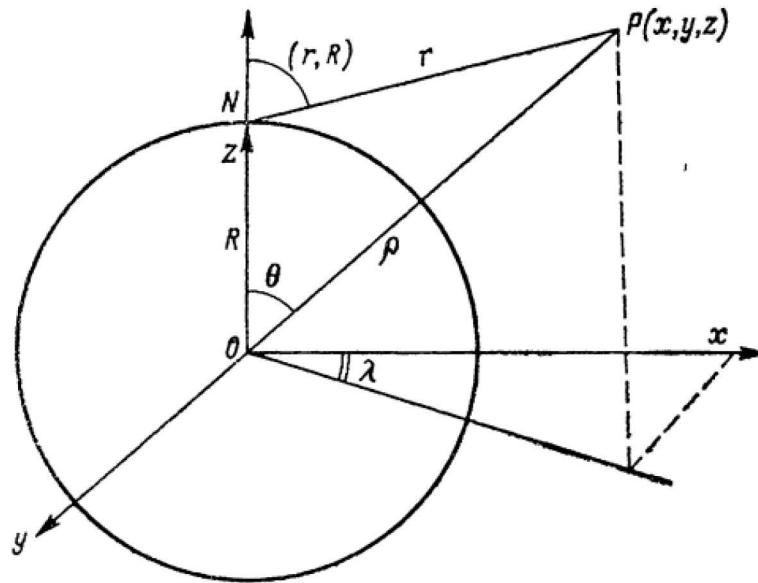


Рис. 2

Зв'язок між прямокутними і сферичними координатами задається формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= p \sin \theta \cos \lambda \\ y &= p \sin \theta \sin \lambda \\ z &= p \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

де

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.20)$$

Переходячи до сферичних функцій, отримаємо

$$S_n \left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p} \right) = Y_n(\theta, \lambda) \quad (2.21)$$

Функція $Y_n(\theta, \lambda)$ буде однорідною функцією степені n від $\sin \theta \cos \lambda$, $\sin \theta \sin \lambda$ і $\cos \theta$; вона називається сферичною функцією степені n .

$$\iint_{\omega} Y_n(\theta', \lambda') Y_m(\theta', \lambda') d\omega = 0 \quad (2.22)$$

Це і є властивість ортогональності сферичних функцій.

1.6. Розкладання довільної функції в ряд. За сферичними функціями.

Формулу

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \quad (2.23)$$

можна розглядати, як розклад довільної функції $f(\theta, \lambda)$ в ряд за сферичними функціями Y .

Умови, яким повинна задовольняти функція $f(\theta, \lambda)$ для того, щоб розкладання її в безкінечний ряд сферичних функцій було можливе, для всіх функцій, з якими доводиться мати справу на практиці. Тому формулу (2.23) можна сформулювати так: неперервна функція двох змінних, задана для всіх точок кулі, може бути єдиним чином розкладена у відповідний їй ряд сферичних функцій.

Формула:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} [\cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda'] \\ &* P_{nk}(\theta) P_{nk}(\theta') \end{aligned} \quad (2.24)$$

показує, що сферична функція степеня n може бути представлена у вигляді лінійної комбінації основних функцій:

$$P_n(\cos \theta), \quad P_{nk}(\theta) \cos k\lambda, \quad P_{nk}(\theta) \sin k\lambda$$

Функція виду:

$$P_{nk}(\theta) \cos k\lambda, \quad P_{nk}(\theta) \sin k\lambda$$

Називаються приєднаними сферичними функціями. Функція $P_{nk}(\theta)$ називається приєднаною функцією Лежандра і знаходиться за формулою

$$P_{nk}(\theta) = \sin^k \theta \frac{d^k P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^k} \quad (2.25)$$

При $k = 0$ приєднана функція перетворюється в поліном Лежандра, який називають головною сферичною функцією.

$$P_{n0}(\theta) = P_n(\cos \theta) \quad (2.26)$$

Функції Лежандра задовольняють диференціальному рівнянню

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

При $k = 0$ часткові розв'язками рівняння Лежандра є поліноми Лежандра $P_n(x)$. Вони визначаються формулою Родріга:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^h \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i! (n-i)! (n-2i)!} x^{n-2i}$$

де

$$h = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{якщо } n - \text{парне;} \\ n-1, & \text{якщо } n - \text{непарне;} \\ \frac{n-1}{2}, & \end{cases}$$

Для цілих n маємо:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ P_1(x) &= x & P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} & P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \end{aligned}$$

або, з урахуванням позначення $x = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1 & P_3(\cos \theta) &= \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta & P_4(\cos \theta) &= \frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} & P_5(\cos \theta) &= \frac{63}{8} \cos^5 \theta - \frac{35}{4} \cos^3 \theta + \frac{15}{8} \cos \theta \end{aligned}$$

Властивості поліномів Лежандра:

1) Поліноми Лежандра є ортогональними на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$, тобто

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k; \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = k; \end{cases}$$

2) На кінцях інтервалу $[-1; +1]$ поліноми Лежандра мають значення:

$$P_n(1) = 1 \quad P_n(-1) = (-1)^n$$

3) Рівняння $P_n(x) = 0$ має n різних дійсних коренів і всі вони лежать всередині інтервалу $[-1; +1]$, причому, коли n – парне число, існує $\frac{n}{2}$ позитивних коренів і $\frac{n}{2}$ рівних їм по модулю негативних коренів, а коли n – непарне, то існує $\frac{n-1}{2}$ позитивних коренів і $\frac{n-1}{2}$ рівних їм за модулем негативних коренів, а також корінь $x = 0$.

4) рекурентна формула:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}$$

5) Поліноми Лежандра є коефіцієнтами в розкладанні в ряд Тейлора за степенями a функції $\frac{1}{\sqrt{1-2xa+a^2}}$ тобто:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)a^n = P_0(x) + P_1(x)a + P_2(x)a^2 + P_3(x)a^3 + \dots$$

Зазначена функція утворює функцією поліномів Лежандра.

З цієї властивості випливає розкладання відстані між двома точками простору:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{r'}{r}\cos\psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)$$

де r, r' - відстані до точок від початку координат, ψ - кут між радіус-векторами цих точок.

При цілому $k \neq 0$ рівняння Лежандра має часткові рішення, які описуються приєднаними функціями Лежандра¹

$$P_n^{(k)}(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} (x^2-1)^n$$

де $n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n$.

Існує також розгорнута формула:

$$P_n^{(k)}(x) = (1-x^2)^{k/2} \sum_{i=0}^h \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i! (n-k-2i)! i(n-i)!} x^{n-k-2i}$$

де h – найбільше ціле $\leq (n-k)/2$

Поліноми Лежандра $P_n(x)$ є частковим випадком приєднаних функцій Лежандра $P_n^{(k)}(x)$ при $k = 0$.

Вводять також нормовані приєднані функції Лежандра

$$\check{P}_n^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^{(k)}(x)$$

і повністю нормовані приєднані функції Лежандра

$$\bar{P}_n^{(k)} = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{0k})(2n+1)(n-m)!}{(n+m)}} P_n^{(k)}(x)$$

які відрізняються від функцій $P_n^{(k)}(x)$ лише множниками.

Випишемо кілька виразів для приєднаних функцій Лежандра:

$$P_1^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \quad P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^{(1)}(x) = 3x\sqrt{1-x^2} \quad P_3^{(2)}(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_2^{(2)}(x) = 3(1-x^2) \quad P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2}$$

або, з урахуванням позначення $x = \cos \theta$

$$P_1^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta \quad P_3^{(1)}(\cos \theta) = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$$

$$P_2^{(1)}(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta \quad P_3^{(2)}(\cos \theta) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$P_2^{(2)}(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta \quad P_3^{(3)}(\cos \theta) = 15 \sin^3 \theta$$

Властивості приєднаних функцій Лежандра:

1. Приєднані функції Лежандра ортогональні на інтервалі $[-1; +1]$, тобто

$$\int_{-1}^{+1} P_k^{(m)}(x) P_n^{(m)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при } k = n \end{cases}$$

2. Всі нулі функції $P_n^{(k)}(x)$ розташовані на інтервалі $[-1; 1]$, причому на інтервалі $(-1; 1)$ міститься $n - k$ нулів, розташованих симетрично відносно початку координат. За рахунок множника $(1-x^2)^{k/2}$ функція $P_n^{(k)}(x)$ має також нулі при $x = \pm 1$.

3. Рекурентні формули:

$$P_{n+1}^{(k)}(x) = \frac{(2n+1)xP_n^{(k)}(x) - (n+k)P_{n-1}^{(k)}(x)}{n-k+1}$$

$$P_n^{(k+2)}(x) = 2(k+1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{(k+1)}(x) - (n-k)(n+k+1)P_n^{(k)}(x)$$

4. Теорема додавання для поліномів Лежандра: якщо

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

то

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + \sum_{k=1}^n \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta) P_n^{(k)}(\cos \theta') \cos k(\varphi - \varphi')$$

5. Похідна від полінома Лежандра:

$$\frac{d}{dx} P_n^{(k)} = \frac{(n-k+1)P_{n+1}^{(k)}(x) - (n-1)xP_n^{(k)}(x)}{x^2-1}$$

$$\frac{d}{dx} P_n^{(k)} = \frac{nxP_n^{(k)}(x) - (n+k)P_{n-1}^{(k)}(x)}{x^2-1}$$

Головна сферична функція є функцією лише однієї змінної – полярної відстані θ (або широти φ). Оскільки $\theta = 90 - \varphi$, тоді

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\sin \varphi)$$

Приєднані сферичні функції є функції двох змінних: θ (або φ) і λ . Таким чином, на основі формули (2.24) можна зробити висновок, що сферична функція степеня n містить одну головну сферичну функцію – поліном Лежандра $P_n(\cos \theta)$ і $2n$ приєднаних сферичних функцій.

Вираз для довільної сферичної функції $Y_n(\theta, \lambda)$, як функції координат θ і λ .

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{r=0}^n (A_{nr} \cos k\lambda + B_{nr} \sin k\lambda) P_{nr}(\theta) \quad (2.27)$$

Підставимо формулу (2.27) в (2.23), знайдемо розклад заданий на поверхні кулі функції в безкінечний ряд сферичних функцій.

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (A_{nr} \cos k\lambda + B_{nr} \sin k\lambda) P_{nr}(\theta) \quad (2.28)$$

1.7. Класифікація сферичних функцій

В теорії спеціальних функцій доводиться, що на основному інтервалі змінної $\cos \theta$ від -1 до $+1$ поліном Лежандра $P_n(\cos \theta)$ має n нерівних дійсних коренів, розміщених симетрично по відношенні до $\cos \theta = 0$.

Цим кореням відповідають n -значних полярної відстаней θ , симетричних по відношенні до екватору кулі; таким чином, поліном Лежандра $P_n(\cos \theta)$ як би ділить всю кулю на $(n+1)$ зону; він переходить в нуль на паралелях, поділяючи ці зони, а всередині зон приймає поперемінно позитивні і від'ємні значення (рис. 3, 4, 5).

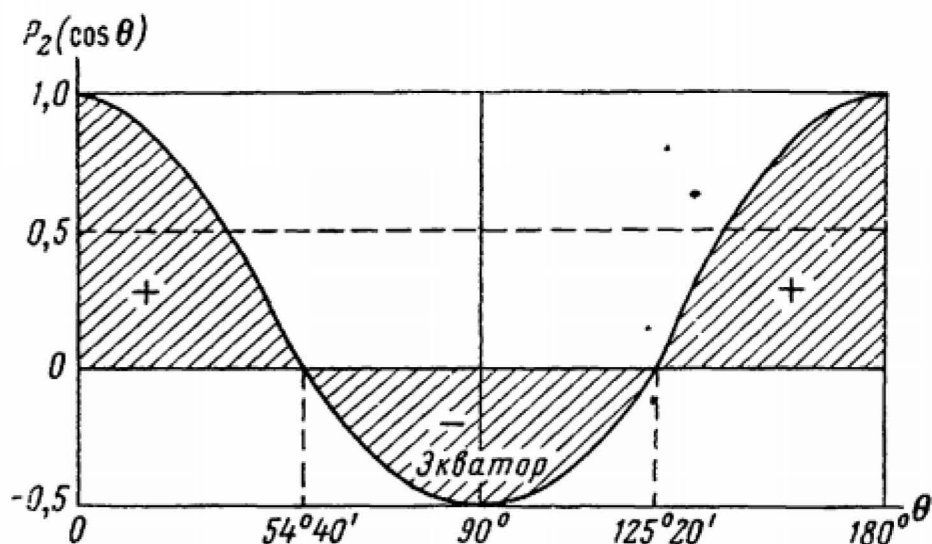


Рис. 3

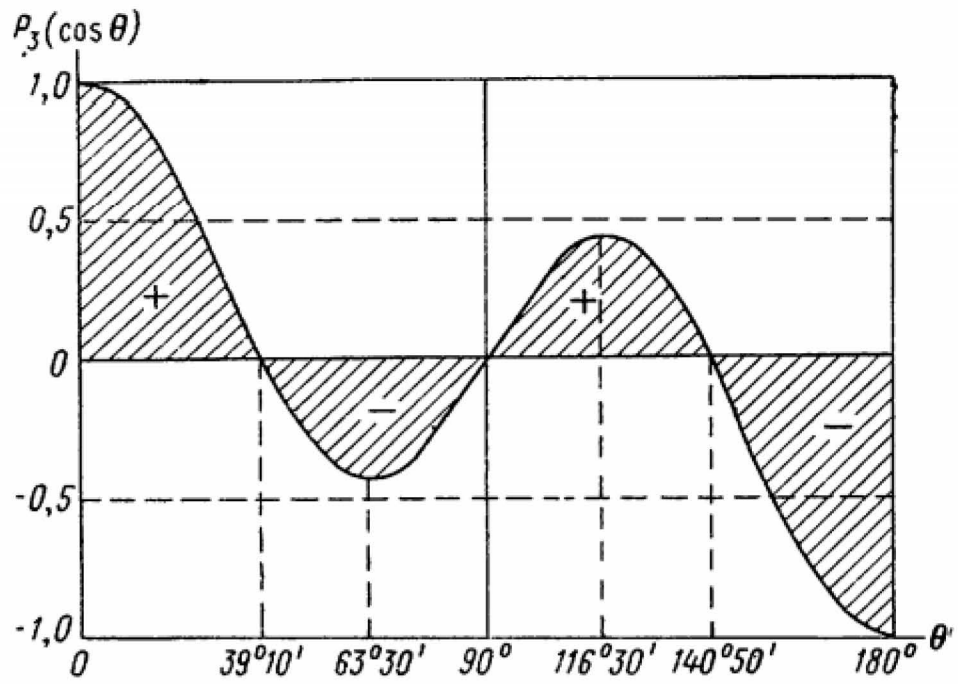


Рис. 4

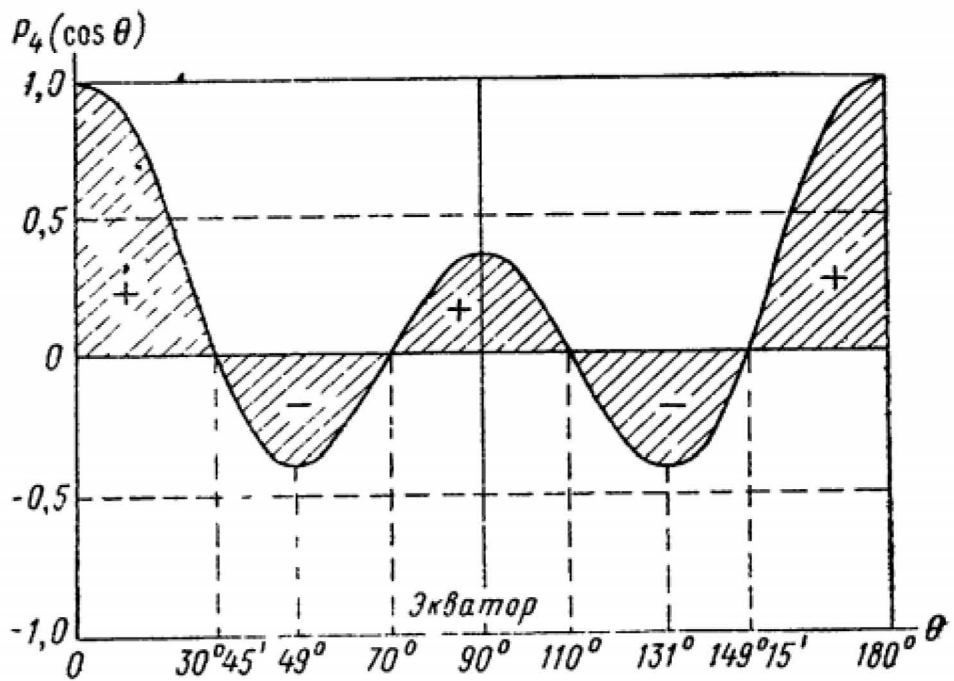


Рис. 5

По цій причині поліноми Лежандра мають назву зональних сферичних функцій (гармонік).

Слід зауважити, що кожна зональна гармоніка симетрична відносно полярної осі, причому парні гармоніки мають симетрію також відносно

екватора, тоді як непарні гармоніки створюють протилежний по знаку ефект в двох півосей (північній і південній).

Вздовж довільної паралелі зональні гармоніки в середньому не рівні нулю.

Загальний вираз приєднаної функції має вигляд:

$$\sin^r \theta \frac{d^r P_n(\cos \theta) \cos k\lambda}{(d \cos \theta)^r \sin k\lambda} \quad (k = 1, 2, 3 \dots, n)$$

При $k = n$ многочлен $\frac{d^r P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^r}$ перетворюється у величину постійну і тому сферичні функції приймають вид:

$$\sin^n \theta \cos n\lambda \quad \text{і} \quad \sin^n \theta \sin n\lambda$$

Перший множник $\sin^n \theta$ в цих виразах перетворюється в нуль тільки на полюсах кулі ($\theta = 0^\circ$ і $\theta = 180^\circ$); другий – на $2n$ меридіанах, якими обмежуються сферичні сектори (двокутники), де $\sin n\lambda$ і $\cos n\lambda$ приймають позмінно додатні і від’ємні значення рис. 6, 7. Відзначимо, що вздовж меридіану гармоніка зберігає постійний знак, але величина її міняється із зміною широти; ці гармоніки називаються секторіальними.

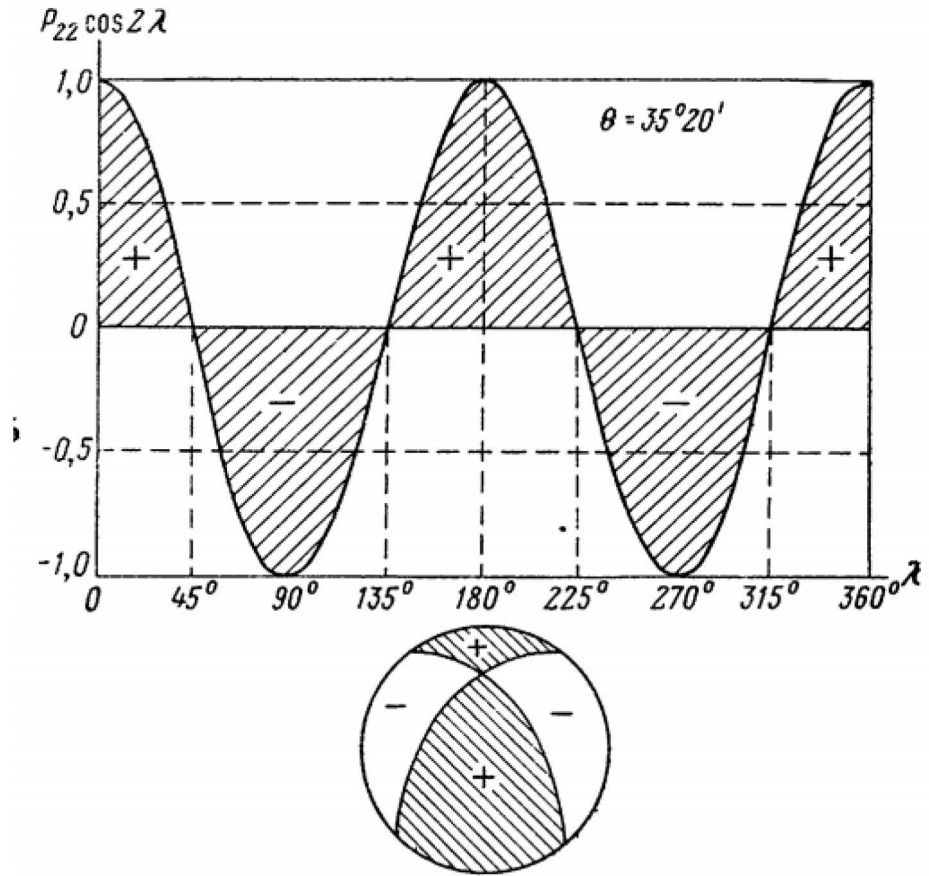


Рис. 6

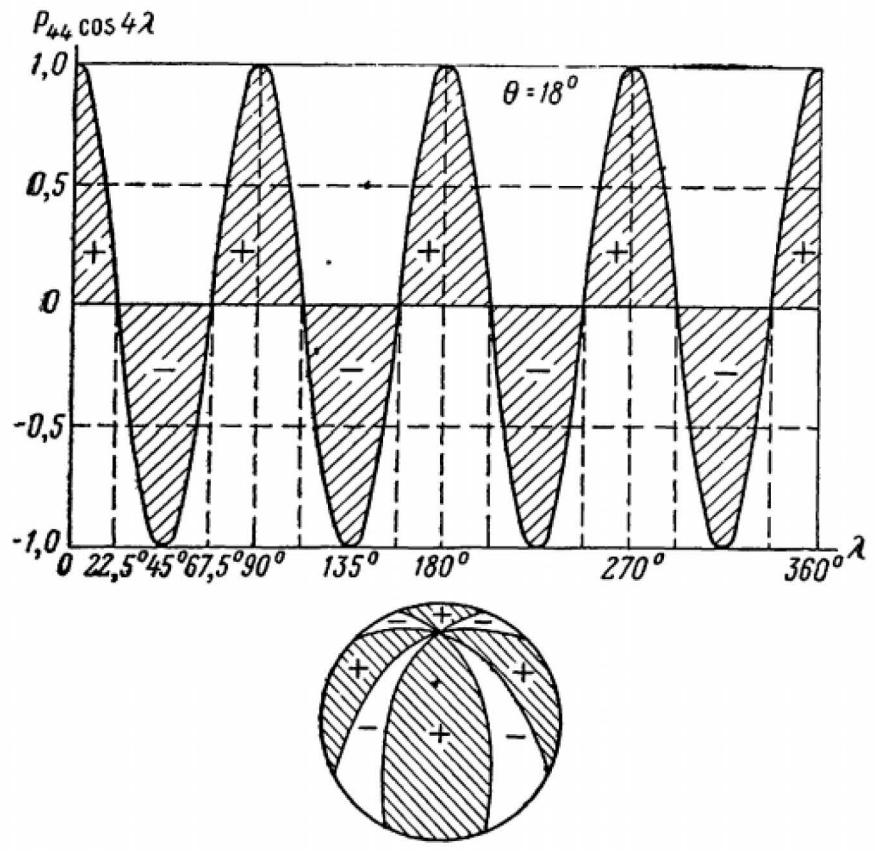


Рис. 7

У випадках коли $(0 < k < n)$ многочлен $\frac{d^r P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^r}$ має $n - k$ дійсних коренів, яким відповідають $n - k$ паралелей, якими вся куля ділиться на $n - k + 1$ зону, крім того, кожний із множників $\sin k\lambda$ і $\cos k\lambda$ обертається нуль для $2k$ значення довготи λ , тобто на $2k$ меридіанах, віддалених один від одного на кут $180^\circ/k$. Цією сіткою меридіанів і паралелей вся куля ділиться на кульові чотирикутники (окрім полярних областей, де утворюються трикутники); в кожних двох прилягаючих чотирикутників дані функції позмінно додатні і від'ємні (рис. 8, 9, 10).

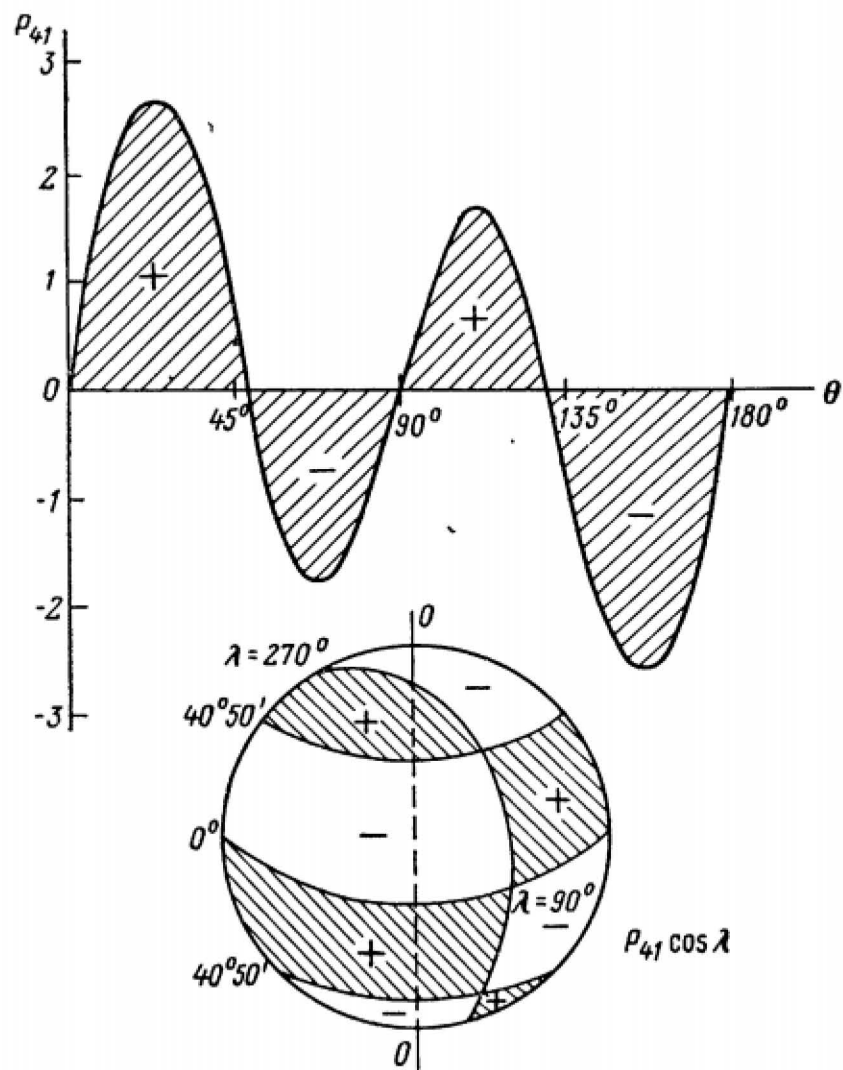


Рис. 8

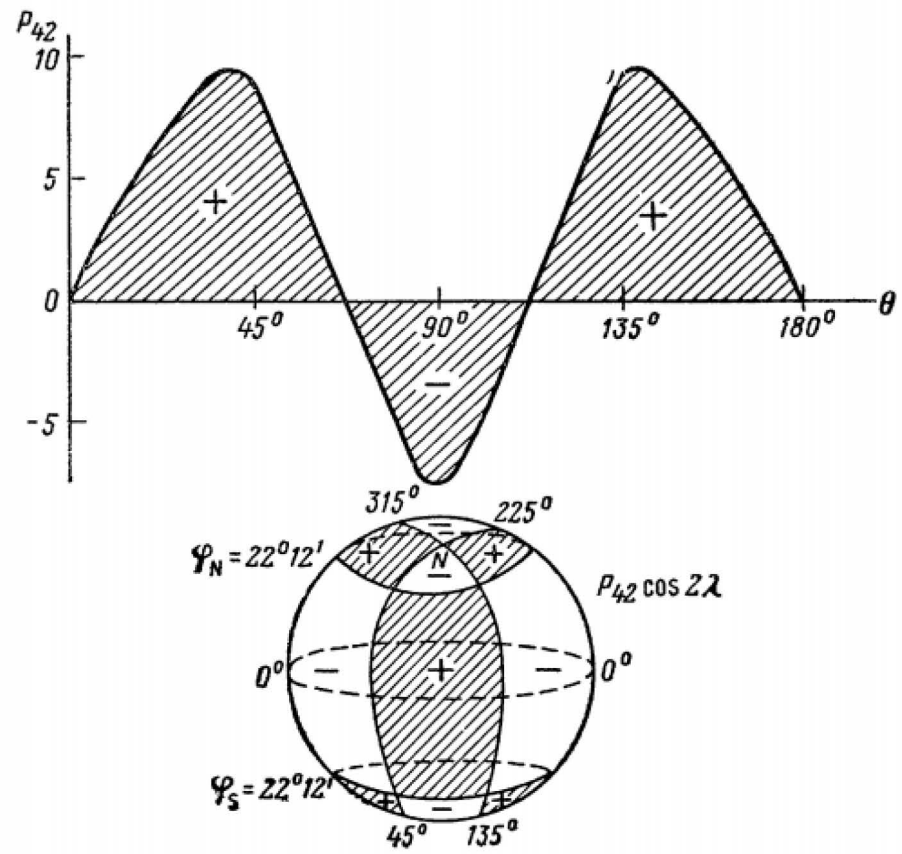


Рис. 9

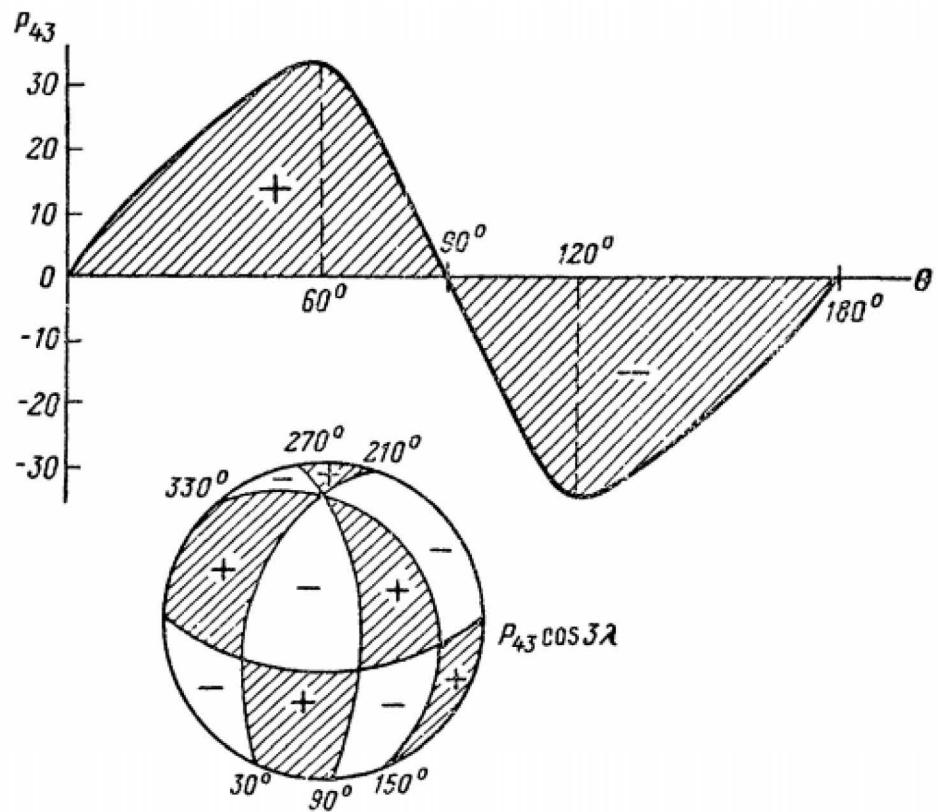


Рис. 10

В межах кожного окремого кульового чотирикутника (*tesserae*) величина функції змінюється із широтою і довготою; ці гармоніки отримали назву (тесеральних).

Оскільки секторіальні і тесеральні гармоніки є функціями широти (полярної відстані) на синус і косинус довготи і цілих величин, кратних довготам, середнє значення будь-якої із цих гармонік по довільній паралелі обертається в нуль.

Таким чином, в системі $2n + 1$ основних сферичних функцій степеня n є одна зональна, дві секторальні і $2n - 2$ тесеральні. Всі вони є функціями, осцилюючими на кулі. Підвищуючи степінь сферичних функцій, ми якби наділяємо кулю правильною системою поступово зменшуючи ділянки, в яких відбувається зміна знаку кульових функцій.

На рис. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 видно хід змін деяких кульових функцій, і області, на які ділиться куля, з показом того знаку, який ці функції приймають в межах кожної області.

Так, наприклад, на (рис.3) ми бачимо, що зональна гармоніка другого ступеня – $P_2(\cos \theta)$ на північному і південному полюсах приймає максимальне значення [$P_2(\cos \theta) = +1$], а на екваторі маємо мінімум [$P_2(\cos \theta) = -1/2$]. Всю поверхню кулі ця гармоніка ділить на три області: перша область – від північного полюса до широти $\phi_N = 35^\circ 20'$, в яких функція додатна, друга область – від широти $\phi_N = 35^\circ 20'$ до широти $\phi_S = 35^\circ 20'$, де гармоніка від'ємна, і третя область – від широти $\phi_S = 35^\circ 20'$ до південного полюса, в якій гармоніка знову має додатне значення.

Слід звернути увагу, що третя зональна гармоніка рис. 2, як і будь-яка зональна гармоніка непарної степені, робить протилежний ефект в північному і південному півкулях сфери, тоді як зональні гармоніки парної степені рис. 3 і 4) симетричні відносно екватора.

Секторальні гармоніки $P_{22} \cos 2\lambda$ рис. 5 і $P_{44} \cos 4\lambda$ рис. 6 поділяють всю поверхню кулі на кульові сектори, в яких знаки по черзі міняються, перша функція ділить кулю на чотири сектори, а друга на вісім.

Тесеральна гармоніка $P_{41} \cos \lambda$ (рис.7) ділить кулю на два сектора і чотири зони, функція $P_{42} \cos 2\lambda$ на чотири сектора і три зони (рис. 8) і функція $P_{43} \cos 3\lambda$ – на шість секторів і дві зони (рис. 9).

1.8. Нормування сферичних функцій

В багатьох працях використовують замість звичайних сферичних функцій використовують нормовані сферичні функції, відмінність їх від звичайних закладається в постійних множниках. Ці множники підбирають таким чином, щоб досягти відомої симетрії основних формул.

Якщо функцію $f(\theta, \lambda)$ розкласти в ряд повністю нормованих сферичних функцій:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\lambda + \bar{B}_{nk} \sin k\lambda) \bar{P}_{nk}(\theta), \quad (2.29)$$

то коефіцієнти розкладу визначається за формулами

$$\bar{A}_{nk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\theta', \lambda') \bar{P}_{nk}(\theta') \cos k\lambda' d\omega;$$

$$\bar{B}_{nk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\theta', \lambda') \bar{P}_{nk}(\theta') \sin k\lambda' d\omega;$$

Зв'язок між коефіцієнтами різних розкладань для цих випадків встановлюють за допомогою співвідношень:

$$\bar{A}_{nk} = \frac{A_{nk}}{q_{nk}}; \quad \bar{\bar{A}}_{nk} = \frac{A_{nk}}{r_{nk}}; \quad \bar{B}_{nk} = \frac{B_{nk}}{q_{nk}}; \quad \bar{\bar{B}}_{nk} = \frac{B_{nk}}{r_{nk}}$$

де одне підкреслення над буквою відповідає нормованим, а два підкреслення – повністю нормованим коефіцієнтам.

В табл. 1 наведено значення коефіцієнтів q_{nk} , і r_{nk} до четвертого степеня.

$$q_{nk} = \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}; \quad q_{n0} = 1; \quad r_{nk} = q_{nk} \sqrt{2n+1}.$$

n	k	q_{nk}	$\sqrt{2n+1}$	r_{nk}
0	0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
1	0	1,00000000	1,73205081	1,73205081
	1	1,00000000		1,73205081
2	0	1,00000000	2,23606798	2,23606798
	1	0,57735027		$0,12909945 \times 10$
	2	0,28867513		0,64549721
3	0	1,00000000	2,64575131	2,64575131
	1	0,40824829		$0,10801234 \times 10$
	2	0,12909944		0,34156501
	3	$0,52704628 \times 10^{-1}$		0,13944334
4	0	1,00000000	3,00000000	3,00000000
	1	0,31622777		0,94868331
	2	$0,74535599 \times 10^{-1}$		0,22360680
	3	$0,19920477 \times 10^{-1}$		$0,59761431 \times 10^{-1}$
	4	$0,70429521 \times 10^{-2}$		$0,21128856 \times 10^{-1}$

1.9. Потенціал сили тяжіння і методи її визначення.

На кожну точку, що знаходиться на Землі, крім сили гравітаційного притягання, діє відцентрова сила, викликана добовим обертанням Землі навколо її осі. Рівнодіючу цих двох сил прийнято називати силою тяжіння. Запишемо це положення в векторній формі: $\vec{g} = \vec{F} + \vec{K}$, де \vec{g} - сила тяжіння, \vec{F} - сила гравітаційного притягання, \vec{K} - відцентрова сила. При цьому будемо вважати, що Земля обертається з постійною кутовою швидкістю ω близько незмінною осі як абсолютно тверде тіло. При такому визначенні силу тяжіння слід вважати в кожній точці Землі величиною постійною, що не змінюється з плином часу. Проте насправді все значно складніше. Земля не є абсолютно твердим тілом, вона відчуває приливні збурення, в ній відбуваються фізичні процеси, швидкість обертання і положення миттєвої осі обертання в тілі Землі не залишаються незмінними, змінюється також з плином часу і положення

небесних світил відносно центру інерції Землі. Всі ці фактори впливають на значення сили тяжіння на Землі, і з величиною цих впливів в даний час доводиться рахуватися. Тому в виміряне значення сили тяжіння слід вводити відповідні поправки, що враховують перераховані вище впливу. Сила тяжіння має потенціал, який позначимо через W . Попередньо необхідно отримати потенціал відцентрової сили, який позначимо через Q . Для цього визначимо проєкції відцентрової сили на осі координат. Виберемо прямокутну систему координат, початок якої сумісний з центром паралелі точки M – точкою C . Вісь z направимо уздовж осі обертання Землі, осі x і y розташуємо в площині малого кола, по якому відбувається обертання точки M (рис. 11).

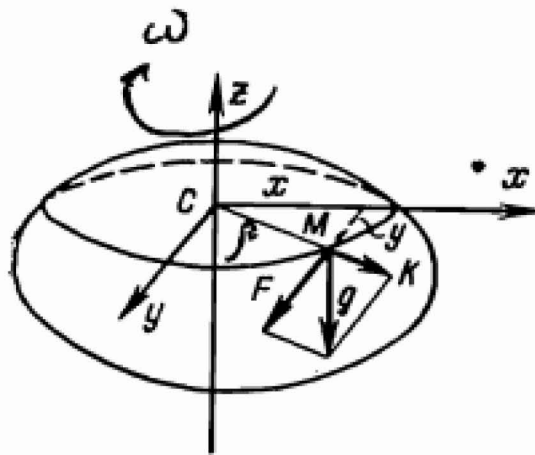


Рис. 11

Якщо через p позначити радіус паралелі точки M , а через ω - кутову швидкість обертання Землі, то величина відцентрової сили, що діє на одиничну масу, поміщену в точку M , буде

$$K = \omega^2 p \quad (2.30)$$

Відцентрова сила спрямована по перпендикуляру до осі обертання Землі в зовнішній простір. Так як напрям відцентрової сили збігається з напрямом радіуса p паралелі точки M , то проєкції відцентрової сили на осі координат можуть бути обчислені за формулами

$$\begin{aligned} K_x &= K \cos(K, x) = K \cos(p, x) \\ K_y &= K \cos(K, y) = K \cos(p, y) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$K_z = K \cos(K, z) = K \cos(p, z)$$

Для визначення потенціалу W сили тяжіння використовуємо теорему: проекція рівнодіюча дорівнює сумі проекцій складових. При будь-якому розташуванні координатних осей x, y, z будемо мати:

$$g_x = F_x + K_x = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$g_y = F_y + K_y = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$g_z = F_z + K_z = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Ці співвідношення дозволяють визначити потенціал сили тяжіння як суму потенціалів сили гравітації і відцентрової сили:

$$W = V + Q \quad (2.32)$$

У потенціал W сили тяжіння в якості доданка входить потенціал V гравітаційної сили, внаслідок цього перші похідні потенціалу сили тяжіння безперервні, а другі зазнають розриву там, де густина притягуючих мас змінюється стрибком. Із (2.32) випливає, що

$$\Delta W = g \cos(g, s) ds \quad (2.33)$$

Оскільки в зовнішньому просторі потенціал тяжіння задовольняє рівняння Лапласа, а у внутрішньому – рівнянню Пуассона, то для потенціалу сили тяжіння матимемо:

в зовнішньому просторі

$$\Delta W = 2\omega^2 \quad (2.34)$$

у внутрішньому просторі

$$\Delta W = -4\pi G\delta + 2\omega^2 \quad (2.35)$$

Вираз для диференціала потенціалу сили тяжіння:

$$dW = g \cos(g, s) ds \quad (2.36)$$

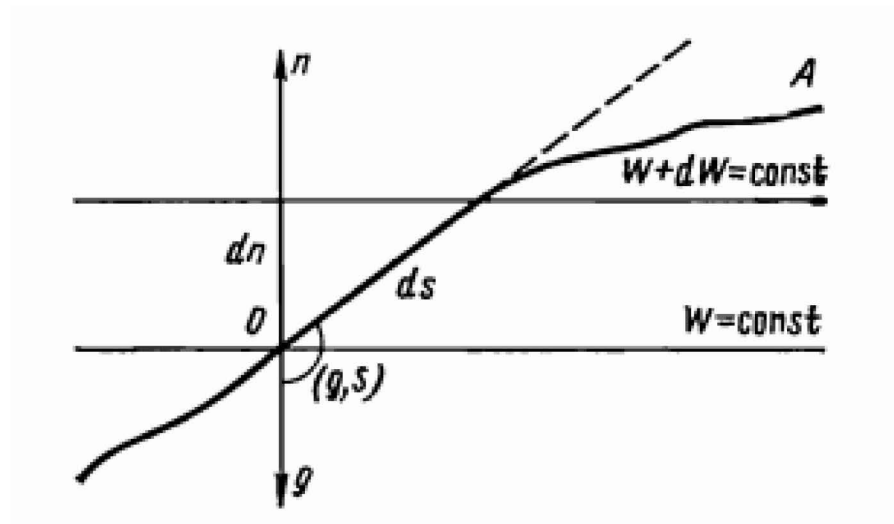


Рис 12

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Ця похідна показує, як змінюється сила тяжіння в напрямку вертикалі, і тому називається вертикальним градієнтом сили тяжіння.

Представимо аналогічним чином похідні

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Звідси видно, що ці похідні характеризують зміну сили тяжіння в горизонтальній площині: перша – в напрямку меридіана, а друга – в напрямку першого вертикалу. Вони отримали назву горизонтальних градієнтів сили тяжіння.

1.10. Характеристика гравітаційного поля Землі і його зміни в часі.

Розглянемо основні особливості гравітаційного поля Землі. Потенціал W_0 на рівні моря дорівнює $62.64 \text{ км}^2 \text{с}^{-2}$. Так як фізична поверхня Землі нерівна, потенціал на цієї поверхні непостійний. На висоті 10 км над рівнем моря потенціал зменшується на $0,1 \text{ км}^2 \text{с}^{-2}$, або на 0,2%. Це максимальна зміна потенціалу на поверхні Землі. При вивченні гравітаційного поля Землі для

зручності прийнято виділяти з потенціалу головну частину, відповідну ідеальній «Землі порівняння», що має просту форму рівної поверхні (наприклад, еліпсоїд обертання). Гравітаційне поле такої ідеальної Землі називають нормальним гравітаційним полем, а потенціал – нормальним потенціалом. Нормальний потенціал гравітаційної сили вибирають в формі:

$$V(p, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\cos \theta) \right] \quad (2.37)$$

причому в правій частині замість нескінченної суми залишають тільки зональні гармоніки другого і четвертого порядків.

Таблиця 1.2

n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$	n	$J_n \cdot 10^6$
2	1082,637	6	+0,552	10	-0,237	14	+0,105	18	-0,102
3	-2,541	7	-0,352	11	+0,312	15	+0,105	19	+0,099
4	-1,618	8	-0,205	12	-0,192	16	+0,034	20	-0,119
5	-0,228	9	-0,154	13	-0,339	17	-0,220	21	-0,083

Згідно таблиці 2, відносна відмінність потенціалу Землі від нормального в цьому випадку буде складати кілька одиниць 10^{-6} або близько $10^{-3} \%$. Максимальна відмінність потенціалу Землі від нормального досягає $1.1 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \text{ с}^{-2}$, або $1,8 \cdot 10^{-3} \%$. Це відповідає висоті геоїда над еліпсоїдом понад 100 м.

З повного значення сили тяжіння виділяють частину γ , відповідну нормальному полю. Різниця $g - \gamma$ називають аномалією сили тяжіння.

Сила тяжіння на рівній поверхні змінюється. Найбільшого значення сила тяжіння досягає на полюсі – близько 983 гал на рівні моря. На екваторі сила тяжіння на рівні моря дорівнює 978 гал. Збільшення сили тяжіння на полюсі пояснюється двома причинами: по-перше, на полюсі відцентрова сила дорівнює нулю, по-друге, точка на полюсі знаходиться ближче до центру мас Землі через стиснення рівної поверхні. Відцентрова сила, навпаки,

збільшується від полюса, де вона дорівнює нулю, до екватора, де вона досягає значення 3,4 гал.

Аномалії сили тяжіння на більшій частині Землі становлять десятки мгал. Середнє квадратичне значення аномалії на Землі дорівнює 42,4 мгал. Максимальне значення складає +660 мгал (о. Гаваї), мінімальне –380 мгал (жолоб Пуерто-Ріко, Атлантичний океан). До основних особливостей гравітаційного поля Землі можна віднести однаковий характер аномалій на материках і океанах, простягання аномалій в основному з північного заходу на південний схід. Області мінімальних аномалій ($-40 \div -50$ мгал) розташовуються в Індійському океані на південь від Індії і Австралії, області максимальних аномалій ($40 \div 50$ мгал) – на півдні Індійського і західної частини Тихого океанів, а також в горах Південної Америки.

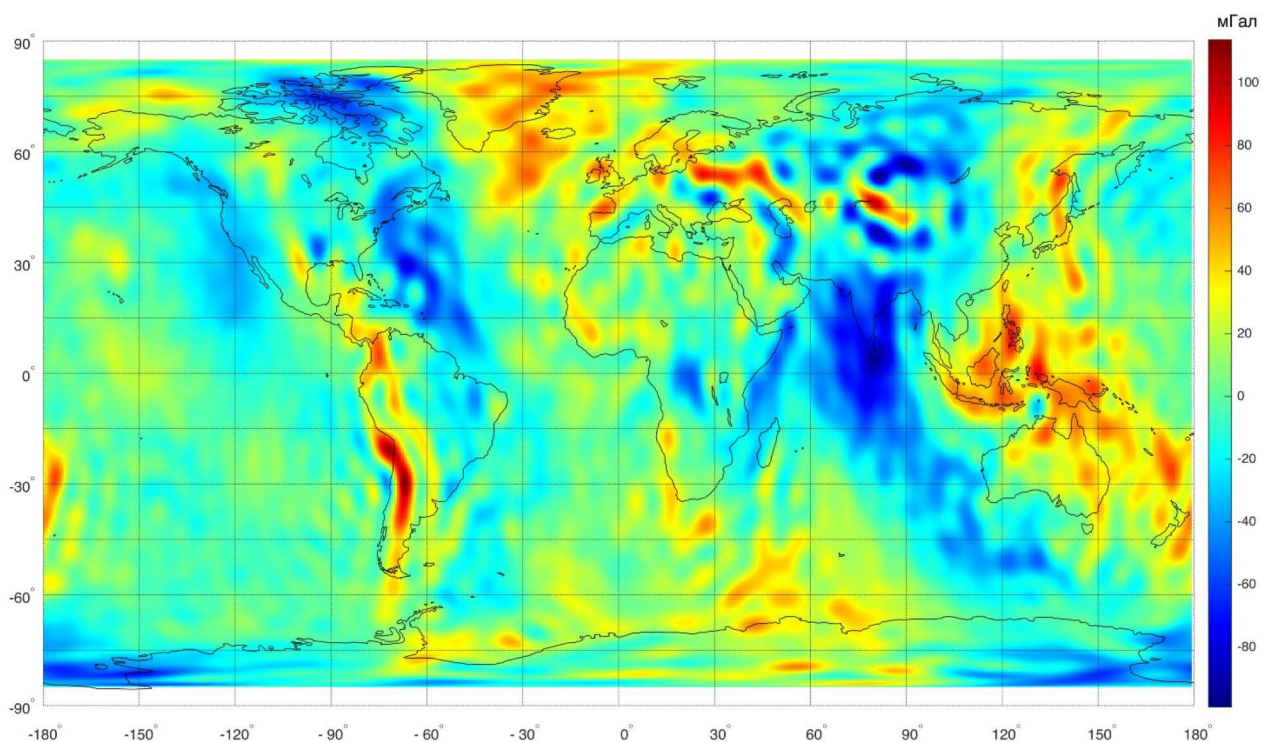


Рис. 13. Аномальне гравітаційне поле Землі

Другі похідні потенціалу сили тяжіння визначають градієнти сили тяжіння і кривизну рівневої поверхні. Найбільшим є вертикальний градієнт сили тяжіння, який становить $\sim 0,31$ мгал.

Сила тяжіння в будь-якій точці Землі змінюється в залежності від положення небесних тіл, миттєвої осі обертання в тілі Землі, від зміни

швидкості обертання Землі, а також переміщення мас Землі і деформації її поверхні.

Розрізняють вікові, періодичні та неперіодичні зміни сили тяжіння і інших елементів гравітаційного поля.

Причиною вікових змін сили тяжіння можуть бути зміна гравітаційної постійної і уповільнення обертання Землі. Обидві ці причини викликають дуже невеликі зміни сили тяжіння. Наприклад, внаслідок зміни швидкості обертання Землі сила тяжіння може змінитися не більше ніж на $2 \cdot 10^{-15}$ мгал/сторіччя. Тому вікові зміни сили тяжіння експериментально не виявлені.

Неперіодичні зміни гравітаційного поля викликаються природними причинами (вулканічна діяльність, землетрусу, переміщення речовини мантії і т.д.) і діяльністю людини (створення великих водосховищ, гірські вироблення). За величиною ці зміни є найбільшими і можуть досягати мілігалів. Однак неперіодичні зміни завжди носять локальний характер і викликають в цілому для Землі незначні деформації гравітаційного поля.

Серед періодичних змін сили тяжіння головними є припливні зміни, викликані впливом Місяця і Сонця. Крім того, періодичними є зміни, викликані власними коливаннями Землі.

Граничні значення приливних змін елементів гравітаційного поля наведені в таблиці 3.

Таблиця. 1.3

z_0	0°	90°	Коливання мкгал	90°	0°	Колива ння	135°	45°	Коливання
	σg_{min} мкгал	σg_{max} мкгал		$\sigma \zeta_{min}$ см	$\sigma \zeta_{max}$ см		$\sigma \vartheta_{mix}$	$\sigma \vartheta_{max}$	
Місяць	-109.7	+54.8	164.5	-17.8	+35.6	53.4	-0.0173	+0.0173	0.0346
Сонце	-50.5	+25.3	75.8	-8.2	+16.4	24.6	-0.0078	+0.0078	0.0156
Загальний вплив	-160.2	+80.1	240.3	-26.0	+52.0	78.0	-0.0251	+0.0251	0.0502

Наведені в табл. 3 значення припливних змін елементів гравітаційного поля Землі отримані для твердої Землі. Насправді під дією приливних сил поверхня Землі деформується, тому що спостережувані припливні впливи будуть відрізнятися від наведених в табл. 3. Для деформованої Землі зміни сили тяжіння будуть більшими, а зміщення рівневої поверхні і напрямки виска відносно фізичної поверхні Землі – меншими. Для реальної Землі зміни сили тяжіння обчислюють за формулою

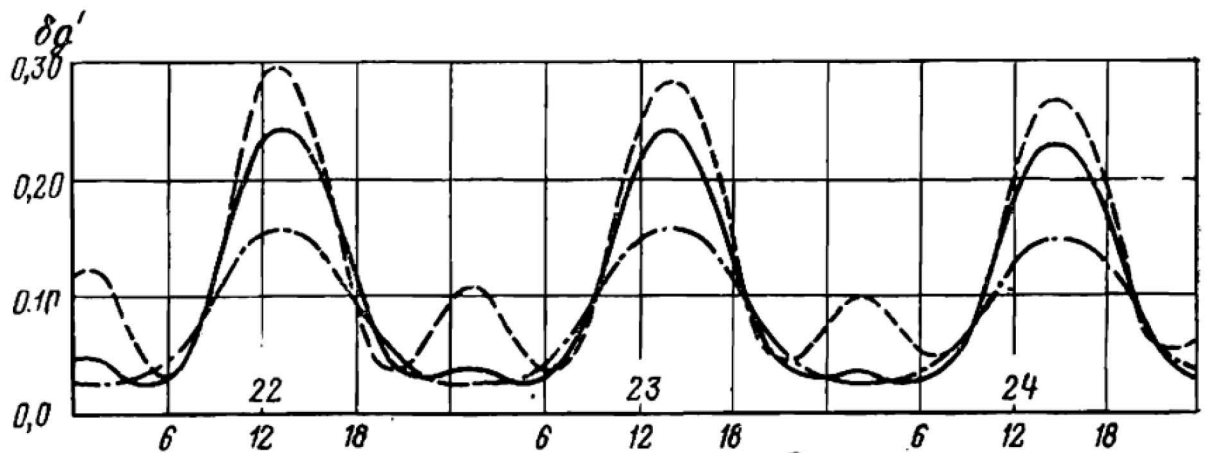
$$\delta g' = 1.2\delta g = 1.2 \frac{GmR}{r_0^3} (1 - 3 \cos^2 z_0) \quad (2.38)$$

а зміни ухилення виска – за формулою

$$\delta \vartheta' = 0.8\delta \vartheta = 1.2 \frac{GmR}{\gamma r_0^3} \sin 2z_0 \quad (2.39)$$

Для введення поправки за припливні зміни сили тяжіння в результати гравіметричних спостережень обчислюють величину $\delta g'$ на ЕОМ або використовують спеціальні графіки.

Зразок графіка поправок $\delta g'$ наведено на рис.13

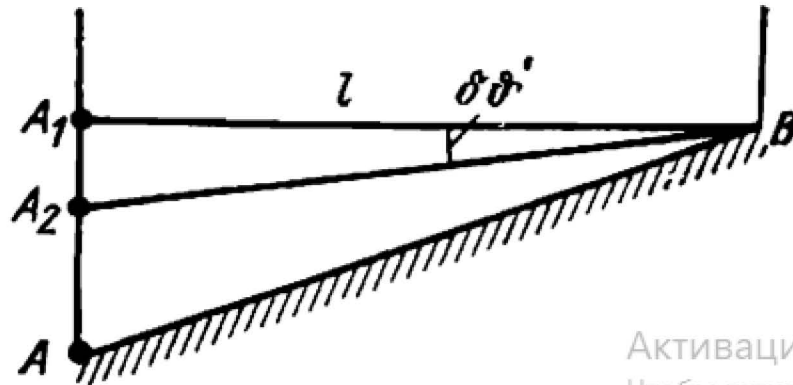


Дні і години (рис.13)

Коливання відхилення виска (нахили рівневої поверхні відносно фізичної поверхні Землі) викликають зміна перевищень, отриманих з геометричного нівелювання. Нехай на рис. 14 А і В – точки поверхні Землі, в яких встановлені рейки, А₁В – рівна поверхня, АА₁ – вимірне нівелірне перевищення. Під впливом припливної сили упушені поверхню займе положення А₂В. Вимірне перевищення в цьому випадку дорівнюватиме

AA₂. Поправка в нівелірне перевищення дорівнює різниці перевищень AA₁ і AA₂:

$$\delta h = A_1 A_2 = l \delta \vartheta \quad (2.40)$$



Активация W
Чтобы активировать

Рис. 14

1.11. Розкладання гравітаційного потенціалу в ряд за кульовими функціями.

Якщо уявити гравітаційний потенціал у вигляді нескінченного ряду то задача визначення потенціалу зводиться до послідовного підсумовування окремих членів цього ряду. Обмежуючись заданим членом розкладу, ми отримаємо наближене значення потенціалу, але ступінь наближення при цьому може бути безмежною, якщо брати необмежене велике число членів. Число членів розкладу знаходиться за допомогою точності обчислень, а також наявності необхідного матеріалу, отриманого зі спостережень.

Потенціал сили тяжіння тіла в будь-якій точці, яка знаходиться за сферичними координатами r, θ, λ і має вигляд:

$$V(r, \theta, \lambda) = G \iiint_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} \quad (2.41)$$

Якщо через r', θ', λ' позначити сферичні координати даної точки, у яких спостерігається інтегрування, то елемент об'єму можна представити у вигляді

$$d\tau = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\lambda' dp'$$

Зовнішній гравітаційний потенціал може бути представлений у вигляді нескінченного ряду кульових функцій:

$$V(r, \theta, \lambda) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (D_{nk} \cos k\lambda + E_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\theta) \right] \quad (2.42)$$

Кульову функцію першої степені можна показати у вигляді:

$$Z_1(\theta, \lambda) = GM[z_0 \cos \theta + x_0 \cos \lambda \sin \theta + y_0 \sin \lambda \sin \theta] \quad (2.43)$$

Кульова функція другої степені містить п'ять постійних:

$$Z_2(\theta, \lambda) = D_{20}P_2(\cos \theta) + (D_{21} \cos \lambda + E_{21} \sin \lambda) P_{21}(\theta) + (D_{22} \cos 2\lambda + E_{22} \sin 2\lambda) P_{22}(\theta) \quad (2.44)$$

Формула для визначення потенціалу сили тяжіння Землі:

$$V'(p, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{G(A_m - C)}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (2.45)$$

Де $A_m = \frac{A+B}{2}$ – середній екваторіальний момент інерції Землі.

Потенціал відцентрової сили можна представити у вигляді:

$$Q = \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (2.46)$$

Наближений потенціал W' сили тяжіння виходить як сума потенціалів V' і Q :

$$W'(p, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{G(A_m - C)}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (2.47)$$

Розділ 2. Проблема визначення зовнішнього гравітаційного поля і фігури Землі

При вивченні фігури Землі (та інших планет) доводиться мати справу із зовнішнім гравітаційним потенціалом. Перший вчений, якому вдалося довести можливість визначення зовнішнього потенціалу незалежно від густини, був Стокс (1849 р).

В основі теоретичних досліджень Стокса є його відома теорема, яка може бути сформульована так: якщо відома загальна маса тіла M , кутова швидкість її обертання ω навколо осі і форма зовнішньої рівної поверхні σ цілком охоплюють всі притягуючі маси, то потенціал сили тяжіння W і сама сила тяжіння g визначаються як у всьому зовнішньому просторі, так і на рівневій поверхні σ . Теорема Стокса буде доведена, якщо показати що потенціал сили тяжіння не зміниться при розподілу мас в середині поверхні σ , за умови, що сама поверхня σ залишається зовнішньою рівною поверхнею і при новому розподілу мас.

Теорема Стокса може бути застосована і на фізичну поверхню планети, яка не є рівневою, тільки в цьому випадку необхідно знати на її поверхні збільшення потенціалу сили тяжіння відносно якого-небудь початкового пункту.

Стоксом вирішена і обернена задача, що полягає у визначенні форми зовнішньої рівневої поверхні σ сили тяжіння і зовнішнього потенціалу W , при тому, якщо відома кутова швидкість обертання, значення сили тяжіння і потенціалу W_0 на поверхні σ . Розв'язок отримано Стоксом в припущенні, що шуканий зовнішній потенціал W дуже близький до якогось допоміжного потенціалу U , що квадратами величин $T = W - U$ можна знехтувати. Цей допоміжний потенціал U називається нормальним, він повинен бути попередньо заданий. Наприклад, якщо під нормальним потенціалом U розуміти потенціал еліпсоїда обертання, зовнішня поверхня якого є рівневою

(такий еліпсоїд називається рівневим еліпсоїдом), то потенціал U може бути знайдений в результаті вирішення проблеми Стокса для еліпсоїда обертання. Таким чином, в задачі Стокса визначенню відповідають лише малі величини $T = W - U$. Цю задачу Стокс звів до третьої задачі теорії потенціалу. Поверхню умовного еліпсоїда $U = U_0$ Стокс використав як відлікову поверхню (поверхню відносності), відносно якої визначається розташування точок на геоїді.

Тобто для визначення потенціалу Землі і форми геоїда не можна використовувати задачу Стокса, так як геоїд не задовольняє умові теореми Стокса: він не є зовнішньою умовленою поверхнею, і вимірювання сили тяжіння роблять на фізичній поверхні Землі, а не на геоїді. Проте Стокс і його послідовники думали, що з цим відступом від теорії можна успішно впоратись, якщо вести в виміряну силу тяжіння невеликі поправки – редукції. Відповідно з цим необхідно було вирішити проблеми «регуляризації» Землі і редукцію сили тяжіння. Перша проблема полягала в тому, що шляхом ведення поправок у виміряне значення сили тяжіння отримати таке гравітаційне поле Землі, яке відповідало б умовам теореми Стокса. Проблема була в тому, щоб шляхом обчислювальних операцій прибрати всі маси материків і островів, підносячись над геоїдом, і розмістити їх нижче поверхні геоїда, для цього потрібно було врахувати вплив притягання цих мас на значення сили тяжіння в кожній точці, де вона вимірялась. виправлена цими поправками сила тяжіння потім на геоїд Землі.

Вирішення задачі було отримано М.С. Молоденським, що зовнішній потенціал W достатньо близько до відомого нормального потенціалу U .

В даний час великого поширення отримав новий метод вирішення геодезичної задачі, в основі якого є використання спостережень штучних супутників Землі та інших космічних об'єктів. Використовуючи результати спостереження за рухом супутників, можна знайти параметри зовнішнього гравітаційного поля Землі.

Відомо, що рух штучного супутника в полі тяжіння Землі підпорядковується основному закону динаміки Ньютона, в прямокутній системі координат має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.48}$$

де V – потенціал гравітаційної сили.

Дивлячись на ці рівняння можна помітити, що прискорення супутника рівне градієнту потенціалу, тобто вимірюючи прискорення, можна знайти потенціал.

Таким чином, цей спосіб дозволяє знаходити пряме вимірювання потенціалу V в точках траєкторії супутника замість того, щоб вивести його із рішення важкої граничної задачі. Однак така пряма процедура визначення потенціалу не є прямою по двом причинам.

По перше, прискорення обумовлене головним членом потенціалу GM/r , що відповідає кулі з симетричним розподілом густини, і компоненти, які відповідають стисненню Землі і другим більш меншим відхиленням від сферичної симетрії, не перевищуючи однієї тисячної головного члену, тому їх важко точно визначити. По-друге, є прискорення, зумовлене впливом зовнішніх факторів, головними із яких є гравітаційна дія Сонця і Місяця, опір атмосфери і світловий тиск, яке Сонце чинить на супутники. Це прискорення спотворюють дані спостереження і з важкістю піддаються точному врахуванню.

Виявилось доцільним при визначенні потенціалу використовувати відхилення від кеплерова еліпса або збурення, спостережені в русі супутника навколо Землі. Деякі із цих відхилень збільшуються постійно з часом або вимірювані з періодом багатьох тижнів, внаслідок цього піддаються точному

вимірюванню за допомогою простих спостережень, які можна виконувати протягом тривалого часу. Тому компоненти потенціалу, викликаючи ці відхилення, можуть бути визначені досить точно. Другі компоненти викликають відхилення, які змінюються із добовим періодом, визначення їх пов'язано з великими труднощами і характеризується малою точністю.

Таким чином, відхилення фактичних положень і швидкостей ШСЗ від визначень використовується для підбору більш підходящої для опису руху ШСЗ моделі гравітаційного поля Землі, при цьому доводиться обмежуватись визначенням обмеженого числа коефіцієнтів головних членів розкладу потенціалу в ряд по кульовим функціям.

2.1. Властивості збуреного потенціалу

Збуреним потенціалом T Землі прийнято називати різницю між дійсним W і нормальним U потенціалом Землі.

$$T = W - U \quad (2.49)$$

Нормальний потенціал:

$$U = V^0 + Q^0 = \frac{GM_0}{r} \left[1 + \bar{c}_{20} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \bar{c}_{40} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) \right] + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta \quad (2.50)$$

Тобто потенціал V^0 представлено з урахуванням сферичної функції нульового порядку і зональних гармонік другого і четвертого порядку, то рівнева поверхня нормального потенціалу при $r = a$ не є еліпсоїдом обертання. Це буде поверхня наближена до кулі, які прийнято називати сфероїдом. Сфероїд може бути визначений як найпростіша із поверхонь, відхилення яким від кулі характеризується зональною гармонікою другого порядку.

2.2. Зв'язок між збуреним потенціалом і складовими ухилення виска

В наслідок відмінності дійсного гравітаційного поля Землі від нормального, обумовлено складною внутрішньою будовою і фігури, напрямок вектора дійсної сили тяжіння g в точках фізичної поверхні Землі не співпадає

з направленим вектором нормальної сили тяжіння γ . З цієї причини астрономічні координати точок земної поверхні відрізняються від геодезичних. Встановимо залежність між цими координатами.

Проведемо в точці M земної поверхні три направлені вектори; дійсної сили тяжіння g , нормальної сили тяжіння γ і нормалі до еліпсоїду n . Перетин цих напрямлень з небесною сферою визначить положення астрономічного зеніту Z_0 , точки Z_1 і геодезичного зеніту Z_r (рис. 15)

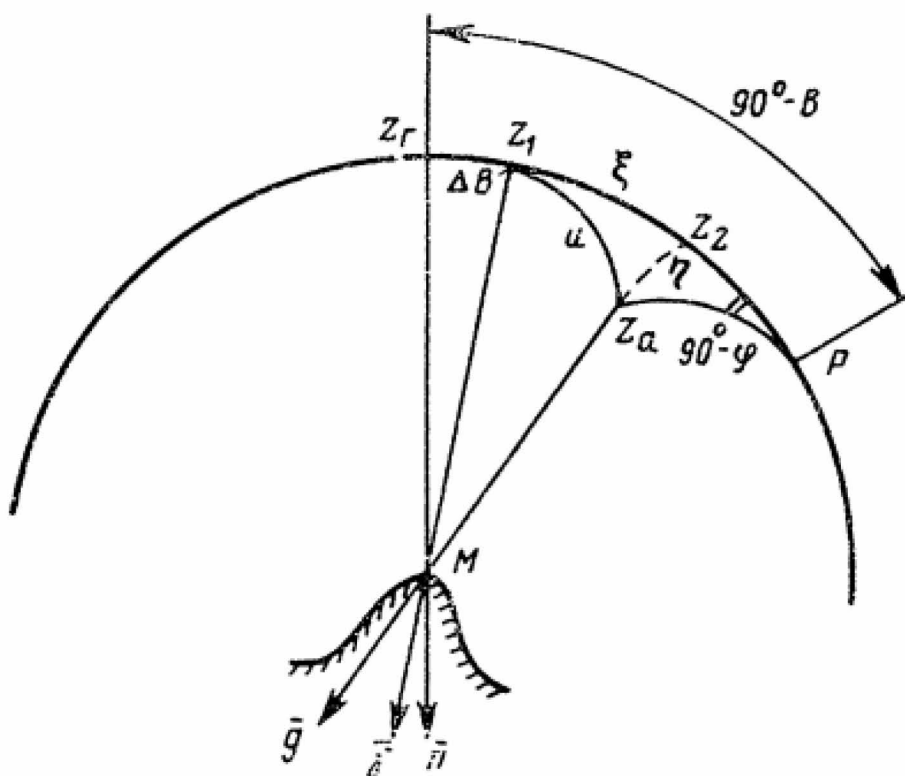


Рис. 15

Відмітимо на кулі положення полюса P .

$$\sphericalangle Z_0 P = 90 - \varphi$$

$$\sphericalangle Z_r P = 90 - B$$

$$\sphericalangle Z_1 P Z = \Delta \lambda$$

де φ – астрономічна широта точки M ; B – геодезична широта точки M ; $\Delta \lambda$ – кут між астрономічним і геодезичним меридіанами точки M .

Так як астрономічна і геодезична довгота беруть відлік від початкового меридіану, то

$$\Delta \lambda = \lambda - L$$

Кут (n, γ) між напрямом нормалі до еліпсоїда n і направленням сили тяжіння γ рівний різності між нормальною і геодезичною широтою:

$$(n, \gamma) = B_n - B = \frac{\beta H}{R \sin 1''} \sin 2B$$

На рис. 16 астрономічний Zenit відхиляється до південного напрямку на захід.

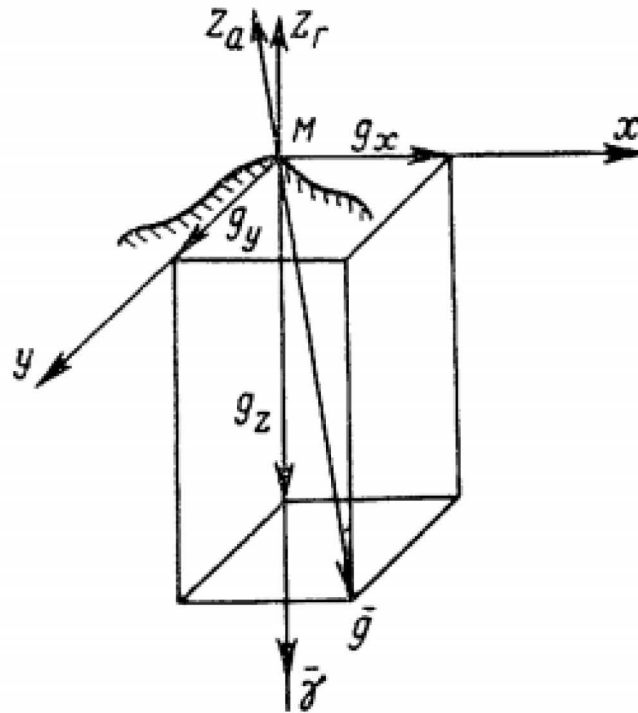


Рис. 16

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(U + T)$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(U + T)$$

Оскільки площина xy перпендикулярна до напрямку нормальної сили тяжіння, проекція нормальної сили тяжіння на ці осі буде рівна нулю.

$$\xi = -\frac{1}{\gamma p} \frac{\partial T}{\partial B}$$

$$\eta = \frac{1}{\gamma p \cos B} \frac{\partial T}{\partial L} \quad (2.51)$$

Отримаємо закінчену формулу, яка зв'язує збурений потенціал Землі і складові ухилення виска.

2.3. Нормальні висоти, аномалії висот. Зв'язок між збуреним потенціалом і аномалією висоти.

Геодезична висота точки M земної поверхні може бути визначена через різницю нормальних потенціалів $U_0 - U_M$. Однак в результаті вимірювань визначається різниця дійсних потенціалів між значенням потенціалу сили тяжіння в початковому пункті нівелювання W_0 і значенням потенціалу сили тяжіння в точці $M - W_M$, тобто $W_0 - W_M$.

Якщо б гравітаційне поле Землі співпадало із нормальним (в такому випадку збурений потенціал скрізь був би рівний нулю), то для кожної точки поверхні Землі зберігалась рівність

$$W_0 - W_M = U_0 - U_m$$

а геодезична висота точки M знаходилась за співвідношенням:

$$H_M = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m} \quad (2.52)$$

$$H_M^Y = H_M^{\text{ВІМ}} + \Delta H_g \quad (2.53)$$

Різниця між геодезичною висотою H_M точки M і її нормальною висотою H_M^Y є величина:

$$\zeta_M = H_M - H_M^Y$$

яка називається аномалією висоти і рівна відрітку нормалі NM , опущеної до еліпсоїда в точці M (рис. 17).

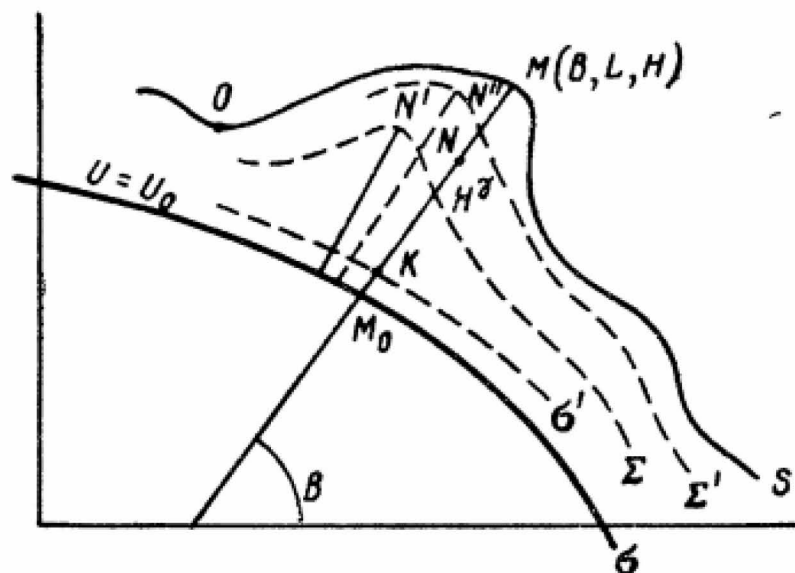


Рис. 17

Її можна розглядати в якості другої складової геодезичної висоти. Відомо, що аномалії висот, як і відхилення виска, характеризує відступ гравітаційного поля Землі від нормального.

Вираз для аномалії висоти:

$$\zeta_M = \frac{T_M}{\gamma_N} \quad (2.54)$$

Аномалії висот і нормальні висоти знаходяться в тісному зв'язку одна з одною: їх сума дає значення геодезичної висоти точки М. На основі вище сказаного отримаємо:

$$H_M = H_M^N + \zeta_M = \frac{1}{\gamma_M^N} \int_0^M g \, dh + \frac{1}{\gamma_N} (T_M + U_0 - W_0) \quad (2.55)$$

2.4. Геоїд і квазігеоїд

Поняття фігури Землі неоднозначне і може трактуватися по-різному в залежності від того, які вимоги пред'являються до точності рішення тих чи інших завдань, що вимагають знання форми і розмірів Землі. В одних випадках Землю можна прийняти за кулю, в інших, наприклад, при вирішенні багатьох завдань геодезії і картографії, – за двовісний еліпсоїд обертання з малим полярним стисненням і т. д.

Вище зазначалося, що при вирішенні завдань вищої геодезії під фігурою Землі в даний час розуміють фігуру, обмежену фізичною поверхнею Землі, тобто її твердої оболонки на суходолі і незбуреною поверхнею морів і океанів. Суходол здіймається над рівнем моря в середньому на 900 м – на дуже малу величину в порівнянні з середнім радіусом Землі ($R = 6371$ км). Більше 70% земної поверхні вкрито морями і океанами. Тому за фігуру Землі в першому наближенні можна прийняти фігуру, обмежену незбуреною поверхнею морів і океанів і продовжену під материками так, щоб лінії виска у всіх її точках були перпендикулярні до неї. Таку фігуру Землі за пропозицією німецького фізика Лістинга називають геоїдом. В даний час на акваторії Світового океану геоїд з високою точністю (до 0,1–0,3 м по висоті) вивчають методом супутникової альтиметрії, вимірюючи відстані від супутника до підсупутникових точок на поверхні морів і океанів. Ці вимірювання показали, що незбурена морська поверхня не скрізь збігається з рівної поверхнею потенціалу сили тяжіння: в окремих районах відхилення по висоті досягають $\pm(1,5-2)$ м. Тому при теоретично строгому підході під геоїдом розуміють фігуру Землі, обмежену рівневою поверхнею потенціалу сили тяжіння, що проходить через початок відліку висот, що збігається з деяким середнім рівнем Світового океану.

При вивченні фігури геоїда на суші метод супутникової альтиметрії не працює, а інші методи космічної геодезії дають недостатню точність визначення його поверхні. Для того щоб вивчити фігуру геоїда по наземним вимірам з високою точністю, необхідно силу тяжіння вимірювати безпосередньо на його поверхні, що неможливо. Отже, як довів відомий вчений М. С. Молоденський, вивчити фігуру геоїда з високою точністю по наземним вимірам неможливо. За результатами комплексу наземних астрономо-геодезичних і гравіметричних вимірювань теоретично бездоганно може бути визначена інша допоміжна поверхня, що одержала назву поверхні квазігеоїда, яка незначно відхиляється від поверхні геоїда: в рівнинній місцевості на 2–4 см, а в горах – не більше 2 м. На морях і океанах поверхні геоїда і квазігеоїда повністю збігаються.

Визначивши з обробки наземних вимірювань параметри квазігеоїда і вимірявши щодо нього висоти точок земної поверхні, можна теоретично вивчити фігуру реальної Землі, обмежену її твердою оболонкою на суші і незбуреною поверхнею морів і океанів.

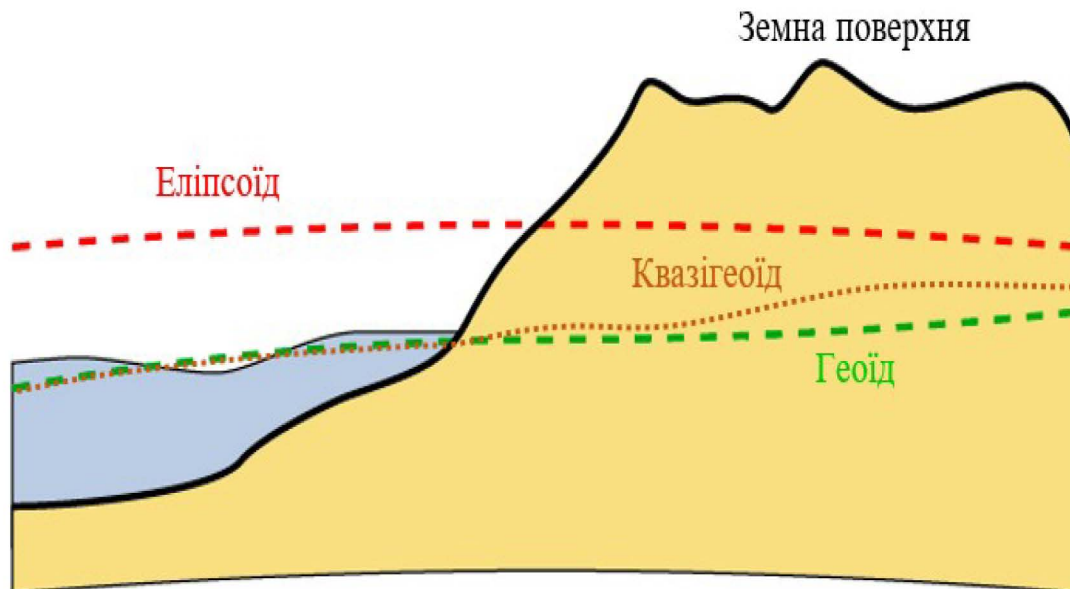


Рис. 18

2.5. Тензор і еліпсоїд інерції Землі

Момент інерції твердого тіла відносно деякої осі залежить від розподілу мас щодо цієї осі. При зміні систем координат змінюються значення моментів A, B, C, D, E, F , характеризують систему і розподіл мас в просторі.

$$I = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Симетрична матриця (3.1) представляє повний спектр подвійних моментів інерції Землі, вона називається тензором інерції Землі; це найважливіша характеристика Землі в системі відліку, відносно якої він визначений. Тензор інерції Землі будемо виявляти на епоху, яку встановлена система координат і прийнятий закон розподілу мас в тілі Землі. Дійсно, достатньо змінити орієнтацію системи координат або закон розподілу мас в тілі Землі, то відповідно змінюються всі її моменти інерції, включаючи другі моменти A, B, C, D, E, F , складові тензора інерції Землі.

Для Землі гармонічні коефіцієнти геопотенціалу визначаються в геоцентричній системі координат $OXYZ$, встановленої на середню епоху 1900 – 1905 р. Тому тензор інерції Землі буде визначено щодо цієї системи. Нехай момент інерції Землі відносно деякої осі ε визначений формулою (1.30); Відкладемо від початку координат $OXYZ$ уздовж осі ε відрізок $ON_\varepsilon = I_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$; при цьому x, y, z координати точки N_ε . Направляючі косинуси осі ε в системі $OXYZ$ будуть

$$\cos(X, \varepsilon) = x\sqrt{I_\varepsilon}; \cos(Y, \varepsilon) = y\sqrt{I_\varepsilon}; \cos(Z, \varepsilon) = z\sqrt{I_\varepsilon} \quad (2.57)$$

Виключаючи у формулі (3.3) напрямні косинус (3.2).

$$I_\omega = I^2A + m^2B + n^2C - 2(mnD + lnE + lmF) \quad (2.58)$$

l, m, n – направляючі косинуси ω .

Маємо рівняння:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fxy - 2Exz - 2Dyz = 1 \quad (2.59)$$

яке відображає геометричне місце точок N_ε для різних осей ε

Момент інерції для тіла скінченої маси має величину, скінчену і відмінну від нуля. Отже, рівняння (3.4) є рівнянням еліпсоїда скінчених розмірів. Таким чином, тензор інерції другого рангу (3.1) однозначно визначає тривісний еліпсоїд. Геометричний образ тензора інерції другого рангу називається еліпсоїдом інерції твердого тіла. В окремому випадку тензор інерції другого рангу (3.1), складовими якого служать другі моменти інерції Землі в геоцентричній системі відліку, є тензор інерції Землі і він же визначає еліпсоїд інерції Землі.

2.6. Головні осі, головні моменти і тензор інерції Землі

Будь який еліпсоїд має головні осі. В окремому випадку тривимірний еліпсоїд має головні осі u, v, w щодо яких його рівняння:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1 \quad (2.60)$$

Якщо квадрати півосей еліпсоїда $a^2 = I_u^{-1}$, $b^2 = I_v^{-1}$, $c^2 = I_w^{-1}$, то його рівняння в головних осях буде

$$I_u u^2 + I_v v^2 + I_w w^2 = 1 \quad (2.61)$$

Порівняємо це рівняння про виразом (3.4). Відцентрові моменти D, E, F щодо головних осей дорівнюють нулю. Система осей, щодо яких відцентрові моменти рівні нулю, називаються головними осями інерції, а моменти інерції щодо цих осей – головними моментами інерції тіла. У геодезичній задачі головні осі проходять через центр інерції Землі, тому їх називають головними центральними осями інерції Землі.

Моменти інерції відносно цих осей назвемо головними центральними моментами інерції і позначимо їх через A_0, B_0, C_0

У загальній постановці для еліпсоїда пошук його головних осей зводиться до проблеми визначення коренів вікового рівняння. В нашій простій задачі, розкривши визначник

$$|I - E\lambda| = \begin{vmatrix} A - \lambda & -F & -E \\ -F & B - \lambda & -D \\ -E & -D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

отримаємо вікове рівняння

$$\lambda^3 - (A + B + C)\lambda^2 + (AB + AC + BC - F^2 - E^2 - D^2)\lambda - (ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) = 0 \quad (2.63)$$

коренями якого і є головні центральні моменти інерції A_0, B_0, C_0 .

Вікове рівняння для Землі настільки чутливе до помилок округлення, що доводиться залишати до 20 і більше значущих цифр, щоб отримати його коректне рішення. При обчисленнях шуканих параметрів A_0, B_0, C_0 процес послідовних наближень неминучий.

Тензор інерції другого рангу в головних осях є діагональна матриця, складена з головних моментів інерції. Цей тензор позначимо через $I_0 = \{A_0, B_0, C_0\}$. Головний тензор інерції I_0 не залежить від прийнятої системи координат і виступає фундаментальним параметром планетарного тіла. Він залежить тільки від розподілу мас всередині тіла. Визначення головного

тензора інерції, одного з фундаментальних параметрів планетарного тіла, є особливою проблемою планетарної геодезії.

2.7. Параметри динамічної фігури і тензор інерції Землі

Теорія динаміки Землі проілюструємо на прикладі обчислення параметрів динамічної фігури Землі, використовуючи формули:

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta; \\
 p_{12} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta; \\
 p_{13} &= \sin \varphi \sin \vartheta; \\
 p_{21} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta; \\
 p_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta; \\
 p_{23} &= \cos \varphi \sin \vartheta; \quad p_{31} = \sin \psi \sin \vartheta; \quad p_{32} = -\cos \psi \sin \vartheta; \quad p_{33} = \cos \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

$$|l - E\lambda| = \begin{vmatrix} A - \lambda & -F & -E \\ -F & B - \lambda & -D \\ -E & -D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0.
 \tag{2.65}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{21} (I_2 + 2I_{22})}{K_{21} (I_2 - 2I_{22})}; \quad \psi = \lambda_0 - \varphi.
 \tag{2.66}$$

і моделі зовнішнього гравітаційного поля Землі GEM 6, 9, 10. Результати обчислення поміщені в табл.9. В цій таблиці: A_0 , B_0 , C_0 – головні моменти інерції Землі; θ , φ і ψ – ейлерові кути, які складають головні осі u , v , w інерції Землі з осями X , Y , Z земної системи геодезичних координат: λ_0 – довгота площини меридіана осі u , відносно якої Земля володіє найменшим головним моментом інерції A_0 ; λ_ω – довгота полюса інерції Землі відносно початкового меридіана і середнього полюса; α_β і α_ρ – екваторіальне і полярне стиснення еліпсоїда інерції Землі.

Таблиця 2.1

$$(M = 5,973327588 \cdot 10^{27} \text{Г}; H = 3272,6 \cdot 10^{-6})$$

Параметри	GEM6	GEM9	GEM10
$I_2 \cdot 10^6$	1082,6283	1082,62708	1082,62684
$I_{22} \cdot 10^6$	-1,5654	-1,57114	-1,57117

$K_{22} \cdot 10^6$	0,8961	0,90231	0,90310
$I_{21} \cdot 10^6$	0,0012	0,00027	-0,00134
$K_{21} \cdot 10^6$	0,0041	0,00524	+0,00314
$\alpha, \text{ м}$	6378155	6378140	6378140
$A_0/\alpha^2 M$	0,329729721	0,329729334	0,329729258
$B_0/\alpha^2 M$	0,329736936	0,329736581	0,329736507
$C_0/\alpha^2 M$	0,330815957	0,330815585	0,330815509
α_e	0,0000109407	0,0000109894	0,0000109919
α_p	0,0016376320	0,0016362821	0,0016362821
λ_o	-14°53,7'	-14°56,1'	-14°56,7'
ξ	0,783''	1,001''	0,600''
η	0,228''	0,051''	-0,255''
θ	0,82''	1,00''	0,64''
φ	1614,1'	256,0'	-2259,4'
ψ	-3107,8'	-1752,1'	802,7'
λ_ω	-7345,9'	-8704,0'	-11259,4'
$A_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г см}^2$	8,012435863	8,012388772	8,012386925
$B_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г см}^2$	8,012611188	8,012564873	8,0125563075
$C_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г см}^2$	8,038831410	8,038784559	8,038782712
$\frac{B_0 - A_0}{2C_0 - (A_0 + B_0)}$	0,00333217	0,00334695	0,00334695
$\vartheta_g(\omega_g, K_0)$	0,0026''	0,0026''	0,0026''

Обчислення показують, що основні параметри динамічної фігури Землі достатньо надійно визначаються по моделям її зовнішнього гравітаційного поля. Розходження абсолютних значень головних моментів інерції в моделях GEM6 і GEM9, 10 виходить через відмінності масштабів, прийнятих в цих моделях ($\alpha_e = 6\,378\,55 \text{ м}$ – GEM6, $\alpha_e = 6\,378\,140 \text{ м}$ – GEM9, 10). При рівному масштабі відносні помилки визначення головних моментів інерції для моделей визначають: GEM6 і GEM9 – 1 : 1 000 000; GEM9 і GEM10 – 1 : 4 000 000.

Знайдено систематичні виміри основних параметрів, які очевидно виявляються планетарною еволюцією Землі. У всякому разі геодезичні визначення параметрів динамічної фігури Землі мають достатньо надійну оцінку і можна тепер слідкувати за часовими варіаціями цих параметрів. Якщо всередині Землі спливає легкий матеріал, то це повинно проявитись в віковому зменшенні моментів інерції Землі. Вікове зменшення моментів інерції може бути обумовлене і загальним зменшенням об'єму Землі.

На епоху 1975 р. за тензор інерції Землі можна прийняти тензор другого рангу I , елементами якого є другі моменти інерції Землі $A = 0,329729778$, $D = -0,418 \cdot 10^{-8}$, $B = 0.329736063$, $E = -0.43 \cdot 10^{-8}$, $C = 0.330815546$, $F = -90.270 \cdot 10^{-8}$, масштабовані на $\alpha_6^2 M$. За головні моменти інерції Землі на цю епоху можна рекомендувати їх середні значення, які визначаються по моделям GEM9 і GEM10, $A_0 = 0.329729296$, $B_0 = 0.329736544$, $C = 0.330815547$.

Підвищення точності математичних моделей Землі неминує потребує стандартизації параметрів динамічної фігури Землі, встановлюваних на певну епоху. Виведення таких фундаментальних параметрів Землі на кожну епоху і визначення їх вимірів в часі є однією із головних задач геодезії.

Як видно із даних таблиць, еліпсоїд інерції Землі має менше стиснення, ніж її гравітаційний еліпсоїд.

Визначені параметри динамічної фігури Землі хоча і потребують уточнення орієнтації її осей через похибки визначення гармонічних коефіцієнтів I_{21} і K_{21} , але їх можна використовувати для інтерпретації даних астрономії, геодезії, геофізики і інших наук. Вони будуть корисні у вивченні руху полюсів Землі, теорії прецесії і нутації. Зауважимо, що модель з параметрами $K_{21} \approx 3I_{21} > 0$ дає найкраще узгодження наземних і супутникових визначень. Значно покращує оцінку параметрів I_2 , I_{21} , K_{21} , I_{22} , K_{22} і їх варіації в часі, можна ефективно визначати орієнтацію головних осей інерції і фіксувати ефект переміщення мас в тілі Землі на кожну епоху.

2.8. Супутникова альтиметрія

При супутникової альтиметрії з супутника, що летить над океанами, посилають вертикально вниз короткохвильовий електронний промінь. Промінь відбивається і приймається супутником знову. Виміряна тривалість руху променя відразу дає висоту супутника над океанічної поверхнею. Знаючи орбітальне положення супутника щодо глобальної системи відліку, ми можемо обчислити висоту супутника h над еліпсоїдом. Тоді різниця h – являє собою висоту геоїда N . Це так, якщо вірним є припущення про збіг океанічної поверхні і поверхні геоїда. Насправді обидві поверхні відрізняються за рахунок "поверхневої топографії морів і океанів" (через океанічні течії і т. п.), яка може досягати близько 1 м і становить інтерес для океанографії. Відповідні величини можуть бути визначені, якщо точний океанічний геоїд відомий за результатами вивчення гравітаційного поля.

Принцип супутникових методів показаний на рис. 19

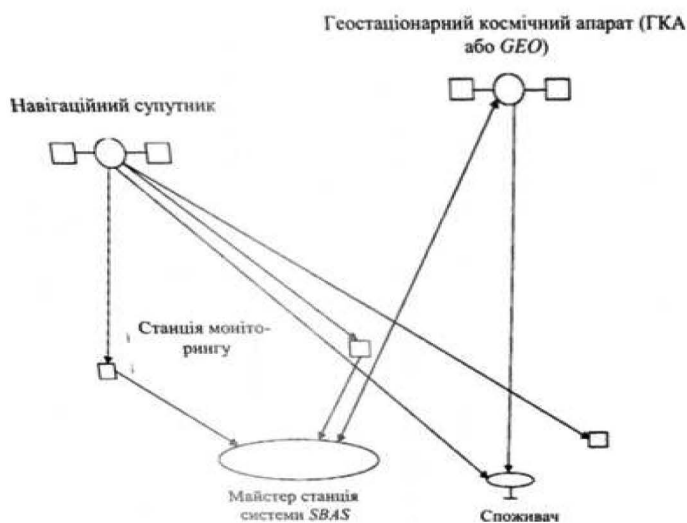


Рис. 19

2.9. Орбіти штучного супутника

Зробимо короткий огляд теорії незбуреної орбіти супутника, яка має місце в тому випадку, коли гравітаційний потенціал має форму

$$V = \frac{GM}{r} \quad (3.67)$$

тобто всі коефіцієнти C і S в розкладанні потенціалу дорівнюють нулю. Це гравітаційне поле точкової маси або однорідної сфери. Тоді рух супутника описується трьома законами планетарного руху Кеплера.

Відповідно до першого закону Кеплера, орбіта має форму еліпса, в одному з фокусів якого знаходиться центр мас Землі. Положення орбіти в просторі визначається шістьма елементами орбіти:

a – велика піввісь

e – ексцентриситет

i – нахили

Ω – вузол прямого сходження

ω – аргумент перигею

T – час проходження через перигею

Якщо a і b – півосі орбітального еліпса, то ексцентриситет визначається як:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (3.68)$$

Перетин площини орбіти з площиною екватора називається лінією вузлів; вона з'єднує висхідний вузол K і спадний вузол K' . Пряме сходження вузла Ω є кут між лінією вузлів і напрямком на точку весняного рівнодення. Значення Ω також називають довготою висхідного вузла, але, відповідно до астрономічної термінології, це пряме сходження (висхідного) вузла. Велика вісь орбіти перетинає орбітальний еліпс в точці перигею P , тобто в точці, де положення супутника є найближчим до Землі, і в точці апогею A , де супутник є найбільш віддаленим. Кут i між лінією вузлів і великою віссю орбіти називається аргументом перигею.

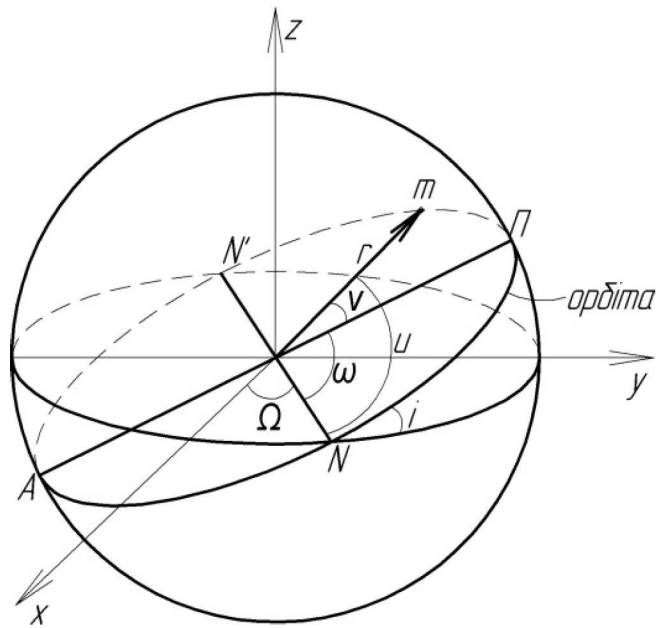


Рис. 20

Рис. 20 показує проєкцію орбіти на геоцентричну одиничну сферу, де P позначає перигей, A – апогей, K – висхідний вузол, K' – нисхідний вузол.

Кутова відстань супутника від перигею називається істинною аномалією і позначається v .

Рівняння орбітального еліпса може бути записано у вигляді:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (3.69)$$

де r – відстань супутника від центра мас Землі, а

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \quad (3.70)$$

є довжиною радіуса-вектора r для $v = 90^\circ$. Радіус-вектор r і справжня аномалія v формують пару полярних координат в орбітальній площині, і (3.69) – відоме полярне рівняння еліпса. Для ілюстрації цих величин див. рис. 21, де фокус F є центром мас Землі.

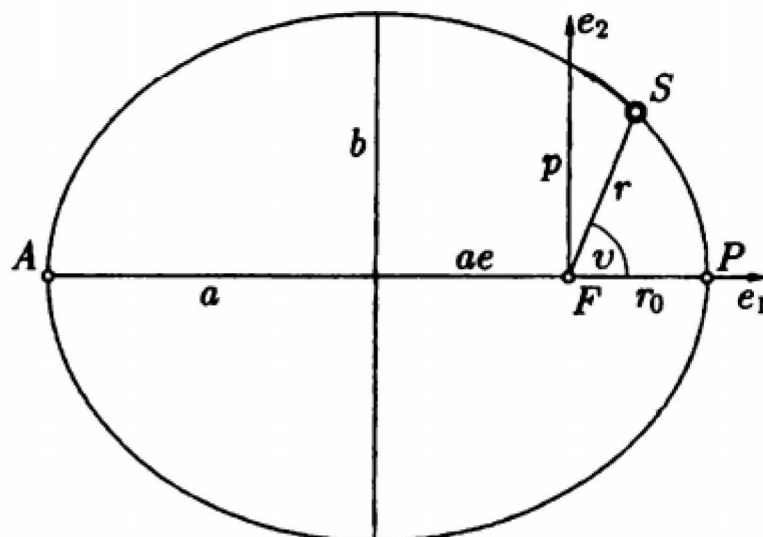


Рис. 21. Орбітальний еліпс.

Згідно з другим законом Кеплера, площа еліптичного сектора, укладеного між радіусами-векторами r будь-яких двох положень супутника, пропорційна часу, який потрібен для переміщення супутника з одного положення в інше. Іншими словами, похідна по часу площі області, укладеної між двома радіусами-векторами, постійна. Так як елемент площі сектора в полярних координатах r і v дорівнює $\frac{1}{2} r^2 dv$ можна сформулювати наступний математичний закон:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{GM a(1 - e^2)} \quad (3.71)$$

Третій закон Кеплера стверджує що

$$n^2 a^3 = GM \quad (3.72)$$

де

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (3.73)$$

є «середнім рухом» (середній кутовий швидкістю) супутника на розглянутому проміжку P .

2.10. Визначення тесеральних гармонік і розташування станцій

Зональні сферичні функції дають початок віковим і довгоперіодичним збурень елементів орбіти a, e і т.д. Тому їх вплив може бути виявлено в змінах параметрів орбіти, отриманих шляхом інтегрування по багатьом обертянням супутника.

Обурення за рахунок тесеральних сферичних функцій мають набагато коротший період. Найбільший період гармоніки порядку $m = 1$ дорівнює одному дню, для $m = 2$ – тільки половині дня і т. д. Тому ми повинні шукати інший метод, який є досить чутливим, щоб виявляти навіть коротко періодичні ефекти і витягувати зі спостережень якомога більше інформації.

Спостерігаються елементами є сферичні координати супутника щодо станції спостереження: відстань s і визначається двома кутами напрямом. У відповідності до системи координат X^0, Y^0, Z^0 , введеної в попередньому розділі, цими кутами є пряме сходження a і схилення δ , визначення яких показано на рис. 22. Кути a й δ являють собою полярні координати в тривимірному просторі і виходять шляхом фотографування супутника на тлі зірок. Сьогодні їх можна вважати застарілими, але корисними для геометричної інтуїції і симетрії. Найбільш важливими є відстані, виміряні за допомогою GPS, радаром або лазером. Зауважимо, що вимірювання швидкості зміни дальності ds/dt супутника за допомогою ефекту Доплера також важливо для визначення тесеральних сферичних функцій і положення станцій.

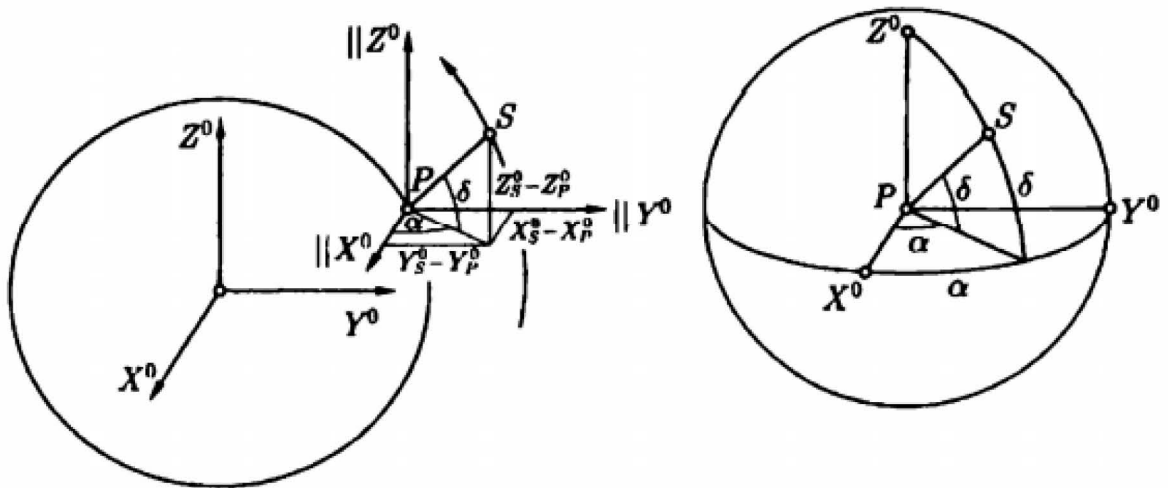


Рис 22. Направлення на супутник, яке визначається прямим сходженням і схиленням S (зліва – Земля, праворуч – одинична сфера)

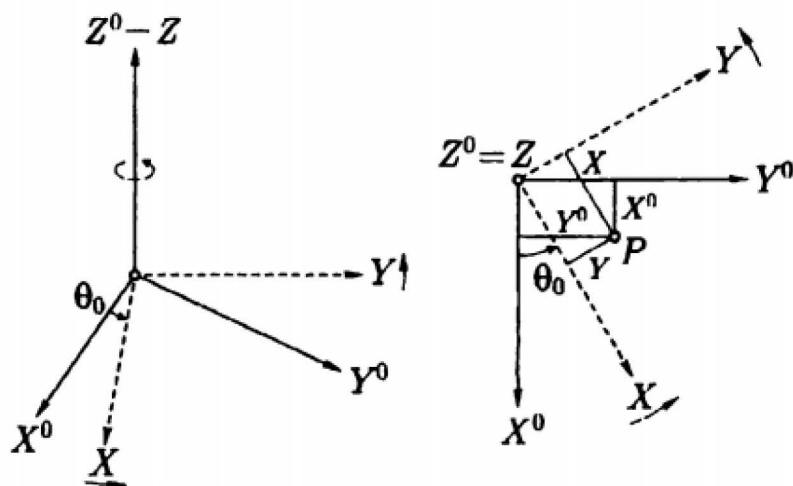


Рис. 23. Геоцентричні системи координат $X^0Y^0Z^0$ (небесна) і XYZ (земна)

В даний час (2005 рік) ми маємо в своєму розпорядженні кількома результатами визначення коефіцієнтів тесеральних сферичних функцій до ступеня 360 по комбінації супутникових та наземних даних. Очікується, що в найближчому майбутньому буде досягнута ступінь 1800. Ці коефіцієнти являють великомасштабні особливості обурює потенціалу T , і геоїда, так як висота геоїда $N = T/\gamma$. Має місце загальна узгодженість між найбільш істотними аспектами цих визначень, відображається на картах геоїда, але деталі цих відображень і особливо індивідуальні коефіцієнти різняться досить помітно.

2.11. Місія CHAMP

Інформації про проект CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload). Задумана і реалізована Науково-дослідним геоцентром Потсдама (Geoforschungszentrum Potsdam). Проект CHAMP переслідує наступні головні цілі:

- вивчення глобального поля сили тяжіння, або, конкретніше, уточнення довгохвильової частини статичного поля та її тимчасових варіацій (викликаних, наприклад, перерозподілами атмосферних мас, океанічної циркуляцією, зміною рівня моря за рахунок танення полярного льоду);

- вивчення глобального магнітного поля або уточнення магнітного поля і магнітного поля земної кори та їх просторових варіацій;

- профілювання іоносфери і тропосфери або уточнення атмосфери з точки зору її температури, вмісту водяної парів та електронної структури за даними про заломлення сигналів GPS.

Запуск супутника проекту CHAMP здійснений 15 липня 2000 року зі Російського космодрому Плісецьк. Основні параметри:

- орбіта майже кругова (ексцентриситет $e < 0.004$) і майже полярна (нахил складає 87°).

- початкова висота 454 км.

- вага супутника 522 кг, довжина 8.3 м (включаючи "хвостову стрілу" 4 м довжини), ширина 1.6 м, висота 0.75 м.

Вказану початкову висоту можна розглядати як компроміс між умовами для вимірювання магнітного поля і поля гравітаційного, так як при вимірюванні гравітаційного поля бажана більш низька висота. Але завдяки, головним чином, атмосферному опору, висота буде поступово зменшуватися до порядку 300 км і навіть менше, що сприятливо позначиться на чутливості визначення гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля.

Причина кілька розміру 4 м хвостовій частині пояснюється технологічними вимогами магнітометри: вимірювальний пристрій має бути окремо від основної частини супутника.

Для досягнення цілей проекту на борту супутника є наступне обладнання:

- подвійний частоти приймач GPS, пов'язаний з системою антен, щоб визначати орбіту супутника CHAMP, використовуючи кодові і фазові псевдо дальності;

- тривісний акселерометр, щоб вимірювати негравітаційне прискорення, що діє на космічний корабель (аеродинамічний опір, тиск сонячного випромінювання, альbedo і т. д.)

- лазерний ретранслятор для дублювання системи стеження, щоб вимірювати двосторонні відстані між наземними станціями і супутниками з точністю 1 - 2 см; ці вимірювання забезпечують точне визначення орбіти;

- магнітометр магнітного потоку, що вимірює векторні компоненти магнітного поля Землі (мається також скалярний магнітометр для забезпечення калібрувальних можливостей векторного магнітометра)

- обладнання для визначення електричного поля, концентрації, температури і знесення іонів;

- два удосконалені прилада для спостереження за зірками, щоб отримувати високоточну інформацію щодо орієнтування тривісного акселерометра і цифрового вимірювача іонного знесення, а також для коригування положення супутника.

- системи терморегуляції, енергетичної системи, обробки даних, телеметрії, що стежать і керуючих систем.

Основою проекту CHAMP є система супутник-супутник в режимі високий-низький. Гравітаційне поле Землі збурює орбіту супутника CHAMP. Тому гравітаційне поле Землі може бути уточнено за результатами вимірювання гравітаційних збурень орбіти супутника, користуючись для цього або чисельним інтегруванням орбіти, або принципом енергетичного балансу.

2.12. Місія GRACE

Проект GRACE – спільний проект Американського національного управління з аеронавтики і космонавтики (U.S. National Aeronautics and Space Administration, NASA) та Німецьким центром авіаційних і космічних польотів (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR). Основними цілями проекту є:

- визначення глобального гравітаційного поля Землі з високою роздільною здатністю.
- вивчення варіації сили тяжіння в часі.

Інше завдання полягає у вивченні за допомогою GPS-вимірювань явищ заломлення в іоносфері і тропосфері шляхом детального визначення електронного змісту. Два супутника цього проекту були запущені одночасно 17 березня 2002 року з космодрому Плісецьк (Росія). Основні параметри цих супутників:

- майже кругова (ексцентриситет $e < 0.005$) і майже полярна (нахил 89°) орбіта;
- початкова висота між 485 км і 500 км;
- супутники знаходяться на відстані приблизно 220 км один від одного (щоб зберегти такий поділ, необхідні орбітальні маневри кожні один або два місяці);
- вага кожного супутника – приблизно 480 кг, довжина близько 3 м.

Як і у випадку з CHAMP, висота супутників GRACE згодом зменшується перш за все через атмосферного опору. Величина зниження залежить від циклу сонячної активності і може скласти приблизно від 50 км при низькій активності до 200 км при високій активності за час дії місії.

Відстань між двома супутниками має вимірюватися з максимальною точністю. Швидкість його зміни необхідно знати краще ніж $1 \text{ мкм}^{-1}\text{с}$, що досягається за допомогою міжсупутникових мікрохвильових вимірювань. Основна ідея полягає в тому, що варіації поля сили тяжіння викликають варіації в відстані між цими двома супутниками; райони з великими

значеннями сили тяжіння впливають спочатку на перший супутник, що з'явився там, і, отже, розганяють його щодо наступного супутника. GRACE інформуватиме не тільки про статичне глобальне поле сили тяжіння, але також і про його тимчасові варіації. Зазначимо основне обладнання, яким забезпечені супутники проекту для досягнення зазначених цілей.

- Ключовим інструментом GRACE є далекомірна система в смузї частот, що вимірює зміни відстані між обома супутниками, використовуючи двосмугові мікрохвильові сигнали (тобто дві односторонніх дальності) з точністю близько $1 \text{ мкм}^{-1}\text{с}$. Відстані вимірюються з частотою 10 Гц.

- GPS-приймач служить для точного визначення орбіти космічного апарату GRACE і доставляє дані для атмосферного та іоносферного профілювання. Щоб досягти цього, система супутник-супутник реалізована не тільки між двома супутниками GRACE, а й між GPS-супутниками. Навігаційні визначення на борту включають положення, швидкість і тимчасові позначки. Все це необхідно для системи орієнтації. Точна орбіта визначається на землі за кодами і несучим псевдо.

- Система орієнтації і відстеження орбіти включає газову рухову установку, три магнітних крутильних динамометра, прилад для стеження за зірками, тривісну інерційну відлікову систему для вимірювання кутових швидкостей і тривісний магнітометр;

- Акселерометр вимірює всі негравітаційні прискорення, що виникають на космічному апараті GRACE, наприклад, за рахунок тиску сонячного випромінювання або аеродинамічного опору;

- Лазерний ретранслятор є пасивним інструментом, призначеним для відбивання коротких лазерних імпульсів, що посилаються наземними станціями. Відстань між наземною станцією і супутником GRACE може бути виміряна з точністю до 1–2 см. Лазерні дані з ретранслятора використовуються разом з даними GPS-приймача для точного визначення орбіти.

- У 2004 р наукова група GRACE опублікувала першу версію нової моделі гравітаційного поля до ступеня і порядку 150. Відповідний покращений

геоїд разом із супутниковою альтиметрією дозволить просунути у вивченні таких проблем океанографії, геодезії і геофізики, як океанічні теплі переміщення, зміна рівня моря, океанічні течії, точна навігація, визначення орбіт, нівелювання.

Концепція GRACE може трактуватися як одновимірний градієнтometr з дуже довгою базою 220 км. На відміну від цього, концепція GOCE використовує дуже короткі бази (50 см) в трьох напрямках.

2.13. Місія GOCE

Проект GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) є найважливішим в програмі (Living Planet Programme) Європейського Космічного Агенства (ESA). Основна мета – вимірювання стаціонарного поля сили тяжіння Землі і визначення геоїда з дуже високою точністю. А саме, планується:

- визначити аномалії сили тяжіння з точністю до 1 мгал,
- визначити геоїд з точністю до 1–2 см,
- досягти просторової роздільної здатності краще, ніж 100 км.

Виконання таких вимог передбачає визначення гармонічних коефіцієнтів геопотенціала, принаймні, до ступеня близько 200 (відповідно просторовому розрізненню 100 км), але практично очікується навіть до ступеня близько 250.

З геодезичної точки зору, глобальний геоїд з точністю 1–2 см і модель поля сили тяжіння з точністю 1 мгал при просторовому розрізненні близько 100 км може використовуватися серед багатьох інших важливих застосувань для наступних цілей:

- Контроль (або повна заміна) традиційного нівелювання нівелюванням за допомогою GPS.
- Приведення різних систем висот до єдиного загальносвітового початку дозволить порівнювати рівні різних морів (наприклад, Північного і

Середземного) і фіксувати їх зміни (наприклад, за рахунок танення материкових льодів).

- Істотне уточнення визначення орбіт штучних супутників і їх прогноз. Це особливо важливо для низьколетючих супутників. Точне знання поля сили тяжіння дозволить більш впевнено відокремлювати збурення, викликані статичним полем сили тяжіння, від інших сил, що збурюють (причому не тільки від негравітаційних сил, викликаних аеродинамічним опором і тиском сонячного випромінювання, але і від збурень, викликаних земними і океанічними приливами)

Номінальна тривалість місії – 20 місяців, включаючи тримісячний введення в дію та калібрування і дві фази вимірювання по шість місяців кожна; між фазами вимірювань – довгий період затемнення.

Отримані дані дозволять точно обчислювати висоти геоїда, аномалії сили тяжіння, а також океанографічні дані. Важливо відзначити, що GPS-аналіз орбіти GOCE дає інформацію про довгохвильову частину поля сили тяжіння, в той час як супутникова градієнтометрія дозволить визначити короткохвильову частину. GOCE є першим проектом, "вільним від гальмування", тобто супутник буде здійснювати вільний рух навколо Землі. Тому потрібні точна система орієнтації і детальна компенсація сил лобового опору і крутильних моментів.

Розділ 3. Визначення параметрів та орієнтації еліпсоїда інерції Землі

В ході проведеного дослідження нами була розв'язана задача про визначення головних моментів інерції Землі, а також орієнтації головних осей інерції відносно фіксованої геоцентричної декартової системи координат.

В якості вихідних даних ми використали такі моделі зовнішнього гравітаційного поля Землі, як EGM2008 (2008 р.), EGM-IERS (це переглянута модель EGM2008), EIGEN-6C2 (2011 р.), EIGEN-6C (2012 р.). Ці моделі були побудовані на основі спостережних даних, отриманих в рамках місій LAGEOS, GRACE та GOCE. В указаних моделях передбачається, що зовнішній гравітаційний потенціал Землі представлено рядом Лапласа у вигляді

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n \bar{P}_{nk}(\cos \theta) [\bar{C}_{nk} \cos k\lambda + \bar{S}_{nk} \sin k\lambda]$$

де r, θ, λ – сферичні координати точки простору, причому θ – це коширота (кут між напрямком на точку простору та віссю z);

R – екваторіальний радіус Землі;

\bar{P}_{nk} – це повністю нормовані приєднані функції Лежандра;

$\bar{C}_{nk}, \bar{S}_{nk}$ – повністю нормовані стоксові коефіцієнти, які виражаються наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nk} \\ \bar{S}_{nk} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{2n + 1} \frac{(n - k)!}{(n + k)!}} \cdot \frac{1}{MR^n} \iiint_{(V)} r^n \bar{P}_{nk}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} \rho dV$$

Тут δ_{0k} – це символ Кронекера, який визначається як

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Знайти головні центральні моменти інерції Землі можна двома способами.

По-перше, врахуємо, що стоксові коефіцієнти пов'язані з компонентами A, B, C, D, E, F тензора інерції наступним чином:

$$\bar{C}_{20} = -\frac{2C-A-B}{2\sqrt{5}MR^2}, \quad \bar{C}_{21} = \frac{E}{\sqrt{15}MR^2}, \quad \bar{S}_{21} = \frac{D}{\sqrt{15}MR^2}, \quad \bar{C}_{22} = \frac{\sqrt{15}B-A}{10MR^2}, \quad \bar{S}_{22} = \frac{\sqrt{15}F}{5MR^2}$$

Однак цих п'яти рівностей недостатньо для визначення шістьох величин A, B, C, D, E, F , тому їх потрібно доповнити ще однією рівністю

$$H = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{C},$$

яка виражає динамічне стиснення Землі через A, B, C . Згідно сучасних спостережних даних, динамічне стиснення Землі складає

$$H = 0,00327377 \pm 0,00000002$$

Значення стоксових коефіцієнтів $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}, \bar{C}_{22}, \bar{S}_{22}$ для різних моделей гравітаційного поля Землі наведені в табл. 3.1.

Табл. 3.1

	EGM-IERS	EGM2008	EIGEN-6C2	EIGEN-6C
$GM, \text{м}^3/\text{с}^2$	$3,986004415 \cdot 10^{14}$	$3,986004415 \cdot 10^{14}$	$3,986004415 \cdot 10^{14}$	$3,986004415 \cdot 10^{14}$
$R, \text{м}$	6378136,6	6378136,3	6378136,46	6378136,46
$\bar{C}_{20}, 10^{-11}$	-48416948 ± 2	$-48416931,74 \pm 0,75$	$-48416948,94 \pm 0,09$	$-48416941,04 \pm 0,02$
$\bar{C}_{21}, 10^{-11}$	$-23,06 \pm 1,89$	$-20,66 \pm 0,71$	$-20,85 \pm 0,12$	$-19,79 \pm 0,02$
$\bar{S}_{21}, 10^{-11}$	$140,44 \pm 1,94$	$138,44 \pm 0,73$	$142,89 \pm 0,12$	$138,21 \pm 0,02$
$\bar{C}_{22}, 10^{-11}$	$243938,36 \pm 0,72$	$243938,36 \pm 0,72$	$243932,92 \pm 0,13$	$243935,69 \pm 0,02$
$\bar{S}_{22}, 10^{-11}$	$-140027,37 \pm 0,74$	$-140027,37 \pm 0,74$	$-140026,48 \pm 0,13$	$-140026,68 \pm 0,02$

Коли компоненти тензора інерції $\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ знайдено, потрібно

розв'язати кубічне рівняння

$$\Lambda^3 - (A + B + C)\Lambda^2 + (AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2)\Lambda - ABC + 2DEF + AD^2 + BE^2 + CF^2 = 0$$

корені якого $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (власні числа тензора інерції) якраз і будуть головними центральними моментами інерції A_0, B_0, C_0 Землі, а власні вектори тензора інерції будуть направлені вздовж головних осей інерції.

Другий спосіб заснований на тому, що гравітаційний потенціал другого порядку в розкладанні в ряд Лапласа має наступний вигляд:

$$V_2(\vec{r}) = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{GMR^2}{r^5} \vec{r}^T Q \vec{r}$$

де $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ – радіус-вектор точки простору; Q – матриця вигляду

$$Q = \begin{pmatrix} \bar{C}_{22} - \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} & \bar{S}_{22} & \bar{C}_{21} \\ \bar{S}_{22} & -\bar{C}_{22} - \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} & \bar{S}_{21} \\ \bar{C}_{21} & \bar{S}_{21} & 2\frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Матриця Q визначена в геоцентричній декартовій системі координат, однак в системі, зв'язаній з головними осями інерції, вона матиме діагональний вигляд

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

В роботі [32] наводяться аналітичні вирази, які дозволяють діагоналізувати матрицю Q . Перш за все, власні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ матриці Q є коренями кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_2\varepsilon - I_3 = 0$$

де позначено

$$I_2 = \bar{C}_{20}^2 + \bar{C}_{21}^2 + \bar{C}_{22}^2 + \bar{S}_{21}^2 + \bar{S}_{22}^2$$

$$I_3 = \frac{2\bar{C}_{20}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}}(\bar{C}_{21}^2 + \bar{S}_{21}^2 - 2\bar{C}_{22}^2 - 2\bar{S}_{22}^2) + \bar{C}_{22}(\bar{C}_{21}^2 - \bar{S}_{21}^2) + 2\bar{C}_{21}\bar{S}_{21}\bar{S}_{22}$$

Формули для обчислення коренів вказаного кубічного рівняння такі:

$$\varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{I_2}{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \varepsilon_2 = -2\sqrt{\frac{I_2}{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right), \varepsilon_3 = 2\sqrt{\frac{I_2}{3}} \sin\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right),$$

де $\varphi = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3} I_3}{2 I_2^{3/2}}\right)$.

Коли $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ знайдено, коефіцієнти $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}$, що входять до матриці \tilde{Q} , обчислюються як

$$\bar{A}_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_3, \quad \bar{A}_{22} = \frac{\varepsilon_3}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2},$$

а головні моменти інерції будуть дорівнювати

$$A_0 = \sqrt{5}MR^2 \left(\left(1 - \frac{1}{H}\right) \bar{A}_{20} - \frac{\bar{A}_{22}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$B_0 = \sqrt{5}MR^2 \left(\left(1 - \frac{1}{H}\right) \bar{A}_{20} + \frac{\bar{A}_{22}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$C_0 = -\frac{\sqrt{5}MR^2 \bar{A}_{20}}{H}$$

Проведені нами обчислення дозволили знайти коефіцієнти $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}$ для різних моделей (табл. 3.2), головні моменти інерції Землі

$$A_0 = (80085,1 \pm 9,6) \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$B_0 = (80086,8 \pm 9,6) \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$C_0 = (80349,0 \pm 9,6) \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

(для різних моделей вони виявились однаковими в межах вказаної точності), а також орієнтацію (напрямок) кожної з головних осей інерції у вигляді двох кутів – довготи λ та кошироти θ .

Зазначимо, що похибки визначення коефіцієнтів $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}, A_0, B_0, C_0$ обумовлені, головним чином, недостатньою точністю відомого на сьогоднішній день значення маси Землі. Річ у тім, що з даних супутникової геодезії з високою точністю відомо лише значення добутку GM (для різних моделей вони однакові – див. табл. 3.1), а от для визначення маси Землі необхідно достатньо точно знати гравітаційну сталої. Одним з рекомендованих її значень є

$$G = (6,67384 \pm 0,00008) \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

Звідси отримуємо масу Землі $M = (5,97258 \pm 0,00072) \cdot 10^{24} \text{ кг}$.

Табл. 3.2

	\bar{A}_{20}	\bar{A}_{22}
EGM-IERS	$(-4841694,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$	$(28127,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$
EGM2008	$(-4841692,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$	$(28127,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$
EIGEN-6C2	$(-4841694,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$	$(28126,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$
EIGEN-6C	$(-4841694,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$	$(28126,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$

Табл. 3.3

	EGM-IERS	EGM2008	EIGEN-6C2	EIGEN-6C
$\lambda_A, ^\circ$	-14.92851	-14.928509	14.928706	14.928583
$\theta_A, ^\circ$	0.0000398	0.00003788	0.00003879	0.00003727
$\lambda_B, ^\circ$	75.07149	75.071491	75.071294	75.071417
$\theta_B, ^\circ$	0.0000890	0.00008805	0.00009096	0.00008806
$\lambda_C, ^\circ$	-80.81	-81.65	81.84	82.00
$\theta_C, ^\circ$	89.9999025	89.99990414	89.99990111	89.99990439

ВИСНОВКИ

1. В дипломній роботі описано основні властивості потенціалу сили тяжіння, застосування супутникових технологій для вивчення зовнішнього гравітаційного поля Землі, розкладання гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями, охарактеризовано глобальні властивості аномальної складової гравітаційного поля.
2. Розв'язана задача про визначення параметрів земного еліпсоїда інерції – таких як головні моменти інерції та орієнтація осей еліпсоїда, виконана оцінка точності знайдених параметрів. Вказані параметри були отримані для деяких моделей гравітаційного поля Землі – EGM2008, EGM-IERS, EIGEN-6C, EIGEN-6C2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
2. *Абрикосов О.А.* Об определении направлений главных осей инерции Земли // Кинематика и физика небесных тел. – 1985. – Т.1, № 6. – С.69–71.
3. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
4. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1977. – 360 с.
5. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Ч. I. Геометрическая космическая геодезия. – М.: Недра, 1971. – 128 с.
6. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Ч. II. Динамическая космическая геодезия. – М.: Недра, 1975. – 280 с.
7. *Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г.* Физическая геодезия. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2007. – 426 с.
8. *Грушинский Н.П.* Теория фигуры Земли. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
9. *Двуліт П.Д.* Фізична геодезія: підручник. – К., 2008. – 257 с.
10. *Изотов А.А., Зубинский В.И., Макаренко Н.Л., Микиша А.М.* Основы спутниковой геодезии. – М.: Недра, 1974. – 320 с.
11. *Краснорылов И.И.* Основы космической геодезии. – М.: Недра, 1991.
12. *Машимов М.М.* Геодезия. Теоретическая геодезия: Справочное пособие. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
13. *Мещеряков Г.А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука, 1991. – 216 с.
14. *Миронов В.С.* Курс гравиразведки. – Л.: Недра, 1972. – 512 с.
15. *Молоденский М.С.* Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Земли. – М.: Наука, 2001. – 569 с.
16. *Мориц Г.* Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. – Киев, 1994. – 240 с.

17. *Наденник З.* Шаровые функции для геодезии. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2010. – 157 с.
18. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
19. *Пантелеев В.Л.* Теория фигуры Земли. Курс лекций. – М. 2000.
20. *Пеллинен Л.П.* Высшая геодезия (Теоретическая геодезия). – М.: Недра, 1978. – 264 с.
21. *Торге В.* Гравиметрия. – М.: Мир, 1999. – 429 с.
22. *Урмаев М.С.* Орбитальные методы космической геодезии. – М.: Недра, 1981. – 256 с.
23. *Хаимов З.С.* Основы высшей геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра. – 1984. – 360 с.
24. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли. – М.: Недра, 1975. – 432 с.
25. *Chao B.F., Gross R.S.* Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes // *Geophys J. R. astr. Soc.* – 1987. – Vol. 91. – P.569–596.
26. *Chen W., Li J.C., Ray J., Shen W.B., Huang C.L.* Consistent estimates of the dynamic figure parameters of the Earth // *J. Geod.* – 2015. – Vol. 89. – P.179–188.
27. *Chen W., Shen W.* New estimates of the inertia tensor and rotation of the triaxial nonrigid Earth // *Journal of geophysical research.* – 2010. – Vol. 115.
28. *Liu C., Huang C., Zhang M.* – The principal moments of inertia calculated with the hydrostatic equilibrium figure of the Earth // *Geodesy and Geodynamics.* — 2017. – Vol. 8, No. 3. – P.201–205.
29. *Liu C., Huang C., Zhang M.* A generalized theory of the figure of the Earth: on the global dynamical flattening // *Journal of Geodesy.* – 2019. – Vol. 93. – P.319–331.
30. *Liu H.S., Chao B.F.* The Earth's equatorial principal axes and moments of inertia // *Geophys. J. Int.* – 1991. – Vol. 106. – P.699–702.
31. *Marchenko A.N., Abrikosov O.A.* Evolution of the Earth's principal axes and

- moments of inertia: the canonical form of solution // *Journal of Geodesy*. – 2001. – Vol. 74. – P.655–669.
32. *Marchenko A.N., Schwintzer P.* Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions // *Journal of Geodesy*. – 2003. – Vol. 76. – P.495–509.
33. *Montenbruck O., Gill E.* Satellite orbits. Models, methods and applications. – Springer, 2005.
34. *Seeber G.* Satellite Geodesy. – Walter de Gruyter, Berlin – NewYork, 2003.
35. *Shen W., Chen W., Sun R.* Earth's temporal principal moments of inertia and variable rotation // *Geo-spatial Information Science*. – 2008. – Vol. 11, No. 2. – P.127–132.