Касьянов В.А.

ЭНТРОПИЙНАЯ ПАРАДИГМА В ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

СУБЪЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

Предметные и рейтинговые предпочтения

Оптимальность работы психики

Принцип максимума субъективной энтропии

Динамика и конфликты предпочтений

Безопасность активных систем

ЧАСТЬ 1

Киев 2016

Касьянов В.А.

ЭНТРОПИЙНАЯ ПАРАДИГМА В ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

СУБЪЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

Предметные и рейтинговые предпочтения

Оптимальность работы психики

Принцип максимума субъективной энтропии

Динамика и конфликты предпочтений

Безопасность активных систем

ЧАСТЬ 2

Киев 2016

УДК 303.725.36:159.9.015:159.964.21:519.86(02)
ББК з 81+С803+Ю941.3-976+Ю941.2+У01
К 289

Рецензенты:

В.М. Кунцевич, Академик национальной академии наук Украины, д-р. техн. наук, проф. Почетный директор ин-та космических исследований НАНУ и НКАУ, Лауреат Гос. премии Украины в обл. науки и техники.

В.Б. Евтух, Чл. - корр. Национальной академии наук Украины, д-р. истор. наук, проф. Директор Института социологии, психологии и социальных коммуникаций Нац. пед. ун-та им. М.П. Драгоманова, Заслуженный деятель науки и техники

Г.В. Лошкин, Д-р. психол. наук, проф., зав. кафедрой психологии и педагогики НТУУ «КПИ», Заслуженный деятель науки и техники.

Рекомендовано:

Ученый совет Института новейших технологий Национального авиационного университета

(протокол № 4 от « 11 » 11 2015 г.)

Ученый совет Аэрокосмического института Национального авиационного университета

(протокол № 8 от « 24 » 11 2015 г.)

Монография представляет собой междисциплинарное исследование. Содержит разработки, направленные на создание количественных методов описания психических процессов субъектов активных систем. Вводится субъективная энтропия, субъективная информация, субъективный риск.

Математический аппарат строится на основе принципа максимума субъективной энтропии. Изучаются предметные и рейтинговые предпочтения. Дается определение активной системы, определяется стоимость субъективной информации, этические императивы, конфликты предпочтений, энтропия в иерархических системах. Приведены принципы моделирования микро и макроэкономической динамики с учетом психологических факторов, динамики конфликтов, процессов, связанных с безопасностью активных систем, в том числе, с безопасностью полетов, динамики рейтингов.

Предлагается вариант теории взаимной полезности, гибрид теории вероятностных процессов Феллера-Колмагорова и принципа максимума субъективной энтропии; критерий субъективного риска, энтропийные пороги, понятие эластичности и жесткости психики.

Для студентов старших курсов, слушателей Института новейших технологий НАУ, аспирантов, специалистов в области теории управления и принятия решений.

ББК з 81+С803+Ю941.3-976+Ю941.2+У01

ISBN 966-598-373-3

2016

Kasjanov V.

Entropy Paradigm in the Theory of Active Systems

Monograph presents interdisciplinary investigations. It contains elaborations directed on creation of quantitative methods of active systems objects psych processes description. Subjective entropy and Subjective information are introduced.

Mathematical models are built on the base on Subjective entropy maximum principle which introduced by anchor. Object and ratting preferences are investigated. Definition of active system is given. The cost of Subjective information is determined, as well as ethical imperatives, conflicts of preferences, entropy of hierarchical system.

Principles of micro- and macro-economical simulating with account of psychological factor are given. They are applied to the simulating of conflict dynamics, processes connected with safety of active systems, in that number, safety of flight, rating dynamics. Alterative version of mutual utility is proposed.

Hybrid of Feller-Kolmogorov theory of probability processes and Subjective entropy maximum principle, model of subjective risk are given. Entropy thresholds, theory of flexibility and rigidity of psych is developed.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Выражаю глубокую благодарность моим коллегам за полезные обсуждения различных идей и проблем, связанных с тематикой книги. Прежде всего, благодарю профессора Игнатова В.А., с которым я в различное время обсуждал многие идеи. Более того, эти обсуждения привели к появлению дополнительных разделов, в частности, главы о конфликтах.

Я благодарю за возможность советоваться и обсуждать результаты исследований профессору Иваненко В.И., профессору Павлову В.В., профессору Кулишу В.В., профессору Сусловой Г.А., профессору Тунику А.А.

Выражаю благодарность за поддержку и положительную оценку моей работы академику Национальной академии наук, профессору И.Н. Коваленку, чл.-корру Национальной академии наук, профессору В.Б. Евтуху.

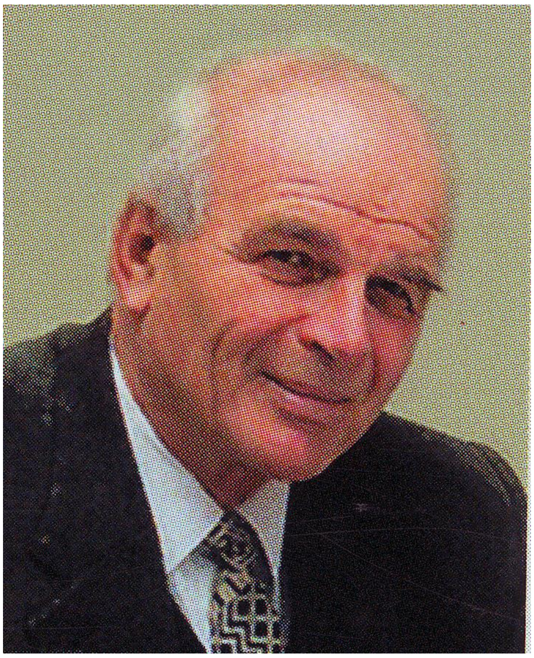
Обязан выразить признательность руководству Национального Авиационного университета, Аэрокосмического института, Механико-энергетического факультета и кафедру механики за возможность работать над этой книгой.

Многие аспекты этой работы я обсудил со своими докторантами Деласом Н.И., Гончаренко А.В., К. Шафраном.

Гончаренко А.В. оказал существенную помощь в проведении расчетов и подготовке ряда совместных публикаций, докторант Шафран Кшиштоф способствовал изданию моей предыдущей книги «Subjective entropy of preferences» в Польше.

Большую и часто неформальную работу, связанную с оформлением книги выполнила Г.И. Маркуця, за что приношу ей искреннюю благодарность.

КАСЬЯНОВ В.А.



Касьянов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор

Родился в 1935 г. в Харькове.

В 1959 г. окончил Николаевский кораблестроительный институт. Докторскую диссертацию защитил в 1971 г.

Область научных интересов: аэродинамика, статистическая механика газов и плазмы, теория управления, динамика полета, обработка данных, идентификация, организационные системы, энтропийные методы.

Автор более 250 научных публикаций, в том числе 18 монографий и учебников. Подготовил 25 кандидатов и 8 докторов наук.

Был членом Научно-технического Совета Министерства гражданской авиации СССР, экспертного совета ВАК Украины, член специализированных советов по защите докторских диссертаций. 22 года заведовал кафедрой теоретической механики, работал профессором Католического университета в Люблине, заслуженный профессор НАУ.

Яхтенный капитан.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 2

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена системам, которые включают в себя *активный* элемент человека (индивидуума) и, тем самым, являются *активными системами*. Поведение индивидуума определяется его психикой и, следовательно, мы рассматриваем системы, поведение которых тесным образом связано с работой психики.

Излагаемая здесь теория обладает значительной общностью, ее методы проецируются в различные предметные области.

С момента выхода моих книг «Субъективный анализ» в 2007 г. [83] и «Subjective entropy of preferences» в 2013 г. [231] имело место заметное продвижение как в построении и усовершенствовании основной концепции, так и в разработке ряда частных, но важных с точки зрения автора, моделей. Кроме того, естественно, что некоторые положения, содержащиеся в упомянутых книгах, потребовали корректировки и уточнения, возникли новые идеи, которые кажутся автору перспективными. К настоящему моменту удалось более четко сформулировать ряд принципиальных положений теории.

Настоящая книга включает продолжение и развитие упомянутых книг, а также материалы довольно большого числа журнальных публикаций. Она находится, если можно так сказать, в «околосинергическом» пространстве, не являясь в строгом смысле работой по синергетике, поскольку проблемы самоорганизации открытых систем не являются ее основным объектом исследования, однако в связи с задачами, которые рассматривает автор, нельзя обойтись без ссылок на синергетику и многочисленные работы в этой области.

Прежде всего, следует сказать, что объект изучения – это так называемые активные системы, которые обладают «внутренней», «врожденной» способностью к самоорганизации, внутренней свободой. Элементом такой системы является человек – активное ядро системы – субъект. Не хотелось бы употреблять здесь термин «человеческий фактор». Человек здесь является не «фактором», влияющим на что-то, а самодовлеющим – главным элементным «звеном», без которого рвется вся цепь событий, рассыпается вся система. Активная система в употребляемом здесь смысле этого термина существует постольку, поскольку в центре этой системы стоит человек.

Понятие «активная система» имеет определенную историю. Известны различные теоретические схемы функционирования таких систем. Отметим в первую очередь работы Буркова Д.А., Петракова С.П. [27, 32, 170] и др., выполненных в Институте проблем управления РАН, а также, например, работу Луценко Е.В. [132]. Появляются работы, в которых механическим объектам приписывается свойство активности (одна подобная задача о «живых точках» рассмотрена в настоящей монографии). Вводятся аналогии кинетической теории газов в которых молекулы являются «активными сущностями» [230].

Сразу отмечу, тем не менее, что эта книга не есть также книгой по психологии, поскольку не содержит психологических исследований в традиционном смыс-

ле. Вводится ряд постулатов, и используются методы, которые можно рассматривать, как попытку создать количественную модель функционирования активных систем, включая психическую компоненту.

До недавнего времени использование математики в интересах психологии понималось как в основном статистическая обработка психологических наблюдений и на этой основе формирование выводов в виде регрессионных зависимостей в духе, например, польского ученого Збигнева Бжезинского [209].

В настоящем исследовании мы стремимся положить в основу теории некоторые априорные принципы, которые позволяют хотя бы частично уйти от схемы «черного ящика».

Неуспех многих социальных, политических, экономических теорий и концепций обусловлен тем обстоятельством, что при их создании авторы не учитывали и не могли спрогнозировать психических последствий внедрения их в жизнь. Примером могут служить экономические кризисы, хорошо объясняемые «постфактум» и плохо прогнозируемые, несмотря на наличие большого числа, весьма изощренных математических моделей в экономике и большого числа нобелевских лауреатов по экономике. В частности, это очевидно на примере последнего кризиса. Кризисы, несомненно, будут повторяться, меняя свое обличье и каждый раз заставая человечество врасплох. Существующие экономические теории в недостаточной степени (осредненно) отражающие психологические аспекты не в состоянии заранее предсказать момент и описать глубину и особенности протекания кризиса. Другим примером является история марксистской концепции. Совершенно очевидно, что крушение экономической части той модели, которую называют «реальным социализмом» объясняется помимо всего прочего тем, что авторы упустили из виду отдаленные психические последствия: утеря личной инициативы, творческая пассивность бюрократии и многое другое.

Характерным в этом смысле является высказывание Ленина на XI съезде партии в 1922 г. т.е., через четыре с небольшим года после Октябрьской революции: «Мы хотели повернуть историю, но, оказывается, повернулись мы, а история не повернулась. Конечно, мы провалились. Мы думали осуществить новое коммунистическое общество, по щучьему веленью. Между тем – это вопрос поколений. Попытка не удалась. Так, вдруг переменить **психологию** людей, навыки их вековой жизни нельзя. Можно попробовать загнать население в новый строй силой, но вопрос – сохраним ли мы власть в этой всероссийской мясорубке?»

Не сохранили! И, как мы видим, камнем преткновения являлась **«психология».**

«Переменить психологию людей, навыки их повседневной жизни» быстро действительно нельзя, но рассматривая психические процессы можно поставить задачу управления ими. Для этого нужно знать стабильные фундаментальные свойства этих процессов – их модели как субъектов управления.

«Коммунизм» как мировая идея родился вместе с человеком и продолжает жить в сознании каждого без исключения человека в большей или меньшей степени так же как живет, сосуществует в сознании каждого человека «индивидуализм» и «коллективизм», усиливаются, или угасают в зависимости от складывающихся обстоятельств.

Эти две стороны сознания также неотделимы друг от друга, как неотделимы «знание» и «вера». Единство, взаимодействие и противоборство «индивидуализма» и «коллективизма», «знания» и «веры» являются, так сказать, «технологическими принципами» функционирования сознания.

Основное практическое назначение излагаемой концепции – вклад в теорию принятия решений в многоальтернативных ситуациях, выбор стратегии активной системы, в том числе, прогнозирование решений и стоимости решений.

Если в рамках политэкономии говорить о возможных стратегиях развития, то здесь имеется широкий спектр, простирающийся от радикальной коммунистической модели до столь же радикальной неолиберальной Фридмановской модели. Проблема выбора модели есть предмет субъективного анализа [49, 83, 231].

В книге приводятся примеры систем, в которых явный учет психической компоненты радикальным образом влияет на поведение систем таких, как модель банковского кризиса, влияние психологического стресса на экономическую динамику, самоорганизация, возникновение структуры в процессе решения производственных задач и т.д.

Проблема выбора новой стратегии возникла, когда Советский Союз перестал существовать, образовался вакуум на рынке «врагов» США и срочно потребовался новый «враг». Он был изобретен, взращен и взлелеян – «мировой терроризм». Однако в наличии этого врага, в реальности его существования нужно было убедить весь мир, в том числе граждан собственной страны.

Для этого нужны были резонансные террористические акты, взрывы госпиталей, школ, торговых центров, резонансные убийства политических деятелей.

Это оправдывало экспансию, вторжение в другие страны, возведение в ранг изгоев целых стран и великих народов. Организация и провоцирование серии «цветных революций».

Это оправдывало новые, все большие затраты на военные цели, создание новых разрушительных военных технологий отнюдь не приспособленных для борьбы с терроризмом. Под прикрытием истерии по поводу терроризма – подготовка в действительности других больших войн, и в конечном итоге III мировой войны. И эта, хотя и скрытая за семью печатями, тщательно закамуфлированная, разноплановая деятельность является вполне реальной.

В арсенале оружия массового уничтожения присутствует самое разрушительное, негуманное оружие «массового уничтожения», дебилизации, массового превращения людей в моральных рабов – информационное оружие.

Автор предполагает, что развиваемая здесь теория может иметь самое непосредственное отношение к разработке методов информационной войны.

Для того, чтобы повернуть мысли людей в нужное русло сначала нужно расшатать существующую идейную основу.

«Для систематического потрясения основ, для систематического разложения общества и всех начал: для того, чтобы всех обескуражить и из всего сделать кашу…»

(Ф.М. Достоевский. Бесы, в полном собрание сочинений. Т9 – М: «Правда».1982 – цитируется по книге С.О. Расторгуева «Философия информационной войны». 2003).

Высказывание Достоевского адекватно отражает, в общих чертах, те подходы к методам психологической (информационной) борьбы, которые следуют из развиваемой в настоящей книге теории. В терминах энтропийной парадигмы для эффективного воздействия на психику, для того, чтобы переориентировать отдельных индивидуумов и затем целые социумы, прежде всего, следует расшатать существующие убеждения. Для этого, во-первых, в «коктейль» вариантов решений (множество альтернатив S_a) следует «вбросить» новые альтернативы, то есть «увеличить» размерность S_a, а затем, манипулируя сознанием, сделать их близкими по предпочтительности, т.е., максимально увеличить субъективную энтропию. Далее следует снизить энтропийные «пороги» принятия решения (H_π^*). И, наконец, подтолкнуть членов социума в другую (добавленную) область множества альтернатив S_a. При этом оказывается возможным оценить затраты управляющего на выполнение этих преобразований.

В целом, ученый, который занимается подобной тематикой может рассматриваться как специалист по разработке «оружия массового поражения».

Автор оправдывает себя тем, что кроме информационного нападения, информационной агрессии есть необходимость в информационной обороне и, возможно, разрабатываемая здесь концепция окажется полезной для проектирования оборонительных технологий информационной войны.

Кроме упомянутых глобальных проблем существует большое число локальных проблем, которые относятся к функционированию активных систем и, следовательно, связаны с описанием функционирования психической компоненты.

В работах [79, 83, 231] автор рассмотрел круг вопросов, объединенных общим названием «Субъективный анализ». Предложен альтернативный подход к формализации и количественному описанию определенного среза психической деятельности, который базируется на ряде исходных априорных правдоподобных постулатов. В ряде случаев качественные и количественные результаты в рамках предложенных моделей соответствуют «здравому смыслу», а также наблюдаемым статистическим результатам.

Однако, автор должен признать, что в процессе создания теоретической модели возникло больше вопросов, в том числе, принципиальных по сравнению с тем количеством вопросов, которые удалось разрешить.

Для автора, безусловно, ясно только одно: избранный путь является перспективным, а развиваемая концепция в основном правильно отражает суть дела и имеет право на существование.

Как и в предыдущих работах [83, 231] в основу анализа положен «**принцип максимума субъективной энтропии», понятия «субъективной энтропии и субъективной информации**». Уточняются некоторые аспекты, в том числе, аксиоматика, связь с другими подобными теориями, например, с теорией ожидаемой полезности с учетом ряда последних публикаций в этой области, условия принятия решений, рассматриваются некоторые простые иерархические активные системы, происходит углубление термодинамической аналогии, модели динамики энтропийных барьеров, «психической (или эмоциональной) температуры».

Предлагаемая теория является частью весьма широкой и существующей уже несколько десятилетий общей теории принятия решений, «обрамленной» матема-

тическими методами и компьютерными системами анализа и поддержки решении, дающими аналитику (или «лицу, принимающему решения») определенную рекомендацию, либо набор возможных (квазиоптимальных) решений. Очень важная особенность, возникающая в этой ситуации, состоит в том, что во всех без исключения случаях, информация, которой располагает аналитик, содержит многоплановую и многофакторную неопределенность. Эта неопределенность, содержащаяся в исходных данных, в структуре и параметрах математической модели, наконец, в неопределенности выбора критерия (критериев – в многокритериальных задачах).

Рассматривают различные виды неопределенности: стохастической, когда заранее неизвестны моменты распределения, их поведение во времени (нестационарность), либо неизвестен сам вид распределений, неизвестен характер выборки (существование генеральной совокупности, ее однородность), можно ли пользоваться теорией аддитивной, счетно-аддитивной меры; интервальной неопределенности, (например, когда известно лишь, что параметры модели принадлежат некоторым интервалам и в этом случае требуется получение гарантированного решения), неопределенность критериальную, когда аналитик стоит перед проблемой выбора вида критерия оптимальности, возможного изменения критерия во времени, изменения ограничений в вариационной задаче.

В игровых задачах существует неопределенность в поведении игроков обусловленная, в частности, субъективными факторами, различием в совершенстве средств поддержки решений на основе «объективного» анализа, предположениями о порядке обмена информацией, вообще информированности игроков.

Этот вопрос являясь фундаментальным, к сожалению не нашел должного отражения в предлагаемой монографии. Это объясняется тем, что автор считает эту проблему проблемой второго порядка, важной, интересной, но все же – второго порядка. Автор считает первой необходимостью построить теорию в условиях ограничивающей гипотезы о полной, в том числе, взаимной информированности субъектов.

Можно сказать, что данные «объективного» анализа, формального решения задач оптимального выбора, результаты работы компьютерных средств поддержки решений имеют «рекомендательный», но не «обязательный» характер.

Есть существенный нюанс в формулировке последовательности задач.

Если первая задача включает в себя все формальные действия, расчеты, оценки, решение оптимизационных, в том числе, игровых задач в условиях неопределенности, то вторая задача состоит (с точки зрения «внешнего» аналитика) в прогнозировании субъективного решения при наличии «априорных советов» систем поддержки решений.

В этом случае велика роль подсознательного и каждое решение сродни научному открытию – спонтанному озарению. Развиваемый в настоящей книге подход – есть попытка приоткрыть завесу неопределенности на этом пути, проникнуть (м.б. не слишком глубоко) в тайну формирования субъективных решений.

Это можно сделать на основе постулирования некоторых принципов относительно функционирования психики, которая, несмотря, «на океаны» исследований, все еще остается «черным ящиком». Задача состоит в том, чтобы сделать его в некотором смысле «серым». Важнейшим принципом, упомянутым выше является

принцип максимума субъективной энтропии и его обобщения, а также **принцип максимума субъективной информации связи**, примененные последовательно к проблеме формирования предпочтений – принципы, которые связывают вид распределения предпочтений с так называемой когнитивной функцией.

Навязывание психике вариационного принципа – оптимального функционирования, немедленно ставит вопрос: откуда берется эта оптимальность? Поскольку оптимальность здесь носит априорный характер, т.е. изначально «запаяна» в психику и человек в этом смысле обречен думать и поступать оптимально, возникает вопрос «оптимально почему, в чьих интересах?»

Поскольку все науки о природных явлениях буквально пронизаны «принципами оптимальности», начиная с принципа Гамильтона в механике, в соответствие с известными высказываниями Эйлера, Лейбница, Шопенгауэра, спрашивается, должна ли человеческая психика быть в этом отношении исключением?

Употребляется термин: «Принцип максимума субъективной энтропии» или в более общем звучании: «Вариационный принцип психологии». Вариационный принцип, который был предложен Джейнсом в 1956-1957 годах [282, 283] для физической кинетики в данном случае используется как «математическая упаковка» для другого «товара» – другого содержания.

Утверждение, что распределения предпочтений на множестве альтернатив генерируются каждый раз на основе априорного вариационного принципа, изначально, «без нашего согласия, встроенного» в нашу психику, является основной гипотезой «вариационного принципа психологии».

В параграфах 3.14 и 3.15 приводятся некоторые качественные соображения относительно пути генезиса в сознании этого «априорного» принципа. Однако, они носят лишь наводящий характер, требуют дальнейшего анализа и осмысления.

Речь может идти о стремлении к оптимальности.

Этой гипотезе сопутствуют дополнительные важные гипотезы:

– множество альтернатив всегда содержит более одной альтернативы $N>1$.

– всегда существует «индивидуальный носитель» – носитель критерия, основной компонентой которого является субъективная энтропия или точнее субъективные энтропии различного содержания, множества альтернатив, распределения предпочтений.

– психика субъекта способна осуществлять агрегирование предпочтений с учетом принципа индивидуального носителя.

– принимается предположение о достаточной информированности субъекта (в том числе – взаимной информированности).

– энтропийное пространство структурировано с помощью энтропийных порогов, при пересечении которых существенно меняется психическая ситуация.

Размышляя о ценности и значимости того подхода, который развивается в этой монографии и который можно назвать **«Энтропийная парадигма в психологии»**, мы сошлемся на работу В.М. Петрова [166], опубликованную в 2012 г., смысл этой работы в определенной части был предвосхищен в цикле работ, объединенных условным названием **«Субъективный анализ».** Главным источником является работа [83] 2007 г. Петров, в частности, пишет: «…*Огромное методическое разнообразие, «цветущая сложность» в науках о человеке напоминает ситу-*

ацию, сложившуюся на закате средневековой алхимии: хаос используемых парадигм, - и так продолжалось вплоть до появления научной химии с ее единой парадигмой (*функционирующей до сих пор*)».

Какова же расплата? Крайне низкая эффективность гуманитарного знания. «Сегодня мы умеем управлять космическими аппаратами, удаленными на миллионы километров от Земли и процессами, происходящими в атомном ядре. Но сам человек, стоящий у пульта управления этими процессами, по-прежнему остается еще не управляемым. Мы по-прежнему не умеем уберечь наших детей от пагубных влияний, не можем погасить кровавые межнациональные распри, не знаем, как обуздать собственную жадность и расточительство, грозящее нам всем глобальной катастрофой. Причина не в недостатке желания, а в недостатке знания. Мы не знаем человека, не знаем, как включаются те «двигатели» и «тормоза», которые определяют его поведение, то есть не умеем управлять. Мы все время пытаемся управлять, но делаем это плохо». И естественно желание – научиться делать это хорошо [48, 49, 50] (Голицын,-1997).

Хотя все, что здесь сказано, достаточно спорно и напрашивается целый ряд комментариев, на которых мы остановимся ниже, тем не менее, следует признать, что основополагающей парадигмы, касающейся проблемы управления поведением человека, как субъекта активной системы, все еще нет.

Поставленный выше вопрос вполне закономерен. Нужно, однако, кое-что уточнить, имея ввиду мысли, приведенные выше. Какие вопросы в связи с этим возникают? Прежде всего, кто «заинтересованное лицо», о котором авторы говорят как о субъекте, в интересах которого должна быть найдена гармония и разработаны методы управления человеком? Если соответствующие совершенные методы управления человеком будут разработаны, то кто будет их использовать на практике, так сказать, «внедрять в социальное производство»?

Это видимо неверно, когда авторы говорят об отсутствии методов целенаправленного управления поведением человека, социумов. Методы и достаточно эффективные существуют и их применение мы наблюдаем, а иногда и чувствуем на себе, поскольку являемся реципиентами для тех, кто присваивает себе право управлять. Примеров множество: это и всевозможные «цветные революции», управляемые из-за рубежа, и локальные и глобальные экономические кризисы, которые многие считают хорошо организованными акциями, разоряющие одних и позволяющие другим получать новые богатства и т.д. и т.п.

Таким образом, когда авторы говорят «мы», то не вполне ясно, кто такие эти «мы» и от чьего имени они говорят.

Необходимо сказать более определенно, как в рамках «*субъективного анализа*» представляется задача управления вообще. Особенностью в данном случае является наличие опосредственного управления по схеме: «**Внешний управляющий → субъект активной системы → объект активной системы**». Таким образом, если кто-то стремится управлять активной системой, он должен (или может) в первую очередь организовать управление активным элементом системы – «субъектом», который в свою очередь будет управлять «объектом» системы.

При этом управление носит либо дискретный характер (выбор альтернативы из дискретного множества – выбор места в зале кинотеатра, выбор типа лекар-

ственного препарата, выбор стратегии из дискретного множества стратегий, выбор хода в шахматной партии), либо выбор из непрерывного множества (количества продукта, момента времени…).

Кто и в чьих интересах берет на себя задачу «управления человеком»? Авторы, конечно, знают, что созданы теории и прикладные методы «манипуляции сознанием» и «психологической войны», которые порой хорошо работают, чему мы в последнее время стали свидетелями. Это вполне очевидно для тех, кто умеет сопоставлять факты и делать выводы.

Существуют хорошо оснащенные технологическими средствами и квалифицированным персоналом, но плохо заметные со стороны центры планирования и реализации «информационных войн».

В чем можно, безусловно, согласиться с авторами приведенных высказываний, так это в том, что ощущается острый дефицит в основополагающей и интегрирующей разноплановые задачи парадигме.

Уже сложилось общее представление, что руководящую роль должны играть здесь вариационные принципы. Нужен, однако, еще один небольшой шаг, для того, чтобы такая парадигма появилась и стала координирующим фактором.

С моей точки зрения, удачным шагом в направлении построения упомянутой парадигмы явился синтез вариационного принципа Джейнса [282, 283], а также принципа «Infomax» Линскера [190] с теориями полезности (в различных ее вариантах, теорией ординальных предпочтений), а также законов психологии (Вебера - Фехнера, Йеркса – Додсона, Стивенса, Забродина и др.).

В результате этого синтеза как уже говорилось возникла теория, которую автор может быть не вполне удачно назвал «Субъективным анализом». Основными понятиями здесь являются «субъективная энтропия» и «субъективная информация», функция распределения предпочтений, которая заменяет распределения вероятностей в работах, посвященных принципу максимума Энтропии Джейнса.

Почему процессы, которые происходят в разных сферах, подчиняются вариационным принципам? Примером могут служить вариационные принципы механики, например, принцип Гамильтона, принцип Ферма и др.

Если «природа» функционирует в соответствие с вариационными принципами, то в каком смысле следует понимать оптимальность, кто навязал «природе» это стремление к оптимальности. «Что» или «кто» формирует оптимизационную задачу. «Что» или «кто» «пишет» соответствующий функционал.

Мы можем немного облегчить себе задачу, снять напряжение неопределенности в этом вопросе, если предположим, что природа имеет иерархическое устройство. Тогда естественно допустить, что оптимизационная задача для данного уровня иерархической системы рождается и формулируется на другом иерархическом уровне (выше или ниже лежащим). Скорее всего имеет место нисходящая процедура порождения вариационных задач. На вышележащем уровне рождается задача для нижележащего – подчиненного уровня и «в интересах» вышележащего уровня. Таким образом, предположительно имеет место иерархическая система вариационных принципов.

Нечто подобное происходит в теории идентификации динамических систем. При наличии экспериментальных данных параметры регрессии ищутся как опти-

мальные оценки в смысле некоторого критерия, например, методом наименьших квадратов, методом максимального правдоподобия или каким-либо другим методом, смыслом которого является оптимизация. Но если ставится задача получить наиболее подходящую для данной задачи идентификации экспериментальную выборку, возникает новая оптимизационная задача – задача организации оптимального эксперимента. Это задача более «высокого» уровня, со своим критерием оптимизации [258, 259] (работы Мехры и Гупты, например).

Приведенное рассуждение имеет отношение к понятию «активная система», а также к «открытым» и «изолированным» системам. Можно представить себе системы, изолированные от окружающей среды, но имеющие «неисчерпаемую» внутри себя иерархическую структуру. Тогда каждый отдельно взятый уровень такой системы, «открыт» по отношению к другим уровням этой же системы. Будем поэтому говорить, что иерархичность создает открытость подсистемы. Каждая подсистема иерархической системы открыта по отношению к другим частям всей системы. Конечно, вопрос о том, где граница иерархичности, еще более трудный, переносит философскую проблему в другую плоскость.

В работах [161. 162, 163] (Панченков) вводится понятие структурной энтропии и энтропии импульса, и более того, вводится закон сохранения суммы этих энтропий.

Подробное утверждение о наличии сохраняющейся величины, содержащей энтропию и информацию, имеется в работах Климонтовича [95, 96].

В работе [50] (Голицына Г.А., Левича А.П.) о проблеме оптимальности, говорится, в частности, что после открытия принципа Ферма в оптике сложилось представление, что у экстремального принципа, как основы любой теории, просто нет соперников. Основные законы физики должны иметь экстремальную форму. Эта мысль созвучна с позицией Эйнштейна, что следует «понять эмпирическую закономерность как логическую закономерность». Лагранж, однако, считает, что «экстремальные принципы суть только изящная и компактная «упаковка» большого количества уже известных фактов».

Утверждается, что в данный момент спор решен окончательно в пользу экстремальных принципов, хотя механизмы генезиса этих принципов неясны. Мы будем говорить, что в связи с ролью экстремальных принципов существует два пути и две задачи: прямая и обратная.

Будем считать прямой задачей и одновременно дедуктивным путем следующую последовательность: вначале формулируется вариационный принцип, на основе которого строятся частные модели функционирования систем. Результаты, полученные с помощью частных моделей, сравниваются с эмпирическими данными и, тем самым, подтверждается либо отвергается исходный принцип. Естественно, достаточно обнаружить хотя бы одно несоответствие, чтобы отвергнуть принцип или сузить область его применимости.

Обратная задача и одновременно индуктивный путь предлагает обратную последовательность: на основе эмпирических данных строится модель (или модели). По сути, решается задача идентификации. Часть структуры таких моделей основана на законах природы, но они, как правило, незамкнуты, т.е. содержат неопределенность, которая снимается методами идентификации. Затем подбирается вариацион-

ный принцип, для которого исходная модель представляет необходимые условия существования экстремума. Например, в частном случае это могут быть уравнения Эйлера-Лагранжа.

Случай регулярного решения такой задачи можно найти в монографии [146]. Там описана схема, когда для модели вида $Ax = u$, где A – самосопряженный оператор определен квадратичный функционал, для которого приведенная модель является уравнением Эйлера-Лагранжа.

Автор считает, что предпочтения не являются вероятностной категорией и в комплексе с принципом «*индивидуального носителя*» приводят к вариационному принципу, имеющему самостоятельное значение и отличному от принципа Джейнса. С точки зрения математического оформления он повторяет принцип Джейнса, но только формально. Его смысловое содержание отлично. Можно это содержание сформулировать так: *функционирование индивидуальной психики подчиняется вариационному принципу*, т.е. оптимально в смысле некоторого критерия, основным элементом которого является так называемая «Субъективная энтропия».

Предполагается, что этот принцип «запаян» изначально в наше сознание, другими словами, мы обречены следовать в своих предпочтениях этому принципу, а, следовательно, и в своих действиях.

Этот основной принцип «обстроен» множеством дополнительных подробностей, он так сказать «не висит в воздухе», но опирается на ряд существенных дополнительных допущений «второго порядка»: наличие энтропийных порогов, понятие психической или эмоциональной температуры, понятие когнитивной функции и др.

Поскольку энтропия является мерой неопределенности и мерой порядка, а также мерой внутренней свободы, то не исключено, что в зависимости от смысла «когнитивной функции», которая в определенных условиях принимает форму риска (условного риска), в качестве меры неопределенности согласно [77] может выступать другая величина.

Когда мы говорим о «коллективном разуме», мы вынуждены, подчиняясь этому принципу, вводить в теорию модель виртуального «индивидуума» - виртуального субъекта, поскольку общая теория должна давать ответы на вопросы, относящиеся к функционированию групп субъектов.

Настоящий этап генезиса психологии начинается с того момента, когда предпринимаются попытки поставить в качестве основы некие общие принципы, выходящие за рамки уже накопленного фактического материала, и допускающие в конечном счете количественную формализацию, попытки отойти от эмпирических методов. Принципы, которые с одной стороны позволяли бы адекватно описать уже известные факты, с другой стороны, выявить и предсказать новые факты.

К числу таких принципов в первую очередь следует отнести, с нашей точки зрения упомянутый выше, «**принцип максимума субъективной энтропии**», а также ряд сопутствующих ему постулатов: **принцип максимума субъективной взаимной информации** (принципа Линскера), принципы Пригожина-Гленсдорфа, Циглера, [150].

Введение в психологию указанных принципов и, возможно, подобных им [150]: у Хайкина: принцип Барлоу, принцип минимума избыточности, переводит ее

в разряд «строгих» наук, когда «гуманитарная» составляющая обеспечивает «духовность», а математическая, количественная составляющая обеспечивает «телесность» – строгость, дисциплину формулировок.

Мы можем утверждать, что сформулирован новый класс задач управления, когда объектом управления является активная система, а управление носит опосредственный характер. Принцип максимума субъективной энтропии генерирует распределения предпочтений, которые можно рассматривать как «*законы субъективного управления*», то есть управления предпочтениями (желаниями) субъекта, который в свою очередь, осуществляет на этой основе управление активной системой.

Подтверждается ли существование таких принципов в глубинах сознания на уровне физиологии? Этот вопрос равносилен вопросу о принципиальной возможности объяснять процессы сознания (творчество, веру, …) с позиции физиологии.

В данный момент, мы наблюдаем этап сращивания «априорных» моделей функционирования психики с физиологией работы мозга и выяснением физиологических аспектов психических явлений, который должен дать, можно надеяться, физиологические основания «априорных» закономерностей, в том числе, и обсуждаемых в настоящей книге.

В теории информации изучается трудный и неоднозначный вопрос о ценности информации.

В рамках «субъективного анализа» где вероятности заменяются предпочтениями разнородных (индивидуализированных) альтернатив, этот вопрос решается естественным образом, поскольку по своему содержанию величину предпочтения определяет ценность данной альтернативы для субъекта.

Продвижение в избранном направлении еще недостаточно для того, чтобы гарантировать безусловное совпадение получаемых данных с практикой.

Тем не менее, ясно, что предлагаемая концепция и методы обладают большой прогностической силой и универсальностью.

Среди дополнительных вопросов, включенных в книгу, отмечу следующие.

Развитием изученной ранее в [83, 231] «однослойной» модели формирования предпочтений является «двухслойная» модель, содержащая слой эмоций или аффектов. При этом существенным образом используется идеология теории искусственных нейронных сетей и принцип „Infomax" Линскера.

Другим важным новшеством является развитие вариационного принципа Эйлера-Лагранжа для задач с несколькими критериями. Предлагается схема с модифицированными множителями Лагранжа, которые заменяются предпочтениями, обеспечивающими максимум соответствующей субъективной энтропии.

К числу гибридных схем относятся схемы, объединяющие стохастические модели и принцип максимума субъективной информации. В частности, предложена схема, в основе которой – модель Феллера-Колмогорова, описывающая динамику переходных вероятностей, обобщенный гибридный критерий байесовского риска и обобщенная формула Байеса.

Важным с точки зрения автора, является гибридная модель, основанная на комбинировании теории массового обслуживания и принципа максимума субъективной энтропии.

Особое место занимает «кинетическая теория предпочтений», в которой используется аналогия с кинетической теорией газов, в частности рассматривается аналог кинетического уравнения Больцмана.

Важным свойством модели, основанной на формализме Джейнса является «*впаянность*» в эту модель органическим образом некоторых фундаментальных законов психологии, а также существование таких активных систем, которые будучи изолированными от любых обменов с «внешним миром» материей или энергией, способны уменьшать свою внутреннюю энтропию. Это является кажущимся нарушением второго закона термодинамики.

В действительности, в таких системах обмен имеется, а именно обмен информацией о прошлом состоянии системы с уровнем, который продуцирует сегодняшнее состояние системы в зависимости от ее прошлого состояния. Таким образом, информация ставится в один ряд с материей и энергией.

В перечисленных выше моделях имеет место известное отступление от последовательно вариационного подхода. Такой «непоследовательный» подход подразумевает, что если существует некий глобальный вариационный принцип такой, то все процессы, так или иначе, являются его следствием. Однако, если такой глобальный принцип существует, он недоступен для обнаружения и понимания и мы обречены наблюдать только частные его проявления – проекции в ту или иную предметную область – соответствующие частные критерии. Но тогда неизбежным является появление гибридных моделей, включающих частную форму вариационного принципа и определенную экзогенную компоненту или модель, возникающую за пределами данного вариационного принципа.

Приведены соображения о связи предпочтений с эмоциями, восприятиями и ощущениями, предполагается некоторая иерархия вариационных принципов.

Выражение Л. Эйлера, что «во всем, что происходит вокруг нас, виден смысл какого-либо максимума или минимума» - вселяет энтузиазм, но одновременно порождает ряд вопросов. Мы добавили бы, прежде всего, не только «вокруг нас» но и «в нас самих», и, кроме того, мы имеем право поставить вопрос: как эти частные «максимумы» и «минимумы» связаны между собой, каково их происхождение.

В монографиях [83, 231] и в настоящей книге мы вводим только один вариационный принцип, касающийся формирования предпочтений субъекта системы. Он носит локальный характер, позволяет нам судить о работе психики, но не затрагивает, например, общие принципы физиологии, равно как и процессы, происходящие вне психики (экзогенные).

Кроме упомянутых общих вопросов в книге приведен ряд менее принципиальных, частных разработок, а также более компактно, по сравнению с [231] излагаются общие вопросы субъективного анализа.

Было бы заманчивым все факторы «зажать» в единый (глобальный) вариационный принцип.

Однако этого сделать не удается.

Поэтому приходится довольствоваться «локальными» вариационными принципами, охватывающими какую-либо одну предметную область и довольствоваться осознанием того факта, что мы имеем дело с «открытыми (или квазиоткрытыми)

системами» и не только в физическом мире, но и в мире интеллектуальной деятельности, в мире познания и в мире культуры.

Поэтому, каждый раз, в каждой конкретной модели «вариационный принцип» выступает как своего рода ступень, основа, главный скелет всей модели, и каждый раз мы вынуждены «украшать» его дополнительными подробностями навешивая их подобно елочным игрушкам.

В субъективном анализе, в его первичной версии такими «украшениями» явились предположения о наличии «энтропийных порогов», нееденичные нормировки, предположения о конкретной структуре функций эффективности или «когнитивных функций» и ряд других дополнительных обстоятельств, которые делают теорию более богатой и гибкой.

В последнее время, уже после опубликования монографий [231], появился ряд работ, в которых энтропийская парадигма находит новые области применения. Примером является монография [163.1], где с точки зрения энтропийной теории автор трактует известный в социально-экономических науках эффект «волн Эллнота», работы Карни [228, 248] и Иваненко [77] в области аксиоматики теории полезности, работы китайских исследователей [279, 280, 281].

В последнее десятилетие наблюдается почти экспоненциальный рост количества публикаций, в которых, так или иначе, используется энтропийная парадигма. Соответствующие статистические данные можно найти в работе [256].

В данной монографии мы обращаемся к проблеме применения энтропийных методов к безопасности полетов, более подробно, по сравнению с книгой [231], рассматривается задача о пропорциях теневой экономики.

Кроме того, отражены некоторые новые идеи. В частности, очевидно, что энтропийную теорию предпочтений необходимо каким-либо образом совместить с моделями неаддитивной меры (Сугено и др.). Здесь предлагается новая модель неаддитивной меры. Предложенная автором теория «неаддитивной H-меры» органично компонуется с «принципом максимума субъективной энтропии».

Развивается дальше теория ожидаемых «взаимных полезностей», приводится соответствующая система аксиом.

Уже упоминалось, что существенным элементом монографии является гибридный вариант классического вариационного исчисления и вариационного принципа Джейнса, взятого в интерпретации автора.

Эмоции – проявления души. Попытки вторгнуться с формальными математическими методами в эту область уже делались неоднократно, без большого, впрочем, успеха.

Понимая сложность и, может быть даже наивность, еще одной попытки, автор, тем не менее, рискует предложить альтернативную, одну из возможных, очевидно не единственную модель, которая намечает путь количественных оценок, выводов, прогноза в этой, плохо формализуемой области.

На качественном уровне эмоции хорошо изучены как у человека, так и высших животных. Более того предполагается, что у животных удельный вес, роль эмоций значительно больше, чем у человека, который все же руководится рассудочными факторами в большей степени. Однако, очевидно, что и у человека эмоции играют важную роль при формировании поведения и, в том числе являются,

фундаментом формирования предпочтений. В этом смысле предпочтения являются конечным продуктом, на котором базируется принятие решений.

На физиологическом уровне известно с достаточной степенью уверенности, какие отделы мозга отвечают за те или иные эмоции, существует определенная информация о происходящих процессах.

Незавершенность теории эмоций проявляется в том, что имеет место большое разнообразие эмоций разнородных и разноплановых по содержанию, и пока нет общепринятой классификации эмоций. Продвижение в этой области должно состоять в создании максимально лаконичной качественной и количественной теории, абстрагированной от конкретного содержания эмоций.

Эта ситуация напоминает ситуации, которые имели место в других областях.

Например, алхимия не имела стройной системы элементов. Открытие Менделеевым одного из основных законов естествознания, связано с выделением в качестве определяющего параметра атомного веса и заряда элемента.

Птолемеева карта мира была значительно сложнее картины мира Коперника. Одно лишь предположение – помещение солнца в центре «мира» радикально упростно описание траекторий планет.

В теории эмоций можно ожидать существенного прорыва, если удастся выделить основные факторы, абстрагируясь от деталей, от частностей, от «содержания» частных эмоций.

На уровне эмоций будут в этой модели действовать этические императивы, априорные предпочтения, драйвы (естественные желания), и – «вера».

Мы говорили, что сознание есть вместилище двух субстанций: «знания» и «веры». Существование каждой из них изолировано невозможно, а их органический конгломерат дает в результате технологический принцип функционирования психики.

Еще один объект анализа: «воля». Что это такое, где она гнездится? Чем определяется, каковы внешние проявления «воли»?

«Воля» – это способность делать выбор в условиях неопределенности, выбор, сделанный на высоком уровне неопределенности и инертности психики в отношении сохранения и поддержания этого выбора при ограниченности ресурсов.

Один из фундаментальных вопросов, может быть, самый важный, возникающий в связи с принимаемым постулатом – «принципом максимума субъективной энтропии» - это вопрос о генезисе этого «внешнего» принципа на генетическом уровне.

Я думаю, что в основе его появления в сознании лежат эволюционные процессы, а также консервативный принцип выживания.

Принцип эволюции в данном случае может выглядеть так: чем выше энтропия каждый раз при возникновении новой сложной ситуации, то есть, чем больше допустимых альтернатив и чем больше равномерность распределения предпочтений, тем выше вероятность благополучного исхода – «выживания». Наоборот, после выбора, если он оказался удачным, при повторении подобной ситуации, субъект выберет то же или близкое решение, пойдет «по протоптанной дорожке». Энтропия в этом случае снижается до того момента, пока не возникает новая нестандартная ситуация.

То есть, возможно, происходит закрепление принципа максимума энтропии в результате длительной эволюции. Этот тип генезиса мы наблюдаем не только у людей, но и в животном мире. Вымирают те виды, у которых набор вариантов при попадании в новую ситуацию меньше.

В книге мы приводим множество примеров количественного моделирования, в нее включены материалы ряда ранее опубликованных журнальных работ.

Какие результаты из приведенных в книге (а также в предыдущих книгах [83, 231]) автор считает наиболее существенными и которые можно считать базовыми для развиваемой концепции?

К таким результатам я могу отнести следующие:

– введение в рассмотрение предпочтения двух типов: *предметных предпочтений* и *рейтинговых предпочтений*;

– соответственно, определение понятий *субъективной энтропии предметных предпочтений* и *субъективной энтропии рейтинговых предпочтений*;

– наиболее важной, центральной гипотезой следует считать *принцип максимума субъективной энтропии*, который считается справедливым для обоих видов предпочтений;

– наиболее существенной составляющей упомянутого принципа является введение понятия *индивидуального носителя*;

– понятие *психической температуры* над множеством предметных альтернатив, а также психической температуры, ассоциированной с множеством ранговых альтернатив и распределением рейтинговых предпочтений (последнюю температуру назовем также социальной температурой);

– постулирование наличия энтропийных порогов и их связи с необходимыми условиями принятия решения;

– введение понятия *субъективной информации* связи для *предметных* и *рейтинговых* предпочтений;

– постулирование *принципа максимума информации связи* (аналогия принципа Линскера);

– определение стоимости субъективной информации (предметной и рейтинговой);

– метод расчета эластичности предпочтений, которые призваны характеризовать *эластичность психики* по отношению к экзогенным факторам;

– введение понятия *когнитивной функции* как носителя эндогенной и экзогенной информации;

– введение понятия «*активная система*» в рамках энтропийной парадигмы и доказательство способности квазиизолированной активной системы самопроизвольно уменьшать свою энтропию.

Наряду с перечисленным, можно отметить еще следующие особенности: использование рекурсивных моделей для описания динамических процессов с учетом психологических факторов, а также ряда гибридных моделей таких, как модификация вариационного исчисления Эйлера-Лагранжа, Колмогоровской модели случайных процессов с принципом Джейнса, модель неаддитивной H-меры.

Рассмотренные в книге вопросы выдвигают значительно больший перечень проблем и задач, наличие которых очевидно и которые потребуют значительных усилий в будущем.

Поэтому автор не может написать, что данная книга является, как часто пишут про диссертации, «законченным самостоятельным исследованием». Оно отнюдь «не закончено» и в значительной степени не «самостоятельно». Последнее связано с тем, что автор опирался на многие идеи и достижения других авторов. Имеется, однако, некоторая «самостоятельная» составляющая, – это пункты, перечисленные выше.

Автор глубоко убежден, что данное научное направление имеет большие перспективы практического использования применительно к различным типам активных систем, в том числе, в задачах безопасности таких систем, в экономике, в социологии, в психологии, в политологии, в теории и практике совершенствования образования и др.

Для удобства чтения книга печатается в двух частях:

Часть 1 включает введение, главы 1, 2, 3, 4.

Часть 2 включает главы 5, 6, 7, 8.

Применяется сквозная нумерация страниц, глав и параграфов.

Общее содержание помещено в начале части 1.

ЧАСТЬ 1

1 АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. ПРЕДПОЧТЕНИЯ

1.1. АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Все определения, которые делаются ниже в том числе, и термин «Субъективный анализ» имеют в значительной мере качественный, нестрогий с точки зрения математика характер. Теория, которую мы собираемся здесь построить, является незамкнутой, сопряжена с введением многих допущений, опирающихся иногда только на «здравый смысл».

Объектом теории являются «активные системы». Для того, чтобы выделить и ограничить объект исследования, нужно дать определение понятия «Активная система». Вообще говоря «Активная система» – это своеобразный бренд. Практически каждый род деятельности можно представить как функционирование системы, в центре которой стоит субъект – активный элемент системы.

Субъект – это индивидуум, либо группа индивидуумов связанных общими проблемами и консолидированными ресурсами, общими либо противоборствующими этическими системами.

Итак, система, субъект которой принимает решение, осуществляет выбор и, в определяющей степени, влияет на функционирование всей системы, есть активная система. Это – конечно весьма грубое определение, подобное определению человека, как «двуногого существа без перьев».

В дальнейшем мы будем наращивать определение «активной системы» наделяя ее все новыми и новыми свойствами.

В работах [83, 231] было высказано предположение, что главным свойством, отличительной особенностью активной системы является наличие собственных потребностей (драйвов) и способность порождать свои собственные проблемы, которые в свою очередь связываются с альтернативными возможностями их удовлетворения.

Принципиальным является положение, согласно которому субъект является «чрезвычайным и полномочным» «носителем» практически всех введенных ниже атрибутов теории: альтернатив, проблем, целей, распределения предпочтений, критериев оптимальности, которые описаны в главе 3.

Важнейшим свойством активной системы является способность осуществлять процесс самоорганизации, в частности, усложнения и перестройки собственной структуры, образования внутренних иерархических структур.

Ниже будет показано, что при определенных условиях активная система, изолированная от материальных и энергетических взаимодействий с внешним миром может уменьшать энтропию предпочтений.

Термин «активная система» основательно утвердился в тех областях науки, которые находятся на стыке «точных» и гуманитарных наук, в том числе в теории управления, социологии, психологии, экономике и др. Говоря о «точных» науках «в противовес» гуманитарным, мы отнюдь не хотим принизить последние, которые в своем роде также являются «точными» - имеющими свои четко выраженные закономерности.

Имеется значительная литература, посвященная изучению «активных систем» [64]. В СССР и, впоследствии, в СНГ важный вклад внесли Бурков В.Н., Данаев Б., Енакиев А.К., Новиков Д.А., Петраков С.Н. и др. [27, 28, 29, 30, 31, 32, 160]. Этой школой фактически заложены основы одного из вариантов теории активных систем и теории управления активными системами.

В «Курсе теории активных систем» Новикова Д.А. и Петракова С.Н. дается такое определение активной системы:

«Иначе обстоит дело в активных системах (АС) (в противовес пассивным системам (авт.)), то есть системах, в которых управляемые субъекты (точнее говоря, хотя бы один субъект), обладают свойством активности, в том числе – свободой выбора своего состояния. Заметим, что генезису философской категории «свобода» в моей монографии [83] посвящен целый раздел. Я могу назвать также книгу «Filosofia wolnosci» польского автора С. Ковальчика [243] изданную издательством католического университета в Люблине).

Помимо возможности выбора состояния, элементы АС обладают собственными интересами и предпочтениями, то есть осуществляют выбор состояния целенаправленно (в противном случае их поведение можно было бы рассматривать как пассивное)… «Проявления эти описываются следующим образом – считается, что управляемые субъекты стремятся к выбору таких своих состояний (стратегий), которые являются наилучшими с точки зрения их предпочтений при заданных или прогнозируемых значениях управляющих воздействиях, а управляющие воздействия, в свою очередь, зависят от состояний управляемых субъектов».

Это определение в дальнейшем дополняется и конкретизируется, сформулированы и решены в общетеоретическом плане, в том числе, на основе теоретично-игровых моделей задачи управления АС.

В приведенном выше определении «активность» связывается с наличием в системе «активного элемента» - субъекта. В некоторых исследованиях предлагается другая точка зрения: активность приписывается, в том числе и объектам «неживой природы» и даже всей вселенной.

В зависимости от ответа на вопрос, содержащийся в приведенных рассуждениях, находится выбор математических и физических моделей для описания активных систем.

Модель АС согласно [1, 2, 3, 160] включает такие компоненты:

1. Состав АС
2. Структуру АС
3. Порядок функционирования
4. Число периодов функционирования
5. Предпочтение участников системы
6. Допустимые множества состояний
7. Схемы информированности участников

Имеет место специализация «частей» системы как «по вертикали» так и «по горизонтали». В этом смысле активные системы являются объектом синергетики. Активные системы являются открытыми системами, обменивающимися с внешним миром (внешними субъектами и объектами) материей, энергией и информацией или условно открытыми, обменивавшиеся информацией, находящейся в собственной памяти системы.

О роли иерархий с точки зрения энтропийной парадигмы наиболее существенным отличительным свойством активной системы является следующее:

Активная система, будучи как правило нелинейной, при формировании своего поведения в данный момент использует информацию о прошлом, находящуюся в собственной памяти и может уменьшать самопроизвольно свою энтропию. Более того, говорят, что активная система «развивается успешно, если экспорт энтропии превосходит производство энтропии внутри системы» [294].

Еще более радикальное утверждение состоит в том, что активная система даже закрытая, относительно обмена энергией и материей, изолированная от внешнего мира, при определенных обстоятельствах способна уменьшать свою энтропию.

Это свойство выдвигается как фундаментальное, отличающее принятое здесь понимание от позиции других авторов.

Здесь, однако, нужно сказать какая именно энтропия имеется в виду. Например, в работах Панченкова А.Н. [161, 162, 163] вводится две энтропии: структурная энтропия и энтропия импульсов. Скорее всего, указанное свойство можно было бы отнести к структурной энтропии. Во всяком случае, речь не идет о термодинамической энтропии.

В дальнейшем мы скажем, что мы понимаем в данном случае под «энтропией» (гл. 3).

Если данная система «встроена» в более широкую систему, например, представляет собой одну или несколько иерархически связанных подсистем большой системы, то такая подсистема является «открытой» системой. Скажем, потребности человека рождаются (частично) на физиологическом уровне и отражаются психикой, которая является подсистемой в иерархической системе «человек».

Конечно, существуют и природные системы и системы, важной составляющей которых являются живые существа с тем или другим уровнем организации, обладающие рассудочной деятельностью, эмоциями, волей и другими атрибутами. Нас, однако, будут интересовать только системы, субъектом которых является человек или группа лиц.

Такие системы можно назвать «антропогенными активными системами».

Задача состоит в том, чтобы предложить количественные методы анализа и синтеза антропогенных систем, которые в явной форме учитывали бы субъективные факторы, связанные с деятельностью активного элемента – субъекта, «лица» принимающего решения и осуществляющего деятельность, направленную на реализацию этих решений. В этом смысле будем говорить о «субъективном анализе».

Другими словами, говоря о субъективном анализе, мы имеем в виду анализ таких систем, в которых все решения принимаются субъектом и потому являются «субъективными».

Но мы не отказываемся и от другого толкования термина «субъективный анализ». Существует достаточно широкое поле выбора подходов и методов описания «активных систем». Исследователь в данном случае наделен правом выбора моделей из множества возможных, свободой поведения в этом виртуальном мире. Я не знаю, почему Перельман

отказался от приза в миллион долларов за доказательство теоремы Пуанкаре, но думаю, что он построил себе виртуальный дворец из своих собственных идей, обитает в нем и чувствует себя вполне комфортно. При этом он боится, что «свалившийся» на него миллион разрушит эту идиллию. Кроме того, он видимо хочет сказать, что такого рода достижения человеческого гения, как доказательство теоремы Ферма и подобные не имеют цены. Как сказал Атос: «Для Атоса этого слишком много, а для графа Де - ла - Фер слишком мало».

Методы и модели, о которых пойдет речь, должны базироваться по возможности на фундаментальных принципах и допущениях, согласующихся с индивидуальным, социальным и историческим опытом, а также со «здравым смыслом». С другой стороны они должны давать возможность планировать и проектировать экспериментальную проверку, быть «путеводной звездой», освещающей путь экспериментаторам, давать возможность проводить анализ, обработку статистических данных с явно обозначенной целью и в определенных согласованных терминах, предоставлять модели систем для идентификации, синтеза, прогнозирования и управления.

Ярким примером самоорганизации активных систем является реформа управления Мойсея, проведенная им после исхода евреев из Египта. Из книги «The making of America» Skousena [W.Cleon Skousen, The making of America The Nasional Center for Constitutional studies. Wachington.P.C. 1913, 772 p. (1985)], в которой описывается история создания американской конституции и дается подробное постатейное ее толкование, а также из «Второй книги («Числа») Ветхого завета можно узнать, что Моисей вывел из Египта около 3000000 человек. Эту цифру можно оценить на основе Ветхого завета – 2 «Книга чисел».

Книга Моисеева «Числа»
Глава I. 19 – 46

19. Как повелел Господь Моисею и делал он исполнение им в пустыне Синайской.
20. И было сынов Рувима, первенца Израилева, по родам их, по племенам их, по семействам их, по числу имен, поголовно, всех мужского рода, от двадцати лет и выше, всех годных для войны.

21. Исчислено в колене Рувимовом	46500
22. Сынов Симона	….23…59300
24. Сынов Гада	….25…45650
26. Сынов Иуды	.....27…74600
28. Сынов Иссахары	.....29…54400
30. Сынов Завулона	.....31....57400
32. Сынов Иолифа, сынов Ефрема	.....33…40500
34. Сынов Манасии	….35…32200
36. Сынов Вениамина	….37…35400
38. Сынов Дана	….39…62700
40. Сынов Асира	….41…41500
42. Сынов Неффамима	….43…53400
46. Их было всех, вошедших в исчисление	603550.

Если учитывать, что каждый мужчина, старше 20 лет имел жену, родителей и хотя бы по одному ребенку, т.е. в среднем семья состояла из 5 человек, то в итоге мы получаем численность популяции в момент исхода $\approx 3000000 = 600000 \times 5$

Даже если это не совсем так, популяция была весьма многочисленна. Отсутствие достаточных источников питания и воды привели к ужасающим последствиям, внутренним социальным потрясениям, восстаниям, казням, высокой смертности, попытками вернуться обратно.

Моисей в качестве единственного пастыря не справлялся с обрушившейся на него ответственностью. Согласно легенде, он отправился на гору Синайскую, где из горящего куста получил консультацию – совет, который звучал примерно так: «нет ничего проще, создай иерархическую систему управления своим народом». Последовав этому совету, он создал иерархическую систему с 9-ю уровнями. Подробней об этом мы скажем дальше. Здесь отметим лишь, что Моисей, как и все люди, обладал свободой выбора, и он был частью своего народа – частью «активной системы» и потому можно считать, что это был акт самоорганизации социума, попавшего в исключительно сложные условия. Яркий пример, подтверждающий эту точку зрения, хорошо известен и лежит на поверхности.

Социумы и народы, обитающие в глубокой древности в областях с благодатным климатом, где средства пропитания в изобилии произрастали на земле и на деревьях, где можно было обходиться без одежды и теплых жилищ, в результате чудовищно отстали в культурном и техническом развитии от племен, волею судеб оказавшихся на границе ледника, вынужденные в условиях дефицита и сурового климата бороться за свое существование. Интуитивно можно предположить, что чем более сложной и напряженной становится внешняя (экзогенная) обстановка, тем в большей мере активная система стремится к самоорганизации и уменьшению своей энтропии и наоборот, чем вольготнее условия, чем легче удовлетворяются потребности, чем больше ресурсов и возможностей, тем в большей степени система стремится к дезорганизации и увеличению своей энтропии. Конечно, эти процессы происходят с запаздыванием, отставанием реакции системы на изменение экзогенных (и эндогенных) условий.

Если смотреть с этих позиций в будущее и пытаться предвидеть альтернативные последствия глобального развития, то следует придти к выводу, что в виду глобального исчерпания материальных возможностей и с одновременным ростом потребностей, по-видимому, степень самоорганизации всего сообщества будет нарастать, а энтропия падать. Возможны различные сценарии плавной эволюции либо серии катастрофических революционных взрывов.

Детальное развитие никто не может предугадать, однако теории, подобные этой, развиваемой в рамках «Субъективного анализа» дают возможность на качественном, а в некоторых случаях и на количественном уровне наметить набор возможных сценариев.

Согласно [293] у человечества есть две альтернативы: коллапс или виртуальная сингулярность.

На том уровне развития, на котором находится в данный момент «субъективный анализ» возможно лишь наметить, так сказать «наощупь», связь причин и следствий. Роль «субъективного анализа» может состоять в том, что опираясь на «принцип максимума субъективной энтропии» мы вводим в явном и приоритетном виде элементы психологии во все прогнозные расчеты и оценки.

«Субъективный анализ» дает возможность построить большое число количественных моделей, на основе которых можно проводить идентификацию, анализ статистических данных, делать прогнозы. Но может быть, более важным является возможность про-

водить качественный анализ многих проблем, связанных с деятельностью, как отдельных субъектов, так и процессов, которые имеют место в социумах.

В основе «субъективного анализа» лежат вариационные принципы [82, 231], а распределения предпочтений определяются как канонические распределения [174], получаемые в результате решения оптимизационных задач. Это не означает, что имеет место целеустремленная, осознанная оптимизация, а функционалы формируются произвольно. Наоборот, основная гипотеза состоит в том, что психика «работает» оптимальным образом, на основании «встроенного» априорно, вариационного принципа, каждый раз формирует предпочтения. Наша задача: догадаться, в каком смысле эти распределения оптимальны и каков критерий этой «встроенной» оптимальности. Другими словами, мы пытаемся предложить модели самопроизвольной деятельности психики, а затем «испытать» эти модели с точки зрения соответствия получаемых выводов «здравому смыслу», опыту и имеющимся «экспериментальным» данным.

Как далеко мы намереваемся пойти в этом направлении, определяется наличием хотя бы принципиальной возможности в обозримом будущем проверить справедливость теории экспериментально, организовать соответствующие тестирующие эксперименты, или использовать уже имеющиеся статистические данные для идентификации и конкретизации моделей.

Выше сказанное позволяет говорить о том, что речь идет о попытке предложить количественные модели деятельности психики на границе между рациональным и иррациональным, между рассудком и интуицией.

Не вступая в полемику с авторами работ [161, 162. 163], перечислим важнейшие свойства «активной системы» так, как это представляется автору настоящей работы. Эти свойства в совокупности можно считать альтернативным определением АС, а именно:

1. Отнесение всего объема вводимых понятий и категорий к определенной индивидуальной психике, т.е. концепция «индивидуального носителя» - субъекта.
2. Способность субъекта самостоятельно формировать свое множество альтернатив S_a.
3. Способность субъекта самостоятельно формировать на S_a распределение предпочтений в рамках кардиналистской модели.
4. «Встроенная» в психику оптимальность распределений предпочтений и оптимальность выбора. «Встроенные» критерии оптимальности, основанные на принципе максимума субъективной энтропии (или принципа Линскера – максимума информации).
5. Самопроизвольное движение системы, как в «физическом» так и в «субъективном» пространстве.
6. Способность к самоорганизации, в том числе, к *самопроизвольному уменьшению своей субъективной энтропии.*
7. Стремление увеличить субъективную энтропию других систем (или уменьшить).
8. Социальность, способность вступать в связи, либо в конфронтацию.
9. Конфликтность (наличие внутриличностных и межличностных конфликтов).
10. Деление ресурсов на пассивные и активные
11. Возрастные изменения. Конечность времени «жизни» любой активной системы.
12. Порождать новую информацию и обмениваться ею с другими АС. Каналы передачи субъективной информации от субъекта к субъекту в этом случае не идеальны: потеря, искажение информации, м.б. умышленное, запаздывание.

Это, пожалуй, одно из важнейших отличительных свойств активной системы.

Об активной системе можно говорить как об объекте исследований, обладающем перечисленными свойствами. Здесь важным, конечно, является вопрос о «границе» АС, о разграничении взаимодействующих активных систем, о выявлении на качественном и количественном уровне правил и законов взаимодействия активных систем.

Большая часть перечисленных свойств может быть отнесена к эндогенным (внутренним) процессам. Важным, конечно, является вопрос о том, как проявляет себя данная АС в «окружении», каким образом она становится заметной извне, как ее можно обнаружить.

Взаимодействие между активными системами осуществляется путем обмена ресурсами (добровольного или вынужденного), в том числе, информационными, а также «столкновения» их этических систем и часто принимает форму конфликта.

При этом активные системы могут стремиться пополнить свои ресурсы за счет других систем, могут вступать в конфронтацию либо в союзы с другими системами для решения корпоративных проблем, вместе с ресурсами передавать часть властных полномочий.

В дальнейшем будет показано, что при исследовании этих задач полезными оказываются модели «виртуального субъекта» или «коллективного разума».

Одним из инструментов созвучным с субъективным анализом и достаточно хорошо разработанным является теория индивидуальной и групповой полезности, отрицательной полезности (вредности), ожидаемой полезности и ожидаемой вредности [65, 141. 147, 153, 187, 201, 205, 220, 228, 247, 248, 265, 268, 269, 271, 273], а также проблемно – ресурсный метод [78, 79, 83].

Аналогом простейшей проблемы в теории полезности [187] является транзитивное бинарное отношение предпочтения ρ на множестве альтернатив S_{a}, количественной мерой которых есть функция полезности (utility).

Теория полезности берет начало в трудах экономистов XVIII века. Позже в качестве количественной меры предпочтений (preferances) стали использовать функцию полезности. Важной вехой в развитии количественной теории полезности стали работы Неймана и Моргенштерна [156]. Последующие этапы развития теории описаны в монографии [187]. Мы будем еще ссылаться на эту работу ниже.

Среди последних работ, известных автору, работы Карни [128, 248], где вводится система аксиом теории ожидаемой полезности.

В дальнейшем продуктивным оказался синтез теории полезности с новым направление исследований, которое сегодня обозначается как «синергетика».

Основоположниками синергетики считаются Хакен Т. и Пригожин И. [191, 192, 193, 264, 266]. Термин «синергетика» принадлежит Хакену Т., специалисту в области квантовой механики, теории когерентного излучения, неравновесных фазовых переходов.

Исследования в области физики неравновесных и неконсервативных самоорганизующихся систем привели к пониманию того, что эффекты самоорганизации на макроскопическом уровне имеют в действительности значительно более широкую область существования, а синергетика как научная дисциплина далеко выходит за рамки физики. Были исследованы эффекты самоорганизации в биологии, экономике, логистике [40, 114, 116, 117, 151, 152], в социальных системах и структурах. В качестве примера из биологии обычно приводят реакцию Белоусова-Жаботинского, стадии развития гриба миксомицета и другие, более сложные явления. Идеи синергетики про-

никли в психологию и такую чрезвычайно плохо формализуемую область как процессы развития и становления культур, политические и цивилизационные процессы — рождение, развитие и гибель цивилизаций.

Синергетика не может претендовать на исключительные права описания и, тем более, объяснения упомянутых выше явлений, однако, она представляет собой эффективный инструмент исследования, в том числе количественного, плохо формализуемых объектов и процессов.

1.2. Некоторые категории и понятия

В этом разделе обсуждаются категории и понятия, которые потребуются в дальнейшем и к которым в первую очередь мы относим следующее: «*активная система*», «*субъект*», «*проблема*», «*цель*», «*ресурсы*», «*альтернатива*», «*стратегия*».

Мы обсудим связь «проблемно-ресурсного анализа» с теорией бинарных отношений, теорией «полезности» [187], а также его место в субъективном анализе.

Как уже было сказано, центральным звеном активной системы является *субъект*. Другие компоненты активной системы группируются «вокруг» субъекта подобно частям живой клетки, которые группируются вокруг ее ядра. В рамках терминологии, принятой в этой книге, принимается как исходное положение: «Нет субъекта – нет активной системы». Наличие *субъекта* предполагает наличие *объекта* его активности. Объектом деятельности в большинстве случаев являются ресурсы и другие активные системы.

Функционирование активной системы при известном воображении можно интерпретировать как преобразование и перемещение (трансляцию) ресурсов. Это утверждение при всей его условности приводит к необходимости изучения категории «ресурсы», их классификации, процессов преобразования и трансляции.

Набор возможных состояний $\sigma_i \in S_\sigma$, определяется значением качественных или количественных характеристик,- можно сказать, что множество возможных состояний (стратегий) S_σ является объективной характеристикой системы. *Возможным* считается такое состояние, при «посещении» которого система остается «*самой собой*» (не теряет своей индивидуальности). Это означает, что, в первую очередь, *субъект* остается *тем же самым*; во-вторых, сохраняется неизменным некий набор технологий преобразования и трансляции ресурсов; в-третьих, сохраняется определенный набор основных связей с другими системами.

Ясно, что это определение не является строгим и исчерпывающим. С точки зрения автора абсолютная строгость — «замкнутость» определения здесь невозможна и даже, может быть, вредным тормозом в развитии теории.

Продолжая обсуждение понятия «*активная система*», мы должны постараться выделить то «*неизменное*» — *инвариантное* по отношению ко времени и внешним обстоятельствам, что позволяет оперировать этим понятием, строить количественные и качественные модели, говорить о взаимодействии систем. Ясно, что активная система, поскольку она включает в качестве главной части «ядра» субъект (индивидуум или группу индивидуумов), должна отражать в своем «формализованном» определении основные свойства субъекта. Здесь нас, конечно, интересуют в первую очередь свойства психики и, в значительно меньшей степени — физиология.

Физиология может быть существенной лишь в том смысле, что различные периоды жизни человека отличаются различным набором возможных состояний (страте-

гий) S_σ, различным набором и силой потребности (драйвов) тем, что физическая жизнь субъекта конечна и, следовательно, конечна «жизнь» каждой активной системы, связанной в субъектом.

Физиология представляет интерес в субъективном анализе, как источник сведений о физиологических проявлениях эмоций (аффектов).

Кроме множества возможных состояний (или стратегий) мы будем различать множество достижимых состояний (или реализуемых стратегий) – S_{att}. Имеет место включение $S_{att} \subset S_\sigma$. Не все состояния (или стратегии) в каждый момент времени являются предметом интереса субъекта, изучаются и сравниваются им. Те σ_i, которые в данный момент интересуют субъекта и из которых он намеревается сделать выбор, мы назовем альтернативами, а их множество S_a - множеством альтернатив. Было бы естественным предположить, что имеет место включение $S_a \subseteq S_{a\pi}$, то есть «человек желает в принципе возможного – достижимого», но некоторых достижимых состояний он не желает.

На множестве S_a субъект распределяет свои предпочтения.

В качестве альтернатив σ_i могут выступать не только состояния системы, но и альтернативные стратегии поведения в определенной проблемно-ресурсной ситуации.

Примем компромиссное определение, являющееся в то же время допущением: активная система остается самой собой, является индивидуализированной до тех пор, пока существует субъект системы, на непустом множестве альтернатив S_a, устанавливающий отношение предпочтения $\rho : \precsim$ и располагающий пассивными и активными ресурсами. Важными с точки зрения этого определения является понятие «активны ресурсы», так как оперирование пассивными ресурсами требует каждый раз затрат активных ресурсов. Исчерпание активных ресурсов равносильно, с этой точки зрения, прекращению функционирования активной системы. Надо полагать, что структура и мощность множества альтернатив определенным образом связаны с наличием активных ресурсов.

Выше мы сказали, что $N \geq 1$ всегда, но здесь допускается, что может быть N =0, т.е. субъект попадает в безальтернативную ситуацию, в том числе, не может находиться в дальнейшем в том состоянии, в котором он находится.

«Стягивание» множества альтернатив S_σ к пустому множеству или возникновение неразличимости альтернатив, если это состояние является устойчивым, означает прекращение «внешнего» функционирования активной системы. Она становится неразличимой «извне». Такое состояние может трактоваться как «*энтропийная смерть*» в то время как обращение в нуль активных ресурсов равносильно «*физической смерти*». Более точно, по-видимому физическая смерть есть такое состояние, когда скорости затрат пассивных ресурсов, необходимых для возобновления активных ресурсов субъекта становится бесконечной. Разумеется это не медицинское (не физиологические) определение смерти, тем не менее позволяет индивидуализировать активную систему в рамках субъективного анализа.

Высказывания Н.А. Бердяева (русский философ)

«Источник и смысл русского коммунизма» [26.1]

«Источник движения лежит внутри, а не в толще извне, идущий от внешней среды, как думает механический материализм. Материи присуща настоящая свобода, в ее недрах есть источник активности, изменяющий среду».

Приведенные рассуждения являются «наводящими» и дискуссионными. Они дают некоторое право говорить об активной системе как о выделенном, индивидуализированном и идентифицируемом объекте исследования. Под идентифицируемостью в данном случае мы подразумеваем возможность определения структуры и параметров системы на основе каких-либо экспериментальных исследований, под индивидуализированностью – возможность определения «*границы*» данной активной системы, отделяющей ее от других активных систем (рис.1.1).

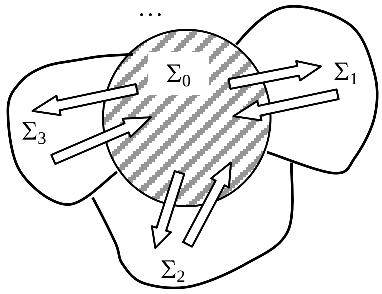


Рис.1.1

Понятно, что, прежде всего мы можем разграничить пассивные ресурсы, которыми распоряжается данная система от ресурсов других систем. Затем нам следовало бы охарактеризовать связи между данной системой и «окружением». Представляется, что эти связи реализуются в виде «каналов» взаимной передачи ресурсов (материальных, энергетических, информационных). В качестве информационных ресурсов могут выступать финансы, директивы, советы, рекомендации, любая экономическая, политиче6ская, техническая, военная и прочая информация. Заметим, что как будет видно из дальнейшего субъективный анализ и вводимые понятия субъективной энтропии и субъективной информации позволяют ввести единую шкалу измерения разнородной информации, а также определить стоимость информации, выраженную в тех единицах, в которых исчисляются ресурсы. В частности, поскольку время рассматривается во многих задачах как ресурс, стоимость информации может быть выражена во временных единицах и, тем самым, реализовано отношение: «время – деньги».

При передаче (трансляции) ресурсов, одновременно передается субъективная информация. Граница, на которой это происходит, может трактоваться как граница активной системы. Можно ли передать активные ресурсы от субъекта к субъекту? Представляется, что «*активные ресурсы*» — это тот специфический вид ресурсов, которые не могут быть переданы от одного индивидуума к другому непосредственно. Эти утверждения можно учесть при определении понятия «*активные ресурсы*». Итак «*активные ресурсы*» не передаются между индивидуумами, но при взаимодействии индивидуумов в группе имеет место «кумулятивный эффект» возрастания активных ресурсов, за счет обмена информацией между членами группы. Это имеет место в процессе обучения, в командных спортивных играх и т.д.

В социумах, в группах в результате взаимодействия индивидуальных «активных систем» происходят процессы самоорганизации, являющиеся предметом синергетики.

Здесь полезно вспомнить теорию «пассионарных толчков» Л. Гумилева [53].

В работе [294] активной системой считается система способная экспортировать энтропию (в нашем случае – субъективную энтропию).

В теории полезности субъект формирует на множестве S_a свои предпочтения. Количественной мерой ценности альтернатив является функция полезности (или отрицательной полезности – вредности), которая в большинстве случаев не нормирована и служит характеристикой абсолютной значимости альтернатив σ_i. Теория полезностей использует ординальную теорию предпочтений, которая позволяет установить порядок предпочтений. В этом смысле она является «линейной»: «чем больше – тем

лучше». Мы в дальнейшем во всей книге реализуем кардинальный подход. Кроме порядка предпочтений устанавливаются количественные пропорции между предпочтениями.

Продолжая обсуждать понятие «активная система» мы должны учесть важное обстоятельство, которое имеет место независимо от того, рассматриваем ли мы в качестве системы маленькое частное предприятие или историю развития целых народов: любая активная система имеет ограниченные пространственные «размеры» и конечное «время жизни». Хорошо известно, что всякого рода заявления и договора о «вечном мире и дружбе», «вечном союзе», «вечных идеалах» и «окончательных» социальных теориях, распространяемые на всю историю человека – не более чем наивные мечты их авторов.

Племена и народы исчезают с лица земли не оставив следа, великие империи гибнут, просуществовав иногда очень длительное, но все же конечное время. Иногда это время ничтожно мало: «тысячелетний рейх» Гитлера просуществовал только 12 лет (4380 дней).

Из этого следует, в частности, что распределение предпочтений на S_a, структура функций предпочтения и множество альтернатив S_a изменяются со временем не только в результате изменения внешних (экзогенных) условий и хода разрешения избранной проблемы, но и «спонтанно», то есть в результате действия изначальных свойств психики и физиологических процессов, другими словами – эндогенных факторов.

1.2.1. Проблема

Одно из основных понятий, которым нам придется пользоваться, является понятие «Проблемы».

Проблема *понимается как осознанное несоответствие между* ***существующим состоянием*** *активной системы и* ***желаемым состоянием****. Другими словами, проблема есть осознанное желание субъекта, либо осознанное предпочтение — следствие желания.*

Здесь присутствуют две категории: «предпочтение» и «желание». В чем различие?

«Предпочтение» подразумевает сравнение состояния (стратегии) σ_i с другими состояниями (стратегиями) σ_j , т.е. является относительной характеристикой. Желание – безусловная характеристика σ_i, не связанная с наличием других состояний σ_j и сродненными с ними.

Так голод и жажда по отдельности являются желаниями. Но может возникнуть вопрос, какое желание сильнее: «голод» или «жажда» и сравнение силы этих двух желаний характеризуется как предпочтение.

Здесь присутствуют как минимум два состояния (альтернативных стратегий) σ_e — существующее и σ_d — желаемое. Все остальные альтернативы σ_i разделяются на более предпочтительные, чем σ_d, менее предпочтительные и эквивалентные σ_d.

В зависимости от «физического» содержания $\sigma_i \in S_a$ множество S_a может быть счетным (в том числе — конечным), либо континуумом.

Простейшая проблема может интерпретироваться как упорядоченная пара символов:

$$\boldsymbol{P}\text{: } \boldsymbol{\sigma_e \prec \sigma_d}, \tag{1.1}$$

либо

$$\boldsymbol{P}\textbf{:}\ \boldsymbol{\sigma_e} \prec \forall \boldsymbol{\sigma_d} \in \boldsymbol{S_d} \subset \boldsymbol{S_a}.$$

В последнем случае каждое состояние подмножества S_d предпочтительней исходного состояния, а проблема заключается в желательности достижения хотя бы одного из $\sigma_i \in S_a$. Если начальное состояние σ_e одного из состояний $S_1 \subset S_a$, то проблема состоит в том, что каждое $\sigma_e \in S_1$ менее предпочтительно, чем каждое $\sigma_d \in S_2$, и формальная запись проблемы выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{P}\textbf{:}\ \forall \boldsymbol{\sigma_e} \in \boldsymbol{S_1} \prec \forall \boldsymbol{\sigma_d} \in \boldsymbol{S_2}\textbf{;}\ (\boldsymbol{S_1} \subset \boldsymbol{S_a}\ \textbf{и}\ \boldsymbol{S_2} \subset \boldsymbol{S_a}, \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} = \varnothing) \tag{1.2}$$

Выбор S_a (множества альтернатив) есть прерогатива субъекта («носителя») и, следовательно, является субъективным.

Множество проблем связано с существующим состоянием, которое либо принадлежит, либо не принадлежит S_a ($\sigma_e \in S_a$ или $\sigma_e \bar{\in} S_a$). Отношение предпочтения может быть строгим $\rho{:}\prec$, либо нестрогим $\rho{:}\precsim$ допускающим эквивалентность. «Проблему» будем считать строгим отношением. Она, в частности, может состоять в желании сохранить существующее состояние. Это соответствует случаю, когда с точки зрения субъекта все состояния в S_a менее предпочтительны, чем состояние σ_e, в котором субъект находится в данный момент. Если мощность S_a есть N_a, то число бинарных отношений ρ в S_a равно $N_a^{N_a}$. В общем случае отношение предпочтений может быть реализовано на σ-алгебре $\mathscr{A}_\sigma$ подмножеств S_a:

$$\boldsymbol{A\rho B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B};\ A, \boldsymbol{B} \in \mathscr{A}_\sigma. \tag{1.3}$$

Было использовано понятие «проблемно-ресурсного» подхода. По отношению к развиваемой здесь теории этот подход представляется более узким. С другой стороны имеются особенности, которые позволяют говорить о «проблемно-ресурсном» анализе как о самостоятельном, хотя и более частном, направлении исследований.

В данном случае теория бинарных отношений, теория полезности, в некотором смысле, теория категорий служат элементами фундамента, на котором строится теория активных систем и тот комплекс методов, который мы обозначаем термином «субъективный анализ».

Дополнительно решается задача разграничения субъективных и объективных факторов, вводятся определения различных типов проблем.

Дальнейшая конкретизация понятия «проблема» требует более детального описания понятий «состояние», множеств состояний. Располагая определенными ресурсами, субъект может перевести систему из начального состояния σ_e, в любое состояние, принадлежащее множеству $S_{att}|\sigma_e$ достижимых состояний. Множество $S_{att}|\sigma_e$ включает все состояния «прибытия» σ_i из состояния «отправления» σ_e такие, для которых потребные затраты субъекта меньше имеющихся у него возможностей для осуществления перехода $\sigma_e \to \sigma_i$. Конфигурация $S_{att}|\sigma_e$ зависит от начального положения σ_e (рис. 1.8).

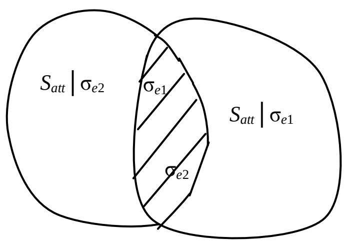


Рис. 1.8

На рис. 1.8 это свойство отражено схематично. Заштрихованная область - подмножество $S_{att}\left|\sigma_{e1},\sigma_{e2}\right.$ достижима из обеих начальных положений σ_{e1} и σ_{e2}. «Граничным» назовем такое состояние, которое достигается в результате использования оптимальной стратегии расходования ресурсов при осуществлении перехода из σ_e в это граничное состояние. Соответствующая задача относится к классу задач оптимального уравнения с ограниченными ресурсами. Мы уже говорили, что $S_{att}\left|\sigma_e\right.$ есть подмножество S_σ. Говорилось также, что не все элементы множества $S_{att}\left|\sigma_e\right.$ рассматриваются субъектом как альтернативы. Находясь в позиции σ_e субъект часть элементов $S_{att}\left|\sigma_e\right.$ изучает и оценивает с точки зрения их предпочтительности по отношению к σ_e и друг перед другом. Иными словами, субъект вводит отношение предпочтения ρ на подмножестве $S_a\left|\sigma_e \subseteq S_{att}\right|\sigma_e$. В этом смысле ρ отождествляется с множеством $S_a\left|\sigma_e \times S_a\right|\sigma_e$, где знак «×» означает декартово произведение множеств. Отношение ρ есть подмножество упорядоченных пар $(\sigma_i,\sigma_j)=\sigma_i\rho\sigma_j$. Множество S_σ назовем основным множеством. Предположим, что все $\sigma_i \in S_{att}\left|\sigma_e\right.$ различимы и попарно взаимно сравнимы. Это означает, что между элементами можно установить бинарное отношение предпочтений ρ. Множество элементов, между которыми субъект устанавливает отношение предпочтений $\rho:\prec$ или $\rho:\precsim$ есть множество альтернатив. Итак, состояния различимые и сравнимые по ρ называются альтернативами. Существует две возможности:

1. $\sigma_e \in S_a\left|\sigma_e\right.$; 2. $\sigma_e \overline{\in} S_a\left|\sigma_e\right.$.

В первом случае субъект изучает множество альтернатив $S_a|\sigma_e$ (рис. 1.9 а) «извне». В этом случае σ_e хотя и допустимо, не является альтернативой, то есть субъект не может остаться в исходном состоянии в результате разрешения проблемы. Во втором случае (рис. 1.9 в) субъект «смотрит» на множество $S_a|\sigma_e$ «изнутри» а $\sigma_e \in S_a|\sigma_e$ и является одной из альтернатив, то есть субъект может выбрать, в частности, в качестве наиболее приемлемого то состояние, в котором он уже находится, то есть σ_e.

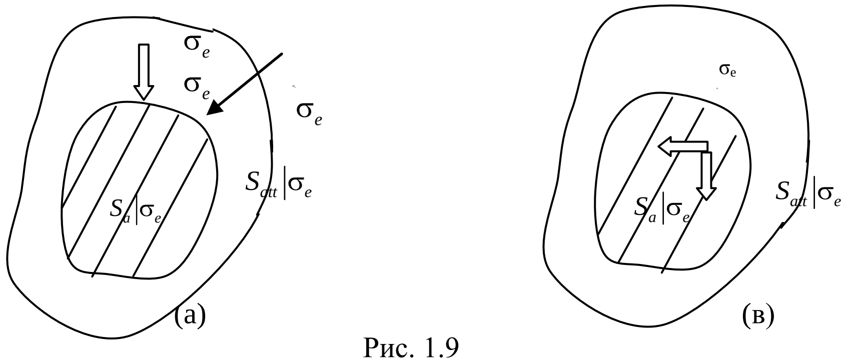


Рис. 1.9

Система должна быть индивидуализирована, по крайней мере, в течение определенного конечного интервала времени. Другими словами, желательно было бы допустить, что в течение этого интервала времени систему можно охарактеризовать некоторой стабильной характеристикой – инвариантом, например, в смысле теории категорий, где последний является функцией кардинальных чисел.

Если ограничиться конечным числом состояний или альтернатив, или проблем, то инвариант выражается через это количество.

Число элементов N_a множества $S_a|\sigma_e$ с течением времени может изменяться и, следовательно, «инвариант», связанный с числом альтернатив имеет «относительный» характер. Назовем «абсолютным инвариантом», кардинальное число («*Card*»):

$$I_{S\sigma} = Card\ H\ (S_\sigma, S_\sigma)$$

Здесь $H\ (S_\sigma, S_\sigma)$ - множество биморфизмов $S_\sigma \rightarrow S_\sigma$. На практике число допустимых состояний может изменяться с течением времени. Такая ситуация, например, имеет место, когда в системе происходят какие-либо отказы.

Инвариант I_{S_σ} есть объективная характеристика системы.

«Относительный» или субъективный инвариант

$$I_{S_a} = CardH(S_a|\sigma_e, S_a|\sigma_e)$$

связан с количеством альтернатив N_a, которое также может изменяться со временем. Рассмотрим случай, когда в течение определенного времени, затрачиваемого на выбор альтернативы и разрешение избранной проблемы, число альтернатив не изменяется.

Используя введенные понятия, можно предложить следующее понятие «интеллектуальной катастрофы». Пусть в определенный момент определены множества $S_\sigma, S_{att}|\sigma_e, S_a|\sigma_e$, кардинальные числа для S_σ и $S_a|\sigma_e$ соотносятся следующим образом:

$$CardH(S_a, S_\sigma) > CardH(S_a|\sigma_e, S_a|\sigma_e)$$

Могут иметь место такие условия:

1. $S_{att}|\sigma_e \subseteq S_\sigma$ и $S_a|\sigma_e \cap S_a|\sigma_e = S_a|\sigma_e$: субъект желает того, что допустимо и достижимо.

2. $S_{att}|\sigma_e \subseteq S_\sigma$ и $S_a|\sigma_e \setminus S_{att}|\sigma_e = \varnothing, S_a|\sigma_e \subseteq S_\sigma$: субъект желает того, что допустимо, но не всегда достижимо.

3. $S_{att}|\sigma_e \subseteq S_\sigma$ и $S_a|\sigma_e \cap S_{att}|\sigma_e = \varnothing, S_a|\sigma_e \subseteq S_\sigma$: субъект желает допустимого, но недостижимого из σ_e.

Если $\sigma_e \,\overline{\in}\, S_a|\sigma_e$, то при определенных условиях множество $S_a|\sigma_e$ может быть стянуто к пустому множеству, то есть отсутствует выбор. Если $\sigma_e \in S_a|\sigma_e$, то $S_a|\sigma_e$ никогда не может быть пустым, т.е. выбор всегда существует, так как исходное состояние σ_e рассматривается как одна из альтернатив. Если субъекту не нравится ни одна из альтернатив $S_a|\sigma_e$ кроме σ_e, то выбор может быть сделан в пользу суще-

ствующего состояния – сохранения «статус – кво». Наконец, если $S_a|\sigma_e$ содержит лишь одну альтернативу (в случае если $\sigma_e \in S_a|\sigma_e$, и σ_e и является этой единственной альтернативой). Субъективная энтропия (гл. 3), соответствующая относительному инварианту, равна нулю.

Подчеркнем еще раз различие между «альтернативой» и «проблемой».

Множество альтернатив $S_a|\sigma_e$, есть чаще всего множеством состояний (стратегий) рассматриваемых субъектом как допустимые, достижимые и предпочтительные по отношению к σ_e. Если в $S_a|\sigma_e$ присутствуют состояния менее предпочтительные чем σ_e: $\sigma_i \prec \sigma_e$, то они либо не включаются в $S_a|\sigma_e$, либо могут быть включены с нулевой полезностью и нулевой функцией предпочтений. На сформированном таким образом множестве $S_a|\sigma_e$ устанавливается нестрогое бинарное отношение предпочтений между всеми состояниями. При этом имеет место гомоморфизм

$$\sigma_i \precsim \sigma_j \Leftarrow P(\sigma_i|\sigma_e) \precsim P(\sigma_j|\sigma_e) \qquad (1.4)$$

Правая часть этого соотношения означает, что разрешение проблемы $P(\sigma_j|\sigma_e)$ предпочтительней, чем разрешение проблемы $P(\sigma_i|\sigma_e)$. Соответствие является гомоморфизмом, поскольку отношение $\sigma_i \precsim \sigma_j$ может иметь место и для других проблем и другого исходного состояния σ_e.

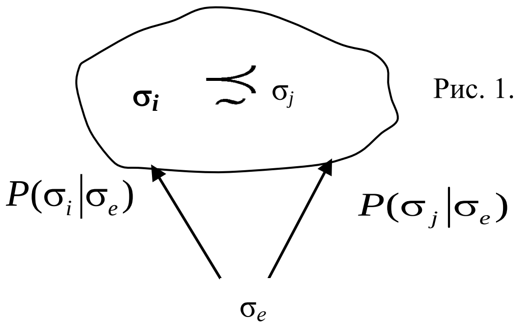


Рис. 1.10.

Соотношение (1.53) показывает, в чем состоит различие между понятиями «проблема» и «альтернатива».

Продолжая обсуждать понятие «активная система» мы можем сказать, что пассивная система в отличие от активной системы, имея множество возможных состояний S_σ, не формирует множество альтернатив $S_a|\sigma_e$, не устанавливает на этом множестве системы предпочтений и не порождает «своих проблем».

Изменение состояния активной системы происходит в результате

– целенаправленной деятельности, связанной с расходованием располагаемых ресурсов;

– изменений, происходящих в «окружении» системы и не зависящих от системы;

– «спонтанного» изменения в результате внутренних процессов в системе.

Для того, чтобы дать определенную классификацию проблем, вернемся к более детальному анализу понятия «альтернативы» и взаимоотношения между альтернативами.

Альтернативы σ_i и σ_j несовместимы, если они не могут быть реализованы одновременно, например, субъект не может одновременно находится в двух различных местах. Обозначим это обстоятельство соотношением

$$\sigma_i \wedge \sigma_j = \sigma_\phi$$

где $\wedge$ означает бинарную композицию альтернатив, а σ_ϕ – нереализуемую альтернативу. Такие альтернативы (σ_i и σ_j) могут осуществляться последовательно, в частности, они могут быть элементами «траектории» (пути):

$$\ldots \to \sigma_i \to \sigma_j \ldots$$

Наряду с бинарной «композицией» определяется бинарная «диспозиция» $\sigma_i \vee \sigma_j = \sigma_s$ – альтернатива, состоящая в том, что реализуется одна из трех возможностей: σ_i либо σ_j либо одновременно и σ_i и σ_j (то есть композиция).

Альтернативы независимы, если два пути $Trij : \sigma_i \to \sigma_j$ и $Trji : \sigma_j \to \sigma_i$ эквивалентны.

Это означает, что реализация каждой из альтернатив не предполагает обязательной реализации другой: $Trij \sim Trji$. Две альтернативы σ_i и σ_j эквивалентны условно, относительно третьей альтернативы σ_k если эквивалентны пути $Trkj \sim Trki$.

Каждый элемент $\sigma_i \in S_a$ имеет свой класс эквивалентности, который содержит как минимум один элемент σ_i. Класс эквивалентности σ_i обозначим $S_{ai} \subseteq S_a$. Множество S_a, таким образом, разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Если два элемента σ_i и σ_j эквивалентны ($\sigma_i \sim \sigma_j$), то их множества эквивалентности совпадают: $S_{ai} = S_{aj}$.

Если на множестве S_a введено отношение предпочтения и предпочтительность определена количественно, то она одинакова для всех элементов данного подмножества S_a: при сравнении с элементами другого класса. Если на S_a (мы опускаем здесь с целью упрощения обозначений, ссылку на исходное состояние σ_e). Задано отношение предпочтений ρ: $\prec$ и S_{ai} есть класс эквивалентности элемента σ_i (может быть выбран любой элемент из S_{ai}), то остальная часть полного множества $S_a \setminus S_{ai}$ разделена на два подмножества S_{ai}^+ и S_{ai}^- – более предпочтительных, чем σ_i и менее предпочтительных, чем σ_i элементов.

Известно, что открытое множество на числовой прямой есть сумма конечного или счетного числа попарно непересекающихся открытых подмножеств. Для n-мерного случая, (σ – векторный параметр) классы эквивалентности представляют собой открытые подмножества.

Если S_a конечно или счетно, то граница между S_{ai}^{+} и S_{ai}^{-} напоминает границу государства, обставленную с двух сторон «пограничными столбами» – альтернативами, принадлежащими смежным классам эквивалентности.

Пусть $\sigma_i \succ \sigma_k$ и $\sigma_j \succ \sigma_k$, причем заранее известно, что из реализации проблемы $P:(\sigma_k \to \sigma_i)$ следует реализация проблемы $P:(\sigma_k \to \sigma_j)$.

В этом случае будем говорить, что альтернатива σ_i «поглощает» альтернативу σ_j: $\sigma_i \succ\succ \sigma_j \big| \sigma_k$ при условии, что начальным и непосредственно предшествующим состоянием является σ_k.

Свойство поглощения не совпадает со свойствами включения или принадлежности. Каждый элемент имеет свое поглощаемое множество, которое в частном случае содержит только один элемент σ_i. В случае, если имеет место поглощение на множестве альтернатив, то будем говорить, что проблема $P:(\sigma_k \to \sigma_i)$ поглощает (имплицирует) проблему $P:(\sigma_k \to \sigma_j)$. Это не означает, что альтернативу σ_j можно исключить из рассмотрения. Например, если располагаемых ресурсов недостаточно для разрешения данной проблемы, то возникает новая вспомогательная проблема. Свойство поглощения транзитивно рефлексивно и асимметрично.

Состояния σ_i и σ_j несовместимы, если не существует такого состояния $\sigma_k \in S_a$, которое поглощало бы одновременно и σ_i и σ_j, при исходном состоянии σ_k, и совместимо, если такое состояние существует.

В первом случае $\sigma_s \sim \sigma_i \wedge \sigma_j$ есть состояние нереализуемое в S_a: $\sigma_s \sim \sigma_i \wedge \sigma_j \,\overline{\in}\, S_a$, во втором случае $\sigma_i \wedge \sigma_j \in S_a$.

Назовем проблему $P_s \sim P_i \wedge P_j$ «произведением» проблем P_i и P_j, если $P_s:(\sigma_k \to \sigma_s \big| \sigma_k)$. Проблема P_s «разрешима» в S_a, если $\sigma_s \in S_a$, и «неразрешима» в S_a, если $\sigma_s \,\overline{\in}\, S_a$.

Итак, произведением проблем является проблема, которая предусматривает в качестве желаемой альтернативы композицию альтернатив.

Обозначим через $P_s = P_i \vee P_j$ «сумму» проблем P_i и P_j – проблему, состоящую в том, чтобы из начального состояния σ_k достигнуть хотя бы одного из альтернативных состояний σ_i или σ_j (или $\sigma_i \wedge \sigma_j$). Проблема P_s разрешима, если разрешима, хотя бы одна из проблем P_i и P_j.

Множество элементов, для каждого из которых подмножество поглощения состоит из одного этого элемента, назовем «фундаментальным» и, наоборот, если все состояния выстраиваются в ряд взаимопоглощающих состояний

$$\sigma_1 \prec\prec \sigma_2 \prec\prec \sigma_3 \prec\prec \ldots \prec\prec \sigma_{N-1} \prec\prec \sigma_N,$$

то соответствующее множество назовем «универсальным» или «универсально-связанным».

Такая ситуация, например, имеет место, если все элементы характеризуются одним универсальным количественным показателем (дальность, стоимостный эквивалент), а субъект обладает достаточным количеством единиц этого эквивалента, чтобы реализовать альтернативу $\sigma_{i-1}, \sigma_{i-2}, \ldots$ Примером рис. 1.11 может служить набор в качестве альтернатив пунктов, последовательно расположенных на дороге (рис. 1.11).

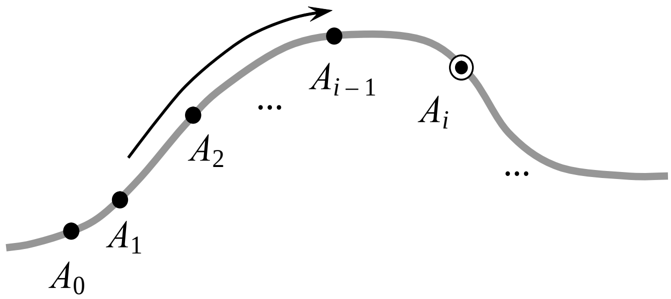


Рис. 1.11

Приведем дополнительные определения, касающееся категории «проблема».

1. «Простая проблема» $P^{(1)}$: $(\sigma_0 \to \sigma_i)$ – проблема, решение которой представляет собой одноактное действие перехода из начального состояния σ_0 в другое простое состояние σ_i.

2. «Сложная проблема»

$P^{(k)}:(P_1, P_2, \ldots P_k) \sim \{(\sigma_0 \to \sigma_1); (\sigma_0 \to \sigma_2); \ldots; (\sigma_0 \to \sigma_k)\}$ представляет собой набор простых проблем, из которых в конечном итоге выбирается некоторая композиция (или произведение) порядка $n \le k$. Сложная проблема может состоять не только из простых проблем, но также включить различные композиции. Так, если S_a счетно, то множество всех сложных проблем имеет мощность континуума.

3. «Векторная проблема» $\vec{P}_i^{(S)}$ соответствует тому случаю, когда желаемое состояние σ_i характеризуется набором компонент и может быть рассматриваемо как вектор

$$\vec{\sigma}_i = \left\{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_i^S\right\}$$

Тогда проблема представляется также как «вектор» $\vec{P}_i^{(S)} : \left\{P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^S\right\}$

4. «Иерархическая проблема» - это сложная проблема, формируется как набор простых (или сложных) проблем, решаемых в заданной последовательности. Причем, разрешение каждой последующей проблемы возможно, только после разрешения предыдущей, существует рекурсная или смысловая обусловленность этой последовательности.

5. «Субординация проблем» - это такое соотношение между проблемами, когда установлена определенная последовательность разрешения проблем, но нет ресурсной или жесткой смысловой обусловленности этой последовательности.

1.2.2. Ресурсы

«Ресурсы» являются важной категорией анализа, которая употребляется в настоящей работе в различных разделах и в связи с различными целями. Понятие «ресурсы» имеет здесь широкое значение. В частности оно тесно коррелирует с понятием полезности.

***Ресурсами** назовем любые **средства** и **факторы**, которые **сознательно** использует или собирается использовать **субъект** в процессе разрешения **своих проблем**, или рассматривает их как результат разрешения проблем.*

Было бы заманчиво представить *любую* проблему как желаемую операцию с ресурсами: преобразование одних ресурсов в другие, перемещение (трансляцию) ресурсов. Вопрос состоит, однако в следующем: можно ли любой проблеме дать такое истолкование. То, что разрешение любой проблемы требует затрат ресурсов, неоспоримо, однако, по-видимому, существуют проблемы, результатом разрешения которых не являются новые ресурсы, например, проблемы получения наслаждения, удовольствий. Более того, в некоторых случаях разрешение проблемы ведет к уменьшению располагаемых ресурсов субъекта. Действительно, курение, употребление наркотиков сокращает продолжительность жизни, то есть уменьшает «*количество*» важнейшего ресурса – располагаемого времени жизни субъекта.

Во всяком случае, мы можем выделить такой *класс проблем*, смысл которых состоит в *переработке, преобразовании* ресурсов, либо *перемещении* ресурсов. Наряду с этим, существуют проблемы, смысл которых состоит не в получении в качестве результата *новых ресурсов*, а в удовлетворении некоторых важных с точки зрения субъекта потребностей, причем этот результат, каким бы он ни был, невозможно в дальнейшем использовать в качестве исходных ресурсов для разрешения последующих проблем.

В связи с этим, в частности, мы не отождествляем всегда понятие состояния $\sigma_i \in S_a$ с наличными ресурсами.

Данное выше определение ресурсов *R* связывает их с проблемами и с субъектом. Поскольку проблема есть категория субъективная, существующая в сознании субъекта и не существующая помимо субъекта, то и «ресурсы» также есть категория субъективная. Этим мы хотим сказать, что некоторые материальные объекты, энергия, информация, труд, деньги и т.д. становятся «*ресурсами*», как только они в сознании субъекта связываются с определенной *проблемой*. Для другого субъекта они могут ресурсами не быть, либо быть таковыми, но в связи с совершенно другой проблемой.

Таким образом, понятие «ресурсы» имеет двойной смысл: с одной стороны это реальные объекты, существующие вне субъекта, с другой стороны — это субъективная категория (рис. 1.2).

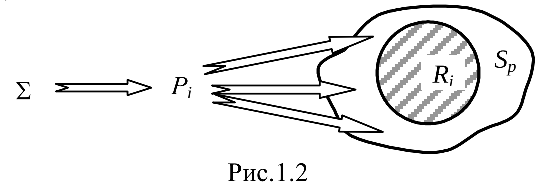


Рис.1.2

Субъект Σ вначале осознает проблему P_i, а затем из доступного для него набора средств и факторов S_p выбирает то, что необходимо для разрешения проблемы P_i и называет эти средства и факторы *ресурсами* R_i. Набор средств и факторов не соотнесенный к конкретным проблемам удобно назвать «*запасами*» (Supply). Запасы могут быть соотнесены к какому-либо типу проблем или, например, ко всему множеству S_a, но не к конкретной проблеме. «*Запасы*» трансформируются в *ресурсы* как только они соотносятся к какой-либо проблеме (проблемам). Следовательно, запасы, являясь разновидностью ресурсов, также имеют двойственный характер: как субъективная категория и как реально существующие средства и факторы.

Пассивные и активные ресурсы

Говоря о классификации ресурсов, выделим, прежде всего, *активные* и *пассивные* ресурсы.

При разрешении любой проблемы используются соответствующие ресурсы: финансы, материалы, энергия, информация, которыми располагает и распоряжается субъект. Мы здесь не затрагиваем отношения собственности, поэтому не делаем различия между терминами «владеет» и «распоряжается».

Перечисленные ресурсы удобно называть *пассивными ресурсами.* Для того, чтобы такие ресурсы пришли в движение, стали работать, нужна активность субъекта, прежде всего осознание им проблемы, «носителем» которой является исключительно его сознание, активность его психики и его воля, необходимые, чтобы привести пассивные ресурсы в движение.

Последние обладают определенной «индукцией». Итак, первый вид ресурсов – «внешних» по отношению к субъекту будем называть *пассивными ресурсами* R_p, второй вид ресурсов (интеллектуальные, физиологические, личное время субъекта), то есть, «внутренние» (эндогенные) ресурсы субъекта назовем *активными ресурсами* R_a. Можно сказать, что *активные ресурсы* – это такие ресурсы, которые не передаются непосредственно от одного субъекта к другому, но могут возобновляться.

Использование для разрешения проблемы *пассивных ресурсов* с необходимостью требует расходования определенной части *активных ресурсов* субъекта. Таким образом, если R_{p1}^{req} *— потребные пассивные ресурсы,* то *потребные активные ресурсы* R_a^{req} определяются тем, сколько и каких *пассивных ресурсов* использует субъект для разрешения данной проблемы. Это обстоятельство символически можно выразить так:

$$\boldsymbol{R_a^{req} = f_p^a\left(R_p^{req}\right)} \qquad (1.4)$$

Здесь $\boldsymbol{f_p^a}$ - некоторый оператор, связывающий ресурсы двух видов.

Если речь идет о расходовании активных ресурсов во времени, то есть об интенсивных характеристиках, то следует использовать «скорости» преобразования ресурсов

$$\boldsymbol{v_a^{req} = \frac{dR_a^{req}}{dt};\ v_p^{req} = \frac{dR_p^{req}}{dt}},$$

тогда

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{req}} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{a}'} \cdot \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{req}}, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{a}'}$ — оператор, который условно можно назвать производной оператора $\boldsymbol{f}$.

В свою очередь, способность субъекта к активной деятельности по разрешению своих проблем обеспечивается наличием достаточных активных ресурсов $R_a^{disp} \geq R_a^{req}$, где R_a^{disp} — располагаемые активные ресурсы.

Возобновление и поддержание на определенном уровне активных ресурсов требует с необходимостью затрат пассивных ресурсов. Другими словами, существует зависимость

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}2}^{\boldsymbol{req}} = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{req}},\ldots\right). \tag{1.6}$$

Теперь вместо уравнения (1.4) запишем:

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{req}} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}1}^{\boldsymbol{req}} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}2}^{\boldsymbol{req}}\right) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}1}^{\boldsymbol{req}} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{req}})\right) \tag{1.7}$$

Обозначая $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{req}} = \left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}1}^{\boldsymbol{req}} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{p}2}^{\boldsymbol{req}}\right)$ и переходя к скоростям изменения ресурсов, найдем:

$$v_a^{req} = \frac{\partial f_a'(R_p^{req})}{\partial R_p^{req}} \cdot \left(v_{p1}^{req} + \frac{\partial g_p^a(R_a^{req})}{\partial R_a^{req}} \cdot v_a^{req} \right) \tag{1.8}$$

Отсюда $v_a^{req} = \dfrac{f_a^{p'}}{1 - f_a^{p'} \cdot g_p^{a'}} \cdot v_{p1}^{req}$ видим, что v_a^{req} становится бесконечным, если $f' \cdot g' \to 1$. Другими словами, если предельная полезность пассивных ресурсов $f_a'^{p} = \dfrac{\partial f'(R_p^{req})}{\partial R_p^{req}}$ при возобновлении активных ресурсов обратна предельной полезности активных ресурсов при «мобилизации» пассивных ресурсов, то скорость расходования активных ресурсов становится бесконечной, а преобразование (трансляция) пассивных ресурсов прекращается.

Соотношения (1.6), (1.7), (1.8) имеют лишь символический смысл и поясняют связь между активными и пассивными ресурсами, отражают логику этой связи.

«Расходуемые» ресурсы и технологии

Следующий признак классификации основан на учете кратности использования ресурсов. Будем различать ресурсы однократного использования (например, зубная паста) и многократного использования (например, зубная щетка). В дальнейшем ресурсы первого типа будем для краткости называть просто *ресурсами*, а ресурсы второго типа относить к *технологиям*.

Таким образом, ***технологии*** *— это ресурсы многократного использования, которые обеспечивают преобразование ресурсов однократного использования.*

Материальные, энергетические и информационные ресурсы.

В практических целях необходимо конкретизировать типы ресурсов в содержательном смысле, а именно, разделить ресурсы на материальные, энергетические и ин-

формационные: R_m, R_e, R_{inf}. Вообще говоря, в частном виде каждый из этих ресурсов не встречается. Так, например, информационные ресурсы имеют материальные носители, а их трансляция требует затрат энергии. В экономических задачах рассматриваются трудовые ресурсы R_L (или L), капитальные ресурсы R_c (или C), например, в производственной функции Кобба – Дугласа.

Роль информационных ресурсов оказывается принципиально важной в теории благосостояния [75, 144]. Например, имеет место вывод о том, что … «в условиях описанных предпосылок, децентрализованная экономика, в которой каждая фирма максимизирует свою собственную прибыль, приходит к той же суммарной прибыли, что и централизованная экономика, в которой максимизируется общая прибыль», и далее … «следовательно, выбор между централизацией и децентрализацией зависит от факторов, которые не были рассмотрены здесь, таких, как информация и ее цена». Как мы увидим ниже, в нашем понимании это может быть «субъективная информация» и определенная количественно цена этой информации.

Деньги как информационные ресурсы

Деньги и другие ценности, обладающие свойствами денег, в большинстве случаев являются универсальными ресурсами.

Теория денег изложена, например, в книге Харриса [197], а роль денег как информационных ресурсов рассматривается в книге Чернавского [200], в том числе анализируются некоторые динамические модели изменения денежной массы. Изложение теории денег не является нашей задачей.

Сделаем в этой связи три важных замечания.

1. Не только деньги или драгоценности могут обладать универсальностью, но и некоторые товары и блага в условиях бартерной экономики.

2. Деньги можно отнести к информационным ресурсам, поскольку они в концентрированном обезличенном виде содержат информацию о предыдущей деятельности субъекта и о его потенциальных возможностях в будущем.

3. Далеко не все проблемы можно разрешить, располагая только деньгами. Более того, можно привести бесконечное число примеров, когда деньги не являются рбесурсами, не могут быть применены, причем не только в историческом прошлом, но и в условиях сегодняшнего мира.

В связи с этим можно привести высказывания Поля Брега, сделанное по другому поводу, но хорошо иллюстрирующее сказанное выше: «За деньги можно купить кровать, но не сон; еду, но не аппетит; лекарство, но не здоровье; здание, но не домашний очаг; книгу, но не ум; украшения, но не красоту; роскошь, но не культуру…».

Как видим, в каждом из противопоставлений «левая часть» — это материальные ценности, приобретаемые за деньги, то есть нечто, объективно существующее вне субъекта; «правая часть» — это субъективные восприятия и ощущения самого себя и окружающего мира.

Время и пространство как ресурсы

Особыми ресурсами являются время и пространство. При этом нужно различать *астрономическое* время и *операционное* время. Астрономическое время и пространство не являются ресурсами. При этом время и пространственные координаты используются как независимые переменные в динамических задачах вплоть до процессов, протекающих со скоростями, близкими к скорости света. Операционное время и опе-

рационное пространство рассматривается как ресурсы. Например, можно говорить об операционном времени студента, которое определяется учебным планом и операционным временем преподавателя, определенном в соответствие с расписаниями занятий и его индивидуальным годовым планом.

Располагаемые, потребные и ожидаемые ресурсы

Необходимо установить классификацию ресурсов по их отношению к роли в формулировке проблемной ситуации и последовательности ее разрешения.

Будем использовать следующие понятия:

1. Располагаемые ресурсы: $R^{disp} = R^{d}$ — это ресурсы, которыми в данный момент располагает субъект и имеет возможность ими распоряжаться по своему усмотрению. Если субъект изучает множество проблем, то он опирается на «*свои*» располагаемые ресурсы. Пусть данный вид ресурсов универсален на множестве $\mathcal{P}_a^*$, которое являются подмножеством полного множества проблем $\mathcal{P}_a$, в связи с множеством альтернатив S_a:$\mathcal{P}_a^* \subset \mathcal{P}_a$, но не может быть использован для разрешения проблем $P \overline{\in} \mathcal{P}_a^*$, тогда степень универсальности ресурсов данного вида может быть определена каким-либо критерием, отражающим соотношение множеств, $\mathcal{P}_a^*$ и $\mathcal{P}$, например, как отношение их кардинальных чисел. Проблемы $P \overline{\in} \mathcal{P}_a^*$ характеризуются тем, что для их разрешения используются одни и те же универсальные ресурсы, одно и то же количество ресурсов кладется в основу анализа разрешимости всех таких проблем.

Если ресурсы R^{disp} не универсальны, то для каждой проблемы выделяется часть R^{disp}

$$\boldsymbol{R^{disp}(\sigma_i) \subseteq R^{disp}}$$

2. **Потребные ресурсы**. Каждой частной проблеме сопоставляются *потребные ресурсы* $R^{req}(\sigma_i)$. Определение *потребных ресурсов* представляет собой задачу прогноза и выполняется различными методами (статистический анализ ретроспективной информации, детерминированный расчет затрат, экспертная оценка, …).

Предполагается, что сопоставление потребных и располагаемых ресурсов позволяет сформировать множества S_{att} и S_a и, соответственно множество проблем $\mathcal{P}_a$. В $\mathcal{P}_a$ включаются проблемы, для которых

$$\boldsymbol{R^{req}(\sigma_i) < R^{disp}(\sigma_i)}, \tag{1.9}$$

В теории управления $S_{att}\big|\sigma_e$ называют достижимым (из σ_e) множеством. В дальнейшем мы еще раз коснемся интерпретации свойств достижимости и управляемости применительно к проблемным ситуациям.

3. Ожидаемые ресурсы: $R^{exp} = R^{e}$ это ресурсы, которые субъект ожидает получить в результате разрешения проблемы.

Если проблема состоит в преобразовании ресурсов то, как нам кажется, субъект должен исключить из рассмотрения проблемы, для которых выполняется условие $R^{exp}(\sigma_i) \le R^{req}(\sigma_i)$ и рассматривать такие альтернативы, для которых

$$\boldsymbol{R^{exp}(\sigma_i) > R^{req}(\sigma_i)}. \tag{1.10}$$

Таким образом, условием включения проблемы в множество $\mathcal{P}_a$ являются неравенства (1.9) и (1.10).

Представляется естественным разделить возможные проблемы на два класса:

— проблемы, для которых выполняется неравенство (1.9) — множество $\mathcal{P}_a$ и

— проблемы, для которых выполняются оба неравенства (1.9) и (1.10) (множество $\mathcal{P}_b$).

Очевидно, что $\mathcal{P}_b \subseteq \mathcal{P}_a$.

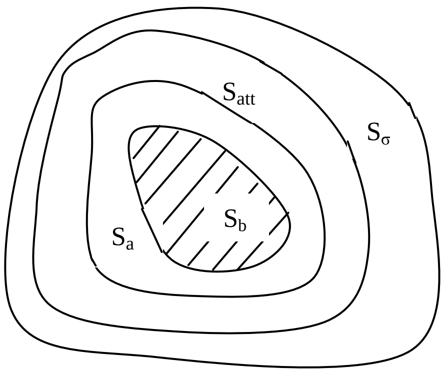


Рис.1.3

Соответственно, можно говорить о множествах S_a и S_b. Рис. 1.3. иллюстрирует взаимное соотношение множеств S_σ, S_{att}, S_a, и S_b.

В множестве $\mathcal{P}_a$, наряду с проблемами второго типа, содержатся такие проблемы, результатом разрешения которых являются не новые ресурсы $R^{exp}(\sigma_i)$, а удовлетворение индивидуальных потребностей, не связанных с приращением пассивных и активных ресурсов субъекта.

Возможен взгляд на проблему, когда множество конкурирующих проблем не ограничивается неравенствами (1.9) (1.10), а охватывает более широкий круг «допустимых» проблем, которые в принципе могут быть реализованы, может быть, с очень малой исчезающей вероятностью во временной перспективе при появлении необходимых дополнительных ресурсов.

Определение реальной ресурсной основы предпочтений выделяет прагматическое множество проблем $\mathcal{P}_a$ и позволяет «включить» количественные методы анализа.

1.2.3. Цели

Следующей важной категорией является категория «цель». Эта категория описана в работе [135]. Мы не будем повторять приведенные там рассуждения, в том числе, критику различных определений «цели», приведенных в других, известных автору литературных источниках.

Дадим определение категории «цель», которое, на наш взгляд, хорошо вписывается в систему понятий субъективного анализа:

Цель *есть* ***намерение****, (или решение) действовать в соответствии с одной из альтернатив. Это есть результат выбора одной из множества проблем.* При этом «проблема» понимается так, как это было определено выше.

Цель, как и другие категории, обсуждавшиеся ранее, есть субъективная категория и, следовательно, должна иметь своего индивидуального носителя.

Если изучается группа субъектов, то возникает задача агрегирования частных, индивидуальных целей. Эта задача может не иметь решения, то есть не всегда можно согласовать индивидуальные цели. Возникает ситуация, подобная той, которая имеет место в теории коллективного выбора, в частности, в связи с теоремами Эрроу «о невозможности».

В логическом и временном смысле *цель* есть категория подчиненная. Она может появиться только после того, как осознаны *проблемы*, связанные с множеством альтернатив.

Можно, конечно, представить себе цепочку проблем и целей, когда одна проблема, например, P_0 порождает цель A_0, в процессе движения к цели A_0 возникают новые промежуточные проблемы P_1, P_2, …, P_n и если эти проблемы находятся в конкурентном отношении, то новый промежуточный выбор дает новую цель A_1, A_2, … Однако в каждом отдельном случае и в каждом звене этой цепи «*проблема*» считается первичной, а «*цель*» — вторичной.

Каждый раз множество проблем $\mathcal{P}_a$ можно назвать *множеством потенциальных целей*, а выбранную для реализации проблему — *актуальной целью*. Ниже мы будем говорить о *проблемно-ресурсной ситуации,* и относить категорию *цель* к этому понятию.

Цель представляется как своеобразный «*оператор*», осуществляющий выбор одной из проблем для разрешения и запускающий механизм преобразования ресурсов для достижения выбранного состояния $\sigma_i \in S$.

Предлагаемая схема ставит проблему на первое место, а цели отводит подчиненное место.

Для сравнения данного здесь определения категории «цель» с другими определениями мы отсылаем читателя к монографии Р. Акоффа и Р. Эмери [1].

1.3. Элементы теории индивидуальной полезности

1.3.1. Бинарные отношения, упорядочение

Одна из возможностей изучения активных систем – использование теории полезности, а также ожидаемой полезности, которые в свою очередь опираются на теорию бинарных отношений. Простейшая проблема определяется как отношение предпочтения на множестве альтернатив. Функции полезности, а также функции вредности, если они существуют, могут использоваться в качестве аргументов функции распределения предпочтений.

Теория полезности строится в рамках ординалистского подхода; в то время как субъективный анализ не исключает кардиналистского подхода, дополненного учетом ряда существенных факторов, которые не рассматриваются в теории полезности.

Существенными обстоятельствами, отделяющими теорию полезности от субъективного анализа, является энтропийный принцип оптимальности, который каждой определенной когнитивной функции (в частном случае – функции полезности) ставит в соответствие определенное распределение предпочтений. То есть, функция полезности не считается продуктом эндогенного процесса оптимизации, в то время, как предпочтение есть результат такого изначально встроенного в психику вариационного принципа.

Мы подчеркиваем это обстоятельство неоднократно, поскольку оно является определяющим, фундаментальным для понимания этой грани субъективного анализа.

На ранних этапах развития считали, что вкусы и предпочтения на множестве наборов благ определяются кардинальной полезностью, которая может принимать любые численные значения из заданного множества. При этом полезность, как правило, считалась монотонной и ненормированной функцией. Ненормируемость не является принципиальным, неотъемлемым свойством функции полезности. В некоторых работах, в частности в [60, 228, 248] функции полезности считаются нормированными.

Монотонность, в частности, отражалась в теории предельной (маргинальной) полезности, в 1 и 2 законах Гессена. Такая функция является кардинальной мерой удовлетворенности субъекта – потребителя. Подразумевается, что потребитель в состоянии приписывать этой мере произвольное численное значение [271, 272, 273].

На смену раннему *кардинализму* пришла другая точка зрения, которая основывалась на убеждении, что потребитель в лучшем случае, оценивая полезность разных наборов благ, может определить их порядок, то есть, установить бинарное отношение $\rho: \prec, \succ, \sim$.

Соответствующее направление получило название *ординализма*, а распределения предпочтений — порядковых распределений. Здесь речь идет, по существу, о «квантовании» предпочтений: трем возможным значениям отношения ρ можно сопоставить три числа, например (0; 0,5; 1,0)

Одним из аргументов в пользу ординализма является отсутствие надежных средств измерения и, что особенно важно, прогнозирования субъективных предпочтений. Считается, что каждый потребитель может сказать: «Этот набор благ, мне нравится больше (меньше, равноценен) чем другой набор благ». Это – основание для критики как ординализма, так и раннего кардинализма. В частности теория ранговых оценок предлагает другие, более детальные шкалы «квантования» предпочтений.

Переход к *ординализму* позволил получить большое число важных результатов, однако одновременно породил определенные логические и математические трудности, особенно, когда речь идет и коллективных предпочтениях. Существующие осложнения часто представляются в виде «теорем о невозможности» [144, 184]).

Эти трудности особенно отчетливо проявляются в задачах об определении победителя на выборах (известные схемы Кондросе, Борда, ….).

Предпочтительной является теория, которая как частные случаи содержит как кардинальный, так и ординальный варианты.

В настоящей работе постулируются *вариационные принципы*, в соответствие с которыми в недрах психики формируются предпочтения. Тем самым психике присваивается способность функционировать оптимальным образом (глава 3).

Продуктом этой оптимальности являются так называемые канонические распределения предпочтений, которые зависят от таких факторов, как ресурсы различного типа, субъективные вероятности, полезности, в том числе ожидаемые полезности, негативные полезности (вредности).

Таким образом, происходит возвращение на позиции *кардинализма* на качественно новом уровне.

Наличие канонических распределений дает в руки аналитика перспективный, гибкий аппарат количественного анализа. Недостаток экспериментальных данных восполняется постулированием вариационных принципов. Вводятся выраженные через распределения предпочтений *субъективная энтропия* и *субъективная информация*, играющие исключительную роль.

Прежде чем строить новую кардинальную теорию предпочтений, основанную на вариационных принципах, мы должны в компактном виде изложить основные идеи и факты ординальной теории. Главным инструментом этой теории являются бинарные отношения, полезность (вредность) либо ожидаемая полезность (ожидаемая вредность).

Теории полезности до настоящего времени посвящена поистине необъятная литература. Интерес к этой теории периодически угасает, затем снова увеличивается.

К наиболее известным исследователям и создателям теории полезности относятся Дебре, Севидж, Рамсей, Нейман, Моргенштерн, М-де Гроот, Фишберн,…

Поскольку, как уже сказано, полезности (вредности) ожидаемые полезности (ожидаемые вредности), субъективная вероятность, могут оказаться аргументами распределений предпочтений, мы считаем оправданным дать краткий экскурс в соответствующие разделы теории.

При этом мы будем опираться на изложение теории полезности в книгах Фишберна [184], М-де Гроота [60], Интрилигатора [75], Неймана и Моргенштерна [156], а также на недавние результаты в области аксиоматики теории полезности в работах Карни [228, 248].

При кратком изложении ординальной теории полезностей мы будем в основном опираться на работу Фишберна [184]. В дальнейшем в пределах данного параграфа и в следующем параграфе мы не будем повторять ссылки на [184]. Будут, однако, оговаривать отступления от упомянутых источников. Опускаются доказательства теорем и частично изменяются обозначения.

Бинарное отношение обозначается буквой ρ. Множество альтернатив – S_a, альтернативы — через σ, φ, ξ, … или σ_i, σ_j, σ_k,… Отношение упорядочения обозначаем символом «$\prec$», символ «$\Rightarrow$» означает «влечет», символ «$\Leftrightarrow$» – «тогда и только тогда».

Отношение $\sigma \prec \eta$ называется слабым относительным упорядочением, если

$$\boldsymbol{\sigma \prec \eta \Leftrightarrow U(\sigma) < U(\eta)},$$

где $U(.)$ — функция полезности, если $\mathrm{L}(\cdot)$ – функция «негативной полезности» или «вредности», направление предпочтения меняет направление. В более общем виде запишем:

$$\boldsymbol{\sigma \prec \eta \Leftrightarrow F(\sigma) < F(\eta)}, \tag{1.11}$$

Отношение $\sigma \prec \eta$ есть строгое частичное упорядочение если

$$\boldsymbol{\sigma \prec \eta \Rightarrow F(\sigma) < F(\eta)}, \tag{1.12}$$

где $F(.)$ – назовем **когнитивной функцией**, которая в частных случаях может представлять собой функцию полезности или функцию вредности. В дальнейшем часто используется этот термин, в частности, будут отмечены некоторые специальные типы когнитивных функций и их свойства. Когнитивная функция расширяет смысл категории полезности (вредности), например, включением составляющих, отвечающих за учет этических факторов.

Мы хотим оставить руки свободными от строго утилитарного подхода.

В частности попытаемся в дальнейшем учесть влияние этических императивов (вообще, всей системы этики индивидуума или (в дальнейшем – социума) и ряд других факторов, например, влияния предыдущих предпочтений.

«Panem et circenses» - «хлеба и зрелищ» или «Panem et religionem» - «хлеб и религия» - это лозунги римского плебса, не только не устарели, но, наоборот, приобрели новое содержание, наполнились новыми смыслами. Все больший вес приобретает вторая составляющая. Сегодня мы могли бы сказать: «Хлеба и информации»!

Потоки информации огромны, транспортируются с помощью радио, телевидения, интернета. Они невидимы, но реальны.

Может быть, именно поэтому излагаемая здесь теория носит ярко выраженный энтропийно - информационный характер. Ее отличительная особенность состоит в том, что в качестве энтропии берется субъективная энтропия, а под информацией понимается субъективная информация.

Это отступление кажется нам уместным, поскольку, например, *теория полезности* в классическом виде не связана с *теорией информации* и сегодняшние решения требуют поиска такой связи.

Перечислим свойства, которыми могут обладать бинарные отношения (символ $\forall$ читается «для всех», символ $\exists$ означает «существует»).

1. Отношение ρ рефлексивно, если $\sigma\rho\sigma$ для $\forall\sigma \in S_a$.

2. Отношение ρ нерефлексивно, если $\sigma\bar{\rho}\sigma$ для $\forall\sigma \in S_a$. ($\bar{\rho}$ - не находится в данном отношении).

3. Отношение ρ симметрично, если $\sigma\rho\eta \Rightarrow \eta\rho\sigma$; для $\forall\sigma, \eta \in S$.

Например, если «σ брат η», то «η брат σ».

4. Отношение ρ асимметрично, если $\sigma\rho\eta \Rightarrow \eta\bar{\rho}\sigma$ для $\forall\sigma, \eta \in S_a$.

Отношение $\bar{\rho}$ означает «не находится в в отношении ρ.

Например, «если я предпочитаю η по сравнению с σ, то σ не является предпочтительным по отношению к η»: $\sigma \prec \eta \Rightarrow \eta \ \bar{\prec}\ \sigma$.

5. Отношение ρ антисимметрично, если $(\sigma\rho\eta, \eta\rho\sigma) \Rightarrow \sigma = \eta$ для $\forall\sigma, \eta \in S_a$.

6. Отношение ρ транзитивно, если $(\sigma\rho\eta, \eta\rho\xi) \Rightarrow \sigma\rho\xi$ для $\forall\sigma, \eta, \xi \in S_a$.

7. Отношение ρ отрицательно транзитивно, если $(\eta\bar{\rho}\sigma, \eta\rho\xi) \Rightarrow \sigma\rho\xi$ для $\forall\sigma, \eta, \xi \in S_a$.

8. Отношение ρ называется связанным или полным на S_a, если для $\forall\sigma, \eta \in S_a$ имеет место либо $\sigma\rho\eta$, либо $\eta\rho\sigma$.

Отношение ρ называется слабо связанным, если для $\forall\sigma, \eta \in S_a$ и $\sigma \neq \eta$ имеет место либо $\sigma\rho\eta$, либо $\eta\rho\sigma$.

Бинарное отношение ρ вносит в S_a *слабую упорядоченность*, когда оно асимметрично и отрицательно транзитивно.

Бинарное отношение ρ вносит в S_a *строгую упорядоченность*, ($\Leftrightarrow$: тогда и только тогда) если оно слабо связанное и слабо упорядоченное.

Примером отрицательной транзитивности является отношение, устанавливаемое утверждением: «Кто нам не враг, тот наш друг». Примером асимметричного отношения является отношение старшинства. Если $\sigma\rho\eta$ означает, что «σ есть сын отца η», то должно быть справедливым отношение $\eta\bar{\rho}\sigma$: «η не сын σ».

Отношение ρ есть отношение эквивалентности (~) к $\Leftrightarrow$ оно *рефлексивно*, *транзитивно* и *симметрично*. Отношение эквивалентности ρ: ~ задает разбиение множества S_a на классы эквивалентности $S_\sim(\sigma)$. Символ «~» определяется как отношение безразличия внутри одного класса. Класс $S_\sim(\sigma)$ порождается элементом σ, $\forall\sigma \in S_a$, имеет свой класс эквивалентности, может быть состоящий из одного элемента — самого σ. Множество всех классов эквивалентности обозначим через $S_\sim$. Если все классы эквивалентности содержат по одному элементу, то $S_\sim = S_a$.

Отношение ρ может считаться строгим частичным упорядочением тогда и только тогда, если оно не рефлексивно и транзитивно. При этом имеет место эквивалент-

ность: $\sigma \approx \eta \Leftrightarrow (\sigma \sim \xi;\ \eta \sim \xi)$, для $\forall \xi \in S_a$. Здесь эквивалентность элементов σ и η определяется их сравнением с третьим элементом $\xi \in S_a$.

Из всего множества возможных бинарных отношений нас будет интересовать отношение предпочтения, для которого используется символ $\prec$.

Приведем некоторые определения и теоремы сравнения для бинарного отношения предпочтений.

1. Пусть $\prec$ – слабое отношение предпочтений, либо ρ – слабое упорядочение на S_a, тогда:

1.1. Для $\forall\sigma, \eta \in S_a$ имеет место одно из соотношений:

$$\sigma \prec \eta;\ \eta \prec \sigma;\ \sigma \sim \eta;$$

1.2. Отношение ~ является эквивалентностью, то есть рефлексивно, симметрично и транзитивно;

1.3. Отношение $\prec$ транзитивно и связно;

1.4. Из $(\sigma \prec \eta,\ \eta \sim \xi) \Rightarrow \sigma \prec \xi$;

1.5. Пусть $S_\sim$ — множество классов эквивалентности $S_\sim(\sigma_i)$ $S_\sim(\sigma_i) \in S_a$ $\prec_\sim$ — отношение предпочтений на множестве классов $S_\sim$. Отношение $\prec_\sim$ определяется условием: $S_\sim(\sigma) \prec_\sim S_\sim(\eta) \Leftrightarrow$, когда найдутся элементы $\sigma' \in S_\sim(\sigma)$ и $\eta' \in S_\sim(\eta)$ такие, что $\sigma' \prec \eta'$. Тогда отношение $\prec_\sim$ на $S_\sim$ является строгим упорядочением.

2. Если отношение $\prec$ на S_a — слабое упорядочение, $S_\sim$ — счетное множество, то существует вещественная функция U на S_a, для которой справедливо:

$\sigma \prec \eta \Leftrightarrow U(\sigma) < U(\eta);\ \forall\sigma, \eta \in S_a$.

Вводится отношение $\approx$, которое выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия $(\sigma \sim \xi \Leftrightarrow \eta \sim \xi)$ для $\forall\xi \in S_a$. Эквивалентность определяется сравнением элементов σ и η с третьим элементом ξ, который существует: $\sigma \approx \eta$.

3. Если $\prec$ — строгое частичное упорядочение на S_a, то

3.1. Для $\forall\sigma,\eta \in S_a$ выполнено одно из отношений $\sigma \prec \eta;\ \eta \prec \sigma;\ \sigma \approx \eta\ (\sigma \sim \eta \wedge \eta \approx \sigma)$;

3.2. Отношение $\approx$ является отношением эквивалентности;

3.3. $\sigma \approx \eta \Leftrightarrow (\sigma \prec \xi \Leftrightarrow \eta \prec \xi)$ и $(\xi \prec \sigma \Leftrightarrow \xi \prec \eta)$ для $\forall\xi \in S_a$;

3.4. $(\sigma \prec \eta;\ \eta \approx \xi) \Rightarrow \sigma \prec \xi$ и $(\sigma \approx \eta;\ \eta \prec \xi) \Rightarrow \sigma \prec \xi$;

3.5. Пусть $\prec^*$ — отношение предпочтения на множестве классов эквивалентности $S_\approx$ (где $\approx$ — отношение эквивалентности, определенное выше) такое, что для $\forall S_1$, $S_2 \in S_\approx$, $S_1 \prec^* S_2 \Leftrightarrow$ найдутся такие элементы $\sigma \in S_1$ и $\eta \in S_2$, что $\sigma \prec \eta$. В этом случае $\prec^*$ есть строгое частичное упорядочение на $S_\approx$.

В теории полезности существенную роль играет лемма Цорна:

пусть ρ — строгое частичное упорядочение на S_a и для $\forall Z \subset S_a$, на котором ρ — строгое упорядочение, существует элемент $\sigma \in S_a$ такой, что для $\forall\xi \in Z$ выполняется условие $\xi\rho\sigma$ или $\xi = \sigma$. Тогда найдется элемент $\eta^* \in S_a$, для которого $\eta^*\rho\xi$ не выполняется ни при каком $\xi \in S_a$.

1.3.2. Детерминированные полезности

Следующая теорема обосновывает существование функции полезности $U(\sigma)$, если отношение предпочтения на S_a есть строгое частичное упорядочение, а множество классов эквивалентности $S_{\approx}$ счетно (в отличие от теоремы 2, когда отношение предпочтения есть слабое упорядочение на S_a).

4. Если отношение предпочтения на S_a есть строгое частичное упорядочение и множество подмножеств эквивалентности $S_{\approx}$ счетно, то существует вещественная функция $U(\sigma)$, заданная на S_a такая, что $\forall\sigma,\ \eta \in S_a$ выполняются условия:

$$\sigma \prec \eta \Rightarrow U(\sigma) < U(\eta);$$

$$\sigma \approx \eta \Rightarrow U(\sigma) = U(\eta).$$

Расширением теории полезности является случай интервального упорядочения. Упорядоченные интервалы безразличия не совпадают с классами эквивалентности и отражают свойство психики субъекта, состоящие в том, что существуют зоны неразличимости альтернатив.

Рассмотрим дополнительные условия, которые вводят упорядочение, но при этом сохраняют свойство нетранзитивности отношения безразличия (~)

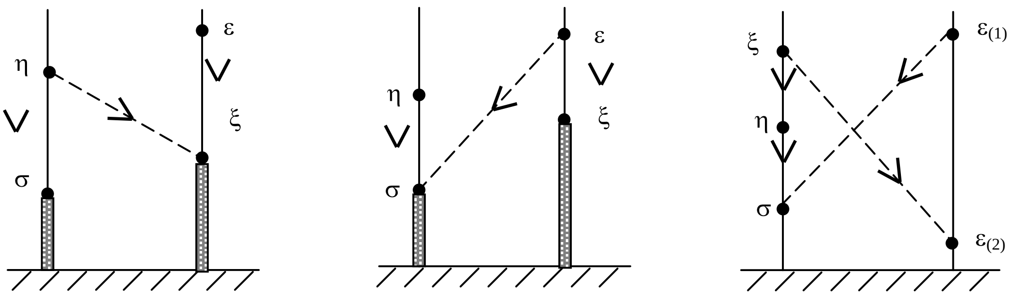
$$(\sigma \sim \eta;\ \eta \sim \xi),\ \text{но}\ \overline{\sigma \sim \xi}\,.$$

Добавим к условиям теоремы 3 следующее условия:

$$(\sigma \prec \eta;\ \xi \prec \varepsilon) \Rightarrow (\sigma \prec \varepsilon\ \text{или}\ \xi \prec \eta);\ \forall\sigma,\ \eta,\ \xi,\ \varepsilon \in S_{\sigma}; \qquad (1.13)$$

$$(\sigma \prec \eta;\ \eta \prec \xi) \Rightarrow (\sigma \prec \varepsilon\ \text{или}\ \varepsilon \prec \xi);\ \forall\sigma,\ \eta,\ \xi,\ \varepsilon \in \mathrm{S}_{\sigma}; \qquad (1.14)$$

Смысл этих условий можно проиллюстрировать графически (рис.1.6), если предположить что σ, η, ξ, ε — вещественные числа.



а *б* *в*

Рис.1.6

Видно, что, если отношение предпочтения нерефлексивно и, кроме того, выполняются два записанных выше условия, то это отношение транзитивно.

Отношение $\prec$ называется *интервальным упорядочением*; если оно нерефлексивно и обладает свойством, определенным условием (1.13). Если же выполняется также условие (1.14), то оно называется *интервальным полуупорядочением*.

5. Если отношение $\prec$ на S_a есть интервальное упорядочение, а $S_{\approx}$ счетно, то существуют вещественные функции $U(\sigma)$ и $\delta(\sigma)$, заданные на S_a такие, что $\delta(\sigma) > 0$ для $\forall\sigma \in S_\sigma$ и

$$\boldsymbol{\sigma \prec \eta \Leftrightarrow U(\sigma) + \delta(\sigma) < U(\eta);\ \forall\sigma,\eta \in S_a}.$$

Эта теорема вводит *функцию неопределенности* $\delta(\sigma)$, благодаря которой возможно сохранение нетранзитивности отношения безразличия ~. Интервал безразличия

$$\boldsymbol{I(\sigma) = [U(\sigma), U(\sigma) + \delta(\sigma)]}. \tag{1.15}$$

Интервал безразличия $I(\sigma)$ целиком лежит левее интервала $I(\eta)$ тогда и только тогда, когда $\sigma \prec \eta$. Если интервалы $I(\sigma)$ и $I(\eta)$ пересекаются, то соответствующие элементы $\sigma, \eta \in S_a$ находятся в отношении безразличия.

Следующая теорема устанавливает интервалы безразличия для случая полуупорядочения на S_a.

6. Пусть $\prec$ — полуупорядочение на S_a и множество подмножеств эквивалентности $S_{\approx}$ конечно. Тогда на S_a существует вещественная функция $U(\sigma)$ такая, что

$$\boldsymbol{\sigma \prec \eta \Leftrightarrow U(\sigma) + \lambda < U(\eta);\ \forall\sigma, \eta \in S_a}.$$

В качестве $\boldsymbol{\lambda}$ может быть взято любое конечное вещественное число. В этом случае интервалы безразличия могут иметь одинаковую длину.

Определенным расширением является теория полезности на несчетных множествах, в основе которой лежит понятие плотности множества альтернатив относительно упорядочения.

Пусть ρ – бинарное отношение на S_a, причем S_a – несчетное множество. Множество $Z \subseteq S_a$ называется ρ – плотным в S_a, если $\forall(\sigma, \eta) \in S_a$, не принадлежащих в то же время $Z : \sigma, \eta\ \bar{\in}\ Z$, для которых определено $\sigma\, \rho\, \eta$, найдется такое $\xi \in Z$, что $(\sigma\rho\xi, \xi\rho\eta)$ (рис. 1.7)

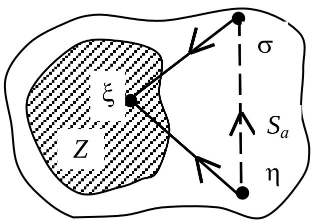


Рис. 1.7

Мы не проводим здесь обзор этого раздела теории отсылая читателя к книге [184]. С практической точки зрения указанное обобщение не является очень важным, поскольку субъект может одновременно рассматривать конечное число альтернатив.

В цитируемой книге Фишберна рассматриваются *лексикографические* упорядочения по предпочтению, когда нарушается условие плотности и в случае строго частичного упорядочения сепарабельности достаточно, но не необходимо для существования вещественной функции полезности.

Рассматриваются предпочтения на декартовых степенях множеств:

$$\boldsymbol{S_a^{(n)} = \underbrace{S_a \times S_a \times S_a \times \ldots \times S_a}_{n}},$$

где n — количество периодов времени.

Введение фактора времени позволяет изучать динамические процессы изменения полезности во времени. Во временном аспекте изучаются «настойчивость», «нетерпение», «дисконтирование». Исследования в этом направлении принадлежат Кушлену, Дайэмонду, Уильямсону [184]. С этим направлением коррелируют введенное выше понятие «пути» или «траектории» в S_a.

1.3.3. Ожидаемые полезности

Существенным развитием теории полезности является теория ожидаемой полезности, связанная с упорядочением на множествах вероятностных мер. Ожидаемые полезности изучались Рамсеем, Нейманом и Моргенштерном. Дальнейшие модификации теории принадлежат Фридману, Севиджу, Херстейну, Милнору, Крамеру, Райфа, Блеккуэлу, Гришиной, Льюису.

Библиографические ссылки на работы упомянутых авторов можно найти в книге Фишберна [184]. В последнее время появились исследования Карни, расширяющие аксиоматическую базу теории.

Изложим вкратце элементы теории *ожидаемой полезности* следуя [184], а также монографии Де Грота [60].

Простая вероятностная мера P на множестве X задается условиями:

$P(A) \geq 0;\ \forall A \subseteq X;$

$P(X) = 1;$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B);\ A, B \subseteq X;\ A \cap B\ \varnothing.$

Пусть $f(x)$; $(x \in X)$ – функция, определенная на конечном или счетном множестве X. Математическое ожидание функции $f(x)$ на X определяется формулой:

$$\boldsymbol{E(f,P) = \sum_{x \in X} f(x)P(x)}, \tag{1.16}$$

7. Если $\mathcal{P}$ — простая вероятностная мера, и $\mathcal{P}(x) = 0$ для $\forall x \in X$, кроме конечного числа значений x_i, то

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{x_i \in A} P(x_i);\ \forall\, A \subseteq X}.$$

Если мера выпукла, то выполняется условие:

$$\boldsymbol{E(f(x), \alpha P + (1 - \alpha)Q) = \alpha\, E(f(x), P) + (1 - \alpha)\, E(f(x), Q)}, \tag{1.17}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ – простые вероятностные меры.

8. Пусть $\mathcal{P}_a$ — множество всех простых вероятностных мер на S_a и $\prec$ — бинарное отношение предпочтения на множестве $\mathcal{P}_a$. Для того, чтобы существовала вещественная функция $U(\sigma)$ и выполнялось условие:

$$\boldsymbol{P \prec Q \Leftrightarrow E(U, P) < E(U, Q);\ \forall P, Q \in \mathcal{P}_a}; \tag{1.18}$$

необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \boldsymbol{P, Q, R} \in \mathcal{P}_a$:

1. Отношение $\prec$ являлось слабым упорядочением на $\mathcal{P}_a$.

2. $(\boldsymbol{P} \prec \boldsymbol{Q};\ 0 < \alpha < 1) \Rightarrow \alpha \boldsymbol{P} + (1-\alpha)\boldsymbol{R} \prec \alpha \boldsymbol{Q} + (1-\alpha)\boldsymbol{R}$.

3. $(\boldsymbol{P} \prec \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{Q} \prec \boldsymbol{R}) \Rightarrow (\alpha \boldsymbol{P} + (1-\alpha)\boldsymbol{R} \prec \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{Q} \prec \beta \boldsymbol{P} + (1-\beta)\boldsymbol{R})$

для некоторых $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Положительная функция $U(\sigma)$, заданная на S_a, называется функцией полезности и является единственной с точностью до положительного линейного преобразования. Это означает, что функция $V(\sigma) = aU(\sigma) + b$; где $a > 0$ также являются функцией полезности и удовлетворяет условию:

$$\boldsymbol{P} \prec \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}) < \boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{Q});\ \forall \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_a;\ \forall \sigma \in \boldsymbol{S}_a.$$

В случае аддитивной ожидаемой полезности, если $\boldsymbol{P} \in \mathcal{P}_a$ есть набор мер $\boldsymbol{P}_i$ и $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_a$ — набор мер $\boldsymbol{Q}_i$ ($i \in \overline{1,n}$), выполняется условие:

$$\boldsymbol{P} \prec \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{P}_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{Q}_i\right), \tag{1.19}$$

В [184] изучаются взаимозависимые ожидания. Важным развитием является теория ожидаемой полезности Севиджа.

1.4. Субъективная вероятность и ожидаемая полезность

Дальнейшее изложение теории ожидаемой полезности продолжим, опираясь на монографию М. Де Гроота [84], которая трактует упомянутые понятия под несколько иным углом зрения.

Совершенно очевидно, что почти всегда на практике распределения вероятностей, о которых идет речь выше, точно неизвестны, не известны также и статистические оценки вероятностей, особенно если альтернативы $\sigma_i \in S_a$ неоднородны и выборки неоднородны по разным причинам.

В этом случае можно допустить, что субъект имеет априорное представление о распределении вероятностей на S_a. Такие вероятности называются субъективными вероятностями.

Пусть выборочное пространство S_a и $\mathscr{A}$ – σ – алгебра на S_a. Основное невыводимое понятие – *относительное правдоподобие*. Если A и B подмножества S_a: $A \subset S_a$ и $B \subset S_a$, соответственно $A, B \in \mathscr{A}$, то отношение $A \prec B$ означает, что «B более правдоподобно, чем A», а отношение $A \sim B$ – «A также правдоподобно, как B», наконец, $A \precsim B$ означает, что «A не более правдоподобно, чем B».

Вероятность событий определяется так, что для всякого распределения вероятностей на σ – алгебре имеет место двустороннее следование:

$$\boldsymbol{A} \precsim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) \tag{1.20}$$

Такое распределение $P(A)$ называют согласованным с отношением $\precsim$.

Принимаются предположения:

1. Для $\forall \boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ либо $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$, либо $\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{B}$.

2. Если $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2} \in \mathcal{A}$ и $\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{B_1} \cap \boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{\varnothing}$ и $\boldsymbol{A_i} \prec \boldsymbol{B_i}$ и $\boldsymbol{A_i} \precsim \boldsymbol{B_i}$, то $\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \precsim \boldsymbol{B_1} \cup \boldsymbol{B_2}$, если $\boldsymbol{A_1} \prec \boldsymbol{B_1}$ и $\boldsymbol{A_2} \prec \boldsymbol{B_2}$, то $\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \prec \boldsymbol{B_1} \cup \boldsymbol{B_2}$.

Имеют место утверждения.

Лемма. Пусть $\forall A, B, D \in \mathcal{A}$ и $A \cap B = B \cap D = \varnothing$, тогда $A \precsim B \Leftrightarrow A \cup D \precsim B \cup D$.

3. Если $\forall A, B, D \in \mathcal{A}$ справедливы отношения $A \precsim B$, $B \precsim D$, то $A \precsim D$ (условие транзитивности).

Расширение леммы на случай n событий дает

4. Из $A_i \precsim B_i$ ($\forall \mathrm{i} \in \overline{1,n}$) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, из условия $A_i \prec B_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

5. Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$ имеет место следование $A \precsim B \Leftrightarrow \overline{A} \succsim \overline{B}$.

Предложение 3. Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$; $\varnothing \precsim A$ и $\varnothing \precsim B$. Справедливо утверждение

6. Если $A \subset B \Rightarrow A \precsim B$, в том числе $\varnothing \precsim A \precsim B$.

Принимается следующее предложение 4.

Если $\boldsymbol{A_1} \subset \boldsymbol{A_2} \subset \ldots$ – бесконечная возрастающая последовательность и B такое множество, что для $\forall \mathrm{i} \in \overline{1,n}$ выполняется отношение $\boldsymbol{A_i} \precsim \boldsymbol{B}$, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \prec B$. Справедливо утверждение:

7. Пусть A_i несовместны и B_i несовместны и для $\forall \mathrm{i} \in \overline{1,\infty}$ $A_i \precsim B_i$, тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \precsim \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

Если для $\forall \mathrm{i} \in \overline{1,\infty}$ $A_i \precsim B_i$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Пусть $X(s)$ – случайная величина, принимающая значения в интервале [0,1], если для любых интервалов $I_1, I_2 \subset [0,1]$

$$(X \in I) \precsim (X \in I_2),$$

тогда и только тогда, когда $\lambda(I_1) \precsim \lambda(I_2)$, где $\lambda(I) = b\text{-}a$, а I интервал с концами a и b. ($a,b \in [0,1]$).

Предположение: существует случайная величина с равномерным распределением на интервале [0,1], которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие (би-

екцию) между точками выборочного пространства S и точками единичного интервала [0,1].

Пусть задана тройка (S, $\mathscr{A}$, $\rho{:}\precsim$), то есть выборочное пространство S, σ-алгебра $\mathscr{A}$ и бинарное отношение $\rho{:}\precsim$, и существует распределение вероятностей $\mathrm{P}(\mathscr{A})$, согласованное с отношением $\rho{:}\precsim$, которое вводится следующей теоремой:

8. Для любых событий A, $B \in \mathscr{A}$ отношение $A \precsim B$ имеет место тогда и только тогда, когда $P(A) \le P(B)$.

Наряду с отношением *безусловного правдоподобия* вводится отношение *условного правдоподобия.*

Рассмотрим три события A, B, $D \in \mathscr{A}$ и события A/D и B/D – появление событий A или B при условии, что событие D уже произошло или наверняка произойдет. Между ними устанавливается отношение:

$$A/D \precsim B/D \tag{1.21}$$

Это означает, что при условии, что событие D произошло (или наверняка произойдет), событие B по крайней мере, так же предпочтительно, как и событие A. Можно ввести условное распределения вероятностей, согласованное с приведенным выше отношением. Необходимо, чтобы было $P(D) > 0$ и выполнялось допущение, что для A, B, $D \in \mathscr{A}$ имело место соответствие

$$A/D \precsim B/D \Leftrightarrow A \cap D \precsim B \cap D \tag{1.22}$$

Соотношение между условными отношениями предпочтения, заданными на σ-алгебре $\mathscr{A}$ и условным распределением вероятностей на интервале [0,1] устанавливается следующей теоремой.

9. Если отношение $\precsim$ удовлетворяет всем сделанным выше допущениям, то распределение $P(A)$, заданное отношением:

$$A \sim G\,[0,P(A)] \tag{1.23}$$

где $G\,(a,\, в)$ – событие $X \in [a,\, в]$, является *единственным* распределением вероятностей со следующими свойствами: для A, B, $D \in \mathscr{A}$ при $\mathrm{P(D)} > 0$, отношения $A/D \precsim B/D$ и $P(A/D) \le P(B/D)$ равносильны, то есть

$$A/D \precsim B(D) \Leftrightarrow P(A/D) \le P(B/D) \tag{1.24}$$

В работе [84] (Гроота) показано, что введенное таким образом распределение удовлетворяет требованиям, предъявленным к распределениям вероятностей.

На основе сделанных предположений для отношения $\precsim$ выводится утверждение, что функция P, удовлетворяющая условию (1.23) является единственным вероятностным распределением, согласованным с отношением $\precsim$.

1.5. Полезности и предпочтения

Для простоты рассматривается случай, когда альтернативное состояние σ_i характеризуется одним количественным параметром, принимающим лишь вещественные значения. Этот вещественный параметр будем обозначать также символом σ. Пусть $P(\sigma)$ – распределение вероятностей величины σ.

Задача выбора на множестве вероятностных распределений намного сложнее задачи выбора на множестве $S_a|\sigma_o$ и требует значительно больших интеллектуальных усилий и знаний субъекта. Тем не менее, анализ этой задачи в теоретическом смысле представляет интерес.

Пусть $U(\sigma_i)$ – вещественная функция полезности альтернативы $\sigma_i \in S_a$. В отличие от функции предпочтений, функция полезности трактуется как объективная характеристика. Сам термин «полезность» (unility) отражает ее утилитарный характер – количество калорий в продукте питания, полезность витаминов, польза от приема лекарства, прибыль, доход, дальность полета, удельный расход топлива двигателей и др.

Функция U, заданная на множестве альтернатив, называется функцией полезности, если для любых двух распределений вероятностей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ существуют ожидания E $(U/\mathcal{P}_1)$ и E $(U/\mathcal{P}_2)$ такие, что $\mathcal{P}_1 \precsim^* \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow E\,(U/\mathcal{P}_1) \le E\,(U/\mathcal{P}_2)$.

Разделяя понятия объективной полезности – $U(\sigma_i)$ и субъективного предпочтения – $\pi(\sigma_i)$ мы получаем неоспоримое преимущество с точки зрения возможности более детального препарирования и анализа проблемно-ресурсных ситуаций и, что особенно важно, прогнозирования предпочтений.

Пусть $\mathcal{P}\,(S_a|\sigma_o)$ – распределение вероятностей на S_a/σ_o), а $U(\sigma_i)$ – функция полезности альтернативы $\sigma_i \in (S_a/\sigma_o)$.

Функция полезности по определению монотонная, тогда как функция распределения предпочтений таковой может не быть.

В соответствии с распределением $\mathcal{P}\,(S_a/\sigma_o)$ может быть вычислена вероятность $\mathcal{P}(S_a'/\sigma_o)$ где $S_a'/\sigma_o \subset S_a/\sigma_o$ – подмножество S_a/σ_o. Если S_a'/σ_o содержит конечное число элементов, то вероятность равна

$$P(S_a'/\sigma_0) = \sum_{S_a'/\sigma_0} P(\sigma_k)$$

где $k \in \overline{1, N'}$ пробегает все множество альтернатив, принадлежащих подмножеству $S_a' \mid \sigma_0$. Предполагается, что σ_i независимы в отношении полезностей.

Поскольку $U(\sigma_i)$ – полезность альтернативы σ_i, $P(S'_{a}/\sigma_o)$ есть вероятность того, что полезность принимает значение в пределах

$$\min U(\sigma) \le U(\sigma_i) \le \max U(\sigma)$$

Пусть $\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_a$ – два нетождественных распределения вероятностей на S_a/σ_o. Если подмножество S_a'/σ_o задано и на нем существует строгий частичный порядок в соответствии с отношением $\precsim$, то соответствие биекции между полезностями и распределениями вероятностей устанавливается соотношением:

$$\mathcal{P}_1 \precsim \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow P\ (\sigma_i \in S'_{a/}\sigma_o|\mathcal{P}_1) \le P\ (\sigma_i \in S'_{a/}\sigma_o|\mathcal{P}_2) \qquad (1.25)$$

Это означает, что $\mathcal{P}_2$ не менее предпочтительно, чем $\mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда вероятность события $\sigma_i \in S'_a|\sigma_o$ или, что то же самое – вероятность события $U(\sigma_i) \in [U(\sigma)_{min}, U(\sigma)_{max}]$ на $S'_a|\sigma_o$ для распределения $\mathcal{P}_2$ не меньше, чем для распределения $\mathcal{P}_1$. При этом, как было сказано, предполагается. что существует упорядочение полезностей $U(\sigma)$ на $S_a|\sigma_o$. Если $S'_a|\sigma_o$ является классом эквивалентности множества $S_a|\sigma_o$, то $\sigma_i \sim \sigma_j$, когда $\sigma_i, \sigma_j \in S'_a|\sigma_o$ (подразумевается эквивалентность по полезностям), то вместо соотношения (1.25) имеем:

$$\mathcal{P}_1\,(S_a|\sigma_o) \precsim \mathcal{P}_2\,(S_a|\sigma_o) \Leftrightarrow P(U(\sigma_\sim|\mathcal{P}_1) \le P\ (U(\sigma_\sim|\mathcal{P}_2) \qquad (1.26)$$

где $\sigma_\sim$ - одна из альтернатив $S'_a|\sigma_o$.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

На рис.1.10 изображены два равномерных распределения $\mathcal{P}_1\,(\sigma)$ и $\mathcal{P}_2\,(\sigma)$.

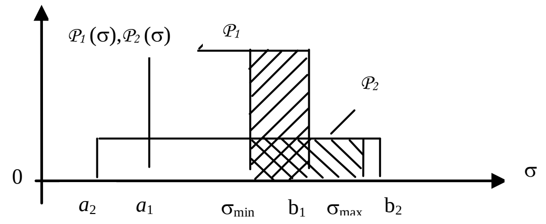


Рис.1.10

Площади, заштрихованные по-разному, равны, то есть равны вероятности попадания σ в пределы отрезка $[\sigma_{min}, \sigma_{max}] = S'_a$:

$$P(\sigma_i \in S'_a|\sigma_o|\mathcal{P}_1) = P(\sigma_i \in S'_a|\sigma_o|\mathcal{P}_2)$$

Распределения $\mathcal{P}_1\,(\sigma)$ и $\mathcal{P}_2\,(\sigma)$ эквивалентны относительно множества $[\sigma_{min}, \sigma_{max}] = S'_a$.

На рис.1.11.а показаны два распределения также эквивалентные относительно множества $S'_a = [\sigma_1,\sigma_2]$. Здесь также площади (вероятности) заштрихованные поразному равны и, следовательно, распределения $\mathcal{P}_1\,(\sigma)$ и $\mathcal{P}_2\,(\sigma)$, заданные на вещественной полуоси, эквивалентны относительно отрезка этой оси $S'_a = [\sigma_1, \sigma_2]$.

$\mathcal{P}_1\,(\sigma) \sim \mathcal{P}_2\,(\sigma)$ на $S'_a|\sigma_o$.

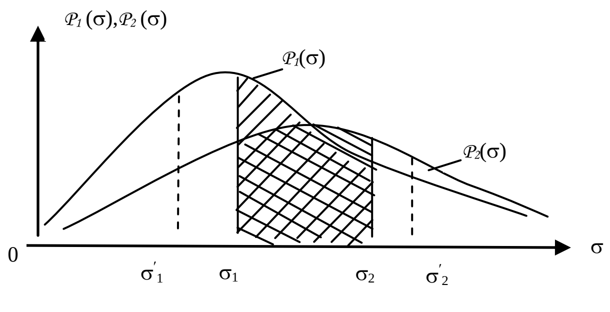


Рис.1.11 (а)

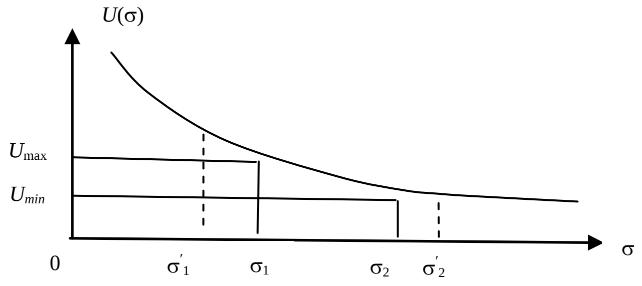


Рис.1.11 (в)

На нижнем графике показана монотонная функция полезности $U(\sigma)$. Видно, что при выбранных значениях σ_1 и σ_2 имеет место соответствие:

$$P(\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]|\mathcal{P}_1) = P(\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]|\mathcal{P}_2) \Rightarrow P(U \in [U_1, U_2]|\mathcal{P}_1) = P(U \in [U_1, U_2]|\mathcal{P}_2),$$

т.е. распределение $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ эквивалентны относительно отрезка [σ_1 и σ_2]. Распределения $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ неэквивалентны относительно отрезка [σ'_1, σ'_2], причем из рис.1.11 видно, что $\mathcal{P}_1(\sigma) \prec \mathcal{P}_2(\sigma)$.

Рассмотрим первый пример более подробно. Находим, что

$$P(\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]|\mathcal{P}_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{P}_1(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 - a_i}{b_i - a_i}; a_i > \sigma_1; \sigma_2 < b_i; \\ \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{b_i - a_i}; a_i < \sigma_1; b_i > \sigma_2; i \in \overline{1,2}; \\ \dfrac{b_i - \sigma_1}{b_i - a_i}; a_i < \sigma_1; b_i < \sigma_2; \end{cases}$$

В первом случае условие эквивалентности распределений $\mathcal{P}_1(\sigma)$ и $\mathcal{P}_2(\sigma)$ сводится к виду

$$\frac{d_1}{b_2} = \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} = \frac{a_1 - \sigma_2}{a_2 - \sigma_2},$$

во втором случае – к виду:

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b_1 - a_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b_2 - a_2} \Rightarrow d_1 = d_2,$$

в третьем случае – к виду:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} = \frac{a_1 - \sigma_1}{a_2 - \sigma_2}.$$

Из примеров видно, что упорядочение вероятностных распределений осуществляется по отношению к некоторому событию A: $\sigma \in S'_a|\sigma_o$. Обозначим ожидаемую полезность через $E(U/\mathcal{P}_1)$. Ожидаемая полезность существует, когда существует биекция

$$\mathcal{P}_1 \precsim \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow E(U/\mathcal{P}_1) \le E(U/\mathcal{P}_2).$$

Если все распределения являются δ - образными

$$\mathcal{P}_j(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} P_j(\sigma_i)\delta(\sigma - \sigma_i), \tag{1.27}$$

где $\delta(\sigma - \sigma_i)$ - дельта – функция Дирака, а $P_{ij}=P_j(\sigma_i)$ такие, что $\sum_{i=1}^{N} P_{ij} = 1$, для $\forall j$, то предыдущее соответствие принимает вид:

$$\mathcal{P}_1 \precsim \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} U(\sigma_i)\mathcal{P}_1(\sigma_i) \le \sum_{i=1}^{N} U(\sigma_i)\mathcal{P}_2(\sigma_i) \tag{1.28}$$

и выполняется на подмножестве сравнений $S'_a|\sigma_o$.

Наконец, если все распределения $\mathcal{P}_i$ являются вырожденными (сингулярными):

$$\mathcal{P}_j(\sigma): P_j(\sigma_i) = 1;\ P_j(\sigma_k)|_{k \ne i} = 0$$

Для $\forall k: \overline{1, N}$

$\forall k : \overline{1, N}$, тогда имеет место детерминированная полезность, и упорядочение задается соответствием:

$$\sigma_1 \precsim \sigma_2 \Leftrightarrow U(\sigma_i) \le U(\sigma_k)$$

Ввиду монотонности функции полезности и того обстоятельства, что $U(\sigma)$ – функция полезности, следует, что функция

$$U(\sigma) = a\,U + b$$

где $a > 0$, также функция полезности.

2 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

2.1. Функции индивидуальных предметных предпочтений

В настоящей работе мы изучаем предпочтения двух типов: *предметные предпочтения* и *рейтинговые предпочтения*. Обсуждению рейтинговых предпочтений посвящена глава 4.

Здесь мы рассматриваем *предметные предпочтения* на множестве «предметных» альтернатив $\sigma_i \in S_a$. Сравнительной мерой «силы» предпочтения является функция предпочтений $\pi(\sigma_i)$. Имеются определенные различия между предпочтениями и желаниями. *Предпочтение* отражает сравнительную значимость той или иной альтернативы, тогда как *желание* отражает «интенсивность» желательности данной альтернативы в абсолютном смысле.

Эти два обстоятельства можно одновременно учесть в функции предпочтений, осуществляя определенным образом ее нормирование, о чем будет сказано ниже. Таким образом, функция предпочтения «впитывает в себя» в общем случае, как сравнительную значимость, так и интенсивность желательности данного результата.

Различие между «функцией полезности» $U(\sigma_i)$, («вредности» $L(\sigma_i)$) или «функцией ожидаемой полезности» $U_p(\sigma_i)$ (ожидаемой вредности $L_p(\sigma_i)$) с одной стороны и «функцией предпочтений» $\pi(\sigma_i)$ состоит в том, что функции полезности (и вредности) приписывается объективный смысл (количество калорий в данном продукте, вероятность выздоровления при использовании данного метода лечения, любая вероятность успеха, достижения желаемого результата, определенная на основе объективных данных), тогда как функция предпочтений отражает отношение субъекта к различным альтернативам $\sigma_\eta \in S_a$ с учетом знания полезности или вредности данного варианта, а также интуиции, других, может быть, плохо формализуемых факторов – этических императивов, например, и является субъективной мерой.

Отличие также состоит в том, что при определении полезности (вредности) как правило, упускаются из виду некоторые факторы, а также неопределенность в развитии ситуации в будущем. Предпочтения отражают влияние экзогенных (внешних) факторов и эндогенных факторов в том числе, этических, не только знания, но и веры и связанную с этим неопределенность. Предпочтения считаются исключительно субъективным атрибутом индивидуальной психики.

Множество альтернатив S_a, снабженное распределением полезностей, напоминает «меню» блюд. Однако выбор из этого «меню» субъект осуществляет на основе субъективных предпочтений, зависящих от известных ему более или менее достоверно полезностей (вредностей), а также ряда дополнительных факторов, упомянутых выше.

Для того, чтобы количественно описать этот субъективный процесс, получить возможность его моделировать и, затем, осуществлять прогнозирование поведения субъекта, его выбор, вводятся функции предпочтения $\pi(\sigma_i\ldots)$. Распределение

полезностей на S_a может не совпадать с распределением предпочтений, точнее — упорядочение по полезностям может не совпадать с упорядочением по предпочтениям, в том виде, как они вводятся в настоящей работе.

Например, для некоторого субъекта имеют место следующие отношения:

σ_1 «спорт»	σ_2 «курение»	σ_3 «пьянство»
$U(\sigma_1)$	$> U(\sigma_2)$	$> U(\sigma_3)$
$\pi(\sigma_1)$	$< \pi(\sigma_2)$	$< \pi(\sigma_3)$

В этом случае упорядочение по полезностям противоположно упорядочению по субъективным предпочтениям. Здесь «полезности» распределяет «бог», а предпочтения – «дьявол»

Функция $\pi(\sigma\ldots)$ всегда положительная (для $\forall\sigma \in S_\sigma$) и ограничена. Обозначим через σ_e состояние, в котором в данный момент находится система. Можно предположить, что существуют такие альтернативы, предпочтительность которых либо весьма слабо зависит от актуального состояния σ_e, либо не зависит вовсе. При этом состояние σ_e («точка зрения» субъекта) либо принадлежит S_a, либо ему не принадлежит. Конечно, любое исходное состояние σ_e принадлежит множеству допустимых состояний .

Отметим, что объектами выбора могут быть стратегии поведения субъекта, которые мы уже договорились также обозначать через σ_i. Если мы будем считать стратегии, приводящие к одинаковому результату, неразличимыми, то нет необходимости делать различие между «состояниями» и «стратегиями». В других случаях это различие становится существенным.

Распределение предпочтений и функцию предпочтения $\pi(\sigma\ldots)$ назовем *безусловными* (или *абсолютными*), если $\pi(\sigma\ldots)$ не зависит от σ_e, либо если $\sigma_e \,\overline{\in}\, S_a$. Если, наоборот, распределение предпочтений и функция предпочтений зависят от того, в каком состоянии находится система, то будем говорить об условном (или относительном) распределении и обозначать его $\pi\left(\sigma_j \middle| \sigma_i\right)$, где σ_i - состояние «отправления», исходное и, одновременно и точка зрения, σ_j - состояние «назначения».

Предпочтение такого типа является «условным» (или относительным).

Поскольку, как отмечалось ранее, можно рассматривать комплексные альтернативы и композиции альтернатив, естественным является введение соответствующих распределений предпочтений. Это же относится к альтернативным стратегиям.

Для того, чтобы избежать усложнения обозначений, примем одинаковые обозначения, подобные тем, которые мы применяем к «простым» альтернативам: $\sigma,\eta,\xi,\ldots$, или $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k,\ldots$ Понятие «простая альтернатива» не совпадает с понятием «элементарное событие» в теории вероятности.

Применительно к альтернативе не требуется обязательного выполнения условия взаимной попарной независимости.

Условия существования субъективной количественной меры предпочтения даются теоремами раздела (1.3) и зависят от того, какому типу упорядочения предпочтений соответствуют предпочтения, устанавливаемые на множестве альтернатив S_a. Как будет показано в дальнейшем, функции предпочтения могут быть как монотонными, так и немонотонными относительно аргумента, который согласно предположению всегда неотрицательный (и в случае векторного аргумента, его компоненты неотрицательны).

Функция предпочтений считается нормированной, в частности, на единицу. Если множество различимых альтернатив S_a конечно или счетно, то условие нормировки выбирается в виде:

$$\sum_{i=1}^{n,\infty} \pi(\sigma_i) = 1 \tag{2.1}$$

Если множество альтернатив континуально и распределено на множестве S_a, то $\pi(\sigma)$ приобретает смысл плотности распределения предпочтения альтернатив. Условие нормировки в этом случае имеет вид:

$$\int_{S_a} \pi(\sigma) d\sigma = 1, \tag{2.2}$$

где σ придается количественный смысл.

Если положить, что $\pi(\sigma) = \sum_{i=1}^{n,\infty} \pi(\sigma_i)\delta(\sigma - \sigma_i)$, то мы возвращаемся к формуле (2.1). Здесь $\delta(\sigma - \sigma_i)$ - обобщенная функция Дирака.

Теоремы и свойства, приведенные выше (гл. 1) применительно к функциям полезности, могут быть отнесены и к функциям предпочтения. Так, если отношение предпочтения ρ есть слабое упорядочение на S_a, то существует вещественная функция $\pi(\sigma)$ такая, что из $\sigma \rho \eta \Leftrightarrow \pi(\sigma) < \pi(\eta)$; $\forall(\sigma, \eta) \in S_a$ свойства слабого упорядочения описываются условиями теоремы 1. Требуется ещё, чтобы фактор-множество подмножеств эквивалентности было счетным. Если отношение ρ есть строгое частичное упорядочение, то в соответствие с теоремой 4 гл. 1 существует вещественная функция $\pi(\sigma)$ такая, что для $\forall(\sigma, \eta) \in S_a$ имеют место отношения

$$\sigma \prec \eta \Rightarrow \pi(\sigma) < \pi(\eta);$$

$$\sigma \approx \eta \Rightarrow \pi(\sigma) = \pi(\eta).$$

Определение отношения $\approx$ дано выше в п. 1.3.

Необходимо подчеркнуть еще раз, что в рамках предлагаемой схемы отличие полезности от предпочтения проявляется, в частности, в том, что из условия $U(\sigma) < U(\eta)$ не следует в общем случае $\pi(\sigma) < \pi(\eta)$. В свою очередь, это означает, что упорядочение альтернатив из S_a на основе сравнения полезностей в общем случае не совпадает с упорядочением этих же альтернатив на основе сравнения предпочтений.

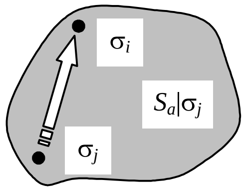


Рис. 2.1

Необходимо учитывать этот факт, что полезности альтернатив $U(\sigma_i)$ могут сравниваться только в том случае, когда они являются следствием решения определенной «внешней» оптимизационной задачи. В противном случае такое сравнение не имеет смысла.

Сравнение предпочтений, которые определяются как функции от полезностей или вредностей «субоптимальных», является субъективным процессом и также в основе своей содержит оптимальный принцип, «встроенный» изначально, априорно, в психику и поэтому являющийся «внутренним».

Совершенно очевидно, что субъект далеко не всегда способен даже при наличии математических средств поставить и решить внешнюю оптимизационную задачу, поэтому нужно предположить, что он имеет некоторое эвристическое представление об оптимальности того или иного решения.

Определим субъективное расстояние между альтернативами:

$$\rho_s(\sigma_i, \sigma_j) = |\pi(\sigma_i) - \pi(\sigma_j)|,$$

$$\rho_s(\sigma_i, \sigma_j|\sigma_k) = |\pi(\sigma_i|\sigma_k) - \pi(\sigma_j|\sigma_k)|.$$

Можно проверить, что эти расстояния удовлетворяют необходимым требованиям, предъявляемым к расстояниям:

$$\rho_s(\sigma_i, \sigma_i) = 0;$$

$$\rho_s(\sigma_i, \sigma_j) = \rho_s(\sigma_j, \sigma_i);$$

$$\rho_s(\sigma_i, \sigma_k) \le \rho_s(\sigma_i, \sigma_j) + \rho_s(\sigma_j, \sigma_k)$$

Объективное расстояние введем соотношением

$$\rho_0(\sigma_i, \sigma_j) = |U(\sigma_i) - U(\sigma_j)|$$

или

$$\rho_0(\sigma_i, \sigma_j) = |F(\sigma_i) - F(\sigma_j)|.$$

Определенное таким образом расстояние, как и расстояние ρ_s удовлетворяет трем необходимым условиям.

2.2. Предпочтения сложных альтернатив и их нормировки

Введенные выше сложные альтернативы в качестве объектов выбора требуют расширения типов распределения предпочтений. Выше мы говорили о *подмножествах альтернатив* $A = S'_a \subset S_a$, композициях c^k_a порядка $k < N$, путях Tr и стратегиях Str.

Сложная альтернатива $A \subset S_a$ понимается как такой набор простых альтернатив, что соответствующая проблема состоит в переводе системы в одно из состояний $\sigma_i \in A$. Под композицией понимается набор простых альтернатив реализуемых одновременно (параллельно) с распределением располагаемых ресурсов между несколькими целями.

Все альтернативные состояния $\sigma_i \in A$ в этом случае одновременно становятся целями. Под траекторией подразумевается набор альтернативных состояний системы, которые достигаются в определенной последовательности так, что состояние σ_j может

быть достигнуто только после достижения состояния σ_i (рис. 2.1). Стратегия понимается как путь *Tr*, для которого определена временная структура цепочки последовательных переходов. Таким образом, используя аналогию с физикой, траекторию в множестве S_a можно сравнить с траекторией материальной точки, уравнения которой не содержат времени, тогда стратегия есть закон движения вдоль траектории. Законов движения вдоль одной и той же траектории может быть несколько, иногда, бесконечно много.

Рис. 2.2 схематически отражает смысл понятий простых альтернатив *A*, *B*,… S'_a…, композиций c^k_s, траекторий *Tr*.

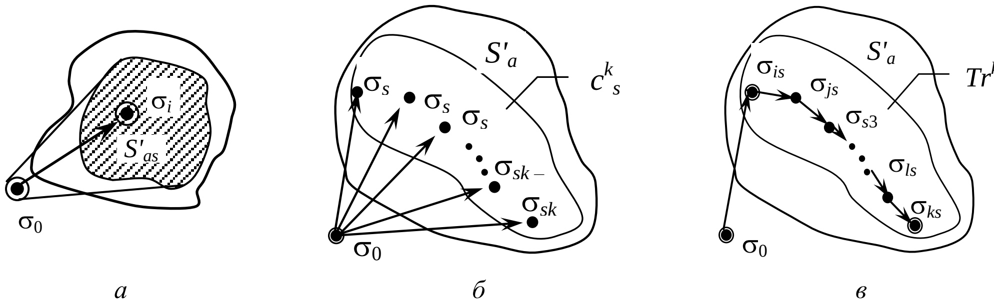


Рис. 2.2

Для каждого пути определено «*начальное*» и «*конечное*» состояния.

Находясь в состоянии σ_i, субъект имеет возможность сравнивать *простые альтернативы, композиции, траектории* и *стратегии*.

В каждом случае следует определить условие нормировки. Если $\{S'^p_a\}$ — множество подмножеств S^N_a порядка $1 \le p < N$, тогда количество таких подмножеств одинаковой мощности есть

$$C_N^p = \frac{N!}{p!(N-p)!}.$$

Если сравнению подлежат только подмножества одинаковой мощности *p*, то условия нормировки имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{C_N^p} \pi\left(S'^p_{ai}\right) = 1; \quad S'^p_{ai} \in \left\{S'^p_a\right\},$$

и, если одновременно в качестве сложных альтернатив рассматриваются все подмножества порядков от 1 до $p = N - 1$, причем каждая простая альтернатива встречается в S'^p_{ai} только один раз, нормировка имеет вид:

$$\sum_{p=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{Z} \pi\left(S'^p_{ai}\right) = 1, \qquad Z = C_N^p.$$

Рассмотрим условия нормировки траекторий (путей). Можно представить себе ситуацию, когда сравниваются варианты возможных «странствий»: одношаговые, двухшаговые, трехшаговые, …, *n*-шаговые. Основой для такого сравнения и затем выбора

наилучшей альтернативы является технологическая осуществимость и экономическая целесообразность. Различные траектории могут считаться альтернативами, если они *технологически осуществимы*, но *технологически взаимно не обусловлены* (не составляют *технологической цепочки*).

Процесс достижения конечного состояния начинается либо из фиксированного состояния σ_e, которое не учитывается при нормировках, либо из состояния $\sigma_i \in S_a$, которое субъект, выбирает в качестве «*начального*» и которое учитывается в нормировках. Если в качестве этапов «*странствования*» выступают простые альтернативы, то функции предпочтения путей с p – 1 шагом обозначим так:

$$p = 2 \to \pi\left(\sigma_i, \sigma_j\right)$$

$$p = 3 \to \pi\left(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\right)$$

………………………………

$$p = N - 1 \to \pi\left(\underbrace{\sigma_i, \sigma_j, \ldots, \sigma_s}_{N-1}\right);$$

$$p = N \to \pi\left(\underbrace{\sigma_i, \sigma_j, \ldots, \sigma_t}_{N}\right)$$

Для каждого p число всех траекторий ровно M=N^p. Соответствующую функцию предпочтения назовем «p-точечной». Пусть, например N = 3, и S_a: (σ_1, σ_2, σ_3). Число возможных одношаговых траекторий (p = 2) $N = 3^2 = 9$, а именно:

$$\sigma_1 \to \sigma_2; \quad \sigma_1 \to \sigma_3; \quad \sigma_2 \to \sigma_3; \quad \sigma_3 \to \sigma_1; \quad \sigma_2 \to \sigma_1;$$

$$\sigma_3 \to \sigma_2; \quad \sigma_1 \to \sigma_1; \quad \sigma_2 \to \sigma_2; \quad \sigma_3 \to \sigma_3.$$

Последние три варианта соответствуют переходам данного состояния «в себя». Сохранение существующего состояния (позиции) часто требует не меньших ресурсов, чем переходы с изменением состояния. Так, в боевых условиях множество S_a может включать три альтернативы: отступить (σ_i), сохранить позицию (σ_e), продвинуться вперед (σ_3). Понятно, что сохранение позиции может потребовать значительных ресурсов.

Если в качестве альтернатив рассматриваются двух шаговые пути (p = 3), то есть переходы типа $\sigma_i \to \sigma_j \to \sigma_k$, то число вариантов равно $3^3 = 27$.

Среди вариантов путей при $n > 2$ есть такие, когда состояния могут повторяться, а путь с большим числом шагов содержит в качестве своих «отрезков» все пути с меньшим числом шагов, если отождествить все пути вида

$$\underbrace{\sigma_i \to \sigma_i \to \ldots \to \sigma_i}_{s} \to \underbrace{\sigma_j \to \sigma_j \to \ldots \to \sigma_j}_{p-s}$$

с путем $\sigma_i \to \sigma_j$ при $1 \le s \le (p-1)$, то есть считать их эквивалентными. «*Траектория*» или «*путь*» входит составной частью в определение «*стратегии*». При изучении «путей» временной аспект не учитывается. Субъект имеет возможность устанавливать отношения предпочтений на множестве «*путей*». Всей совокупности эквивалентных «*путей*» будет

приписываться общий «вес» — значение функции предпочтения одного из путей в данном классе эквивалентности.

Условия нормировки p-точечной функции предпочтения в этом случае имеют вид:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\dots\sum_{t=1}^{N}}_{p}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\dots,\sigma_t\right)=1. \qquad (2.3)$$

Количество различных индексов $i, j, \dots, t$ равно p. В частных случаях для $p = 2$ и $p = 3$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)=1;\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k\right)=1.\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Аргументы функции $\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\dots,\sigma_t\right)$ располагаются в том порядке, в котором происходит «движение» вдоль пути. Индексы $i, j, k,\dots, t$ обозначают последовательные позиции вдоль пути, и одновременно номер альтернативного состояния. Если множество S_a является континуумом в том смысле, что σ_i ($i\in\overline{1,N}$) есть вещественная переменная, принимающая значения в области S_{ai} вещественного пространства, то аналог условий нормировки плотности функции предпочтений $\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\dots,\sigma_t\right)$ есть

$$\underbrace{\int\limits_{\left(S_{a_i}\right)}\int\limits_{\left(S_{a_j}\right)}\dots\int\limits_{\left(S_{a_t}\right)}}_{p}\pi\underbrace{\left(\sigma_i,\sigma_j,\dots,\sigma_t\right)}_{p}d\sigma_i d\sigma_j\dots d\sigma_t=1. \qquad (2.5)$$

Это следует понимать так, что шаги вдоль «*пути*» осуществляются дискретно, но каждый раз новое состояние выбирается из континуального множества.

Можно изначально принять другие условия нормировки, например, исключить повторения состояний. Тогда после каждого шага число альтернативных состояний будет уменьшаться на единицу. Странствие будет происходить по множествам уменьшающейся размерности:

$$S_a^N\to S_a^{N-1}\to S_a^{N-2}\dots\to S_a^{N-p}.$$

Соответствующие условия нормировки имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}\dots\sum_{t=1}^{N-(p-1)}\pi\underbrace{\left(\sigma_i,\sigma_j,\dots,\sigma_t\right)}_{p}=1. \qquad (2.6)$$

В частном случае, для $p = 2$ и $p = 3$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)=1;\\ &\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-2}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k\right)=1.\end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

В случае, когда длина пути p превышает число простых альтернатив в S_a: $p > N$, тогда обязательно некоторые состояния будут повторяться. Так, если $N = 2$, а длина пути $p = 3$, то число различных вариантов (альтернативных путей) $N^p = 2^3 = 8$.

2.3. Гипотеза факторизации

В теории вероятности нижеследующее положение вытекает из принятых аксиом. В излагаемой теории предпочтений оно принимается как гипотеза и играет роль частной аксиомы, которая может быть и не быть справедливой.

Предположим, что функцию предпочтений одношагового пути $T_r^{(1)} = \left(\sigma_i, \sigma_j\right)$ можно представить в виде:

$$\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)=\pi\left(\sigma_i\right)\pi\left(\sigma_j\mid\sigma_i\right), \quad (2.8)$$

где $\pi(\sigma_i)$ — функция абсолютных предпочтений, а $\pi(\sigma_j|\sigma_i)$ — функция условных предпочтений, возникающих после того, как система попала в состояние σ_i. Для функции предпочтения двух шагового пути $T_r^{(2)}$ ($p = 3$) постулируется свойство:

$$\pi\left(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k\right)=\pi\left(\sigma_i\right)\pi\left(\sigma_j\mid\sigma_i\right)\pi\left(\sigma_k\mid\sigma_i,\sigma_j\right). \quad (2.9)$$

Вообще, для пути длиной p (T_r^{p-1}) с «посещением» $p-1$ промежуточного состояния будем считать справедливой формулу

$$\pi\left(\sigma_{s1},\sigma_{s2},\sigma_{s3},\ldots,\sigma_{s(p-1)},\sigma_{sp}\right)= \quad (2.10)$$

$$=\pi\left(\sigma_{s1}\right)\pi\left(\sigma_{s2}\mid\sigma_{s1}\right)\pi\left(\sigma_{s3}\mid\sigma_{s1},\sigma_{s2}\right)\ldots\pi\left(\sigma_{sp}\mid\sigma_{s1},\sigma_{s2}\ldots\sigma_{s(p-1)}\right).$$

Смысл гипотезы факторизации состоит в том, что после «посещения» очередного состояния предпочтения перераспределяются (точнее могут перераспределяться) в зависимости от уже пройденных шагов.

Среди всех факторизируемых путей выделяется класс «*марковских путей*» а факторизация называется «*марковской факторизацией*», которая состоит в том, что условные распределения предпочтений следующего шага зависят только от того, в коком состоянии находится система в данный момент и не зависит от предыстории — предпочтительность каждой альтернативы следующего шага вдоль пути определяется лишь последней реализованной альтернативой и не зависит от того, какие до этого были пройдены состояния. Этот факт выражается следующим соотношением:

$$\pi\left(\sigma_{sk}\mid\sigma_{s1},\sigma_{s2},\ldots,\sigma_{sk-1}\right)=\pi\left(\sigma_{sk}\mid\sigma_{sk-1}\right). \quad (2.11)$$

Здесь σ_{sk} — состояние, которое субъекту предстоит достигнуть после $k-1$ шага «вдоль» пути. Альтернатива $\boldsymbol{\sigma_{sk} \in S_{ak}}$, где $\boldsymbol{S_{ak}}$ - множество рассматриваемых альтернатив после $k-1$ шага.

$$\pi\left(\boldsymbol{Tr}_s^{p-1}\right) = \pi\left(\sigma_{s1}, \sigma_{s2}, ..., \sigma_{sp-1}, \sigma_{sp}\right) = \pi\left(\sigma_{s1}\right)\pi\left(\sigma_{s2} \mid \sigma_{s1}\right) \times \\ \times \pi\left(\sigma_{s3} \mid \sigma_{s2}\right) ... \pi\left(\sigma_{sp} \mid \sigma_{sð-1}\right) \tag{2.12}$$

Предположение, выраженное формулой (2.12) по существу есть предположение об определенном характере психики субъекта — способе его анализа «*без оглядки назад*». Образно говоря, такой субъект «*смотрит только вперед*» и не принимает в расчет предысторию. Очевидно, что это предположение является весьма ограничительным, если речь идет о приложении вероятностных схем к психологическим процессам. Последние скорее всего не носят «марковского» характера. Некоторые результаты моделирования с учетом сделанных замечаний будут представлены позже.

В соответствии с определением понятия траектории (пути) движение вдоль пути происходит только в одном направлении:

$$\boldsymbol{\sigma_{s1} \to \sigma_{s2} \to \sigma_{s3} \to} \ldots,$$

перестановка аргументов в p-точечной функции предпочтения вообще говоря изменяет функцию. Следовательно, например для 2-точечной функции $\pi(\sigma_i, \sigma_j)$ в общем случае имеем

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i, \sigma_j) \neq \pi(\sigma_j, \sigma_i)}. \tag{2.13}$$

Очевидно, в частном случае, когда пути $\boldsymbol{\sigma_i \to \sigma_y}$, и $\boldsymbol{\sigma_y \to \sigma_i}$ эквивалентны $\pi(\sigma_i, \sigma_j) = \pi(\sigma_j, \sigma_i)$, тогда может иметь место равенство

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i)\pi(\sigma_j| \sigma_i) = \pi(\sigma_j)\pi(\sigma_i| \sigma_j)}. \tag{2.14}$$

Эквивалентность путей не совпадает с эквивалентностью состояний, поскольку пути заданы на декартовом произведении $\underbrace{S_a \times S_a \times ... S_a}_{p}$.

Видим, что если пути $\boldsymbol{\sigma_i \to \sigma_j}$, и $\boldsymbol{\sigma_j \to \sigma_i}$ эквивалентны и выполняется условие факторизации, то эквивалентны состояния (альтернативы) σ_i и σ_j: $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$. Два состояния σ_i и σ_j взаимно эквивалентны (рис. 2.3, *а*), если

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i| \sigma_j) = \pi(\sigma_j| \sigma_i)}$$

и условно эквивалентны относительно третьего состояния $\boldsymbol{\sigma_k}$ (рис. 2.3, *б*), если

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i| \sigma_k) = \pi(\sigma_j| \sigma_k)}.$$

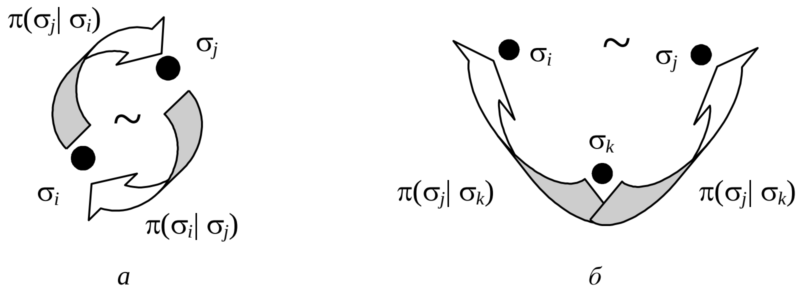


Рис.2.3

Эти определения, без труда распространяются на другие условные распределения. Рассмотрим нормировки условных функций предпочтения.

Для каждого набора пар $(\sigma_i,\sigma_j) \in S_a \times S_a$ выполнено нормирующее условие

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)=1$$

и пусть

$$\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)=\pi\left(\sigma_i\right). \qquad (2.15)$$

Если верна гипотеза факторизации, то предыдущее равенство можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_i\right)\pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right)=\pi\left(\sigma_i\right)\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right)=\pi\left(\sigma_i\right) \qquad (2.16)$$

Если выполнено условие (2.14), то

$$\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\sigma_i\right)\pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right)=\pi\left(\sigma_j\right). \qquad (2.17)$$

Возможна такая трактовка: $\pi(\sigma_i)$ — это априорное распределение абсолютных предпочтений до перехода $\sigma_i \to \sigma_j$, а $\pi(\sigma_j)$ апостериорное распределение абсолютных предпочтений после перехода $\sigma_i \to \sigma_j$.

Если матрица, построенная из функции $\pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right)$ несимметрична, то есть $\pi(\sigma_j|\sigma_i) \neq \pi(\sigma_i|\sigma_j)$, то $\pi(\sigma_i)$ и $\pi(\sigma_j)$ не совпадают.

Условные функции предпочтения более общего вида:

$$\pi(\underbrace{\sigma_i,\sigma_j,\ldots,\sigma_k}_{p_2} \mid \underbrace{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{k-1}}_{p_1})=\pi\left(Tr^{p_2} \mid Tr^{p_1}\right), \qquad (2.18)$$

которые определяют предпочтительность будущего отрезка пути Tr^{p_2} в зависимости от уже пройденного отрезка пути Tr^{p_1}.

Если число альтернатив, изучаемых субъектом, после каждого шага изменяется, то для марковского пути длиной $\boldsymbol{p}$ имеет место следующая зависимость

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sigma_{s1} \to & \sigma_{s2} \to & \sigma_{s3} \to & \ldots & \to \sigma_{s1(p-1)} & \to \sigma_p \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
N_1 & N_2 & N_3 & \ldots & N_{p-1} & N_p
\end{array}$$

Начальное состояние выбирается из N_1 альтернатив $\sigma_{s1} \in S^{N1}{}_a$, состояние σ_{s2} выбирается из N_2 альтернатив $\sigma_{s2} \in S^{N2}{}_a$, …

Условие нормировки принимает следующий вид:

$$\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\ldots\sum_{i_p=1}^{N_p}\pi(\sigma_{i1})\pi(\sigma_{i2}\,|\,\sigma_{i1})\pi(\sigma_{i3}\,|\,\sigma_{i2})\ldots$$

$$\ldots\pi\left(\sigma_{i(p-1)}\,|\,\sigma_{i(p-2)}\right)\pi\left(\sigma_{ip}\,|\,\sigma_{i(p-1)}\right)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{N_1}\pi(\sigma_{i1})\sum_{i_2=1}^{N_2}\pi(\sigma_{i2}\,|\,\sigma_{i1})\sum_{i_3=1}^{N_3}\pi(\sigma_{i3}\,|\,\sigma_{i2})\ldots\sum_{i_p=1}^{N_p}\pi\left(\sigma_{ip}\,|\,\sigma_{i(p-1)}\right)=1.$$

Условие выполняется, поскольку каждая из сумм в отдельности равна 1. Ранее обсуждалось понятие композиции альтернатив, в частности *бинарной композиции* $C_{i,j}^{(2)}$, что соответствует сложной альтернативе, состоящей в реализации одновременно обеих альтернатив, если они совместны.

Нормировки для композиций могут отличаться от нормировок для путей. Понятие композиции не совпадает с понятием суммы событий в теории вероятностей. Речь в данном случае идет об обязательной одновременной реализации всех альтернатив, входящих в композицию.

2.4. Аналогия с теорией вероятностей. Об алгебре альтернатив

Распределения предпочтений имеют много общего с вероятностными распределениями. Многие построения являются аналогичными, однако эта аналогия носит формальный характер, поскольку смысл предпочтений и вероятностей различен, а распределения на одном и том же множестве альтернатив могут кардинально отличаться, более того, — одно из них может не существовать, тогда, как другое существует.

Ситуация подобна хорошо известным аналогиям, когда одни и те же уравнения Лагранжа второго рода описывают колебания механических систем и колебания напряжения в электрических цепях.

Проследим некоторые формальные аналогии и сходства, одновременно обратим внимание на различия. Будут введены дополнительные важные понятия.

Пусть S_a — множество альтернатив. Любое подмножество $A \subset S_a$ назовем *альтернативой* (или *комплексной альтернативой*) в отличие от простых альтернатив и композиций, рассматривавшихся ранее. Полная или универсальная альтернатива — U совпадает с S_a. Существует альтернатива дополнительная к A, такая, что сумма $\grave{A}\vee\bar{A}=S_a=U$ или $S_a\setminus A=\bar{A}$. Альтернатива A понимается так, что она считается реализованной, если реализован хотя бы один из элементов A: $\sigma\in A$.

Относительно альтернативы A принимаются следующие допущения:

1. Альтернативы *делимы*: они содержат подмножества являющиеся альтернативами.

Что мы понимаем под «делимостью» комплексной альтернативы A? Если под набором альтернатив $\sigma_i \in S_a$ понимается все множество мест в зрительном зале, то каждую такую альтернативу можно считать элементарной. Они неделимы. Однако, если A есть определенное подмножество мест, т.е. $A \subset S_a$, то такая комплексная альтернатива конечно – делима. Не всегда можно выделить элементарные альтернативы. Продавец называя цену товара, имеет возможность выбрать ее из определенного множества значений, имеющего мощность континуума. Такое множество бесконечно – делимо.

2. Существует «*невозможная*» альтернатива» $\varnothing$ (или V).

3. Существует сумма альтернатив $A \vee B$, состоящая в том, что будет реализована хотя бы одна из них. Например, $A \vee \bar{A} = S_a$.

Отличие рассмотренных *комплексных альтернатив* от ранее введенных *композиций* состоит в том, что в первом случае предполагается достижение не всех, содержащихся в *комплексной альтернативе* состояний, но хотя бы одна из $\sigma \in A \vee B$. В этом смысле комплексная альтернатива аналогична событию в теории вероятностей.

4. Существует субъективное «*произведение*» альтернатив A и B, представляющее общую часть «сомножителей», если A и B делимы: $A \wedge B$.

Альтернативы A и B субъективно *несовместимы*, если $A \wedge B = V$ — невозможная альтернатива.

Множество подмножеств S_E дополненное невозможной альтернативой $V = \varnothing$ - субъективный нуль, и содержащие «полную» альтернативу $U = S_a$, играющую роль субъективной единицы составляет алгебру альтернатив A_a:

$$U \wedge A = A$$

(Для невозможной альтернативы V имеем: $V \wedge A = V$).

Следует иметь в виду, что операции «$\wedge$» и «$\vee$», понятия «*совместимость*» и «*несовместимость*» определены как субъективные. Вообще, все категории в данном случае носят двойственный характер. Это касается и понятий «совместимость» и «несовместимость». Две альтернативы могут быть *совместимы* в объективном смысле, что должно находить отражение через объективную характеристику — например, функцию полезности, и быть *несовместимыми* в субъективном смысле (например, по этическим соображениям).

Множество субъективных альтернатив S_a может не совпадать с множеством альтернатив объективных альтернатив (обозначим его через O_a).

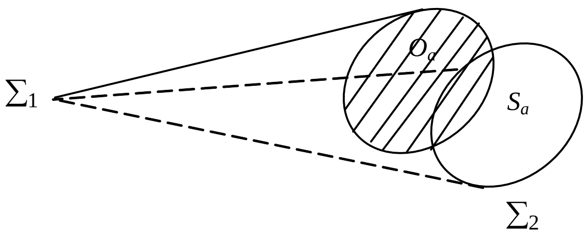


Рис. 2.4

На рис. 2.4. $\sum_1$ – внешний наблюдатель, изучающий объективные альтернативы, $\sum_2$ – субъект, в субъективном представлении которого – альтернативы $\sigma \in S_a$, не все совпадают с O_a.

Будем считать, что $S_a \equiv \mathrm{O}_a$, мощности обоих множеств совпадают. Наряду с субъективными операциями «$\wedge$« и «$\vee$«, будем использовать объективные операции «$\cup$« и «$\cap$« для обозначения объективного *сложения* и объективного *умножения*.

Альтернативы $A, B \in S_a$ объективно *несовместимы*, если $A \cap B = \varnothing_0$ (или U) и совместимы, если $A \cap B \neq \varnothing_0$ (или U). Если в качестве аргумента когнитивной функции F_a будет использоваться вероятность, то вся дальнейшая терминология и аксиоматика полностью совпадает с теорией вероятностной.

Свойства совместимости и несовместимости могут иметь односторонний характер, как в объективном, так и в субъективном смыслах, что связано с временной необратимостью некоторых событий и субстанциональной необратимостью (непревращаемость одних видов ресурсов в другие — хлеб нельзя превратить в пшеницу).

Можно представить еще ситуацию, когда субъект, несмотря на объективную неосуществимость альтернативы ввиду, скажем, недостаточной осведомленности, считает ее осуществимой и приписывает ей определенное ненулевое предпочтение.

Наряду со свойствами *осуществимости* (реализуемости) и *совместимости* (соответственно — *неосуществимости*, *несовместимости*) необходимо еще раз обсудить понятие *зависимости* и *независимости* альтернатив. То обстоятельство, что при определенных условиях на множестве S_a (или $\mathcal{A}_a$) может быть установлен порядок с помощью отношения предпочтения, еще не означает, что альтернативы зависимы между собой.

Будем говорить, что альтернативы A, $B \in \mathcal{A}_a$ зависимы, если осуществление одной из них влияет на величину предпочтения другой и ни одна из альтернатив не является невозможной. При этом предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие введение количественной шкалы предпочтений.

Для удобства и сокращения записи используем следующее обозначение:

$A \rceil B$: «A не зависит от B» $\Rightarrow \pi(A|B) = \pi(A)$; (2.19)

$A \lceil B$: «A зависит от B» $\Rightarrow \pi(A|B) \neq \pi(A)$; (2.20)

$A \;\rceil$ «A и B взаимно независимы» $\Rightarrow \pi(A|B) = \pi(A)$; $\pi(B|A) = \pi(B)$; (2.21)

$A \lceil B$: «A и B взаимно зависимы» $\Rightarrow \pi(A|B) \neq \pi(A)$; $\pi(B|A) \neq \pi(B)$. (2.22)

Будем различать зависимость *временную* и *субстанциональную*.

Временная зависимость альтернатив A, $B \in S_{\mathrm{A}}$ (или σ, $\eta \in S_a$) состоит в том, что они могут осуществиться только в определенном порядке.

Пример: альтернатива η — изучение аэродинамики, σ — изучение математики.

Субстанциональная зависимость альтернатив A, $B \in S_{\mathrm{A}}$ (или σ, $\eta \in S_a$) состоит в том, что A и B (или σ, η) зависят через общие ресурсы, цены, имеют пространственную зависимость.

Примером может служить следующая ситуация: альтернатива A — приобретение продукта A, альтернатива B — приобретение продукта B. Имеется условие, что если будет приобретен продукт A, то при покупке продукта B будет сделана скидка. Это значит, что $B \lceil A$ — субстанционально.

Несовместимость альтернатив A, $B \in \mathcal{A}_a$ влечет их *независимость*, но *независимость* необязательно влечет *несовместность*.

Приведем некоторые примеры.

1. Одновременное пребывание субъекта в пункте A (альтернатива A) и в пункте B (альтернатива B) невозможно. Альтернативы A и B несовместимы.

2. Спортсмен на данных соревнованиях выигрывает 1-е место — альтернатива A, а также выигрывает 2-е место — альтернатива B. A и B во временном отношении несовместны и независимы.

3. Студент собирается изучать предмет A (альтернатива A) и предмет B (альтернатива B). Если предметы логически не связаны, ресурсы времени достаточны и оба предмета находятся в списке «дисциплин по выбору», то альтернативы A и B совместимы и независимы ($A \rceil\!\lfloor B$).

4. Альтернатива A построить дом, альтернатива B — приобрести землю. A и B совместимы и во времени односторонне связаны.

5. Альтернатива A — выпуск изделия A, альтернатива B — выпуск изделия B. Если изделия A и B имеют общие комплектующие, то их совместный выпуск может оказаться выгоднее, чем выпуск, разнесенный по времени.

2.5. Аксиомы кардинальной теории предпочтений

Аксиоматическое построение теории функций предпочтения по-видимому может быть выполнено неединственным образом.

Если заранее не предполагать наличия у субъекта представлений о наборе элементарных альтернатив, то функцию предпочтений можно ввести с помощью следующих аксиом:

1. Субъект в состоянии сформировать множество альтернатив $\mathcal{A}_a$: $A \in \mathcal{A}_a$.

2. На этом множестве он в способен определить бинарное отношение предпочтений, обладающее свойствами, описанными в книге Фишберна [184] или в работе Гроота [60] (как слабое относительное упорядочение либо строгое частичное упорядочение), а также в разделах (1, 3) настоящей книги:

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{S_A}: \boldsymbol{A} \langle \boldsymbol{B}, \text{ или } A \precsim B$$

3. Предполагается, что упорядочение осуществляется как субъективный процесс на основе осознания на субъективном уровне значений показателя предпочтительности альтернатив, реализованного в виде функции распределения предпочтений $\pi(A)$. Эта функция доступна сознанию субъекта в виде набора положительных дискретных количественных оценок, если речь идет о счетном или конечном множестве альтернатив S_a, либо, может быть, в виде нечетких множеств. Для континуального множества альтернатив область определения $\pi(A)$ есть континуум.

Функция $\pi(A)$ в дальнейших построениях предполагается нормированной, как это было описано выше.

В основном будет использоваться единичная нормировка, так как нормировка на любом базовом отрезке положительной полуоси может быть сведена к единичной.

Нормировка вообще может быть неединичной и нестационарной:

$$\sum_{A \in A_a} \pi(A) = \varphi(t) \tag{2.23}$$

В частном случае φ (t) = 1. Нормированность функции предпочтения имеет психологическое содержание: она обеспечивает снижение предпочтительности одной альтернативы при возрастании предпочтительности другой.

Пусть вначале $\tilde{\pi}(V) = \pi_{\min}$, где V - «невозможная» альтернатива (или наименее предпочтительная, что, конечно, не одно и то же). Если U – наиболее желательная альтернатива, выразим это выражением $\tilde{\pi}(U) = \pi_{max}$.

Приведем перенормировку. Введем распределение предпочтений, нормированное на единицу формулой:

$$\pi(A) = \frac{\tilde{\pi}(A) - \pi_{\min}}{\pi_{\max} - \pi_{\min}} \qquad A \in [V, U] \tag{2.24}$$

Видим, что $\pi(V) = 0$ и $\pi(U) = 1$. Далее легко заметить, что

$$\varphi(t) = \pi_{\max} + (N-1)\pi_{\min}$$

или

$$\varphi(t) = \tilde{\pi}(U) + (N-1)\tilde{\pi}(V) \tag{2.25}$$

Отсюда, если $\tilde{\pi}(V) = 0$, $\tilde{\pi}(U) = \varphi(t)$.

Априорно $\tilde{\pi}(V)$ может восприниматься как «субъективный нуль» 0_s. Если считать $\tilde{\pi}(U)$ «субъективной единицей»: $\tilde{\pi}(U) = 1_s$ и положить $\varphi = 1$ и $0_s = 0$, то субъективная единица совпадает с метрической единицей. Действительно из (2.25)

$$\varphi(t) = 1_s + (N-1)0_s$$

следует $1 = 1_s$ и наоборот, полагая, что $\varphi = 1$ и $1_s = 1$, получается, что $0_s = 0$. Отсюда видно, когда субъективный нуль и единица совпадают с метрическим нулем и единицей.

Таким образом, допускается существование функции распределения предпочтений (в простейшем случае – абсолютной или безусловной) – $\pi(A)$.

Поскольку в действительности в качестве аргументов функции $\pi(A)$ выступают переменные, характеризующие проблемную ситуацию – ресурсы, веса этических императивов, функции полезности или вредности, ожидаемой полезности (вредности), то существование и свойства функции $\pi(A)$ связано с фактом существования и свойствами указанных переменных. В особенности это касается функций полезности (вредности – «негативной» полезности), существование которой определяется выполнением ряда априорных условий (аксиом). Этот вопрос будет рассмотрен ниже. Условия, накладываемые на $\pi(A)$, включают также условия корректности в смысле Адамара вариационных задач, описанию которых посвящена следующая глава.

Если функция $\pi(A)$ существует, то по предположению она удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{0 \le \pi(A) \le 1} \text{ для } \forall \boldsymbol{A} \in \mathcal{A}_a, \\ &\boldsymbol{\pi(U) = 1}, \\ &\boldsymbol{\pi(V) = 0}. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Из этих предположений следует, что

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Если } \boldsymbol{A \wedge B = \varnothing}, \ \forall \boldsymbol{A, B} \in \mathcal{A}_a, \text{ то } \boldsymbol{\pi(A \wedge B) = 0}; \\ \text{2. } \boldsymbol{\pi(\bar{A}) = 1 - \pi(A)}; \text{ где } \boldsymbol{\bar{A}} \text{ - дополнение А до } \boldsymbol{S_a} \\ \text{3. Для } \forall \boldsymbol{A, B} \in \mathcal{A}_a\boldsymbol{:} \ \boldsymbol{\pi(A \vee B) \leq \pi(A) + \pi(B)}. \end{array}\right\} \qquad (2.27)$$

Последнее означает, что предпочтительность суммы альтернатив всегда не больше суммы предпочтительностей изолированных альтернатив.

4. Из $\boldsymbol{A \prec B \Rightarrow \pi(A) < \pi(B)}$, либо $\boldsymbol{A \prec B \Leftrightarrow \pi(A) < \pi(B)}$.

Для предпочтения суммы альтернатив постулируется формула

$$\boldsymbol{\pi(A \vee B) = \pi(A) + \pi(B) - \pi(A \wedge B)}.$$

Проследим возникновение и трактовку условных функций предпочтений. Определим предпочтение субъективного произведения формулой:

$$\boldsymbol{\pi(A \wedge B) = \pi(A)\pi(B|\, A)}, \text{ если } \boldsymbol{B \ulcorner A} \text{ и } \boldsymbol{\pi(A) \neq 0} \qquad (2.28)$$

либо

$$\boldsymbol{\pi(A \wedge B) = \pi(B)\pi(A|\, B)}, \text{ если } \boldsymbol{A \ulcorner B} \text{ и } \boldsymbol{\pi(B) \neq 0} \qquad (2.29)$$

Видим, что поскольку $\pi(B|\, A) \leq 1$ и $\pi(A|\, B) \leq 1$, то

$$\boldsymbol{\pi(A \wedge B) \leq \pi(A)} \text{ и } \boldsymbol{\pi(A \wedge B) \leq \pi(B)}$$

откуда следует, что $\boldsymbol{A \wedge B \preceq A}$ и $\boldsymbol{A \wedge B \preceq B}$.

Другими словами, предпочтительность «произведения двух альтернатив всегда не больше предпочтительностей каждой из изолированных альтернатив – сомножителей в отдельности или предпочтение «части» всегда меньше предпочтительности целого.

Функция условных предпочтений в правых частях (2.28) и (2.29) определяют предпочтительность «находиться хотя бы в части одного из множеств A или B не покидая другого».

В случае, если $A \wedge B = V\varnothing$, $\pi(A \wedge B) = 0$. Поскольку при этом $\pi(A) \neq 0$, то это ведет к условию $\pi(B|\, A) = 0$, то есть предпочтительность альтернативы B при условии, что должна быть реализована или уже реализована альтернатива A, равна нулю.

Одновременная справедливость обеих соотношений (2.28) и (2.29) является частным допущением, которое не следует из общей асимптотической основы и из которого следует, что

$$\boldsymbol{\pi(A)\pi(B|\, A) = \pi(B)\pi(A|\, B)}. \qquad (2.30)$$

Этому допущению соответствует условие $A \lrcorner\!\ulcorner B$.

Приведенные соотношения можно трактовать как формулы для предпочтения одношагового пути

$$A \to B \text{ (или } B \to A\text{)}$$

В случае (2.28) оба пути допустимы и

$$\boldsymbol{\frac{\pi(A)}{\pi(B)} = \frac{\pi(A\,|\,B)}{\pi(B\,|\,A)}}.$$

В этом случае из условия $\pi(A) < \pi(B)$ следует, что $\pi(B|\,A) > \pi(A|\,B)$, то есть

$$\boldsymbol{T}^{(1)}_{\boldsymbol{AB}} : \left(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\right) \rangle \boldsymbol{T}^{(1)}_{\boldsymbol{BA}} : \left(\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\right)$$

и пути $A \to B$ и $B \to A$ эквивалентны, если $\pi(A) = \pi(B)$.

Приведенные рассуждения легко переносятся на случай большего числа альтернатив: $N > 2$.

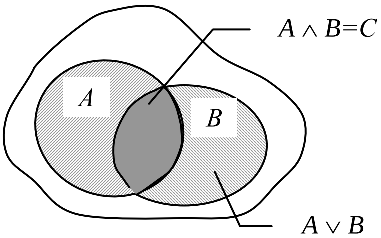


Рис. 2.5

1. Более жестким является допущение, что субъект может сформировать множество элементарных альтернатив (сохраним ранее использованные обозначения для альтернатив $\sigma_i \in S_a$).
2. На множестве S_a субъект в состоянии установить бинарное отношение предпочтений ρ: $\langle \prec$ (или $\preceq$).

Элементарные альтернативы обладают следующими свойствами:

$\sigma_i \wedge \sigma_j = V = \varnothing$; $\overset{N}{\underset{i=1}{V}} \sigma_i = U$. При выполнении определенных условий существует единственная функция полезности, а также функция распределения предпочтений $\pi\,(\sigma_i)$ такая, что

1. $0 \le \pi(\sigma_i) \le 1$; для $\forall\ \sigma_i \in S_a$;
2. $\sum\limits_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) = 1 \Rightarrow \pi(U) = 1$;
3. $\pi\,(V) = 0$, где $V = \overline{U}$

Для любой комплексной альтернативы A:

$$A = \overset{k}{\underset{j=1}{V}} \sigma_j ; \pi(A) = \sum_{j=1}^{k} \pi(\sigma_j); k \le N$$

Если отношение ρ обладает определенными свойствами (описанными выше (гл.1)), то существует единственная функция полезности, которая, как уже говорилось, может быть аргументом функции распределения предпочтений.

3 СУБЪЕКТИВНАЯ ЭНТРОПИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА СУБЪЕКТИВНОЙ ЭНТРОПИИ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ

3.1. Субъективная энтропия предпочтений и субъективная информация

Энтропия, введенная Больцманом, является традиционным объектом исследований в физике, в теории информации (введенная Шеноном), в синергетике, [151, 152. 137].

В последние десятилетия энтропия как инструмент исследования стала использоваться в биологии, экономике, теории обучения, логистике и в многих других областях.

Существует целый ряд определений энтропии: энтропия Карно, Клаузевица, Больцмана, Шенона, Колмагорова, Рашевского, Синая. Следует упомянуть также энтропии Реньи и Тсиласа [124].

Энтропия является важным инструментом в синергетике [167. 191] и др., причем она рассматривается не только как мера неопределенности, но, в то же время, как мера упорядоченности [Тоффлер 1986, с. 25].

Основатель синергетики Хакен [191] не склонен переоценивать роль энтропии в отличие от Брюссельской школы Пригожина.

Согласно Хакену: «Хотя в термодинамике и в так называемой термодинамике необратимых процессов понятие энтропии и связанные с ним понятия чрезвычайно полезны, они оказываются слишком грубыми при рассмотрении самоорганизующихся структур. В общем случае в таких структурах энтропия изменяется лишь на очень малую величину. Таким образом, необходимы другие подходы» [191].

Заметим, что понятия «грубости», «малой изменчивости» качественные и относительные. Они с необходимостью связаны с общим анализом «проблемной ситуации».

С другой стороны, энтропия, в качестве интегральной интенсивной характеристики неопределенности в системе, в том числе и особенно, в активной системе, весьма предпочтительна.

Ниже мы коснемся других мер неопределенности, обладающих сходными с энтропией свойствами, в частности, в работах Иваненко и Лабковского [77], вид «критерия неопределенности» связывается с видом «функции потерь».

В работах Левича [125] выбор того или иного показателя неопределенности является следствием выбора интегрального инварианта, задаваемого над множеством морфизмов в S_a.

Неоднозначное и критическое отношение к энтропийной парадигме часто связывают с так называемой «неконструктивностью» соответствующей теории. Автору, однако, представляется, что в комбинации с вариационным принципом Джейнса [152, 193], принципом «Infomax» Линскера, тремя вариационными задачами, сформулированными Стратоновичем, эта парадигма приобретает «конструктивность».

Настоящая работа является попыткой продемонстрировать ее «конструктивность» в формализации проблемы порождения и выработки предпочтений в недрах психики. Очевидно, что соответствующая теория не может обойтись без ряда дополнительных постулатов, предположений и допущений.

Ниже в качестве фундаментального критерия используется энтропия в форме Шенона, более точно, **субъективная энтропия предпочтений**. **Энтропия**, совместно с постулируемым **принципом оптимальности**, обладает рядом существенных преимуществ перед другими критериями.

Использование энтропии приводит к легко разрешимым аналитическим уравнениям (линейным относительно логарифма функции предпочтений) для так называемых канонических распределений [174] (Стратонович). Энтропия обладает чрезвычайно важным свойством иерархической аддитивности.

Широкое использование энтропии в физике и теории информации позволяет провести далеко идущую аналогию. Например, это касается использования понятий психической и эмоциональной «температур», «эмоционального перегрева» и «эмоционального переохлаждения».

Необратимость времени, «стрела времени» хорошо вписываются в энтропийную парадигму. Некоторые авторы вводят «энтропийное время» и, более того, строится теория «энтропийной механики», для энтропии вводится закон сохранения [161] (Панченков).

Автор склонен считать субъективную энтропию не только мерой «неопределенности» предпочтений, удобным инструментом исследования, но также критерием, «органически» вписанным в психику, участвующим в управлении объективно протекающими психическими процессами.

В частности, субъективная энтропия может быть связана с постулатом, смысл которого состоит в стремлении субъекта к внутренней свободе и проекции ее на внешнюю свободу. Можно предположить, что энтропийные критерии имеют отношение к возникновению и развитию внутриличностных и межличностных конфликтов.

Идея использования субъективной энтропии привлекательна тем, что она позволяет сформулировать в терминах энтропийной парадигмы ряд дополнительных предположений и понятий, которые соответствуют «здравому смыслу» и делают теорию более структурированной и богатой.

В настоящей работе, как и в работах [79, 83], вводится *субъективная энтропия* и *субъективная информация* предпочтений, определенные на множестве альтернатив.

Ниже мы рассматриваем два вида предпочтений: «предметные» и «рейтинговые» предпочтения, обозначаемые, соответственно, через π и ξ. Субъективная энтропия естественным образом связывается с субъективной информацией В общем случае она не является вероятностной величиной (и ценностью информации, которая обсуждается, например в [175]), поскольку всегда относится к конкретному *индивидуальному «носителю»* - субъекту, к данному моменту времени и может быть рассматриваемая как величина, обладающая случайными свойствами лишь в том случае, если:

а) при определении величин предпочтений субъекта $\pi(\sigma_i)$ (измерениях предпочтений) допускаются случайные ошибки.

б) предпочтения «органически» содержат ремнантные (случайные) компоненты.

В работах по теории информации [13, 21, 137] энтропия и информация выражаются через распределение вероятностей. В нашем случае необязательным является предположение о существовании генеральной совокупности. В частности, не возникает проблема эргодичности. Оно заменяется предположением о существовании «встроенного» в каждую «индивидуальную психику» экстремального принципа формирования предпочтений и, соответственно, о том, что для всех индивидуумов этот принцип имеет общие черты и общую структуру. При этом структурные параметры могут быть различными, и в этом может проявляться индивидуальность субъектов. «Структурно» их психики подобны, но «параметрически» различны. Различия возникают в определенных индивидуальных «когнитивных функциях» (см. далее).

Субъективная энтропия и субъективная информация выражаются через распределения предпочтений на множестве альтернатив или множестве субъектов в группе, количество и сущность которых являются результатом субъективных предпочтений, предварительного анализа количественных и качественных характеристик, а также подсознательных, интуитивных оценок виртуального объекта – «проблемной ситуации». Не являясь распределениями вероятностей, распределения предпочтений имеют с ними формальное сходство, что приводит к далеко идущим аналогиям.

Сходство, однако, является неполным, что проявляется в меньшем количестве априорных ограничений, накладываемых в виде аксиом.

Пусть $\boldsymbol{S_a}|_{\sigma_e}$ - множество альтернатив размерности N, $\boldsymbol{\sigma_e} \Subset \boldsymbol{S_a}|_{\sigma_0}$ - исходное состояние, а $\pi(\sigma_i)$ – распределение предпочтений на $\boldsymbol{S_a}|_{\sigma_e}$. Введем энтропию распределения $\pi(\sigma_i)$ в форме Шенона:

$$\boldsymbol{H}_\pi = -\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \pi(\sigma_{\boldsymbol{i}}) \ln \pi(\sigma_{\boldsymbol{i}}); \;\; \boldsymbol{\sigma_i} \in \boldsymbol{S_a}|_{\sigma_0}. \tag{3.1}$$

В теории информации Шеноном в такой форме определена средняя информация на одно сообщение, выраженная через частные вероятности p_i [161,а].

Энтропия в форме (3.1) обладает следующими свойствами:

1. Когда все значения функции $\pi(\sigma_i)$ одинаковы, то есть альтернативы σ_i одинаково предпочтительны, величина энтропии имеет максимальное значение $H_{\max.}$ При условии, что имеет место единичная нормировка

$$\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \pi(\boldsymbol{\sigma}_i) = 1. \tag{3.2}$$

$\pi(\sigma_i) = \dfrac{1}{N}$, а $H_{\max} = \ln N$

2. При сингулярном распределении, когда предпочтения всех альтернатив равны нулю за исключением предпочтения одной альтернативы:

$$\pi(\boldsymbol{\sigma}_i) = \begin{cases} 0; \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{k}, \\ 1; \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \end{cases} \;\; (\boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}),$$

энтропия минимальна и равна нулю ($H_{\min} = 0$). Таким образом, энтропия H_π заключена в пределах:

$$0 \le H_\pi \le \ln N$$

и, следовательно,

3. При выбранном нормирующем условии энтропия неотрицательна.

Выбор единичной нормировки (3.2) в значительной степени произволен. Условно нормировки можно приписать психологический смысл: если предпочтительность какой-либо альтернативы σ_i возрастает, то предпочтительность какой-то другой альтернативы уменьшается.

Пусть множество $S_a|_{\sigma_0}$ содержит k классов эквивалентности и L_s – количество альтернатив в s-ом классе, а π_{Ls} — величина функции предпочтения элементов (альтернатив), принадлежащих этому классу. Тогда энтропия примет вид:

$$\boldsymbol{H_\pi^k = -\sum_{s=1}^{k} L_s \pi_{Ls} \ln \pi_{Ls}};\ (\boldsymbol{k \in \overline{1, N}}). \tag{3.3}$$

Обозначая $\pi_s = L_s\pi_{Ls}$ — «*предпочтение класса*», получим:

$$\boldsymbol{H_\pi^k = -\sum_{s=1}^{k} \pi_s \ln \pi_s + \sum_{s=1}^{k} \pi_s \ln L_s}. \tag{3.4}$$

Оба слагаемых всегда положительны (неотрицательны). Второе слагаемое – это взвешенная по предпочтениям энтропия размеров (мощности) классов.

Энтропия H^k_π при заданном числе $k < N$ достигает максимума, если все π_s одинаковы и равны $\pi_s = \dfrac{1}{k}$.

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) = \sum_{s=1}^{k} \pi_{Ls} L_s = 1 \Rightarrow \sum_{s=1}^{k} \pi_s = 1}$$

и при условии $\pi_s = \dfrac{1}{k}$ для $\forall s \in \overline{1,k}$ находим из (3.4):

$$\boldsymbol{H_\pi^k = \ln k + \ln \sqrt[k]{L_1 L_2 \cdot \ldots \cdot L_k}}$$

Из этой формулы видно, что H^k_π достигает максимума при $k = N$. В этом случае $L_s = 1$ $\boldsymbol{\forall s \in \overline{1, N}}$ и второе слагаемое обращается в нуль. Следовательно

$$\boldsymbol{H_\pi^k(k < N) < H_\pi^N} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{H_\pi^k(k = N) = H_\pi^N = \ln N}.$$

Как видим наличие классов эквивалентности таких, что хотя бы для одного из $L_s > 1$ приводит к уменьшению энтропии.

В теории информации величина

$$\boldsymbol{H_\pi = k \ln N},$$

называется информацией Хартли, где N — число равновероятных результатов экспериментов. Если $x = 1$, то информация Хартли измеряется в натуральных единицах — натах, если $x = (\ln 2)^{-1}$, то H_π выражается в двоичных единицах — битах. Если состояния неравновероятны, то каждому состоянию соответствует своя информация:

$$\boldsymbol{H_i = -\ln p(\sigma_i)},$$

где $p(\sigma_i)$ — вероятность »появления» состояния σ_i. В нашем случае место вероятности занимает функция предпочтения $\pi(\sigma_i)$, а частная энтропия $H_\pi(\sigma_i)$ отражает неопределенность, связанную с альтернативой σ_i и может трактоваться как «замороженная» субъективная информация, которая высвобождается, если σ_i выбирается в качестве цели. Энтропия $H_\pi(\sigma_i)$ после выбора σ_i в качестве цели обращается в нуль и, соответственно, высвобождается информация $I(\sigma_i) = H_\pi(\sigma_i)$.

Энтропия (3.1) есть результат осреднения субъективных частных энтропий по предпочтениям.

Субъективная энтропия характеризует психическое состояние субъекта, находящегося в проблемной ситуации.

Представляется естественным допущение, что уровень психической напряженности тем выше, чем выше энтропия. В свою очередь энтропия зависит от вида распределения предпочтений и от количества альтернатив. Удобно в некоторых случаях использовать нормированную энтропию:

$$\overline{H}_\pi = (\ln N)^{-1} \cdot H_\pi$$

которая, как легко видеть, всегда лежит в пределах

$$0 \leq \overline{H}_\pi \leq 1$$

(если нормировка $\pi(\sigma_i)$ единична). Если нормировка $\pi(\sigma_i)$ неединична, нормируемую энтропию следует взять в виде:

$$\overline{H}_\pi = \frac{H_\pi - \varphi \ln(\varphi)^{-1}}{\varphi \ln \frac{N}{\varphi} - \varphi \ln \frac{1}{\varphi}}$$

Диапазон $\boldsymbol{\varphi \ln \varphi, -\varphi \ln \frac{\varphi}{N} (\varphi \ln N)}$ зависит от величины $\boldsymbol{\varphi}$.

Выясним, в каких пределах изменяется энтропия, если нормировка неединична: $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \varphi$. При однородном распределении $\boldsymbol{\pi_i = \varphi \cdot N^{-1}}$. Положим $\boldsymbol{\pi_i = \varphi \cdot N^{-1} + \delta_i}$, где δ_i – отклонение от однородного распределения, которые удовлетворяют условиям: $\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 0; |\delta_i| << 1$.

Заменим энтропию:

$$\overline{H}_\pi = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\varphi}{N}+\delta_i\right)\ln\left(\frac{\varphi}{N}+\delta_i\right) \approx -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\varphi}{N}+\delta_i\right)\left(\ln\frac{\varphi}{N}+\frac{N}{\varphi}\delta_i\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi}{N}\ln\frac{\varphi}{N} - \frac{N}{\varphi}\cdot\sum\delta_i^2$$

Таким образом, любые малые отклонения δ_i от равномерного распределения приводят к уменьшению энтропии и $\overline{H}_\pi = -\sum_{i=1}^{N}\varphi N^{-1}\ln\frac{\varphi}{N} = \varphi\cdot\ln\frac{\varphi}{N}$ есть максимальная энтропия. Очевидно, что $H_{\pi\max} = S \to \cdot \begin{cases} >0, \text{åñëè}\ \varphi < N; \\ =0, \text{åñëè}\ \varphi = 0; \\ <0, \text{åñëè}\ \varphi > N \end{cases}$

Определим, какие значения в зависимости от φ принимает минимальная энтропия. Положим

$$\boldsymbol{\pi_i = \varphi\cdot\pi_i^0; \sum_{i=1}^{N}\pi_i^0 = 1}$$

$$\boldsymbol{H_\pi = -\sum_{i=1}^{N}\varphi\pi_i^0(\ln\varphi + \ln\pi_i^0) = -\varphi\ln\varphi + \varphi H_\pi^0;}$$

тогда

$$\boldsymbol{H_\pi^0 = -\sum_{i=1}^{N}\pi_i^0\ln\pi_i^0}$$

Поскольку минимальное значение $H^0_{\pi\min} = 0$, то

$$\boldsymbol{H_{\pi\min}} = \frac{\min}{\boldsymbol{\pi_i^0 \in \Pi}}\boldsymbol{H_\pi} = -\boldsymbol{\varphi\ln\varphi}$$

График функции $-\varphi\ln\varphi$ изображен на рис. 3.1

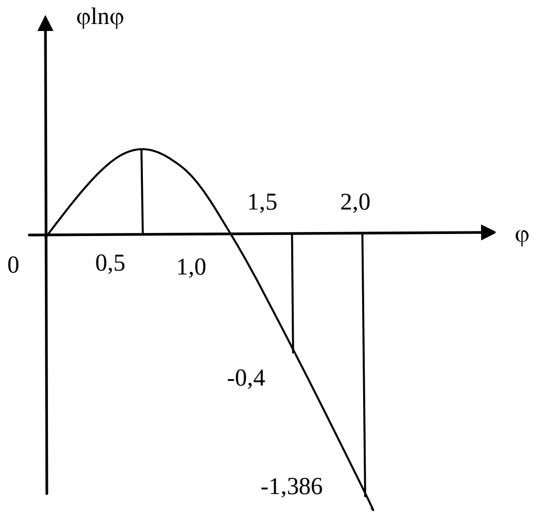


Рис. 3.1

Величина абсолютного минимума $H_{\pi\min}$ зависит от φ и при $\varphi \to \infty$ $H_{\pi\min} \to -\infty$, $\max_\varphi(H_{\pi\min}) = e^{-1} \cong 0{,}3679\ldots$

Если потребовать, чтобы H_π была неотрицательной, то находим, что должно выполняться условие $-\ln\varphi + H^0_\pi \geq 0$.

Условно нормировке можно приписать психологический смысл: если предпочтительность какой-либо альтернативы σ_i возрастает, то предпочтительность какой-то другой альтернативы уменьшается.

При фиксированной правой части в условии нормировки, величины

предпочтений играют роль сравнительных предпочтительностей альтернатив на S_a в данный момент, и не отражают ни в коей мере «абсолютной» силы «желательности». Можно, например, представить себе ситуацию, когда все желания притупляются, интенсивность их падает до нуля и, следовательно, $\pi(\sigma_i)$ должна в этом случае уменьшаться до нуля.

Таким образом, для того, чтобы учесть не только сравнительную, но и абсолютную предпочтительность, рассматривается случай произвольной, в том числе, нестационарной нормировки:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)=\varphi; \quad \varphi\geq 0 \tag{3.5}$$

Будем считать, что $\varphi = \varphi(t)$.

Если в теории вероятности выбор единичной нормировки является результатом соглашения и обусловлен в основном соображениями удобства, то в данном случае, мы хотим придать предпочтениям еще и функцию быть характеристиками не только сравнения альтернатив, но и интенсивности их желательности.

В этом смысле выбор нормирующего условия перестает быть тривиальной задачей. Рассмотрим последствия использования условия нормировки в виде (3.5).

Положим

$$\pi(\sigma_i)=\varphi\cdot\pi^0(\sigma_i), \text{ где } \sum_{i=1}^{N}\pi_i^0(\sigma_i)=1.$$

Тогда энтропия

$$H_\pi=-\varphi\ln\varphi+\varphi\cdot H_\pi^0, \tag{3.6}$$

где $H_\pi^0=-\sum_{i=1}^{N}\pi_i^0\ln\pi_i^0\geq 0;$ при условии $\ln\varphi > H_\pi^0$, $H_\pi < 0$.

При условии $\ln\varphi = H_\pi^0$, находим, что $H_\pi = 0$.

Пусть в (3.6) H_π^0 задано, определим при каком φ H_π достигает наибольшего значения.

$$\frac{dH_\pi}{d\varphi}=-\ln\varphi-1+H_\pi^0=0.$$

Отсюда $\varphi_{opt} = e^{H_\pi^0-1}$. Это соответствует максимуму H_π, так как

$$\left.\frac{d^2H_\pi(\varphi)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_{opt}}=-\frac{e}{H_\pi^0}<0$$

Находим, что

$$H_\pi\Big|_{\varphi_{opt}}=-e^{H_\pi^0-1}\left(\ln\left(e^{H_\pi^0}\right)-1\right)+e^{H_\pi^0-1}\cdot H_\pi^0=e^{H_\pi^0-1} \tag{3.7}$$

Это означает, что $H_{\pi\max}=\dfrac{N}{e}$, поскольку $H_{\pi\max}^0=\ln N$.

Рассмотрим критерий

$$\boldsymbol{\Phi = H_\pi + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i - \varphi\right)} \qquad (3.8)$$

и определим такое распределение, для которого критерий Ф принимает максимальное значение. Из (3.8) находим:

$$\mathbf{-ln\ \pi_i -1 + \gamma = 0} \qquad (3.9)$$

Следовательно, $\pi_{iopt} = e^{-1+\gamma} = const.\forall i \in \overline{1,N}$.

Обозначая $e^{-1+\gamma} = c$, имеем $c = \frac{\varphi}{N} = \varphi \cdot \pi_{iopt}^0$ ($\pi_{iopt}^0 = N^{-1}$).

Поскольку абсолютный максимум H_π достигается, когда H_π^0 = ln N, а $\pi_{iopt}^0 = N^{-1}$ φ_{opt}, где $\varphi_{opt} = \frac{N}{e}$, то $\pi_{iopt} = \frac{1}{e}$.

Посмотрим, как изменяется энтропия с течением времени. Если φ = φ (t). Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)\right) = \dot{\varphi}(t) \text{ и, если } \dot{\varphi}(t) \neq 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{N}\dot{\pi}_i(t) \neq 0.$$

Можно показать, что производство энтропии в рассматриваемом случае $q = \frac{dH_\pi}{dt}$ дается формулой

$$\boldsymbol{\frac{dH_\pi}{dt} = \frac{dH_\varphi}{dt} + \frac{d(\varphi H_\pi^0)}{dt}} \qquad (3.10)$$

где $H_\varphi = -\varphi \ln \varphi$, а H_π определено формулой (3.6).

Таким образом, энтропия не убывает: $\frac{dH_{\sigma\pi}}{dt} \geq 0$, если $\dot{\varphi}(\ln\varphi + 1) \leq \frac{d(\varphi H_\pi^0)}{dt}; (\varphi \geq 0)$

В случае неединичной нормировки (3.5) определим такое значение φ^*, когда максимальная энтропия при произвольном $\varphi > 0$ принимает наибольшее возможное значение $H_{\max,\max}$. Имеем

$$\boldsymbol{H_{\max}(\varphi) = -\varphi \ln\frac{\varphi}{N}}, \qquad (3.11)$$

при этом $\pi_i = \frac{\varphi}{N}$; $\forall \boldsymbol{i} \in \overline{\boldsymbol{1,N}}$. Определим φ^* из условия

$$\boldsymbol{\frac{dH_{\max}(\varphi)}{d\varphi}} = 0,$$

находим $\varphi^* = e^{-1} \cdot N$, тогда

$$\boldsymbol{H_{\max}(\varphi^*) = \varphi^*}$$

Так как $\left.\frac{d^2H_{\max}(\varphi)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi^*} = -\frac{1}{\varphi^*} < 0$, то значение $\varphi = \varphi^*$, доставляют энтропии абсолютный максимум $H_{\max,\max}$, причем этот максимум равен φ^*.

В таблице даны сравнительные значения $H_{\max,\max}$ и $H_{\max}(\varphi = 1)$.

Таблица 3.1

№	$\varphi^* = \frac{N}{e} = H_{\max,\max}$	$H°_{\max}$ $(\varphi = 1)$
1	0,367879…	0
2	0,7357588…	0,6931471…
3	1,1036832…	1,0986122…
4	1,4716776…	1,3862943…
5	1,8393972…	1,60943791…
…	…	…

Для того, чтобы определить в какой «точке» разница $H_{\max}(\varphi)$ и $H_{\max,\max} = H_{\max}(\varphi^*)$ достигает минимума рассмотрим функцию

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}} - \mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$$

на полуоси [1, +∞]. Из условия $f'(x) = 0$ найдем $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}^*) > 0$; при этом в точность

$$\frac{\boldsymbol{x}^*}{\boldsymbol{e}} - \mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}} - \mathbf{ln}\,\boldsymbol{e} = 0$$

Возвращаясь к переменной N, найдем, что

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{N} = 3) = \frac{3}{\boldsymbol{e}} - \mathbf{ln}\,3 = 0{,}005023\ldots$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{N} = 2) = \frac{2}{\boldsymbol{e}} - \mathbf{ln}\,2 = 0{,}045061\ldots$$

Таким образом, энтропия достигает величины $H_{\max\,\max}$, если

$$\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) = \boldsymbol{H}_{\mathbf{max,max}}(\boldsymbol{N}), \tag{3.12}$$

то есть, если распределение предпочтений нормируется на максимально возможную энтропию

$$\boldsymbol{\varphi^* = \frac{N}{e} = H_{\max,\max}\left(N\right)}. \tag{3.13}$$

Видим, что существует «выделенная» нормировка и, кроме того, *число альтернатив N равно максимально возможной энтропии умноженной на основание натурального логарифма e*. Если в случае такой экстремальной нормировки все частные значения функции предпочтения одинаковы, то они равны

$$\boldsymbol{\pi\left(\sigma_i\right) = \frac{1}{e}}$$

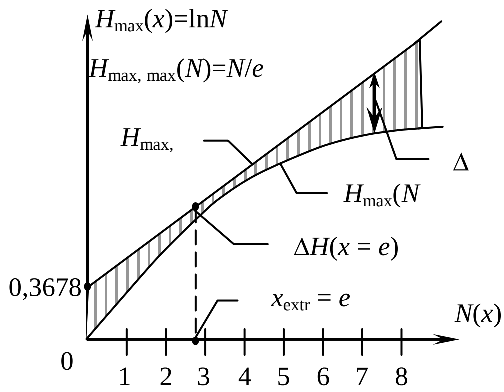


Рис. 3.2

Рассмотрим эту же задачу, если σ есть вещественная переменная, определенная на интервале [0, a] и $\pi\left(\sigma\right)$ нормируется на единицу. Условие однородности $\pi(\sigma)$ есть

$$\boldsymbol{\pi(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}; \sigma \in \left[0, a\right] \\ \sigma; \sigma \in \left[0, +\infty\right] \end{cases}}$$

где $\pi(\sigma)$ - плотность распределения предпочтений.

Пусть нормировка имеет вид:

$$\boldsymbol{\int_0^a \pi\left(\sigma\right) d\sigma = \varphi}, \tag{3.14}$$

тогда в условиях однородности $\pi\left(\sigma\right) = \dfrac{\varphi}{a}$ и

$$\boldsymbol{H_{\max}\left(\varphi\right) = -\int_0^a \frac{\varphi}{a} \ln\frac{\varphi}{a} d\sigma = \varphi \ln\frac{\varphi}{a}}.$$

Отсюда из уравнения $\dfrac{dH_{\max}\left(\varphi\right)}{d\varphi} = 0$ находим $\varphi^* = \dfrac{a}{e}$.

Следовательно

$$H_{\max\max} = -\frac{a}{e}\ln\frac{a}{e} = \frac{a}{e}.$$

Максимально возможная информация, возникающая при изменении области [0,a] на Δa или области [0, N] на величину ΔN есть

$$I(\Delta a) = \pm\frac{\Delta a}{e};$$

$$I(\Delta N) = \pm\frac{\Delta N}{e}.$$

При изменении числа альтернатив на единицу $I(\Delta N = 1) = \pm\frac{1}{e}$.

3.2. Другие показатели неопределенности предпочтений

В этом разделе мы рассматриваем некоторые показатели неопределенности, которые имеют свойства, сближающие их с энтропией в форме Шенона. К таким свойствам отнесем следующее:

1. для сингулярного распределения соответствующий показатель обращается в ноль,
2. для равномерного распределения он должен быть максимальным.

Рассмотрим следующие функции:

$$H_A = \sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i; \tag{3.15}$$

$$H_B = -\sum_{i=1}^{N}\left(1-e^{1-\pi_i}\right)\pi_i; \tag{3.16}$$

В случае сингулярного распределения H_A и H_B обращаются в нуль.

$H_A = 0$; $H_B = 0$

Когда все альтернативы равнопредпочтительны (множество S_a совпадает со своим единственным классом эквивалентности) из условия нормировки $\pi_i = \frac{1}{N}$ и $H_A = 1 - \frac{1}{N}$. При $N \to \infty$ $H_A = 1$.

Положим

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i ,$$

где γ - коэффициент Лагранжа. Из условия $\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_i} = 0$ с учетом условия нормировки $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$, найдем

$$\boldsymbol{\pi_{iopt} = \frac{1}{N}}$$

Эта величина доставляет максимум энтропии H_A.

Если нормировка не единична, то если $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \varphi$, то $\pi_{i\text{opt}} = \frac{1}{N}$, а максимальная энтропия принимает значение

$$\boldsymbol{H_{A\max} = \varphi^2 \cdot (1 - \frac{1}{N})} \text{ или } \boldsymbol{\varphi = \sqrt{\frac{N \cdot H_{A\max}}{N-1}}}$$

Видим, что в первом случае $\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1\right)$ при $N \to \infty$ $H_A = 1$, во втором случае $\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \varphi\right)$ $H_A \to \varphi^2$.

Условие нормировки в этом случае есть

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \sqrt{\frac{N \cdot H_{A\max}}{N-1}}} \qquad (3.17)$$

Рассмотрим квазиэнтропию H_B. В случае сингулярного распределения H_B обращается в нуль. При росте числа альтернатив N H_B монотонно растет. Для однородного распределения $\pi_i = N^1$; $\forall \boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}$.

$$\boldsymbol{H_B^*} = -\left(1 - \boldsymbol{e}^{1-\frac{1}{\pi}}\right),$$

откуда видно, что $\lim\limits_{N \to \infty} \boldsymbol{H_{B\max}} = -\left(1 - \boldsymbol{e}\right) = 1{,}718281\ldots$

Функция $H_C = 0$ для сингулярного распределения

$$\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right) = \begin{cases} 0; \forall \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{k}, \\ 1; \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \end{cases} \quad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}.$$

В случае однородного распределения $\pi_i = N^1$; ($\forall \boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}$) $H_C = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$ при $N \to \infty$, тогда как функция $H'_C = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \pi_i^{\pi_i}\right)$ также равна нулю в случае сингулярного распределения, но для однородного распределения стремится к ∞, если $N \to \infty$.

Иногда удобно пользоваться нормированной энтропией, которая получается делением на максимальное значение:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{H}_\pi &= -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}\pi_i \ln \pi_i;\\
\bar{H}_A &= \frac{N}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\pi_i (1-\pi_i);\\
\bar{H}_B &= -\frac{1}{1-e^{1-N^{-1}}}\sum_{i=1}^{N}\left(1-e^{1-\pi_i}\right)\pi_i;\\
\bar{H}_C &= \frac{1}{1-\left(N^{-1}\right)^{N-1}}\sum_{i=1}^{N}\left(1+\pi_i^{\pi_i}\right)\pi_i
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Одной из характеристик энтропии в качестве критерия неопределенности являются ее чувствительность по отношению к изменениям величины предпочтений. На рис. 3.3 показаны функции чувствительности трех критериев H_π, H_A и H_B:

$$S_{H_\pi}^{\pi_i} = \frac{\partial \bar{H}_\pi}{\partial \pi_i};\; S_{H_A}^{\pi_i} = \frac{\partial \bar{H}_A}{\partial \pi_i};\; S_{H_B}^{\pi_i} = \frac{\partial \bar{H}_B}{\partial \pi_i}$$

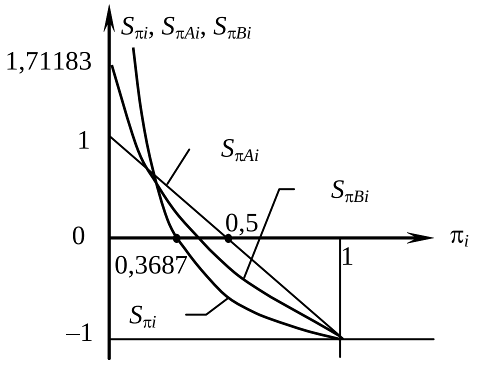


Рис. 3.3

Наряду с функциями чувствительности критерии неопределенности могут быть охарактеризованы величиной эластичности $\varepsilon_H^{\pi_i}$. В данном случае для трех «энтропий» эластичности вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{H_\pi}^{\pi_i} = \frac{S_{H_\pi}^{\pi_i}}{H_\pi}\cdot\pi_i;\varepsilon_{H_A}^{\pi_i} = \frac{S_{H_k}^{\pi_i}}{H_A}\cdot\pi_i;\varepsilon_{H_A}^{\pi_i} = \frac{S_{H_A}^{\pi_i}}{H_A}\cdot\pi_i \tag{3.19}$$

Эти функции являются аналогами эластичностей, которые используются в экономических приложениях.

3.3. Энтропия Реньи и Тсаллиса

Необходимо упомянуть еще два вида энтропии: энтропию Реньи и энтропию Тсаллиса [124].

Мы запишем соответствующие формулы применительно к распределению предпочтений. Энтропия Реньи определяется следующей формулой:

$$\boldsymbol{H}_\alpha(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{ln}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_i)^\alpha\right) \tag{3.20}$$

Для однородного распределения $\pi(\sigma_i) = \dfrac{1}{N}$ находим $H_\alpha(\sigma)$ = ln N с условием нормировки $\sum\limits_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i) = 1$.

Энтропия $H_\alpha(\sigma)$ в случае сингулярного распределения

$$\pi(\sigma_i) = \begin{cases} 1 & i = q \\ 0 & \forall i \neq q \end{cases} \qquad q \in \overline{1, N}$$

равна нулю.

В случае равномерного распределения

$\pi(\sigma_i) = N^{-1}; \quad \forall i \in \overline{1, N}$ равна

$$\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{ln}(\boldsymbol{N}^{1-\alpha}) = \mathbf{ln}\,\boldsymbol{N} \tag{3.21}$$

Если имеется два распределения σ_i η_i, то «разнообразие» характеризуется расхождением Реньи:

$$\boldsymbol{D}_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{ln}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_i)^\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}_i)^{1-\alpha} \tag{3.22}$$

или

$$\boldsymbol{D}_\alpha(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{ln}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_i)^{1-\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}_i)^\alpha \tag{3.23}$$

Энтропия Тсалисса определена формулой

$$\boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{K}\frac{1-\sum\limits_{\dot{q}=1}^{N}\boldsymbol{P}_i^q}{\boldsymbol{q}-1}; \tag{3.24}$$

где $\sum\pi(\sigma_i) = 1, \quad q \in R;$ K > 0. Видим, что для сингулярного распределения $H_q(\pi) = 0$, для равномерного распределения

$$\boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1-\boldsymbol{N}^{1-q}}{\boldsymbol{q}-1} \tag{3.25}$$

Если q стремится к 1: $q \to 1$ распределение Тсалисса превращается в распределение Шенона:

$$\lim_{q\to 1} H_q = K \lim_{q\to 1} \frac{1-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\pi(\sigma_i)^{q-1}}{q-1} = K \lim_{q\to 1} \frac{1-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)e^{(q-1)\ln\pi(\sigma_i)}}{q-1} \approx$$

$$\approx K \lim_{q\to 1} \frac{1-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\left(1+(q-1)\ln\pi(\sigma_i)\right)}{q-1}$$

Применяя правило Лониталя, и вычисляя производные по $t = q - 1$, находим:

$$\lim_{q\to 1} H_q = -K\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\pi(\sigma_i) \qquad (3.26)$$

3.4. Перекрестная энтропия и квадратичная энтропия

Приведем краткое описание подхода, который развивается в работах китайских математиков, в частности [229, 279, 280, 281].

В этих работах речь идет об энтропии неопределенных распределений от неопределенных переменных. К энтропии предъявляется три требования: она должна быть минимальной для четко определенных величин, быть максимальной для равновероятных величин и универсальной – применимой как для конечных, так и бесконечных, для дискретных и непрерывных распределений.

«Перекрестную энтропию» определили Бхандари и Пал [207]

Вводится субъективная мера μ следующим образом: пусть Γ - непустое множество, Δ – σ-алгебра на Γ, а $L_i \in L$ - элемент Δ.

Определение 1. Функция множества μ называется неопределенной мерой. Если она удовлетворяет 4 аксиомам.

А 1. Нормальности $\mu\ (I) = 1$;

А 2. Монотонности $\mu\ (L_1) \le \mu\ (L_2)$, если $L_1 \subset L_2$;

А 3. Самодуальности $\mu\ (L) + \mu\ (\bar{L}) = 1$; для $\forall L \in \Delta$;

А 4.Счетной субаддитивности–для любой счетной последовательности L_i имеем:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(L_i) \qquad (3.27)$$

Функция распределения неопределенности на пространства (Γ, Δ, μ) задается следующим образом:

$$\Phi(\xi) = \mu(\xi \le x) \qquad (3.28)$$

а является таковой, если и только если она является возрастающей везде, кроме точек: $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x) = 1$.

Оператор математического ожидания неопределенной переменной ξ был определен в виде

$$F(\xi) = \int_{0}^{+\infty}\mu(\xi \ge \gamma)dx - \int_{-\infty}^{0}\mu(\xi \le \gamma)dx \qquad (3.29)$$

Вычислим с помощью этой формулы матожидание ξ, если функция принадлежности задана как следующее линейное распределение:

$$\boldsymbol{\Phi(x)}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x<a;}\\ \dfrac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}} & \boldsymbol{a\le x\le b;}\\ -1 & \boldsymbol{x>b.}\end{cases} \qquad (3.30)$$

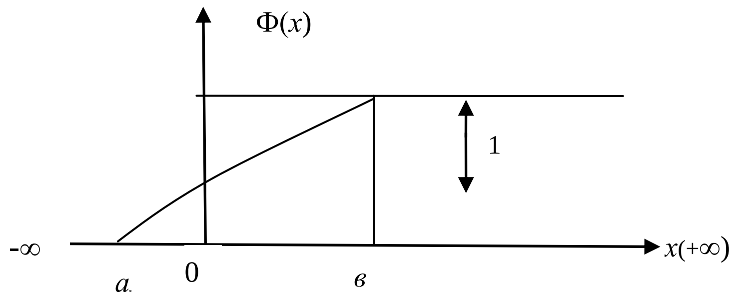


Рис. 3.4.

Область интегрирования -∞ < x < + ∞ разобьем на 4 подобласти: [0, *в*]; [*в*, ∞]; [-∞, *a*]; [*a*, 0].

Интеграл (3.31) запишем в виде:

$$F(\xi)=\int_{0}^{+\infty}(1-\Phi(x)\cdot dx-\int_{-\infty}^{0}\Phi(x)\cdot dx=\int_{0}^{b}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)\cdot dx+\int_{0}^{+\infty}(1-1'')dx-$$

$$-\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx-\int_{a}^{0}\frac{x-a}{b-a}\cdot dx=b-\frac{\frac{b^2}{2}-ab}{b-a}+\frac{\frac{a^2}{2}-a^2}{b-a}=\frac{b^2-a^2-0,5(b^2-a^2)}{b-a}=\frac{b-a}{2}$$

Если $\Phi_\xi(x)$ и $\Phi_\eta(x)$ – функции распределения ξ и η, то перекрестная энтропия вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{D}(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\boldsymbol{\Phi}_\xi(\boldsymbol{x})\ln\frac{\boldsymbol{\Phi}_\xi(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\Phi}_\eta(\boldsymbol{x})}\right)+\left(1-\boldsymbol{\Phi}_\xi(\boldsymbol{x})\ln\frac{1-\boldsymbol{\Phi}_\xi(\boldsymbol{x})}{1-\boldsymbol{\Phi}_\eta(\boldsymbol{x})}\right)\right)\boldsymbol{dx} \qquad (3.31)$$

Заметим, что в этой теории вид функций распределения неопределенных переменных – форма функций принадлежности считается известной. В нашем представлении принцип Джейнса фактически дает форму функции принадлежности, которая определяется видом когнитивной функции.

Кроме того авторы вводят квадратичную энтропию Q(ξ) неопределенной переменной ξ:

$$\boldsymbol{Q(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)(1-\Phi(x))dx} \qquad (3.32)$$

В качестве примера можно показать, что для

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & x<0;\\ 0,5\le x<b & a\le x<b;\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

$$Q(\xi)=\int_a^b 0,5(1-0,5)dx=\frac{b-a}{4}$$

Неопределенные переменные ξ_1, ξ_2,…ξ_m называются независимыми, если

$$M\left(\bigcap_{i=1}^{m}\xi_i\in B_i\right)=\min_{1\le\hat{1}\le m}M\left(\xi\in B_i\right) \tag{3.33}$$

Если ξ - неопределенная переменная с неопределенным распределением $\Phi(x)$, тогда энтропия ξ определена соотношением:

$$H(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}S\left(\Phi(x)\right)dx$$

где $S(n)=-n\ln n-(1-n)\ln(1-n)\cdot S(n)$ строго вогнутая функция.

Авторы вводят перекрестную энтропию (cross-entropy) неопределенных переменных.

$$D(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}T\left(M(\xi\le x);M(\eta\le x)\right)dx \tag{3.34}$$

где $T(\xi,\eta)=\xi\ln\frac{\xi}{\eta}+(1-\xi)\ln\frac{1-\xi}{1-\eta}\quad 0\le\xi\le 1:0\le\eta\le 1.$

Для функции $Q(\xi)$ вводится принцип максимума квадратичной энтропии в диапазоне $\pi_i\in[0,1]$. Все функции чувствительности имеют области положительных и отрицательных значений.

Среди рассмотренных аналогов энтропии с чисто «технической» точки зрения наиболее удобной является функция H_A, поскольку она приводит к легко разрешимым линейным соотношениям при построении моделей функций предпочтения на основе вариационных принципов.

Однако, соображения «технического» характера не являются в данном случае преобладающими. Нужны более веские основания каждый раз, когда речь идет о выборе критерия (или критериев), с которыми мы собираемся связать внешние проявления психики, такие, в частности, как процесс формирования предпочтений, предшествующий принятию решений.

Почему мы выделяем формирование предпочтений как основной этап в процессе принятия решений?

Если предпочтения сформированы, то задача выбора фактически решена.

Для реализации выбора необходимо еще волевое усилие и здесь естественным образом возникает вопрос, можно ли в рамках развиваемого формализма формализовать функционирование «Воли» и, вообще, что такое «Воля» с позиции энтропийной парадигмы. В самом грубом приближении «Воля» трактуется, как способность принимать решения при высокой степени неопределенности, то есть при высоком значе-

нии субъективной энтропии. Конечно, такое определение не полно и входит в противоречие с такими, например, факторами, как неосмотрительность, осторожность, безответственность. Процесс формирования предпочтений является иерархическим, «гетерогенным» и включает множество факторов, этапов, действий: опыт, интуицию, этические соображения, решения различных оптимизационных задач, учет ограничений и т.д.

Априорно ясно, что выбор возможен, когда предпочтительность альтернатив имеет видимые, ясно ощущаемые различия. Энтропия или ее аналоги являются критериями, сигнализирующими об упомянутом различии.

Есть основания считать, что роль энтропии этим не исчерпывается и, что она является величиной отражающей состояние психики и динамику психических, поведенческих явлений. Например, некоторые авторы [168] связывают энтропию с дихотомией «свободы» и «необходимости» тем самым предполагается, что энтропия отражает и регулирует на глубинном уровне функционирование психики.

3.5. Субъективная информация. Энтропия путей

Для того, чтобы продолжить изучение критериев неопределенности, необходимо определить понятие *субъективной информации*.

Воспользуемся Шеноновской энтропией. Пусть A есть некоторое сообщение, или событие, в результате которого изменяется распределение предпочтений субъекта, а также, возможно, состав множества альтернатив $S_a|_{\sigma_0}$.

В качестве сообщения (события) A может выступать изменение ресурсного состояния, изменение полезностей — распределения полезностей, любые качественные изменения в окружении субъекта и в самом субъекте, например, изменение потребностей и вкусов с возрастом, политические изменения, изменения конъюнктуры, конкуренция и многое другое, что затрагивает, так или иначе, интересы субъекта.

Введение, *субъективной энтропии* и *субъективной информации* позволяет любые события, в том числе и, не поддающиеся количественному описанию, отразить некоторой количественной мерой через влияние их на предпочтения субъекта.

Поскольку мы ввели выше понятия множества альтернатив и функций предпочтения, определенных (субъектом) на этом множестве, постольку прослеживая изменения, происходящие в результате сообщения A, мы получаем возможность каждому такому событию поставить в соответствие, некоторое число, которое будем называть *субъективной информацией*. Что касается распределения предпочтений, то оно определяется исключительно на субъективном уровне. Для выяснения величины предпочтения существуют «прямые» методы тестирования субъекта и «косвенные» методы – экспертных оценок, наблюдения за поведением субъекта и др.

В целом, однако, измерения предпочтений представляют чрезвычайно сложную проблему, если исключить прямой «опрос» субъекта, что далеко не всегда возможно. Нет уверенности в «искренности» - правдивости субъекта, заранее неизвестно, каково влияние на результаты тестирования сопутствующих обстоятельств.

Однако, главным остается убеждение что каждый раз на множестве $S_a|_{\sigma_0}$ распределение предпочтений существует и определяет поведение субъекта.

В условиях, когда «прямое» измерение является трудной, а часто, и неразрешимой задачей, важной задачей является прогнозирование распределения предпочтений, чему в основном и посвящена настоящая работа. В основу разрешения этой задачи положены определенные априорные предположения, основным из которых является «принцип максимума субъективной энтропии», являющийся модификацией принципа Джейнса [282, 283], а также принцип «Infomax» Линскера [255].

Положительным моментом в связи с введением формализованных понятий предпочтений I и II рода является возможность построения моделей функций предпочтения субъектов и групп субъектов на основе упомянутых вариационных принципов.

В свою очередь наличие моделей функций предпочтения открывает возможности дальнейшего исследования, прогнозирования поведения субъектов, а, следовательно, опосредованного *управления активными системами через управление предпочтениями*. Пусть новая функция предпочтения субъекта после сообщения A есть $\pi(\sigma_i|A)$ и соответствующая энтропия

$$\boldsymbol{H}_\pi(\pi|\boldsymbol{A}) = -\sum_{\boldsymbol{t}=1}^{\boldsymbol{K}} \pi(\boldsymbol{\sigma_i}|\boldsymbol{A}) \ln \pi(\boldsymbol{\sigma_i}|\boldsymbol{A}) \tag{3.35}$$

Если исходная энтропия есть

$$\boldsymbol{H}_\pi = \boldsymbol{H}(\pi) = -\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{K}} \pi(\sigma_{\boldsymbol{i}}) \ln \pi(\sigma_{\boldsymbol{i}}),$$

то определим субъективную информацию, которая содержится в сообщении (событии) A для данного субъекта, формулой

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{subj}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{H}(\pi) - \boldsymbol{H}(\pi \mid \boldsymbol{A}). \tag{3.36}$$

Определение информации по формуле (3.39) недостаточно универсально. В некоторых случаях оно не улавливает происходящие изменения. Такие случаи иллюстрируются на рис. 3.5.

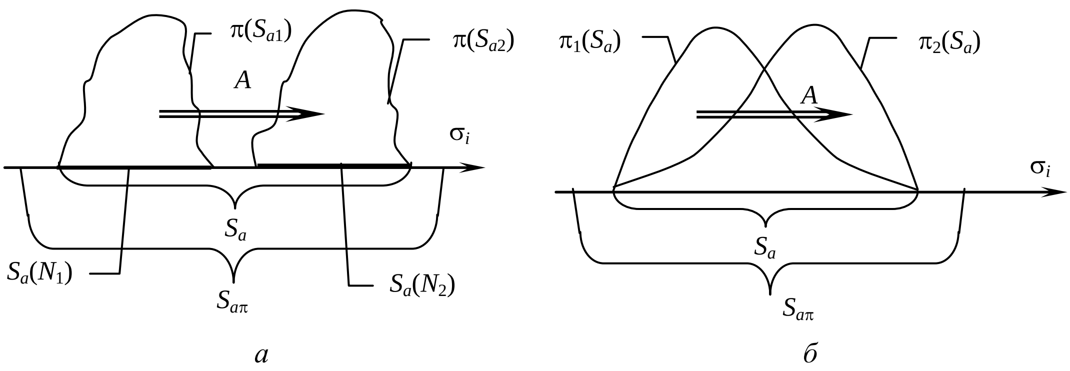


Рис. 3.5

На схеме (a) формы двух распределений предпочтений одинаковы, но различны области их определения (подмножества $S_{a1}(N) \in S_a; S_{a2}(N) \subset S_a$)

$$\pi(\boldsymbol{S}_{a1}) \sim \pi(\boldsymbol{S}_{a2}); \boldsymbol{S}_{a1}(\boldsymbol{N}_1) \neq \boldsymbol{S}_{a2}(\boldsymbol{N}_2)$$

На схеме (*б*) области определения распределений совпадают (не изменяются, однако изменяется форма распределений, причем таким образом, что энтропия распределения $\pi_1(S_a)$ равна энтропии распределения $\pi_2(S_a)$.

В этих случаях $\boldsymbol{H}_\pi = \boldsymbol{H}_\pi\left(|\,\boldsymbol{A}\right)$ и несмотря на произошедшие изменения информация отсутствует.

Очевидна необходимость обобщения формулы для определения субъективной информации, которое позволит улавливать любые изменения проблемной ситуации, в том числе, «чистый сдвиг», (случай (*а*)) и «деформацию» распределения (случай (*б*)).

Пусть в результате события *A* изменяется

— форма распределения предпочтений,

— множество изучаемых альтернатив.

Если $\pi(\sigma_j, \sigma_i)$ — распределение предпочтений «одношаговых» путей на декартовом произведении $S_{a1}(N_1)\times S_{a2}(N_2|\,A)$, то

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i, \sigma_j) = \pi(\sigma_i)\, \pi(\sigma_j|\, \sigma_i)}, \tag{3.37}$$

где $\pi(\sigma_j|\,\sigma_i)$ распределение, нормированное условием:

$$\sum_{j=1}^{N_2}\pi\left(\sigma_j\,|\,\sigma_i\right)=1;\;(\forall i\in\overline{1,N_1}\,) \tag{3.38}$$

Определим энтропию $\pi(\sigma_j, \sigma_j)$ соотношением:

$$\boldsymbol{H}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\to\boldsymbol{S}_{a2}\,|\,\boldsymbol{A}\right)=-\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right)\ln\pi\left(\sigma_i,\sigma_j\right). \tag{3.39}$$

Легко показать, что

$$\boldsymbol{H}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\to\boldsymbol{S}_{a2}\,|\,\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{H}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\,|\,\boldsymbol{A}\right)+\bar{\boldsymbol{H}}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\to\boldsymbol{S}_{a2}\,|\,\boldsymbol{A}\right), \tag{3.40}$$

где

$$\bar{\boldsymbol{H}}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\to\boldsymbol{S}_{a2}\,|\,\boldsymbol{A}\right)=\sum_{i=1}^{N_1}\pi\left(\sigma_i\right)\tilde{\boldsymbol{H}}_i\left(\pi\,|\,\boldsymbol{A}\right)\text{ и}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_i\left(\pi\,|\,\boldsymbol{A}\right)=-\sum_{j=1}^{N_2}\pi\left(\sigma_j\,|\,\sigma_i\right)\ln\pi\left(\sigma_j\,|\,\sigma_i\right)\text{ для }\forall i\in\overline{1,N_1}.$$

Формула (3.40) свидетельствует о том, что субъективная энтропия новой проблемной ситуации при заданном начальном $S_{a1}(N_1)$ и конечном $S_{a2}(N_2)$ множествах альтернатив равна сумме энтропии начального безусловного распределения $\pi_1(\sigma_i)$ на $S_{a1}(N_1)$ и осредненных по безусловным предпочтениям энтропий условных предпочтений $\pi(\sigma_j|\,\sigma_i)$ на $S_{a2}(N_2|\,A)$.

Субъективную информацию, обусловленную событием *A* определим формулой:

$$\boldsymbol{I}_{subj}=\boldsymbol{H}\left(\pi\right)-\boldsymbol{H}\left(\pi,\boldsymbol{S}_{a1}\to\boldsymbol{S}_{a2}\,|\,\boldsymbol{A}\right). \tag{3.41}$$

Даже если информация, вычисленная по формуле (3.36) равна нулю, информация, определенная по формуле (3.40) может быть отличной от нуля.

Формула (3.40) может использоваться как диагностическое средство при субъективном анализе функционирования активных систем.

Частным случаем события A является сообщение о том, что система находится в состоянии $\sigma_i \in S_a|_{\sigma_0}$. Обозначим $H(\pi|\,A) = H(\pi|\,i)$

$$\boldsymbol{H}\left(\pi \mid \boldsymbol{i}\right) = -\sum_{j=1}^{K} \pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right) \ln \pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right); (\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{K}})$$

Количество информации, которое содержит сообщение о том, что система находится в состоянии σ_i определяется по формуле (согласно 3.36):

$$\boldsymbol{I}_{subj}\,|_i = -\sum_{i=1}^{N} \pi\left(\sigma_i\right) \ln \pi\left(\sigma_i\right) + \sum_{j=1}^{N} \pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right) \ln \pi\left(\sigma_j \mid \sigma_i\right). \qquad (3.42)$$

Обобщая несколько эту формулу, можем написать:

$$\boldsymbol{I}_{subj}\,|_{s,r} = -\sum_{i=1}^{N} \pi_1\left(\sigma_i \mid \sigma_s\right) \ln \pi_1\left(\sigma_i \mid \sigma_s\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{K} \pi_2\left(\sigma_i \mid \sigma_r\right) \ln \pi_2\left(\sigma_i \mid \sigma_r\right). \qquad (3.43)$$

Здесь предполагается, что π_1 и π_2 заданы над различными множествами альтернатив $S_{a2}(N)$ и $S_{a2}(K)$. В частном случае, если π_1 и π_2 совпадают и заданы на одном и том же множестве альтернатив

$$\boldsymbol{I}_{subj}\,|_{s,r} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\pi\left(\sigma_i \mid \sigma_s\right) \ln \pi\left(\sigma_i \mid \sigma_s\right) - \pi\left(\sigma_i \mid \sigma_r\right) \ln \pi\left(\sigma_i \mid \sigma_r\right)\right). \qquad (3.44)$$

Будем считать, что эта величина есть субъективная информация, связанная с переходом системы из состояния σ_s в состояние σ_r — «*информация связи состояний*». Теперь мы можем говорить об «*энтропийной эквивалентности*» двух состояний σ_s и σ_r, если $I_{subj}\,|_{s,r} = 0$, или, другими словами, перевод из состояния σ_s в состояние σ_r: $\sigma_s \to \sigma_r$ не изменяет степени неопределенности предпочтений субъекта.

Пользуясь военной терминологией, можем сказать, что переход командира с одного наблюдательного пункта на другой не изменяет его представлений об обстановке.

В частности, очевидно, что при $N = K$ и однородном распределении $\pi(\sigma_j, \sigma_i)$ перевод «наблюдательного пункта» в любую «точку» $\sigma_i \in S_a$ не порождает новой информации и система в таком состоянии «незаметна» извне.

Рассмотрим простые примеры иллюстрирующие сказанное выше.

Пусть S_a: (σ_1, σ_2, σ_3, σ_4) и распределение предпочтений однородно. Так как $N = 4$, то $\pi(\sigma_i) = 0{,}25$; $\forall i \in \overline{1,4}$ (рис. 3.6).

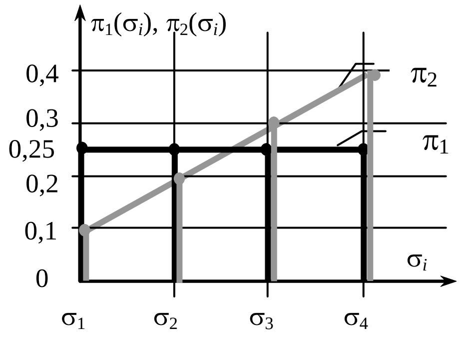


Рис.3.6

Энтропия абсолютных предпочтений максимальна и равна ln$N$ = ln4 = 1,38629… Пусть в результате события A предпочтения перераспределялись и $\pi_2(\sigma_i| A)$ стало «линейной» функцией i, а именно $\pi_2(\sigma_1 | A) = 0,1$; $\pi_2(\sigma_2 | A) = 0,2$; $\pi_2(\sigma_3 | A) = 0,3$; $\pi_2(\sigma_4 | A) = 0,4$. ($\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$), а множество альтернатив S_a не изменилось. Легко подсчитать что $H(\pi| A) = 0,546817…$ Таким образом, можно сказать, что субъективная информация, соответствующая событию A равна

$$\boldsymbol{I_{subj} = H(\pi_1) - H(\pi_2| A) \cong 1,38629… - 0,546814… = 0,839480…}$$

Пусть теперь исходное однородное распределение в результате события A сохраняется: $\pi(\sigma_i) = 0,25$, (количество альтернатив N остается тем же), но происходит «сдвиг» всего множества S_a на «два шага» вправо, то есть S_{a2}: (σ_3, σ_4, σ_5, σ_6). Альтернативы σ_1 и σ_2 исключаются и добавляются альтернативы σ_5 и σ_6, причем все альтернативы являются возможными и достижимыми (рис.3.7)

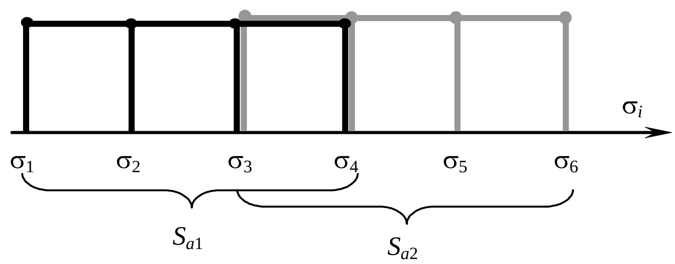


Рис. 3.7

В этом случае вычисления по формуле (3.42) дают нулевую информацию. Другими словами, событие A как бы безразлично для субъекта: обе проблемные ситуации энтропийно эквивалентны.

Применение формулы (3.44) дает в последнем случае информацию, отличную от нуля. Эта информация зависит от матрицы условных предпочтений. Рассмотрим два варианта. Пусть сначала условные предпочтения всех частных переходов ($i \to j$) одинаковы, то есть матрица $\|\pi(\sigma_j| \sigma_i)\|$ имеет вид:

j/i	1	2	3	4
3	0,25	0,25	0,25	0,25
4	0,25	0,25	0,25	0,25
5	0,25	0,25	0,25	0,25
6	0,25	0,25	0,25	0,25
Σ	1,0	1,0	1,0	1,0

Для каждого i найдем

$$\tilde{H}_i(\pi \mid A) = 4\pi(j \mid i)\ln\pi(j \mid i) = 4\cdot 0,25\ln 0,25 = 1,386294...$$

Далее

$$\bar{H}(\pi, S_1 \to S_2 \mid A) = \sum_{i=1}^{4}\pi_1(\sigma_1)\tilde{H}_i(\pi \mid A) = 4\cdot 0,25\cdot 1,386294... = 1,386294...$$

Это означает, что порождаемая информация снова равна нулю: $I_{subj}(A) = 0$.

Пусть теперь для субъекта небезразлично, из какого состояния («пункта отправления») в какое состояние («пункт прибытия») осуществляется переход, другими словами, «пути» ими оцениваются по-разному (предпочтения переходов различны). Рассмотрим следующую матрицу условных предпочтений

j/i	1	2	3	4
3	0,1	0,1	0	0
4	0,2	0,2	0,2	0
5	0,3	0,3	0,3	0,4
6	0,4	0,4	0,5	0,6
Σ	1,0	1,0	1,0	1,0

Расчеты дают следующие значения $\tilde{H}_i(\pi \mid A)$

i	1	2	3	4
$\tilde{H}_i(\pi \mid A)$	0,546514...	0,546817...	1,04454...	0,673016...

Тогда

$$\bar{H}(\pi, S_{a1} - S_{a2} \mid A) = 0,25\cdot 0,546514... + 0,25\cdot 0,546814... +$$
$$+0,25\cdot 1,04454... + 0,25\cdot 0,673016... \cong 0,702796...$$

и, соответственно, информация

$$I_{subj}(A) = 1,38629... - 0,702796... = 0,6833494...$$

Энтропия пути обладает свойствами иерархической аддитивности

$$H(\pi(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iN})) = H(\pi(\sigma_{i1})) + H(\pi(\sigma_{i2} \mid \sigma_{i1})) + \qquad (3.45)$$

$$+H\left(\pi\left(\sigma_{i3}\,|\,\sigma_{i1},\sigma_{i2}\right)\right)+\ldots+H\left(\pi\left(\sigma_{iN}\,|\,\sigma_{i1},\sigma_{i2},\ldots,\sigma_{iN-1}\right)\right).$$

Эта функция соответствует случаю, когда в результате каждого частного перехода множество альтернатив S_a не изменяется. В случае, если факторизация является *марковской*, энтропия пути представляется формулой:

$$H\left(\pi\left(\sigma_{i1},\sigma_{i2},\ldots,\sigma_{iN}\right)\right)=H\left(\pi\left(\sigma_{i1}\right)\right)+H\left(\pi\left(\sigma_{i2}\,|\,\sigma_{i1}\right)\right)+ \quad (3.46)$$

$$+H\left(\pi\left(\sigma_{i3}\,|\,\sigma_{i1}\right)\right)+\ldots+H\left(\pi\left(\sigma_{iN}\,|\,\sigma_{iN-1}\right)\right).$$

Определим условную субъективную энтропию в случае «пути» произвольной длины N:

$$\boldsymbol{Tr(N)=\sigma_{i1}\rightarrow\sigma_{i2}\rightarrow\sigma_{i3}\rightarrow\ldots\rightarrow\sigma_{iN-1}\rightarrow\sigma_{iN}=(\sigma_{i1},\sigma_{i2},\ldots,\sigma_{iN})}.$$

При этом вдоль пути число альтернатив либо сохраняется, либо может изменяться. Так, например, если после каждого шага исключается уже пройденное состояние или альтернатива, соответствующая уже решенной проблеме, размерность S_a сокращается на единицу. В данном случае после k шагов в распоряжении субъекта остается $M = N - k$ альтернатив, если, конечно, S_a не пополняется другими альтернативами. Для пути длиной N перед последним шагом множество альтернатив сократится до одного элемента .Для пути длиной K перед последним шагом множество S_a будет иметь при указанном выше предположении $N - K$ альтернатив. Функцию предпочтения отрезка пути длиной $K - 1 < N$ обозначим через $\pi(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{i,\,K-1})$. Функцию условного предпочтения остающейся части пути

$$\boldsymbol{Tr(N-(K-1))=(\sigma_{iK},\sigma_{iK+1},\ldots,\sigma_{iN-1},\sigma_{iN})} \quad (3.47)$$

определим соотношением:

$$\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{K-1}\right)=\frac{\pi\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N\right)}{\pi\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{K-1}\right)}. \quad (3.48)$$

Здесь опущены индексы, обозначающие номера альтернатив и сохранены индексы номера шага. Частную энтропию для пути $Tr(N - (K - 1))$ определим формулой

$$H\left(\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right)\right)=-\ln\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right). \quad (3.49)$$

Для усредненной энтропии по оставшейся части пути $(\sigma_K, \ldots, \sigma_N)$ (по всему множеству отрезков пути $(K < N)$) примем формулу

$$H_{\sigma_K,\ldots,\sigma_N}\left(\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right)\right)=$$

$$=-\sum_{\sigma_K\in S_a}\ldots\sum_{\sigma_N\in S_a}\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right)\ln\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N\,|\,\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right). \quad (3.50)$$

Наконец, в результате усреднения частной энтропии по множеству всех полных путей получаем:

$$H_{\sigma_1,\ldots,\sigma_N}\left(\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N \mid \sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right)\right)=$$
$$=-\sum_{\sigma_1\in S_a}\ldots\sum_{\sigma_N\in S_a}\pi\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_N\right)\ln\pi\left(\sigma_K,\ldots,\sigma_N \mid \sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right). \qquad (3.51)$$

Имеет место соотношение:

$$H_{\sigma_K,\ldots,\sigma_N}\left(\pi\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right)\right)=H\left(\pi\left(\sigma_1,\ldots\sigma_K\right)\right)+$$
$$+\sum_{\sigma_1\in S_a}\ldots\sum_{\sigma_N\in S_a}\pi\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_N\right)\ln\pi\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_{K-1}\right). \qquad (3.52)$$

Откуда следует, что условная средняя энтропия, определенная на множестве путей, меньше полной средней энтропии.

$$H\left(Tr\left(K,N\right) \mid Tr\left(1,K-1\right)\right)\le H\left(Tr\left(K,N\right)\right). \qquad (3.53)$$

В частном случае

$$\pi\left(\sigma_2 \mid \sigma_1\right)=\frac{\pi\left(\sigma_1,\sigma_2\right)}{\pi\left(\sigma_1\right)},$$

где $\pi(\sigma_2 | \sigma_1)$ — условные предпочтения перехода в σ_2, если перед этим был осуществлен переход в σ_1, $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$ — распределение предпочтений путей $\to \sigma_1 \to \sigma_2$ и некоторого начального состояния. $\pi(\sigma_1)$ — предпочтение одношаговых переходов $\to \sigma_1$, откуда можно найти, что

$$H\left(Tr\left(1\to 2\right) \mid Tr\left(\to 1\right)\right)\le H\left(Tr\left(\to 1\to 2\right)\right). \qquad (3.54)$$

Здесь подтверждается положение, что при добавлении условий условная энтропия не увеличивается.

Имеет место важное свойство усредненных энтропий: пусть $\pi_i \in [0, 1]$ и $\eta_i \in [0, 1]$; $\forall i\in\overline{1,N}$ — два нормированных на единицу распределения предпочтений. Тогда:

$$-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i\le-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\eta_i; \qquad (3.55)$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\eta_i\ln\eta_i\le-\sum_{i=1}^{N}\eta_i\ln\pi_i. \qquad (3.56)$$

Эти неравенства следуют из неравенства Йенсена [174] для выпуклых вверх функций, каковой является функция $\ln x$: $M(f(\xi))\le f(M(\xi))$.

Возьмем в качестве ξ_i величину $\dfrac{\eta(\sigma_i)}{\pi(\sigma_i)}$. Условия нормировки примем в виде:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)=\varphi:\sum_{i=1}^{N}\eta(\sigma_i)=\psi$$

Усредняя по $\pi(\sigma_i)$ величину ξ_i, находим:

$$\boldsymbol{M_\pi(\xi_i)=\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\frac{\eta(\sigma_i)}{\pi(\sigma_i)}=\sum_{i=1}^{N}\eta(\sigma_i)=\psi} \tag{3.57}$$

В качестве функции $f(\xi_i)$ возьмем $\ln\frac{\eta(\sigma_i)}{\pi(\sigma_i)}$. Субъективный аналог математического ожидания $f(\xi_i)$ есть:

$$\boldsymbol{M_\pi\left(f(\xi_i)\right)=\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\frac{\eta(\sigma_i)}{\pi(\sigma_i)}\le\ln\left(M_\pi(\xi_i)\right)=\ln\psi} \tag{3.58}$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\frac{\eta(\sigma_i)}{\pi(\sigma_i)}\le\ln\psi=\begin{cases}>0, & \psi>1\\ <0, & \psi<1\\ =0, & \psi=1\end{cases} \tag{3.59}$$

Для единичной нормировки: $\psi = 1$

$$\boldsymbol{-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\pi(\sigma_i)\le-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\eta(\sigma_i)} \tag{3.60}$$

Для случая :$\psi \ne 1$ находим:

$$\boldsymbol{-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\pi(\sigma_i)\le\ln\psi-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\eta(\sigma_i)} \tag{3.61}$$

Выполняя подстановку $\pi(\sigma_i)\ \to\ \pi(\sigma_i|\sigma_j)\quad \eta(\sigma_i)\ \to\ \pi(\sigma_i)$ найдем:

$$\boldsymbol{-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i|\sigma_j)\ln\pi(\sigma_i|\sigma_j)\le\ln\psi-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i|\sigma_j)\ln\pi(\sigma_i)} \tag{3.62}$$

Вычислим среднее с весами $\pi(\sigma_j)$ от правой и левой части неравенства:

$$\boldsymbol{\begin{aligned}&-\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_j)\pi(\sigma_i|\sigma_j)\ln\pi(\sigma_i|\sigma_j)\le\ln\psi\sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)-\\&-\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_j)\pi(\sigma_i|\sigma_j)\ln\pi(\sigma_j)\end{aligned}} \tag{3.63}$$

так как $\sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)=\varphi$, то предыдущее неравенство дает:

$$\boldsymbol{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_i,\sigma_j)\ln\pi(\sigma_i|\sigma_j)\le\varphi\ln\psi-\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\pi(\sigma_i)} \tag{3.64}$$

Эти соотношения полезны при рассмотрении двухслойной модели формирования предпочтений.

Поскольку это будет необходимо в дальнейшем, рассмотрим еще одну меру информации, а именно «различающую информацию Кульбака-Лейблера», которая в терминах настоящей работы дается формулой

$$\boldsymbol{I_k(\pi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\frac{\pi(\sigma_i)}{\eta(\sigma_i)}} \tag{3.65}$$

Если $\eta(\sigma_i)$ - однородное распределение, ($\eta(\sigma_i)$ = N^{-1}), то

$$\boldsymbol{I_k(\pi,\eta) = \ln N - H_\pi} \tag{3.66}$$

Если нормировки обеих распределений неединичные и оба распределения однородны, то

Если же $\eta(\sigma_i)$ - сингулярное распределение,

$$\boldsymbol{I_k\ (\pi,\ \eta) = \varphi\ \ln\ \frac{\varphi}{\psi}} \tag{3.67}$$

Если нормировки единичны $\boldsymbol{\varphi=\psi=1}$,то

$$\boldsymbol{I_k\ (\pi,\ \eta) = 0} \tag{3.68}$$

Введенная выше безусловная энтропия совпадает с отрицательной информацией Кульбака-Лейблера с точностью до постоянного слагаемого для однородного $\eta(\sigma_i)$.

С распределением Кульбака-Лейблера связывают вариационный принцип «Infomax» Линскера [190].

В монографии [231] и в данном разделе мы также определили информацию «связи» состояний – альтернатив. В дальнейшем, когда будут рассматриваться конфликты предпочтений, нам также потребуется критерий Кульбака-Лейблера.

3.6. Экстремальные принципы субъективного анализа. Канонические распределения предпочтений

Существует формальная аналогия между распределением предпочтений и распределениям вероятностей. Это позволяет использовать многие результаты теории вероятностей, математической статистики, теории информации, давая им, однако, каждый раз истолкование в терминах распределения предпочтений и субъективного анализа в целом.

В основании многих разделов науки лежит принцип оптимальности. В механике – это принцип Гамильтона – Остроградского, ранее принципы Мопертью, Даламбера-Лагранжа, Журдена, в оптике – принцип Ферма. Согласно с Эйлером «*во всем, что нас окружает, виден смысл какого-либо максимума или минимума*».

Уравнения движения, следующие из законов Ньютона, как и уравнения Эйнштейна, могут быть получены на основе вариационного принципа, наименьшего действия Гамильтона – Остроградского [50].

Есть два способа введения экстремальных принципов. Первый можно назвать феноменологическим, когда в начале для изучаемого явления на основе экспериментальных данных строится математическая модель, а затем подбирается такая формулировка вариационной задачи, чтобы уравнения феноменологической модели совпадали с необходимыми условиями для получения стационарного решения вариационной задачи, в частности, с уравнениями Эйлера – Лагранжа.

Имеет место, например, следующая теорема [141].

Пусть A – положительный оператор, где $u \in L^2(R)$, $L^2(R)$ – элемент гильбертового пространства. Если уравнение

$$\boldsymbol{Au - f = 0} \tag{3.69}$$

имеет решение, то это решение сообщает функционалу

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) \tag{3.70}$$

минимальное значение. Обратно, элемент гильбертова пространства, реализующий минимум функционала (3.70), удовлетворяет уравнению (3.69).

В формуле (3.70) (u, v) – означает скалярное произведение. Если u и f - вещественные функции, то вместо (3.70) можно записать

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{u}) - 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}) \tag{3.71}$$

Кроме того, если оператор A – положительный: $(Au, u) > 0$, то уравнение (3.69) имеет единственное решение. Видим, что, как минимум, в данном случае «единственность» и «оптимальность» тесно связаны.

Утверждение, что всякое единственное решение является оптимальным в смысле некоторого функционала неочевидно.

К феноменологическому подходу можно отнести механику в форме Ньютона. Вариационные принципы, в частности, принцип Гамильтона – Остроградского, появились позже.

Известны работы Л.И. Седова, где он стремился получить уравнения механики жидкости и газа исходя из вариационного принципа, аналогичного принципу Гамильтона. Сложность состояла в том, что соответствующие процессы являются диссипативными.

Для некоторых классов диссипативных систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип и, соответственно, квазиконсервативная механика были предложены автором [81, 85]. Интересной в связи с этими работами является задача построения модели механики сплошной среды на основе методов статистической механики в основе, которой лежат модели неконсервативной псевдо - Гамильтоновой механики.

В дальнейшем соответствующая вариационная задача приобретает самостоятельное значение как экстремальный принцип.

Другой путь состоит в постулировании «a priory» определенного экстремального принципа, основанного на убеждении, что «*во всем виден смысл какого-нибудь максимума или минимума*». После того, как экстремальный принцип сформулирован, строятся модели, которые из него следуют, исследуются их свойства и делаются выводы на предмет их соответствия имеющимся экспериментальным данным, а также «здравому смыслу» и накопленному к данному моменту опыту.

Подобной точки зрения придерживаются авторы работ [48, 49, 50].

Именно такой путь – постулирование вариационных принципов используется в настоящей работе, в частности еще и потому, что пока мы не располагаем математическими моделями функционирования человеческой психики, для которых можно было бы подобрать соответствующую вариационную задачу.

Используется следующая схема построения теории:

— постулирование априорного вариационного принципа;

— получение из этого принципа математической (количественной) модели;

— экспериментальная проверка модели с целью обосновать правдоподобие получаемых с ее помощью выводов и, может быть, частичной идентификации для уменьшения произвола, содержащегося в модели.

В настоящей работе в основном используются принцип максимума энтропии Джейнса и принцип максимума информации Кульбака - Лейблера. Особенность в данном случае состоит в том, что соответствующие функционалы задаются на распределениях предпочтений. Рассматриваются различные варианты указанных принципов для различных классов задач.

В ряду вариационных принципов, которые также имеют нетривиальную проекцию в психологию, назовем принцип Пригожина - Гленсдофра и принцип Циглера для скорости производства энтропии.

Принцип Джейнса, разработанный в интересах физики, получил более широкую область применения, и вышел далеко за рамки физических проблем. Известны работы по использованию энтропийного подхода в экономике, теоретической географии, демографии, биологии, при анализе социальных проблем [37, 40, 136, 137, 157, 158, 223, 242, 266]. Он упоминается в книге основоположника синергетики Хакена [192]. Концепция энтропии или «ожидаемой информации», связанная с потерями при агрегировании в экономических задачах изучалась в работе [295]. Было бы интересно проследить, как отражаются на энтропии предпочтений и энтропии организационных структур процессы «реструктуризации» в хозяйстве и экономике, как связаны с изменениями энтропий явления в экономике. В биологии используется принцип оптимального строения организмов: «принцип максимума репродуктивного потенциала».

Субъективная природа средних значений и соответствующих распределений вероятностей, вопрос о том, как обращаться с энтропией при осуществлении количественного анализа в социально-экономических системах обсуждался в работе [260]. Энтропия использовалась при анализе систем с максимальной полезностью [271].

Мы уже упоминали работы Левича, на которые автор ссылался в своей предыдущей книге. В последнее время появился ряд работ Левича, Голицына, Петрова, развивающих энтропийную парадигму [48, 49, 50].

Представляется, что наибольшее использование вариационные энтропийные принципы нашли в теории информации. В книге Стратоновича изучаются детально три вариационные задачи, проводится термодинамическая аналогия. Автор в значительной мере опирается на материалы этой монографии.

В книге Вильсона [40] вариационный принцип, в основе которого лежит энтропийный подход, применяется к моделированию сложных транспортных систем, к решению задач логистики.

Об энтропии, как одном из фундаментальных критериев развития цивилизационных процессов, идет речь в работах Плахотникова [168, 169], который связывает с энтропией категорию свободы.

В работе Иваненко и Лобковского [77] содержится новый взгляд на проблему неопределенности в системах принятия решений и предложен подход к определению взаимозависимости структуры критерия неопределенности и функции потерь. Утверждается, что в определенных случаях он представляет собой энтропию.

В этом разделе мы приведем более подробный анализ некоторых работ, имеющих отношение к энтропийной парадигме. Начнем с работы Левича [125]. Опираясь на теорию категорий, рассмотрим оптимизационный принцип, который может служить основанием для выбора вида критерия оптимальности в нашем случае.

Рассмотрим некоторые основные понятия теории категорий, следуя [125].

3.7. Элементы теории категорий и ее приложение в теории активных систем

3.7.1. Вводные замечания к анализу активных систем

При формулировке вариационных задач по отысканию функций предпочтений возникает вопрос об обосновании вариационного принципа и, соответственно, критерия оптимальности.

Принцип оптимальности, постулируемый в терминах теории категорий, является более общим и «первичным» по отношению к вариационным принципам в частных областях науки, которые могут быть интерпретированы в терминах этой теории. Этот принцип гласит, что осуществляются те состояния системы, **эквиструктура которых экстремальна или иначе, предпочтительны системы с экстремальным инвариантом, или, что эквивалентно, с экстремальным (максимальным) количеством преобразований (морфизмов), изменяющих состояние, но не изменяющих структуру системы**.

Конечно, переход на более высокий уровень обобщения принципиально не спасает положения, поскольку постулируя более общий принцип, мы как бы берем на себя большую ответственность за вопрос об глубинных основаниях этого нового постулата.

Как и в отношение какого – либо частного вариационного принципа, здесь снова возникает и остается открытым вопрос, ответ на который снова нужно искать.

Очевидный недостаток приведенной формулировки принципа – его «статичность» - речь идет о фиксированном состоянии, которое «осуществляется». Если эта тенденция действует постоянно, то каким было состояние ранее, до перехода в новое «экстремальное» состояние.

Желательно было бы постулировать принцип, который давал бы возможность говорить об экстремальных свойствах перехода из состояния в состояние.

3.7.2. Определение категории

Категория K есть совокупность двух классов: класса объектов ($Obi\ K$) и класса морфизмов – преобразований ($Mor\ K$), для которых справедливо следующее [Мат. энциклопедия]:

1. Каждой паре объектов A, $B \in Obi\ K$ соответствует некоторое множество морфизмов $M_K(A, B) \in Mor\ K$.
2. Каждый морфизм принадлежит одному и только одному из множеств $M_K(A, B)$.
3. В классе морфизмов $Mor\ K$ введен частичный бинарный внутренний закон композиции: произведение $\alpha \times \beta$, где $\alpha \in M_K(A, B)$; $\beta \in M_K(C, D)$ определено только тогда, когда объект B совпадает с объектом C. В этом случае морфизм $\alpha \cdot \beta = \alpha \times \beta \in M_K \cdot (A, D)$. Композиция морфизмов ассоциативна.
4. В каждом множестве морфизмов $M_K(A, A)$ содержится тождественный морфизм I_A объекта A такой, что $\alpha\, I_A = \alpha$; $I_A\beta = \beta$ для $\forall\ \alpha \in M_K(x, A)$ и $\forall\ \beta \in M_K(A, y)$ где $A, x, y \in Obi\ K$.

Подкатегорией L категории K называется область, для которой

1. $Obi\ L \subset Obi\ K$;

2. $M_L(A, B) \subset M_K(A, B)$

3. Композиция морфизмов, принадлежащая L есть композиция этих же морфизмов из K.

4. Единичный морфизм из L, есть единичный морфизм из K.

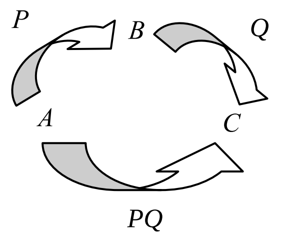
Теория категорий рассматривает структурированные множества и преобразования этих множеств, в том числе определяется «сила» структур, кардинальные структуры бунево-значных множеств [6], понятие о количестве, как свойстве преобразований множеств, инварианты математических структур.

3.7.3. Соответствия и отображения

Рассмотрим, следуя работе [125], взаимосвязи между множествами A и B. Определим декартово произведение множества A и B как совокупность всех упорядоченных пар $(a, в)$; $a \in A$; $в \in B$ и обозначим его $A \times B$.

Соответствием S из A в B называют подмножество произведения $A \times B$.

Композицию соответствий P: $A \to B$ и Q: $B \to C$ обозначим PQ: $A \to C$.



Соответствие S^*: $B \to A$ является сопряженным к S: $A \to B$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in S^*.$$

Соответствия могут быть разного типа и обладать следующими каноническими свойствами:

1. S: $A \to B$ *всюду определено*, если $\forall a \in A$ имеет непустой образ $b \in B$. $\forall a \in A$ могут иметь более чем один образ, но в A нет элементов (прообразов) не имеющих образов в B.

2. S: $A \to B$ *сюрьективно*, если $\forall b \in B$ имеет прообраз по S $a \in A$ (хотя бы один).

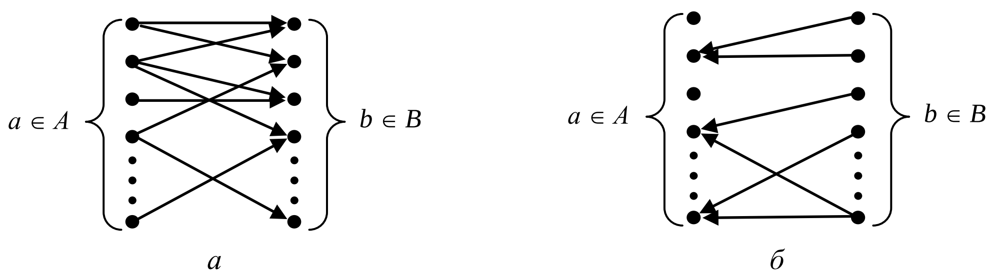


Рис. 3.8

3. S: $A \to B$ *функционально*, если $\forall a \in A$ либо не имеет, либо имеет единственный образ по S $b \in B$.

На рисунке видно, что некоторые из элементов в A не имеет образа в B, Остальные $a \in A$ имеют единственный образ. При этом один и тот же элемент $b \in B$ может быть образом нескольких элементов $a \in A$.

4. S: $A \to B$ *инъективно*, если $\forall b \in B$ или не имеет прообразов, или имеет единственный прообраз в A.

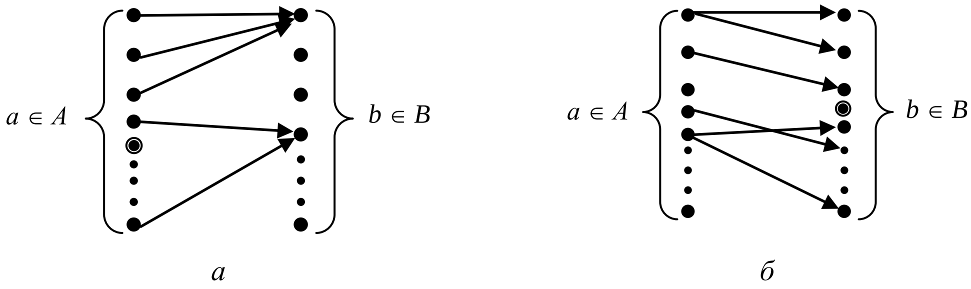


Рис. 3.9

Из рисунка 3.6 *б* видно, что некоторые элементы (в данном случае один элемент) B не имеют прообразов в A, остальные элементы B имеют по одному прообразу.

Важным понятием является «*отображение*».

Отображения — это соответствия, наделенные более чем одним из перечисленных выше свойств.

*Всюду определенное,*и *функциональное соответствие называется* «*функцией*» или однозначным отображением.

Всюду определенное, функциональное и инъективное соответствие называется «*инъективным*» отображением или *инъекцией*.

Всюду определенное, функциональное и сюръективное соответствие называется «*сюръективным*» отображением или *суръекцией*.

Отображение, обладающее всеми описанными свойствами, называется *взаимно-однозначным* отображением или *биекцией*.

Характерным типом отношений являются бинарные отношения, кратко описанные выше в связи с теорией полезности.

Отношения не предполагают преобразования — морфизма. Частными случаями отношений являются *толерантность* (Т) и *эквивалентность* (Е).

Толерантностью T на A называют рефлексивное и симметричное отношение. Подмножество $K \subset A$, обладающее указанными свойствами есть класс толерантности.

Эквивалентность E определяется как рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение E (или ~) на A. Если E — эквивалентность на A, то класс $K \subset A$ эквивалентности по E состоит из всех элементов $\sigma \in A$ E-эквивалентных. Покрытие $K_{E\alpha}$ ($\alpha \in R$) есть разбиение A на классы эквивалентности, если подмножества $K_{E\alpha}$ не имеют общих элементов. Последнее связано с условием транзитивности отношения E.

Ограничимся случаем, когда A конечно, либо счетное. В этом случае количество классов эквивалентности либо конечно, либо счетное. Разбиение A на классы эквивалентности по E обозначается $A_{\sim}$. Выше в разделах о бинарных отношениях были использованы отличные обозначения.

Пусть f есть отображение: $A \to B$. Отношение E_f на A есть эквивалентность, если из $f(\eta) = f(\xi)$, где $(\eta, \xi) \in A$ следует $(\eta, \xi) \in E_f$. Множество всех элементов E_f называется ядром отображения f.

3.7.4. Кардинальная структура множеств, кардинальные числа, инварианты

По определению множества A и B равномощны, если существует биекция f: $A \leftrightarrow B$. Булеан $P(A) = 2^A$ – это совокупность всех подмножеств A. Если $P(U)$ – булеан универсального множества U — множества подмножеств, то отношение ρ на $P(U)$: *множество A равномощно множеству B* есть эквивалентность, поскольку является рефлексивным, симметричным и транзитивным: ($P = \sim (E)$). Эквивалентность $\sim$ (или E) *множества A и B равномощны* ρ определяет на булеане $P(U)$ фактор-множество $P/\rho = P/\sim$.

Элементы фактор - множества булеана $P(U)$ по отношению к «равномощности» называются *кардинальными числами*.

Кардинальным числом множества A — Card A называется класс из фактор - множества $P/\sim$ булеана $P(U)$ по отношению к равномощности, $A \subset U$.

Для множества с конечным числом элементов N кардинальное число равно мощности $\mu(A)$

$$\textbf{Card}\ \boldsymbol{A = N}$$

Если $P(A)$ – множество всех подмножеств A, то множества A и $P(A)$ неравномощны и

$$\textbf{Card}\ \boldsymbol{P(A)} \neq \textbf{Card}\ \boldsymbol{A}.$$

В зависимости от типа отображений осуществляется упорядочение кардинальных чисел. Так, если существует *инъекция* из A в B, то $\mu(A) \leq \mu(B)$, где μ - мощность, и

$$\textbf{Card}\ \boldsymbol{A} \leq \textbf{Card}\ \boldsymbol{B}.$$

Рассмотрим типы и свойства морфизмов.

Морфизм u: $A \to B$ категории K называют мономорфизмом, если для $\forall X \in \text{Obj}\ K$ и $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}\ K$ осуществляющих отображение $X \to A$, выполняется условие: из равенства композиций $\alpha u = \beta u$ следует $\alpha = \beta$.

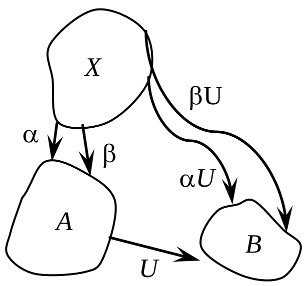


Рис. 3.10

Смысл этого определения станет ясным, если мы вспомним определение композиции морфизмов. Мы видим, что, если композиции морфизмов αu и βu приводят к одному м тому же результату, то и морфизмы α и β должны быть идентичны.

Морфизм u: $A \to B$ категории K называют эпиморфизмом, если для $\forall Y \in \text{Obj}\ K$ и $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}\ K$ осуществляющих отображение $B \to Y$, выполняется условие: из

равенства композиций $u\alpha = u\beta$ следует равенство морфизмов α и $\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Морфизм U называется биморфизмом, если он является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом.

Морфизм : $\upsilon A \to B$ категории K называется изоморфизмом, если существует морфизм υ: $B \to A$ такой, что композиция $\upsilon u = I_B$ и $\nu u = I_A$, где I_B и I_A тождественные морфизмы множеств в самих себя, т. е. такие, когда $\forall a \in A$ отображаются в a, а $\forall b \in B$ отображаются в b.

Справедливы следующие утверждения:

– Инъекция есть мономорфизм, сюръекция есть эпиморфизм.

– Изоморфизмы категории являются ее биморфизмами.

– Если композиция UV — мономорфизм, то морфизм U — мономорфизм.

– Класс всех объектов и класс всех морфизмов произвольной категории K составляют подкатегорию.

Морфизм U: $X \to A$ мажорирует морфизм V: $Y \to A$, если существует морфизм ξ: $Y \to X$ такой, что композиция $\xi U = V$.

Мономорфизмы U и V, каждый из которых мажорирует другой морфизм называются эквивалентными. Среди эквивалентных мономорфизмов U_i: $X_i \to A$ может быть выбран единственный представитель U: $X \to A$, который называется каноническим. Область «отправления» мономорфизма U называется подобъектом A.

Функторы — это отображения, которые применяются к категории, то есть к комплексу {Obj K, Mor K}.

«Одноместным» ковариантным функтором из категории K в категорию L называется отображение F: $K \to L$, для которого выполняются нижеследующие условия:

– Для $\forall\alpha$: $A \to B$, где A, $B \in$ Obj K имеем $F(A) \in$ Obj L.

– Для $\forall\alpha$: $A \to B$, где A, $B \in$ Obj K выполнено условие $F(\alpha) \in H_L(F(A), F(B))$.

– Для всякой «единицы» $I_A \in K$ выполнено соотношение $F(I_A) = I_{F(A)}$.

– Если морфизм $\alpha \in H_K(A, B)$ и морфизм $\beta \in H_K(B, C)$, то $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$, то есть функтор композиции («произведения») морфизмов есть композиция функторов от «множителей» — морфизмов α и β.

Важным понятием теории категорий являются *инварианты* структур. Их можно рассматривать как один из способов обобщения понятия количества.

Роль инвариантов на множествах преобразований была определена, в частности, в работе Колмогорова [103].

Детальный анализ проблемы инвариатнов морфизмов в связи с понятием энтропии как меры априорной неопределенности предполагаемого эксперимента представлен в монографии Фишберна [187].

Основные теоретические сложности здесь связаны с весьма общими предположениями о свойствах множеств альтернатив, в частности об их мощности и мощности фактор - множеств. Ясно, однако, что в приложении к субъективному анализу такая высокая общность может сказаться избыточной ввиду конечной «разрешающей способности» субъекта — количества одновременно изучаемых альтернатив.

3.7.5. Инварианты и вариационный принцип

Инвариантом $I(A|\,X)$ объекта A относительно объекта X называют мощность множества всех морфизмов из X в A. Иными словами, инвариант $I(A|\,X)$ равен кардинальному числу множества морфизмов по соответствию S из X в A:

$$\boldsymbol{I(A|\,X) = \mathbf{Card}\, H_S(X, A)}. \tag{3.72}$$

Пусть $\mu(A)$ — мощность фактор -множества E_A (т. е. множества подмножеств эквивалентности). $\mu(A)$ характеризует количество таких преобразований (морфизмов) системы, которые оставляют ее структуру неизменной, или актуальных возможностей системы, обусловленных ее структурой.

Сложность системы $C(A)$ определяется как логарифм от $\mu(A)$, то есть:

$$\boldsymbol{C(A) = \log \mu(A)}. \tag{3.73}$$

В [96] рассматривается следующий пример.

Пусть $M = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ — множество элементов a_i, на котором задано отношение эквивалентности E_M (~). Объектами теории категорий являются множества $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iN})$, причем некоторые из элементов могут повторяться. Число раз появлений элемента a_j есть $\varphi(a_j)$, тогда мера $\mu(a_j)|_A$ может быть определена соотношением

$$\mu\left(\boldsymbol{a}_j\right)|_A = \frac{\varphi\left(\boldsymbol{a}_j\right)}{\boldsymbol{N}}, \tag{3.74}$$

то есть, как частота. Пусть $(K_1, K_2, \ldots, K_m)$ есть разбиение M на классы эквивалентности ($K_s \in M,\ s \in \overline{1,m}$) по отношению E_M (~). Тогда $\varphi(K_s) = N\mu(K_s)$ — морфизмы.

Между любыми системами размерности N существует $N!$ морфизмов. Сложность в данном случае определяется формулой

$$\boldsymbol{C\left(A\right) = \log \prod_{j=1}^{m} \left(N\mu\left(K_j\right)\right)!} \tag{3.75}$$

Пусть число структур есть X, тогда

$$\boldsymbol{C\left(A\right) = \log XN! - \sum_{j=1}^{m} \log\left(N\mu\left(K_j\right)\right)!} \tag{3.76}$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга:

$$\boldsymbol{\log Q! \approx Q\left(\log Q - 1\right)} + \ln\sqrt{2\pi \boldsymbol{Q}}, \tag{3.77}$$

и считая второе слагаемое малым, получим:

$$\boldsymbol{C\left(A\right) \approx \log X - N\sum_{j=1}^{m} \mu\left(K_j\right) \log \mu\left(K_j\right)}. \tag{3.78}$$

При $X = 1$ получаем информацию по Рашевскому, если отношение эквивалентности E_M задается с помощью графа или алгебраической моделью над M. Если при этом каждый элемент M эквивалентен только сам себе, то сложность модели соответствует шеноновской информации.

Если U морфизм: $A \to B$, то *информация*, связанная с этим морфизмом

$$\mathbf{inf}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}), \tag{3.79}$$

где X — множество инвариантное относительно морфизма U. Наряду с информацией вводится коинформация

$$\mathbf{coinf}(\boldsymbol{U}) = \mathbf{C}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}). \tag{3.80}$$

Имеет место теорема: если морфизм U: $A \to B$ — коинформация, то $C(A) \geq C(B)$, если U: $A \to B$ информация, то $C(A) \leq C(B)$.

Как будет видно из дальнейшего, в определенных случаях уменьшение располагаемых ресурсов приводит к уменьшению энтропии предпочтений, в том числе за счет уменьшения числа альтернатив. Соответствующий морфизм можно трактовать как *коинформацию*. К такому же эффекту может приводить рост потребных ресурсов. Ресурсные изменения противоположного направления можно трактовать как *информацию*.

Количество информации I_A, сопоставляемым данному состоянию системы, называется логарифм инварианта структуры этого состояния, то есть логарифм количества морфизмов из данного объекта A в себя (автоморфизмов). Другими словами — это количество преобразований (автоморфизмов), сохраняющих структуру системы

$$\boldsymbol{I_A} = \mathbf{log\ Card}\boldsymbol{H_s}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}). \tag{3.81}$$

Постулируется следующий принцип оптимальности: *количество информации реальных состояний естественных систем экстремально*.

Этот принцип, хотя и выглядит более общим по сравнению с принципом максимума энтропии Джейнса и соответствующим принципам в теории информации [140] [Стратоновича] или в термодинамике, в действительности содержит мало нового на идеологическом уровне. Немедленно возникает проблема теоретических и эмпирических оснований не менее сложная, а скорее всего, более сложная, чем в случае принципа Джейнса.

Кроме того, видна некоторая ограниченность этого принципа. Выпадает, например, случай систем с переменной структурой (в случае конечномерных объектов, когда $\mathrm{Card}H_s = n$ — систем с переменными n). Для открытых диссипативных систем характерно возникновение структур — самоорганизация и, следовательно, возникновение информации.

Сформулированный принцип носит «статический» характер, то есть он устанавливает, каким должно быть состояние системы, которое, по-видимому, является продуктом «развития», определенного процесса, протекающего во времени, например, перехода из одного *экстремального* состояния в другое, тоже *экстремальное* состояние. Переход может осуществляться по-разному, однако указанный принцип ничего не говорит о свойствах этого процесса.

Теоретические усложнения возникают, если рассматриваемые объекты представляют собой счетные множества и множества большей мощности. Соответствующая теория, основы которой заложены Кантором, Цермело, Геделем, Френкелем и другими, базируется на так называемой аксиоме выбора, теореме Цермело и ряде других фундаментальных утверждений.

В нашем случае мы обойдем эти трудности и ограничимся рассмотрением конечных объектов. Мы имеем некоторое основание поступать так, поскольку представляется маловероятным, чтобы субъект активной системы мог бы одновременно рассматривать

бесконечное число альтернатив и, более того, — просто большое число альтернатив. Множества альтернатив, которые на первый взгляд выглядят как континуальные («чем больше, тем лучше»), в действительности всегда могут быть дискретизированы и представлены конечным множеством. В случае конечного объекта A, имеющего n элементов

$$\mathbf{Card}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}.$$

Существует 16 типов инвариантов в зависимости от того, какому из соответствий отвечают возможные морфизмы.

Выше были описаны четыре типа соответствий: «полная определенность», «сюрьективность», «инъективность», «функциональность», которые обозначаются ниже индексами *p*, *s*, *i*, *f*, соответственно. Если обозначить индексом «0» случай множества произвольных морфизмов, то имеют место следующие 16 вариантов сочетаний индексов:

***0, p, s, I, f, ps, pi, pf, si, sf, if, psi, psf, pif, sif, psif*.**

Отображения, отвечающие комбинации индексов *pf* представляют собой однозначное соответствие и называются «*функциями*», комбинации *psf* отвечают «*сюръекции*», комбинации *pif* — «*инъекции*» и, наконец, комбинации *psif* — взаимнооднозначые соответствия или «*биекции*».

В случае конечного множества A, множество всех подмножеств A, включая пустое подмножество имеет размерность (мощность или кардинальное число)

$$\mu(A) = 2^{n}.$$

Мощность множества всех подмножеств счетного множества, как известно, имеет мощность континуума.

Приведем значения инвариантов для некоторых из упомянутых выше типов морфизмов X в A. Нижний индекс обозначает тип морфизма.

В случае произвольного морфизма («0»):

$$\Im_0(A|\, X) = 2^{\mathrm{Card}A\,\mathrm{Card}X}. \tag{3.82}$$

Для других морфизмов имеют место инварианты:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_p(A\,|\,X)=\left(2^{\mathbf{Card}A}+1\right)^{\mathbf{Card}X};\\
&\mathfrak{I}_f(A\,|\,X)=\left(\mathbf{Card}A+1\right)^{\mathbf{Card}X};\\
&\mathfrak{I}_s(A\,|\,X)=\left(2^{\mathbf{Card}X}-1\right)^{\mathbf{Card}A};\\
&\mathfrak{I}_i(A\,|\,X)=\left(\mathbf{Card}X+1\right)^{\mathbf{Card}A};\\
&\mathfrak{I}_{pf}(A\,|\,X)=\left(\mathbf{Card}A\right)^{\mathbf{Card}X};\\
&\mathfrak{I}_{pi}(A\,|\,X)=\sum_{k=0}^{\mathbf{Card}A}\binom{\mathbf{Card}A}{k}I_{pfs}\left(\mathbf{Card}A\right);\\
&\mathfrak{I}_{si}(A\,|\,X)=\left(\mathbf{Card}X\right)^{\mathbf{Card}A};\\
&\mathfrak{I}_{fsi}(A\,|\,X)=\frac{\left(\mathbf{Card}X\right)!}{\left(\mathbf{Card}X+\mathbf{Card}A\right)!};\\
&\mathfrak{I}_{pfsi}(A\,|\,X)=\left(\mathbf{Card}X\right)!;
\end{aligned}\right\}\qquad(3.83)$$

Рассмотрим случай конечного множества A, содержащего n элементов, распределенных в $k \le n$ классах. Обозначим через $\mathfrak{I}_i$ частный инвариант, соответствующий классу i. Для произвольного автоморфизма $A_i \to A_i$: $\mathfrak{I}_{0i} = 2^{n_i^2}$. Для всего множества

$$\mathfrak{I}_0 = \prod_{i=1}^{k}\mathfrak{I}_{0i} = \prod_{i=1}^{k}2^{n_i^2} = 2^{\sum_{i=1}^{K}n_i^2}. \qquad (3.84)$$

Соответствующая информация

$$I_0 = \log\mathfrak{I}_0 = \left(\sum_{i=1}^{k}n_i^2\right)\log 2. \qquad (3.85)$$

Если основание логарифма 2, то

$$I_0 = \sum_{i=1}^{k}n_i^2. \qquad (3.86)$$

При этом $\sum_{i=1}^{k}n_i = n$. Величину $S = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i}{n}\right)^2$ называют индексом разнообразия Симпсона, Маргалефа, Пиелоу. Тогда информация $I_0 = n^2S$. Если обозначить $\frac{n_i}{n} = p_i$, то $\sum_{i=1}^{k}p_i = 1$. В случае, когда численности всех классов одинаковы: $n_i = \frac{n}{k}$, то $p_i = \frac{1}{k}$ и, следовательно, индекс разнообразия $S = \sum_{i=1}^{k}p_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$, а максимальная информация

$$I_{0\max} = \frac{n^2}{k}.$$

В случае инъекций и сюръекций (автоморфизмов $A \to A$) и наличия k классов, инвариант

$$\mathfrak{I}_{pfs} = \mathfrak{I}_{psi} = \prod_{i=1}^{k} n_i^{n_i}. \tag{3.87}$$

Для биекций

$$\mathfrak{I}_{pfsi} = \prod_{i=1}^{k} n_i\,!$$

Определим в последних двух случаях информацию:

$$I_{pfs} = I_{psi} = \log\left(\prod_{i=1}^{K} n_i^{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{K} n_i \log n_i. \tag{3.88}$$

В случае равномощных классов ($n_i = \dfrac{n}{k}$) имеем

$$I_{pfs} = I_{psi} = n\log\frac{n}{k}. \tag{3.89}$$

Для биекций (автоморфизмов)

$$I_{psi} = \log\prod_{i=1}^{K}(n_i)! \tag{3.90}$$

Если $n_i = \dfrac{n}{k}$, то

$$I_{psi} = k\log\left(\frac{n}{k}\right)! \tag{3.91}$$

В духе сформулированного выше вариационного принципа имеет место, например, оптимизационная задача: найти функцию «видовой структуры» популяции из N особей состоящей из K классов мощностью n_a каждый, которая доставляет экстремум функционалу

$$\mathfrak{I}_{psf(pfi)} = \prod_{a=1}^{K} n_a^{n_a} \tag{3.92}$$

при ограничивающих условиях:

$$\sum_{a=1}^{K} n_a = N;\ \sum_{\grave{a}=1}^{K} R_a n_a = R^{req} \tag{3.93}$$

где R_a — ресурсы, потребляемые каждой особью класса a. Пусть R^{req} — суммарные потребные ресурсы равные располагаемым. Может рассматриваться случай, когда

$$\sum_{a=1}^{K} R_a n_a \le R^{disp}; r^e = \frac{R_a}{R^{disp}} \tag{3.94}$$

Запишем функционал задачи на условный экстремум:

$$\Phi = -\log \Im_{psf(pfi)} - \beta \sum_{a=1}^{K} r_a n_a + \alpha \sum_{a=1}^{K} n_a . \qquad (3.95)$$

После очевидных преобразований получим

$$\Phi = NH_k - N\log N - N\beta \sum_{a=1}^{K} r_a p_a + N\alpha \sum_{a=1}^{K} p_a , \qquad (3.96)$$

где $H_k = -\sum_{a=1}^{K} p_a \log p_a$ — энтропия структуры или («замороженная» информация структуры), $p_a = \dfrac{n_a}{N}$ — вес класса, причем

$$\sum_{a=1}^{K} p_a = 1.$$

Второй член в выражении для Φ — константа (при неизменном N) не влияет на результат решения вариационной задачи и может быть отброшен. Из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} = 0 \qquad (3.97)$$

найдем распределение весов классов p_a в популяции, определяемое потребными для существования ресурсами:

$$p_a = \frac{e^{-\beta \alpha r_a}}{\sum_{q=1}^{K} e^{-\beta \alpha r_q}} \qquad (3.98)$$

Получается приемлемый результат: чем больше потребные для существования ресурсы, тем меньше численность соответствующего класса. Очевидно, что этот результат является лишь весьма идеализированной моделью и носит демонстрационный характер. В дальнейшем мы рассмотрим различные варианты функционалов и различные решения вариационных задач. В выражениях для энтропий будем использовать натуральные логарифмы.

Несмотря на все сказанное выше, включая ссылки на Эйлера, Пуанкаре и др., может быть самый главный вопрос остается без ответа: *«Откуда берется априорно «встроенный» в человеческую психику вариационный принцип выработки предпочтений».*

Как уже было сказано, все ссылки на другие теории явно недостаточны, что относиться и к теории категорий.

С точки зрения автора существует два сценария внедрения в психику обсуждаемого принципа:

сценарий «*а*» – вариационный принцип – результат «творения»;

сценарий «*в*» – вариационный принцип – результат эволюции, естественного отбора.

Автор склонен верить, что верен второй сценарий.

Вообще, если говорить о вере в традиционном смысле, хотел бы сделать небольшое отступление. Можно утверждать, что все без исключения люди – верующие

(belivers): одни верят в то, что «творец» существует, другие верят в то, что его нет. Но никто не может доказать свою правоту по вполне понятным причинам.

Эволюционный сценарий обсуждается в параграфе 3.15.

Предположим, что в определенный момент возникает новая, незнакомая ситуация и субъект рассматривает N стратегий $\boldsymbol{\sigma_i \in S_a (i \in \overline{1, N})}$ и опасна только одна стратегия, например, σ_i сопряжения с гибелью субъекта, в остальных $N - 1$ случаях выбора вероятность гибели равна нулю. Таким образом, если $p(\sigma_i)$ – вероятность гибели, то если $p(\sigma_i) = 1$, $p(\sigma_i) = 0$; ($i = 2, 3...N$). Пусть теперь субъект неосведомлён об этих вероятностях и его условные предпочтения $\boldsymbol{\pi(A|\sigma_i)}$ все одинаковы и, следовательно, равны $\frac{1}{\boldsymbol{N}}$.

Вычисляя полную вероятность гибели по формуле

$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{i=1}^{N} p(\sigma_i)\pi(A|\sigma_i)},$$

найдем

$$\boldsymbol{p(A) = N^{-1}},$$

тогда вероятность выживания

$$\boldsymbol{\bar{A}: p(\bar{A}) - 1 - p(A)}$$

$$\boldsymbol{p(A)} = 1 - \boldsymbol{p(A)} = 1 - \frac{1}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{N} - 1}{\boldsymbol{N}}$$

(Если $N = 2$, $\boldsymbol{p(A)} = 0{,}5$ и $\boldsymbol{p(\bar{A})} = 0{,}5$).

Энтропия условных предпочтений при этом $\boldsymbol{H_\pi(t_1) = \ln N = \max}$.

Совершив удачный выбор σ_j один раз, в следующий раз, если общая ситуация сохраняется, субъект повторит этот же выбор – выберет стратегию σ_i. Предпочтения распределятся тем, что $\boldsymbol{\pi(\bar{A}|\sigma_j) = 1, \pi(A|\sigma_i) = 0; (i \neq j)}$. Таким образом, при повторном выборе $\boldsymbol{H_\pi(t_2)} = 0$ и вероятность имеем $\boldsymbol{p(A)=0}$.

Из этого простого рассуждения следует, что чем больше субъективная энтропия в «незнакомой» ситуации, тем больше вероятность выживания. Это, по-видимому, формирует в психике эволюционно на генетическом уровне «**принцип максимума субъективной энтропии**». Т.е., у кого выбор путей – стратегий в особых (критических ситуациях) был мал, гибнут и вымирают с большей вероятностью. Приведенное рассуждение, конечно, лишь одно из возможных, но оно кажется правдоподобным.

3.8. Предельно-гиперболическое распределение

Можно получить несколько отличную вариационную схему, предполагая, что существуют «сущности» n_i и r_i - назовем n_i численностью класса в популяции, а r_i - численностью единиц ресурсов, (выраженных в дискретных величинах, например, в денежных единицах). Деньги доставляют способ дискретизации ресурсов. Обозначим также $R_i = n_i \cdot r_i$ количество ресурсов, сосредоточенных в классе i. При формировании

функционала учтем нормировочные условия $\sum_{i=1}^{K} R_i = R$ - полный объем ресурсов на популяцию и $\sum_{i=1}^{K} n_i = N$ - численность всей популяции.

Допустим, что инвариант $\mathfrak{I}_{n_i r_i}$ имеет вид:

$$\mathfrak{I}_{n_i r_i} = \prod_{i=1}^{K} (n_i r_i)^{n_i r_i} \tag{3.99}$$

Соответствующая информация структуры:

$$\ln \mathfrak{I}_{n_i r_i} = \ln \prod_{i=1}^{K} (n_i r_i)^{n_i r_i} = \sum_{i=1}^{K} n_i r_i \ln(n_i r_i) = \sum_{i=1}^{K} R_i \ln R_i \tag{3.100}$$

Функционал возьмем в виде

$$\Phi^* = -\ln \mathfrak{I}_{n_i r_i} - \beta \sum_{i=1}^{K} R_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} n_i, \tag{3.101}$$

или в более подробном виде

$$\Phi^* = -\sum_{i=1}^{N} R_i \ln R_i - \beta \sum_{i=1}^{N} R_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} n_i \tag{3.102}$$

Возвращаясь к исходным величинам, находим:

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{K} n_i r_i \ln n_i r_i - \beta \sum_{i=1}^{K} n_i r_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} n_i \tag{3.103}$$

Вводя относительную численность

$$v_i = \frac{n_i}{N}, \tag{3.104}$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi &= -\sum_{i=1}^{K} v_i N r_i \ln v_i N r_i - \beta N \sum_{i=1}^{K} v_i r_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} v_i N = \\ &= -N \sum_{i=1}^{K} v_i r_i \ln v_i r_i - N \sum_{i=1}^{K} v_i r_i \ln N - \beta N \sum_{i=1}^{K} v_i r_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} v_i N \end{aligned} \tag{3.105}$$

Так как $\sum_{i=1}^{K} v_i r_i = \dfrac{R}{N}$, то второй член равен *RlnN = const* и может быть отброшен. Поэтому окончательно имеем функционал:

$$\Phi^* = \frac{1}{N} \Phi = -\sum_{i=1}^{K} v_i r_i \ln v_i r_i - \beta \sum_{i=1}^{K} v_i r_i + \alpha \sum_{i=1}^{K} v_i \tag{3.106}$$

Распределения v_i и r_i входят в функционал почти симметрично, за исключением последнего слагаемого. Мы имеем право рассматривать оптимизационную задачу с двумя условиями:

$$\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial v_i} = 0;\ \ \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial r_i} = 0 \qquad (3.107)$$

Первое условие дает:

$$-r_i \ln v_i r_i - r_i - \beta r_i + \alpha = 0 \qquad (3.108)$$

Второе условие дает:

$$-v_i \ln v_i r_i - v_i - \beta v_i = 0 \qquad (3.109)$$

Из (3.108) находим:

$$v_i r_i = e^{-(1+\beta)} \cdot e^{\frac{\alpha}{r_i}} \qquad (3.110)$$

Из (3.109) соответственно находим:

$$v_i r_i = e^{-(1+\beta)} \qquad (3.111)$$

Рассматривая (3.110) и (3.111) совместно находим:

$$e^{\frac{\alpha}{r_i}} = 1 \qquad (3.112)$$

Из (3.111) видно, что произведение $v_i \cdot r_i$ должно быть в этом случае величиной, не зависящей от номера *i*. Можно было бы положить $v_i \cdot r_i = e^{(1+\beta)} = \delta = const$, или

$$v_i = \frac{\delta}{r_i}$$

Относительная численность класса v_i обратно - пропорционально потребным индивидуальным ресурсам.

Однако, если (3.107) или, что тоже (3.108) и (3.109)выполняются одновременно, то из этого следует, что

$e^{\frac{\alpha}{r_i}} = const$ и, следовательно, r_i не зависит от *i*, откуда следует, что численности всех классов должны быть одинаковыми: $n_i = n_0$. Тогда $e^0 = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{r_i} = 0$ $\Rightarrow r_i \to \infty$

Таким образом, схема, основанная на одновременном выполнении условий (3.107), приводит к «нефизичному» результату.

Если считать величину *x* некоторой характеристикой «активности» популяции, то признаком активности системы можно считать выполнение равенства:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0,$$

С учетом выше сказанного можно считать, что ресурсы $x \cdot = r_i$ не обладают свойством «активности».

При этом имеется в виду принятая выше форма функционала. Если ресурсы r_i заранее заданы, то второе условие (3.107) не может быть использовано, а из первого условия находим (3.110). Обозначая $e^{-1-\beta}$, запишем:

$$v_i = \frac{c}{r_i} \cdot e^{\frac{\alpha}{r_i}} \tag{3.113}$$

В точке $r_i = r^* = -\alpha$ распределение (3.113) имеет максимум. Обозначая $v_{i\max} = v_i^*$, получим распределение

$$\frac{v_i}{v_i^*} = \frac{r_i^*}{r_i} \cdot e^{(1-\frac{r_i^*}{r_i})} \tag{3.114}$$

Это распределение названо «*предельно-гиперболическим*». Распределение (3.114) было введено в контекст энтропийных исследований Деласом [66] и совместно с автором настоящей монографии – в работах [296, 297, 298].

Таким образом, теория, основанная на функционале (3.103) или (3.106) не соответствует утверждению об «активности ресурсов», то есть, в данном случае требованию, чтобы выполнялись одновременно оба условия (3.107).

Обойти эту трудность можно, если переформулировать вариационную задачу с самого начала. Например, возьмем функционал вида:

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{K} \frac{n_i r_i}{R} \ln \frac{n_i r_i}{R} - \beta \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i r_i}{R} + \alpha \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{N} + \gamma \sum_{i=1}^{K} \frac{r_i}{\bar{r}} \tag{3.115}$$

Последний член, подобен предпоследнему, за исключением постоянной $\bar{r}$, которая может быть отождествлена со средним ресурсом

$$\bar{r} = \frac{1}{k} \sum_{q=1}^{K} r_q \tag{3.116}$$

В случае варианта (3.115) находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = -\frac{n_i}{R} \ln \frac{n_i r_i}{R} - \frac{n_i}{R} - \beta \frac{n_i}{R} + \gamma \frac{1}{\bar{r}} = 0$$

Отсюда:

$$n_i r_i = \mathrm{Re}^{-(1+\beta)} \cdot e^{\frac{\gamma R}{\bar{r} n_i}} \tag{3.117}$$

Сравним этот результат с получаемым из условия $\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = 0$

$$n_i r_i = \mathbf{e}^{-(1+\beta)} \cdot Re^{\frac{\alpha R}{N r_i}} \tag{3.118}$$

Находим, что

$$\frac{\gamma}{\bar{r} n_i} = \frac{\alpha}{N r_i}$$

Тогда

$$n_i = \frac{\gamma N}{\bar{r} \alpha} \cdot r_i \tag{3.119}$$

Таким образом, в этом случае, полагая, что $\frac{\gamma N}{\bar r\alpha}$ = *const* = *c*, находим:

$$n_i = c\, r_i$$

т.е. численность классов прямо пропорциональна величине индивидуальных ресурсов r_i. В этом случае r_i выступает как располагаемый ресурс класса: чем больше располагаемый ресурс, тем больше численность класса.

Посмотрим, что получится, если взять в качестве изопериметрического ограничения дисперсию $\bar D r_i$, то есть ограничение на разброс индивидуальных ресурсов.

Возьмем функционал в виде:

$$\Phi^* = -\sum_{i=1}^{K}\frac{n_i r_i}{R}\ln\frac{n_i r_i}{R} - \beta\sum_{i=1}^{K}\frac{n_i r_i}{R} + \alpha\sum_{i=1}^{K}\frac{n_i}{N} - \gamma\sum_{i=1}^{K}\frac{(r_i-\bar r)^2}{\bar r^2}$$

В этом случае находим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_i} = -\frac{n_i}{R}\ln\frac{n_i r_i}{R} - \frac{n_i}{R} - \beta\frac{n_i}{R} - \frac{2\gamma}{K}\frac{(r_i-\bar r)}{\bar r^2} = 0 \qquad (3.120)$$

Учитывая (3.117), находим:

$$\frac{n_i r_i}{R} = e^{-1-\beta}\cdot e^{\frac{2\gamma}{K}\frac{R}{n_i}\frac{(r_i-\bar r)}{\bar r^2}} \qquad (3.121)$$

Сравнивая (3.121) с (3.120) видим, что совместность этих распределений имеет место, если

$$-\frac{2\gamma R}{K n_i \bar r^2}\cdot(r_i-\bar r) = \frac{\alpha}{r_i}$$

Отсюда находим:

$$n_i = \frac{2\gamma R}{K\bar r^2\cdot\alpha}\cdot(\bar r - r_i) = r_i \qquad (3.122)$$

или обозначая $\frac{2\gamma R}{K\bar r^2\cdot\alpha}$ $= A > 0$,

$$n_i = A(\bar r - r_i)r_i$$

Это уравнение параболы

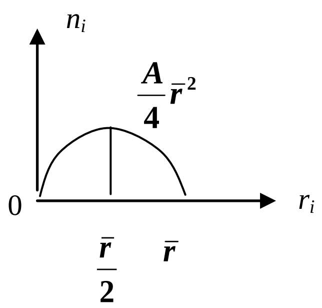


Рис.3.11

Разумеется, это весьма экзотический и частный случай. Два рассмотренных варианта говорят о том, что реализация на алгоритмическом уровне идеи «активности» ресурсов представляет собой непростую и нетривиальную задачу.

Как удовлетворяются условия нормировки? Находим:

$$\sum_i n_i r_i = R \Rightarrow \sum_i \frac{2\gamma R}{k\bar{r}^2\alpha}\cdot(\bar{r}-r_i)r_i^2 = R \Rightarrow \frac{2\gamma^-}{k\bar{r}^2\alpha}\cdot\sum_i(\bar{r}-r_i)r_i^2 = 1$$

3.8.1. Принцип максимума для композитной субъективной энтропии

Рассмотрим величину $\frac{\pi_i \varepsilon_i}{E}$, где π_i – распределение предпочтений на множестве альтернатив: $\sigma_i \in S_a$, ε_i – необходимые (потребные) затраты любых ресурсов для реализации σ_i с условием нормировки $\sum_{i=1}^{N}\pi_i\varepsilon_i = F$, и кроме того требуется $\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$.

ε_i характеризует распределение потребных ресурсов по альтернативам.

В силу второго условия E можно условно назвать «*математическим ожиданием частных ресурсов по предпочтениям*».

Предположим, что предпочтения π_i формируются так, что достигается максимум функционала

$$\Phi_{\pi\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi_i\varepsilon_i}{E}\ln\frac{\pi_i\varepsilon_i}{E} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi_i\varepsilon_i}{E} - 1\right) + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i \tag{3.123}$$

Этот функционал отличается от тех, которые рассматривались ранее, тем, что экзогенные факторы (ε_i, E) вводятся непосредственно в энтропию, а не через функцию эффективности. Покажем, что соответствующее необходимое условие с функционалом (3.123) приводит к так называемому «*предельно-гиперболическому распределению*»

Пусть π_i следует из уравнения

$$\frac{\partial\Phi_{\pi\varepsilon}}{\partial\pi_i} = 0; (\forall i \in \overline{1, N}) \tag{3.124}$$

Кроме того выполняется условие нормировки для π_i и также

$$\frac{\partial^2\Phi_{\pi\varepsilon}}{\partial\pi_i^2}\Big|_{\pi^*} < 0$$

где π^* - «точка» на оси ε_i, где распределение $\pi_i(\varepsilon_i)$ достигает экстремума. Из (3.124) и (3.123) находим:

$$-\ln\frac{\pi_i\varepsilon_i}{E} - 1 + \alpha + \gamma\frac{E}{\varepsilon_i} = 0$$

или

$$\pi_i = \frac{E}{\varepsilon_i}e^{-1+\alpha}e^{\frac{\gamma E}{\varepsilon_i}} \tag{3.125}$$

Экстремум кривой $\pi_i(\varepsilon_i)$ достигается в точке, определяемой условием:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \varepsilon_i} = e^{-1+\alpha}\left(-\frac{E}{\varepsilon_i^2}e^{\frac{\gamma E}{\varepsilon_i}} - \frac{E}{\varepsilon_i}\frac{\gamma E}{\varepsilon_i^2}\cdot e^{\frac{\gamma E}{\varepsilon_i}}\right) = 0 \tag{3.126}$$

Обозначим $\varepsilon^* = -\gamma E$.

Вычисляя значение π_i в точке ε^* и обозначая его через π^*, получаем

$$\pi^* = \frac{E}{\varepsilon^*} - e^{-1+\alpha}\cdot e^{\frac{\gamma E}{\varepsilon^*}} = \frac{E}{\varepsilon^*}\cdot e^{-1+\alpha}e^{-1}$$

Легко находим следующее распределение

$$\frac{\pi_i}{\pi^*} = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_i}e^{1-\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_i}} \tag{3.127}$$

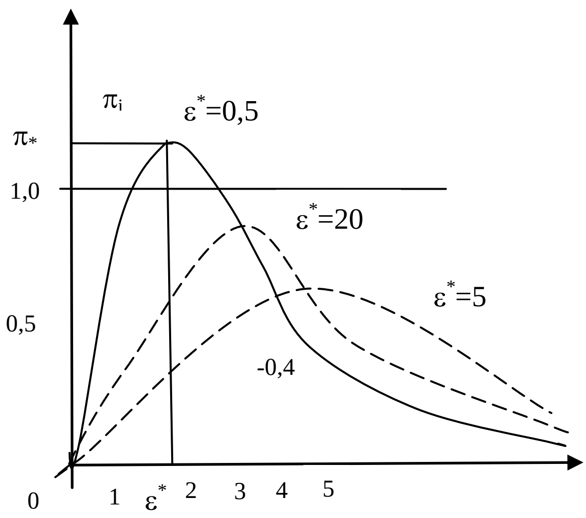


Рис. 3.12

Как в предыдущем параграфе, получаем «предельно-гиперболическое» распределение, но в данном случае, предпочтений, предложенное Даянсом.

На рис. 3.12 показано это распределение.

В работе [296] показано, что предельно-гиперболическое распределение с успехом применяется в некоторых физических проблемах. В частности, в задаче об усталостной прочности, а также в задаче о распределении энергии в турбулентных пульсациях (в инерциальной зоне).

Сравнивая (3.125) и (3.127) видим, что

$$\frac{\pi_i}{\pi^*} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\alpha} e^{\left(1-\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\alpha}\right)} \tag{3.128}$$

В данном случае мы выбираем когнитивную функцию

$$F_i = \alpha \ln \varepsilon_i + \beta \varepsilon_i^{\alpha} \tag{3.129}$$

К подобному результату придем, если выберем когнитивную функцию в виде

$$F_i = \alpha \ln \varepsilon_i + \beta \varepsilon_i^{\delta} \tag{3.130}$$

где α, β, δ - «когнитивные параметры», тогда находим ε_i^{δ}

$$\beta = -\frac{\alpha}{\delta}\varepsilon^{*-\delta}$$

и, следовательно,

$$\frac{\pi_i}{\pi^*} = \frac{e^{-1+\gamma} \cdot \varepsilon_i^{\alpha} \cdot e^{\beta\varepsilon_i^{\delta}}}{e^{-1+\gamma} \cdot \varepsilon^{*\alpha} - e^{\beta\varepsilon_A^{\delta}}} = \frac{\varepsilon_i^{\alpha} \cdot e^{\beta\varepsilon_i^{\delta}}}{e^{-\frac{\alpha}{\delta}}} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\alpha} \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{\delta}+\beta\varepsilon_i^{\delta}\right)}$$

при $\alpha = \delta$ отсюда

$$\frac{\pi_i}{\pi^*} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\alpha} \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{\delta}+\beta\varepsilon_i^{\delta}\right)}.$$

Из условия

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial\varepsilon_i} = e^{-1+\gamma}\left(\alpha \cdot \varepsilon_i \cdot \beta\delta\varepsilon_i^{\delta-1}\right) = 0$$

находим

$$\Rightarrow \alpha + \beta\delta \cdot \varepsilon^{*\delta} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta\delta} = -\varepsilon^{*\delta}$$

Обозначая

$$\pi^* = e^{-1+\gamma} \cdot \varepsilon^{*\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\delta}}$$

и проведя выкладки в той же последовательности, получим

$$\frac{\pi_i}{\pi^*} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{\delta}\left(1-\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^*}\right)^{\delta}\right)} \qquad (3.131)$$

Смысл выбора когнитивной функции в виде (3.129) или в виде (3.130) состоит в том, что такая функция хорошо отражает известные законы психологии: Вебера-Фехнера, Йеркса-Додсона, Забродина, …Первый логарифмический член в этих формулах соответствует мягкой реакции на восприятие внешнего стимула, второе слагаемое отражает более интенсивную реакцию на стимул.

Видим, что при $\alpha = \delta$ и $\alpha \neq 1$, закон (3.131) переходит в формулу (3.128)и при $\alpha = 1$, в формулу (3.132). Тем не менее, между первым подходом и вторым имеется существенное различие в трактовке. Первый подход основывается на том представлении, что существует «две сущности»: «носители» и «ресурсы». В данной интерпретации носителями являются альтернативы (все множество альтернатив S_a, которые порождают в сознании человека предпочтения π_i), «ресурсами» ε_i являются средства (стимулы разного рода, которые могут быть связаны с альтернативами). Это могут быть банки и кредиты, депозитарии и депозитодержатели (банки) и т.д. эта точка зрения была предложена и разработана Деласом и опубликована в ряде работ.

То обстоятельство, что к одному и тому же результату можно прийти различными путями, говорит о глубинной связи энтропийных схем и, в то же время, о неединственности математического оформления вариационного принципа. Предложенный новый подход расширяет множество вариационных постановок и класс возможных задач, а также возможности трактовки результатов.

3.9. Модель неаддитивной Н-меры

3.9.1. *Вводные замечания*

В теории, которая занимается изучением формирования распределений предпочтений, естественным является обращение к модели неаддитивной меры. До сих пор мы пользовались для функций предпочтения моделью аддитивной или счетно-аддитивной меры.

В действительности, если речь идет о предпочтениях определенных на множестве альтернатив, вряд ли выполняются соотношения, отвечающие условиям аддитивности. Скорее всего, эти условия не выполняются вовсе.

В настоящем разделе описывается одна модель неаддитивной меры, которая хорошо сочетается с принципом максимума субъективной энтропии. Это так называемая модель неаддитивной Н-меры, в которой в качестве меры неопределенности выбрана энтропия предпочтений.

Энтропия предпочтений напрямую характеризует степень неопределенности предпочтений и потому обладает очевидными преимуществами перед другими мерами такими, как мера Сугено.

Расширением теории σ – аддитивной или счётно-аддитивной меры [103] является теория неаддитивной меры [299, 300, 301, 302, 303, 304, 305]. Она оказалась востребованной в задачах принятия решений в условиях неопределенности, при построении моделей функционирования психики, в частности, генерирования распределения предпочтений.

Использование неаддитивной меры в субъективном анализе, который изучает генезис распределения предпочтений, является его естественным развитием.

В настоящей работе предлагается модель неаддитивной меры, в некотором смысле подобной мере Сугено, но, как представляется автору, более естественная, напрямую связанная с показателем неопределённости ситуации на распределении предпочтений, а именно – с энтропией предпочтений.

Кроме того, как показано ниже, эта мера (названная Н-мерой) хорошо компонуется с принципом максимума энтропии Джейнса [282, 283], сформулированным первоначально для распределений вероятностей и, следовательно, в рамках теории аддитивной вероятностной меры.

Согласно [303] функция $\mu(\cdot)$ называется неаддитивной мерой, если выполнены следующие условия:

$$1.\ \boldsymbol{\mu(\varphi) = 0; \mu(X) = 1} \tag{3.132}$$

$$2.\ \boldsymbol{\mu(A) \le \mu(B)},\ \text{если } A \le B. \tag{3.133}$$

«Нижняя вероятность» определяется как функция $\mu(\cdot)$, для которой существует такая функция $0 \le \rho(A) \le 1$, что $\mu(A) \le \rho(A)$ для $\forall A \in A_\sigma$, где A_σ – σ-алгебра подмножеств их X… и «точная нижняя вероятность», для которой существует вероятностная мера ρ: $\mu(B) \le \rho(B)$ для $\forall B$ и для остальных $A \in A_\sigma$ такая, что $\mu(A) \le \rho(A)$; $A+B$.

Вводится также понятие верхней вероятности.

Если $A \cap B \neq \varnothing$, то рассматривается 2-монотонная мера, обладающая свойством:

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \tag{3.134}$$

Среди различных моделей неаддитивных мер часто используется мера Сугено [299,300,302,303], для которой принимаются следующие аксиомы:

1. $g_\lambda(\varnothing) = 0; g_\lambda(X) = 1;$ (3.135)

3. при $A \cap B = \varnothing$;

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g(A) \cdot g(B) \tag{3.136}$$

Фактор неаддитивности $\lambda \in (-1, +\infty)$.

Если $A \cap B \neq \varnothing$, то

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda(g(A) \cdot g(B) - g_\lambda(A \cap B) \tag{3.137}$$

Мера, удовлетворяющая этому условию, называется также 2-монотонной мерой.

Если $A \cup B = X$, то есть $B = \overline{A}$ и условие нормировки меры $g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(X) = 1$, то для $g_\lambda(\overline{A})$ получаем:

$$g_\lambda(\overline{A}) = \frac{1 - g(A)}{1 - \lambda g(A)}; \tag{3.138}$$

Мера $g_\lambda(\cdot)$ называется супераддитивной, если, $\lambda > 0$, субаддитивной, если $\lambda < 0$, и вероятностной, если $\lambda = 0$.

Видно, что для супераддитивной меры $\forall A, B \subset X$ и $A \cap B = \varnothing, A \cup B \subset X$ выполняется неравенство:

$$g_\lambda(A \cup B) \rangle g(A) + g(B) \tag{3.139}$$

Если $h(x)$ - функция плотности распределения $g_\lambda(\cdot)$, то

$$\int\limits_{(x)} h(x)dx = N_\lambda \langle 1; N_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) \tag{3.140}$$

Пусть $X = S_a$ - конечное множество альтернатив, мощности N; $\sigma_i \in S_a; i \in \overline{1,N}$. Тогда неаддитивная мера Сугено задается соотношением

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{N}(1+\lambda\pi_i) - 1\right\} = 1 \tag{3.141}$$

Здесь $\pi_i = \pi(\sigma_i)$. Мера $S_a^1 \subset S_a$ есть

$$\pi(\sigma_i \in S_a^1 \big| \forall i) = \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{\sigma_i \in S_a}(1+\lambda\pi(\sigma_i)) - 1\right\} \tag{3.142}$$

Соотношение (10) есть условие нормировки для меры Сугено в случае конечного S_a'. При *N=2*

$$\pi_{S'_a} = \frac{\lambda}{A}\left\{(1+\lambda\pi_1)(1+\lambda\pi_2)-1\right\} = \pi_1+\pi_2+\lambda\pi_1\cdot\pi_2 \quad (3.143)$$

При N=3 из (10) имеем:

$$\pi_{S'_a} = \pi_1+\pi_2+\pi_3+\lambda\pi_1\pi_2+\lambda\pi_1\pi_3+\lambda\pi_2\pi_3+\lambda^2\pi_1\pi_2\pi_3 \quad (3.144)$$

3.9.2. Неаддитивная Н-мера

Мера Сугено представляется достаточно искусственной. Заранее не известно, как дополнительный член отражает неопределённость ситуации. С другой стороны известно, что показателем неопределённости является энтропия, в данном случаи, - энтропия предпочтений, которую удобно называть субъективной энтропией предпочтений, а соответствующий вариационный принцип – принципом максимума субъективной энтропии.

В теории нечетких множеств имеется неопределённость в выборе нечётких распределений. Теория не даёт прямых алгоритмов выбора этих распределений, который носит эвристический характер. В схеме Сугено неопределённость имеется также в выборе параметра λ.

Можно ожидать, что постулируя упомянутый выше принцип, мы вносим определённость в задачу выбора «нечёткого» распределения. При этом, однако, необходимо предложить такую модель неаддитивной меры, которая была бы совместимой в определенном смысле с принципом максимума энтропии:

$$\begin{aligned}&\pi_{i.canonic} = \arg\max \Phi_\pi\\&\pi_i \in \prod\end{aligned} \quad (3.145)$$

где $\pi_{i.canonic}$ – каноническое распределение, функционал.

$$\Phi_\pi = -\sum_{i=1}^{N}\pi_i \ln\pi_i \pm \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i F_i + \gamma(\sum_{i=1}^{N}\pi_i - 1) \quad (3.146)$$

где F_i – когнитивная функция, π_i – функция распределения предпочтений альтернатив σ_i, $\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$ – условие нормировки.

Необходимо иметь в виду, что речь идёт об условном экстремуме, который достигается на многообразии, задаваемом ограничениями.

В настоящей статье предлагается другая, отличная от схемы Сугено, модель неаддитивной меры, основанная на использовании в качестве меры неопределённости субъективной энтропии.

Если S_a – конечное множество альтернатив $\sigma_i(i \in \overline{1,N})$ мощности N, то в качестве условия нормировки неаддитивной меры на S_a примем следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i + \lambda H_\pi = 1; \lambda \in [-1,+\infty), \quad (3.147)$$

где H_π – субъективная энтропия предпочтений на S_a, задаваемая формулой

$$\boldsymbol{H}_{\pi} = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i ; \pi_i = \pi(\sigma_i) . \quad (3.148)$$

$$\sigma_i \in S_a$$

С учетом (1.148) запишем (1.147) в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i (1 - \lambda \ln \pi_i) = 1 \quad (3.149)$$

Назовем введённую таким образом меру « Н-мерой». Вместо энтропии H_{π} может быть использована нормированная энтропия $\overline{H}_{\pi} = H_{\pi} \cdot H_{\pi\max}^{-1}$. Выбирая в качестве $H_{\pi\max}$ абсолютный максимум энтропии, находим $\pi_i = e^{-1}$ и $H_{\pi\max} = \dfrac{N}{e}$. При единичной нормировке $\pi_i = N^{-1}$ и $H_{\pi\max} = \ln N$. Более подробно из условия (без учета экзогенной составляющей β=0):

$$-\sum_i \pi_i \ln \pi_i + \gamma \sum_i \pi_i \to \max , \quad (3.150)$$

получаем $\pi_i = e^{-1+\gamma^i}$. Условие нормировки дает $\gamma = 1 - \ln N$ и, следовательно, $\pi_i = N^{-1}$. Тогда $H_{\pi\max} = \ln N$.

Если же использовать Н-меру, то для определения γ найдем максимум функционала, который при условии отсутствия влияния экзогенных факторов (β=0, F_i≡0) принимает вид:

$$\overline{\Phi} = -\sum_i \pi_i \ln \pi_i + \gamma (\sum_i \pi_i + \lambda \boldsymbol{H}_{\pi} - 1) . \quad (3.151)$$

Или учитывая выражение для H_{π}

$$\overline{\Phi} = -(1 + \gamma\lambda) \sum_i \pi_i \ln \pi_i + \gamma \sum_i \pi_i . \quad (3.152)$$

Из условия $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_i} = 0$ находим

$$\pi_i = \exp(-1 + \frac{\gamma}{1 + \gamma\lambda}) = idem(i) \quad (3.153)$$

Подставляя это значение π_i в условие нормировки (1.149) находим:

$$e^{\frac{\gamma}{1+\gamma\lambda}} \left(1 + \lambda - \frac{\gamma\lambda}{1 + \gamma\lambda} \right) = \frac{e}{N} . \quad (3.154)$$

Видим, что если задано число альтернатив N и фактор неаддитивности λ, то нормировочный коэффициент γ определяется однозначно. Его значения представлены в таблице $\gamma(\lambda, N)$. При этом предполагается, что член, содержащий когнитивную функцию $F_i = F(\sigma_i)$ в функционале, отсутствует (либо β=0, либо $\forall F_i = 0$).

Таблица значений нормированной константы γ
в зависимости числа альтернатив N
и параметра неаддитивности λ (при β=0 или F_i=0)

1	-1,0	-0,5	0	+1,0
2	0,406	0,4357	0,305	-0,404
3	0,346	0,274	-0,104	-0,505
4	0,303	0,147	-0,380	-0,631
5	0,275	-0,050	-0,610	-0,666
6	0,245	-0,130	-0,770	-0.693

На рис. 3.13 показаны зависимости $\gamma(\lambda, N)$, отражающие данные таблицы

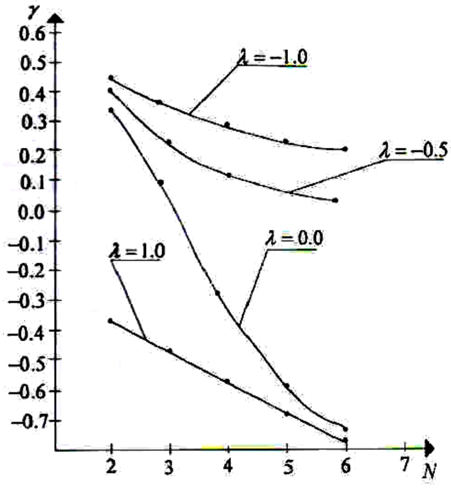


Рис. 3.13

Как видим, γ в диапазоне -1 < λ < 1 принимает как положительные, так и отрицательные значения, причем при $\lambda \geq 1{,}0$ для любого $N \geq 2$ коэффициент γ отрицателен.

Если $-\lambda\sum\limits_i \pi_i \ln \pi_i$ >0, меру будем называть супераддитивной, если $-\lambda\sum\limits_i \pi_i \ln \pi_i$ <0, мера считается субаддитивной, при λ=0 – мера аддитивна. Поскольку всегда $\pi_i = e^{\frac{\gamma}{1+\gamma\lambda}-1}$ >0, то знак произведения $-\lambda\sum\limits_i \pi_i \ln \pi_i$ определяется знаком множителя λ и знаком $\ln \pi_i$, т.е. знаком величины $\dfrac{\gamma}{1+\gamma\lambda} - 1$. Итак видим, что мера супераддитивна, если

$$\boldsymbol{\lambda>0};\ \frac{\gamma}{1+\gamma\lambda} - 1 < 0 \tag{3.155}$$

и субаддитивна, если

$$\boldsymbol{\lambda}<\mathbf{0};\ \frac{\gamma}{1+\gamma\lambda}-1>0 \qquad (3.156)$$

Случаи, представленные в таблице, охватывают как супераддитивность, так и субаддитивность. В левом верхнем углу λ=-1,0; N=2; γ=0,406, что соответствует условиям субаддитивности, правый верхний угол таблицы (λ=1,0; N=2; γ=0,404) соответствует супераддитивности.

Заметим, что, если член, содержащий когнитивную функцию присутствует в функционале, то задача определения весового коэффициента (коэффициента Лагранжа) γ существенно усложняется.

3.9.3. Возможная вероятностная интерпретация неаддитивной меры Сугено

Одна из попыток осмыслить явление неаддитивности состоит в гипотезе о наличии «третьего» события C, которое оказывает влияние на вероятности появления событий A и B. эта чисто «вероятностная» позиция, совмещенная с предположением о наличии органической неопределенности в определении этого влияния, позволяет построить формально модель неаддитивной меры.

Предположим, что имеет место ситуация, изображенная на рис 3.14.

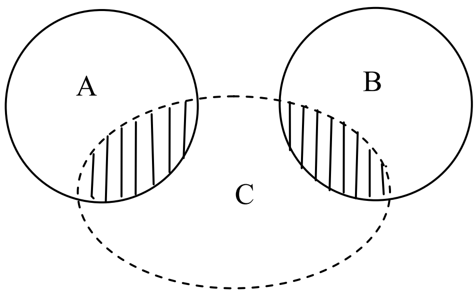


Рис. 3.14

Здесь $A\cap B=\varnothing$, но $A\cap C=\varnothing$ и $B\cap C=\varnothing$. Поэтому вместо события $Z=A\cup B$ рассматривается событие $Z=A\cup B\cup C$, а вместо условия

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)\neq P(B)} \qquad (3.157)$$

воспользуемся условием

$$\boldsymbol{P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B|C)\cdot P(C)} \qquad (3.158)$$

Но $A\cap B=\varnothing$, следовательно:

$$\boldsymbol{P(A\cup B\cup C)=\Big(P(A|C)+P(B|C)\Big)\cdot P(C)} \qquad (3.159)$$

Рассмотрим случай, когда $B=\overline{A}$, т.е. дополнению A до достоверного события: $A\cup\overline{A}=\bigcup$. Тогда

$$\left(P(A|C)+P(\overline{A}|C)\right)\cdot P(C)=1 \tag{3.160}$$

Если формально определить параметр неаддитивности соотношением:

$$\lambda=\frac{\left[P(A|c)+(\overline{A}|c\right]\cdot P(c)-P(A)-P(\overline{A})}{P(A)\cdot P(\overline{A})}, \tag{3.161}$$

Приходим к модели Сугено.

Если положить

$$\lambda=\frac{\left[P(A|c)+P(\overline{A}|c\right]\cdot P(c)-P(A)-P(\overline{A})}{-P(A)\ln P(A)-P(\overline{A})\ln P(\overline{A})}, \tag{3.162}$$

то получаем модель Н-меры.

Соотношение (3.164) формально совпадает с условием нормировки для меры Сугено.

Однако, в случае, если «вероятности» $P(A|c)$ и $P(\overline{A}|c)$ нельзя определить в принципе, например, если событие C не измеримо, так что границы неопределенны, то использовать (3.164)и (3.165) для определения λ невозможно, и можно говорить лишь о формальном объяснении неаддитивности с вероятностной точки зрения.

Ниже рассматривается подход к определению параметра γ при условии «слабой» неаддитивности, т.е. при малом λ. Тогда можно дать расчетную схему на основе использования асимптотических разложений. Чтобы свести формализм к привычной в этих случаях форме, переобозначим $\lambda = \varepsilon$.

3.9.4. Случай слабо-неаддитивной Н-меры

Рассмотрим частный случай «слабой неаддитивности». Полагая $\varepsilon << 1$ будем искать γ и π_i в виде асимптотических розложений по малому параметру ε:

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\gamma_0+\varepsilon\gamma_1+\varepsilon^2\gamma_2^2+\ldots\\ \pi_i&=\pi_{i0}+\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{3.163}$$

Принимая модель Н-меры и соответствующее правило нормировки, критерий, подлежащий экстремизации, согласно принципу максимума энтропии выберем в виде:

$$\begin{aligned}\Phi&=-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i\pm\beta\sum_{i=1}^{N}\pi_iF_i(\sigma_i)+\gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i-\lambda\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i\right)=\\ &=-(1+\gamma\lambda)\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i\pm\beta\sum_{i=1}^{N}\pi_iF(\sigma_i)+\gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i\end{aligned} \tag{3.164}$$

Отличие от принципа Джейнса здесь сводится к множителю $(1+\gamma\lambda)$ перед первым слагаемым.

Необходимое условие экстремума есть:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\pi_i}=-(1+\gamma\lambda)(\ln\pi_i+1)\pm\beta F_i+\gamma=0; F_i=F(\sigma_i) \tag{3.165}$$

Заменяя $\lambda\to\varepsilon$ и подставляя разложение (1.166) найдем:

$$
\begin{aligned}
&-(1+\varepsilon(\gamma_0+\varepsilon\gamma_1+\varepsilon^2\gamma_2+\ldots)\Big[(\pi_{i0}-1\Big)+\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots\\
&-\frac{1}{2}\Big((\pi_{i3}-1)^2+2(\pi_{i0}-1)(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)+(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)^2\Big)+\\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{aligned}&(\pi_{i0}-1)^3+3(\pi_{i0}-1)^2(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)+\\&+3(\pi_{i0}-1)(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)^2+(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon\pi_{i2}+\ldots)^3\end{aligned}\right)\Big]+\\
&+\beta F_i+\gamma_0+\varepsilon\gamma_1+\varepsilon^2\gamma_2+\ldots=0
\end{aligned}
\tag{3.166}
$$

Здесь использовано разложение логарифма по ε в диапазоне $0 < \pi_i \leq 2$. Выбирая члены с множителем $\varepsilon^0=1$, найдем $-\ln\pi_{i0}-1+\beta F_i+\gamma_0=0$

Откуда:

$$\pi_{i0}=e^{-1+\gamma_0\pm\beta F_i} \tag{3.167}$$

Представляя аналогичным образом условие нормировки, получим:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}(\pi_{i0}+\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)-\varepsilon\sum_{i=1}^{N}(\pi_{i0}+\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i0}+\ldots)\\
&\left[\begin{aligned}&(\pi_{i0}-1)+\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots-\frac{1}{2}\left(\begin{aligned}&(\pi_{i0}-1)^2+2(\pi_{i0}-1)(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2})+\ldots\\&+(\varepsilon\pi_{i2}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)^2\end{aligned}\right)+\\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{aligned}&(\pi_{i0}-1)^3+3(\pi_{i0}-1)^2(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)+\\&+3(\pi_{i0}-1)(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)^2+(\varepsilon\pi_{i1}+\varepsilon^2\pi_{i2}+\ldots)^3\end{aligned}\right)\end{aligned}\right]=1
\end{aligned}
\tag{3.168}
$$

Собирая члены при ε^0 и приравнивая их сумму к нулю, получаем:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_{i0}=1 \tag{3.169}$$

Отсюда, учитывая (1.171), найдем:

$$\gamma_0=1+\ln\left(\sum_{i=1}^{N}e^{\pm\beta F_i}\right)^{-1} \tag{3.170}$$

Собирая члены порядка ε^1, получаем:

$$\pi_{i1}=\frac{\gamma_0\ln\pi_{i0}-\gamma_1}{-3+3\pi_{i0}-\pi_{i0}^2} \tag{3.171}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\pi_{i0}+(1-\ln\sum_{q}e^{\pm\beta F_q})(-3+3\pi_{i0}-\pi_{i0}^2)^{-1}\right]}{\sum_{p=1}^{N}(-3+3\pi_{p0}-\pi_{p0}^2)^{-1}} \tag{3.172}$$

Обозначим через $\pi_i^{(2)}$ и $\gamma^{(2)}$ величины, образованные по формулам:

$$\boldsymbol{\pi}_i^{(2)} = \boldsymbol{\pi}_{i0} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\pi}_{i1}; \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}_1, \quad (3.173)$$

то есть величины, соответствующие второму приближению. Заметим, что в первом приближении, мы получим результат, соответствующий аддитивной («невозмущенной» мере). При $\beta = 0$

$$\gamma^{(0)} = \gamma_0 = 0,307...; \gamma_1 = 1,0254...$$

и при ε = 0,1 $\gamma^{(2)} = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 = 0,2163...$

В этом случае

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\boldsymbol{N}}\left[\frac{1}{\boldsymbol{N}^2}\left(-3\boldsymbol{N}^2 + 3\boldsymbol{N} - 1\right) + \boldsymbol{N}\left(1 - \ln \boldsymbol{N}\right)\cdot\left(-\ln \boldsymbol{N}\right)\right] \quad (3.174)$$

$\pi_{i0} = \dfrac{1}{N} = 0,5$, при $N=2$.

При тех же численных значениях:

$\beta = 0; \varepsilon = 0,1; N = 2$

$\pi_i^{(2)} = 0,5245...;$

$H_\varepsilon^{(2)} = 0,6769;$

$H_0 = \ln 2 = 0,6931...$

Таким образом $H_\varepsilon^{(2)} < H_0$. Таким образом в условиях супераддитивности энтропия во втором приближении уменьшается по сравнению с первым приближением .

Применим другое разложение функции $\ln(x \in \delta)$. Разложение примененное выше справедливое в диапазоне $0 < x \le 2$. Разложение в ряд Тейлора хорошо приближает функцию $\ln(x+\delta)$ при $|\delta| << x$; $x>0$; и $x+\delta>0$. Обозначим $\delta_i(\varepsilon) = \varepsilon\pi_{i1} + \varepsilon^2\pi_{i2} + \ldots$, тогда можем записать

$$\ln(\boldsymbol{\pi}_{i0} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\pi}_{i1} + \boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\pi}_{i2} + ...) = \ln \boldsymbol{\pi}_{i0} + \frac{\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{\boldsymbol{\pi}_{i0}} - \frac{\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\varepsilon})^2}{\boldsymbol{\pi}_{i0}^2} + \frac{\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\varepsilon})^3}{2\boldsymbol{\pi}_{i0}^3} + ... \quad (3.175)$$

Положим $\delta_i(\varepsilon) = \varepsilon(\pi_{i0}(\varepsilon) + \varepsilon(\pi_{i1} + \varepsilon\pi_{i2} + \ldots))$, а также $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots$, тогда условие $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi_i} = 0$ записывается в виде:

$$\begin{aligned} &-\left(1 + (\boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\gamma}_2 + ...)\boldsymbol{\varepsilon}\right)\cdot \\ &\cdot\left[\ln \boldsymbol{\pi}_{i0} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\pi}_{i1} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\pi}_{i2} + \boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\pi}_{i3} + ...) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2(\boldsymbol{\pi}_{i1} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\pi}_{i2} + ...)^2}{\boldsymbol{\pi}_{i0}^2} + 1\right] \pm \\ &\pm \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\gamma}^2 + ... = 0 \end{aligned} \quad (3.176)$$

При ε^0 имеем:

$-\ln \pi_{0i} - 1 \ge \pm\beta F_i + \gamma_0 = 0,$

отсюда

$\pi_{0i} = e^{-1+\gamma_0 \pm \beta F_i}$

Собирая члены при ε^1, имеем:

$\pi_{1i} = \pi_{0i}\gamma_1 = e^{-1+\gamma_0 \pm \beta F_i} \cdot \gamma_1$

Отсюда:

$-\frac{\pi_{1i}}{\pi_{0i}} - \gamma_0 \ln \pi_{0i} + \gamma_1 = 1,$

или

$$\boldsymbol{\pi_{1i} = \pi_{0i}(\gamma_1 - \gamma_0 \ln \pi_{0i})} \tag{3.177}$$

Запишем условие Н-нормировки:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_i} - \boldsymbol{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_i \ln \pi_i} = 1 \tag{3.178}$$

Подставляя в это соотношение разложение для $\pi_i(\varepsilon)$, находим уравнение:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N} (\pi_{0i} + \varepsilon\pi_{1i} + \varepsilon^2\pi_{2i} + \ldots) - \\ &-\varepsilon \sum_{i=1}^{N} (\pi_{0i} + \varepsilon\pi_{1i} + \varepsilon^2\pi_{2i} + \ldots)(\ln \pi_{0i} + \frac{\varepsilon(\pi_{1i} + \varepsilon\pi_{2i} + \varepsilon^2\pi_{3i} + \ldots)}{\pi_{0i}} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2(\pi_{1i} + \varepsilon\pi_{2i} + \varepsilon^2\pi_{3i} + \ldots)}{\pi_{0i}^2} = 1\end{aligned} \tag{3.179}$$

Отсюда для ε^0 имеем условие:

$\sum_{i=1}^{N} \pi_{0i} = 1$

и для ε^1, соответственно:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_{1i}} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_{0i} \ln \pi_{0i}} = 0 \tag{3.180}$$

Используя полученное выше выражение (3.180) для π_{1i}, получаем:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_{0i}(\gamma_1 - \gamma_0 \ln \pi_{0i})} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi_{0i} \ln \pi_{0i}} = 0\,, \tag{3.181}$$

откуда

$$\boldsymbol{\gamma_1 = (1 + \gamma_0)\sum_{i=1}^{N} \pi_{0i} \ln \pi_{0i}}\,, \tag{3.182}$$

тогда

$$\gamma^{(2)} = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 = \gamma_0 + \varepsilon(1+\gamma_0)\sum_{i=1}^{N}\pi_{0i}\ln\pi_{0i}$$

$$\pi_i^{(2)} = \pi_{0i}\left[1+\varepsilon(\gamma_1 - \gamma_0\ln\pi_{0i})\right] = \tag{3.183}$$

$$= \pi_{0i}\left[1+\varepsilon\left((1+\gamma_0)\sum_{i=1}^{N}\pi_{0i}\ln\pi_{0i} - \gamma_0\ln\pi_{0i}\right)\right] = 1$$

Подсчитаем $\sum_{i=1}^{N}\pi_i^{(2)}$. Легко находим:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i^{(2)} = 1+\varepsilon\,. \tag{3.184}$$

Так как $\varepsilon>0$, то полученный результат говорит о том, что Н-мера в пределах первого приближения в условиях слабой неаддитивности $\varepsilon << 1$ и $\varepsilon>0$, является супераддитивной мерой.

Таким образом, в настоящей работе предложена новая модель неаддитивной меры – «*H*-мера». Эта модель хорошо совмещается с принципом максимума энтропии Джейнса и его трансформацией в принцип максимума субъективной энтропии. Это обстоятельство в частности свидетельствует о том, что эти принципы могут служить хорошей основой для обоснования (и получения) «нечетких» распределений, и тем самым дает связь между вариационными информационно-энтропийными принципами и методами нечеткой математики.

Реализована асимптотическая процедура определения распределения предпочтений π_i и фактора неаддитивности в первом и втором приближениях. При этом использованы два уравнения:

1. $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi_i} = 0$;
2. $\sum_{i=1}^{N}\pi_i - \varepsilon\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i = 1$

3.10. Две оптимизационные задачи:оптимизация полезностей и оптимизация предметных предпочтений

В этом разделе мы рассматриваем последовательность двух взаимосвязанных оптимизационных задач:

1. Оптимизацию выбора на основе функции полезности и
2. «Естественную» оптимизацию предпочтений в условиях, когда решение первой задачи уже известно.

Эти вложенные оптимизационные задачи имеют различное назначение. Решением первой задачи является выбор оптимального утилитарного решения. Вторая задача приводи к оптимальному распределению предпочтений на множестве альтернатив S_a, которое определяется условиями первой задачи.

В тривиальном варианте, когда предпочтения учитывают только утилитарную компоненту, смысл решения второй задачи сводится к тому, что она в отличие от первой задачи не только указывает наилучший вариант решения, но и дает условие принятия решения:

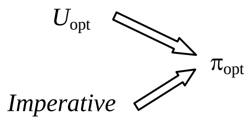
$$\boldsymbol{H_\pi \le H^*_\pi}.$$

Действительно, найденное оптимальное решение может весьма мало отличаться от «соседнего» неоптимального; энтропия распределения предпочтений будет велика $H_\pi \approx H_{\max} = \ln N$ и решение не будет принято. Кроме энтропии H_π существуют другие функции, интегрально представляющие распределение предпочтений и обладающие достаточной эластичностью в районе экстремума распределения, например, аналоги энтропии, рассмотренные ранее (гл. 3).

В тривиальном варианте логическую связь между двумя задачами имеет вид следования:

$$\boldsymbol{U_{\mathrm{opt}} \Rightarrow \pi_{\mathrm{opt}}}.$$

Нетривиальная постановка состоит в том, что πopt формируется не только на основе утилитарной компоненты, то есть функции полезности, но и некоторой не утилитарной, например, этической компоненты, что показано на следующей схеме:



Итак, π_{opt} определяется на только рациональной полезностью, но и определенным набором императивов, которые в каждом конкретном случае не подлежат оптимизации, являются априорными. В этом, между прочим, состоит коренное отличие полезностей от предпочтений.

Связь двух оптимизационных задач напоминает связь двух задача при решении задачи идентификации динамического объекта, когда вначале решается задача выбора оптимальной программы испытаний (при этом обычно используется априорная, неточная, математическая модель объекта и ранее полученные экспериментальные данные).

Затем найденный оптимальный план эксперимента реализуется, а полученные данные используются для решения второй оптимизационной задачи — определения таких оценок модели объекта, которые бы минимизировали ошибку моделирования по отношению к реальной динамике.

Есть несколько вариантов связи между двумя выше описанными задачами оптимизации. Рассмотрим тривиальный вариант на примере оптимизации полезности, взятом из книги [273]. Требуется найти такой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который доставляет максимум функции полезности $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на многообразии $M(x_i, p_i, M)$:

$$\boldsymbol{x_{opt}} = \mathbf{arg}\max_{x \in M \subset X} \boldsymbol{U}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \tag{3.185}$$

Многообразие отражает равенство бюджета M и расходов на приобретение набора товаров $p_i x_i$, где p_i — цена единицы товара, x_i — количество единиц товара i-го типа.

Пусть сперва предпочтения определяются количествами приобретенных товаров x_i:

$$\pi^{+}\left(\sigma_{i}\right)=\frac{e^{\beta x_{i}}}{\sum_{k=1}^{N} e^{\beta x_{k}}}. \qquad (3.186)$$

Определим, как распределяется предпочтения если, в качестве x_i будут взяты оптимальные количества x_{iopt}, найденные в результате решения оптимизационной задачи. В виде предпочтения зависят только от утилитарной составляющей. Пусть многообразие M задано соотношением:

$$M = p_1x_1 + p_2x_2, \qquad (3.187)$$

а функция полезности

$$U = x_1x_2. \qquad (3.188)$$

Оба товара нужны и чем каждого больше, тем лучше. Составим критерий оптимальности в задаче на условный экстремум:

$$\Phi^* = U(x_1x_2) + \lambda(M - x_1p_1 - x_2p_2), \qquad (3.189)$$

где λ — коэффициент Лагранжа. Вариационная задача имеет вид:

$$(x_ix_j)_{opt} = \arg\max \Phi^*. \qquad (3.190)$$

Решение найдем из необходимых условий:

$$L_1=\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1}=\frac{\partial U\left(x_1x_2\right)}{\partial x_1}-\lambda p_1=0;\ L_2=\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2}=\frac{\partial U\left(x_1x_2\right)}{\partial x_2}-\lambda p_2=0; \qquad (3.191)$$

$$M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0.$$

Достаточным условием существования решения является требование, чтобы

$$G=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_2\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\lambda\partial x_1} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\lambda\partial x_2} & \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\lambda^2} \end{vmatrix} > 0. \qquad (3.192)$$

Имеем

$$G=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -p_1 \\ 1 & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = 2p_1p_2 > 0.$$

Уравнения имеют вид:

$$L_1 = x_2 - \lambda p_1 = 0; \quad L_2 = x_1 - \lambda p_2 = 0.$$

Поставляя в (3.187), найдем: $\lambda=\frac{M}{2p_1p_2}$.

Тогда

$$x_{i\,opt} = \frac{M}{2p_i}; \quad x_{j\,opt} = \frac{M}{2p_j}.$$

Здесь M играет роль располагаемых ресурсов, а цены — потребных. Предпочтения определяются формулой:

$$\pi^+(\sigma_i) = \frac{e^{\beta \frac{M}{2p_i}}}{e^{\beta \frac{M}{2p_1}} + e^{\beta \frac{M}{2p_2}}}.$$

Пусть $M = 10$; $p_1 = 2$; $p_2 = 5$; $\beta = 1$, тогда $\pi^+(\sigma_1) = 0{,}9526$; $\pi^+(\sigma_2) = 0{,}0474$. Видим, что $\pi^+(\sigma_1) > \pi^+(\sigma_2)$. Энтропия $H^{(1)}{}_{\pi+} = 0{,}1907$ мала по сравнению с $H_{\pi\max} \cong 0{,}693$. Уменьшим при тех же ценах бюджет в два раза: $M = 5$. Предпочтения принимают значения: $\pi^+(\sigma_1) = 0{,}81757$; $\pi^+(\sigma_2) = 0{,}018240$, а энтропия $H_{\pi+} = 0{,}475 > H^{(1)}{}_{\pi+}$, следовательно, уменьшение бюджета в данном случае ведет к росту энтропии.

Более адекватная постановка второй оптимизационной задачи состоит в том, что аргументам функции распределений предпочтений являются полезности $U(x')$, где x' — вектор размерности $m < n$ выбираемый из вектора x — размерности n. Число вариантов $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. В случае если не утилитарная компонента предпочтений не учитывается (или отсутствуют), распределение $\pi^+(\sigma_i)$ примем в виде:

$$\pi^+(\sigma_k) = \frac{e^{\beta U(x'_k)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta U(x'_j)}}. \tag{3.193}$$

Здесь $N = C_n{}^m$. Если при формировании предпочтений субъект ориентируется не только на утилитарную, но и на не утилитарную, например, этическую компоненту в качестве модели предпочтения воспользуемся распределением вида

$$\pi^+(\sigma_k) = \frac{\pi(I_k) e^{\beta U(x'_k)}}{\sum_{j=1}^{N} \pi(I_j) e^{\beta U(x'_j)}}. \tag{3.194}$$

где $\pi(I_j)$ — функция, отражающая влияние некоторого априорного императива, или иррациональных соображений.

Рассмотрим количественный пример. Пусть $m = 2$, а $n = 3$, отсюда $N = C_3{}^2 = 3$, имеется 3 альтернативных набора «товаров» из $x = (x_1, x_2, x_3)$: $x'_1 = (x_1, x_2)$; $x'_2 = (x_1, x_3)$; $x'_3 = (x_2, x_3)$. Пусть «цены» товаров распределены как показано в таблице

x_k	x_1	x_2	x_3
p_k	1	2	3

, $\beta = 1$,

а «бюджет» $M = 10$. Каждый раз при определении оптимальных полезностей в качестве x_k берутся оптимальные значения, полученные в результате решения задачи:

$$U(\sigma_1) = U(x'_1) = x_{1opt} x_{2opt} = \frac{M}{2p_1} \frac{M}{2p_2} = \frac{M^2}{4p_1 p_2};$$

$$U(\sigma_2) = U(x_2') = x_{1opt}x_{3opt} = \frac{M}{2p_1}\frac{M}{2p_3} = \frac{M^2}{4p_1p_3};$$

$$U(\sigma_3) = U(x_3') = x_{2opt}x_{3opt} = \frac{M}{2p_2}\frac{M}{2p_3} = \frac{M^2}{4p_2p_3}.$$

Находим $U(\sigma_1)$ = 12,5; $U(\sigma_2)$ = 8,333; $U(\sigma_3)$ = 4,1667. Соответственно для утилитарных предпочтений получаем:

$$\pi_0^+(\sigma_1) = 0{,}9845; \quad \pi_0^+(\sigma_2) = 0{,}0153; \quad \pi_0^+(\sigma_3) = 0{,}00024,$$

а энтропия

$$H_{\pi+}^{(0)} = 0{,}08128.$$

Предположим, далее, что функция $\pi(I_k)$ отражает стремление уменьшить суммарное количество «товаров» в «корзине» (своеобразный аскетизм) и имеет вид:

$$\pi(I_k) = \frac{1}{x_r^2 + x_s^2}, \text{ где } r,s \in \overline{1,2,3}.$$

Результаты расчетов показаны в таблице.

σ_k	σ_1	σ_2	σ_3
$U(\sigma_k)$	12,5	8,333…	4,1667…
$\pi(I_k)$	0,032…	0,036…	0,111…
$\pi^+(\sigma_k)$	0,9820	0,01712	0,00082

Энтропия

$$H^{(1)}_{\pi+} = 0{,}09327 > H^{(0)}_{\pi+} = 0{,}08128,$$

что соответствует «экспорту» информации

$$I_{\pi+} = H^{(0)}_{\pi+} - H^{(1)}_{\pi+} = 0{,}08128 - 0{,}09327 = -0{,}01199.$$

В обоих случаях энтропия мала, переход от полезностей к утилитарным предпочтениям «усиливает» дифференциацию вариантов и облегчает принятие решения.

Видим также, что учет не утилитарной компоненты ведет в данном случае, к росту энтропии и, следовательно, несколько усложняет принятие решения. Величина $I_{\pi+}$ — есть «информационная цена» учета априорных императивов.

Уменьшим бюджет в два раза, положим M = 5. Вычислим распределение предпочтений без учета не утилитарной составляющей, найдем:

$$U(\sigma_1) = 3{,}125; \qquad \pi^+_0(\sigma_1) = 0{,}6770;$$

$$U(\sigma_2) = 2{,}0833; \qquad \pi^+_0(\sigma_2) = 0{,}2389;$$

$$U(\sigma_3) = 1{,}0417; \qquad \pi^+_0(\sigma_3) = 0{,}0842;$$

$$H^{(0)}_{\pi+} = 0{,}8144.$$

Вычислим $\pi(I_k)$:

$$\pi(I_1) = \frac{1}{x_{1opt}^2 + x_{2opt}^2} = 0{,}0624; \quad \pi(I_2) = \frac{1}{x_{1opt}^2 + x_{3opt}^2} = 0{,}0709;$$

$$\pi(I_3) = \frac{1}{x_{2opt}^2 + x_{3opt}^2} = 0{,}0944.$$

С учетом неутилитарной составляющей получим новые предпочтения:

$$\pi_1^+(\sigma_1) = 0{,}7039; \quad \pi_1^+(\sigma_2) = 0{,}2172; \quad \pi_1^+(\sigma_3) = 0{,}0789,$$

энтропия

$$H^{(0)}{}_{\pi+} = 0{,}7792.$$

Как видим, учет неутилитарной компоненты привел к уменьшению энтропии

$$I_\pi = H^{(0)}{}_{\pi+} - H^{(1)}{}_{\pi+} = 0{,}8144 - 0{,}7792 = 0{,}0352.$$

Выполним расчеты для другого распределения цен «товаров» с меньшей дифференциацией, как показано в следующей таблице:

	x_i	x_1	x_2	x_3
$M = 5$	p_i	0,8	1,0	1,2
	$x_{i\ opt}$	3,125	2,500	2,083

Полезности и утилитарные предпочтения даны в таблице:

	σ_k	σ_1	σ_2	σ_3
$M = 5$	$U(\sigma_k)$	7,8125	6,509	5,2075
	$\pi^+{}_0(\sigma_k)$	0,7432	0,20183	0,0549

$$H^{(0)}{}_{\pi+} = 0{,}7029.$$

В следующей таблице представлены предпочтения, рассчитанные с учетом утилитарной составляющей, которое учитывается введением множителей

$$\pi(I_k) = \frac{1}{x_{ki}^2 + x_{kj}^2}$$

	σ_k	σ_1	σ_2	σ_3
$M = 5$	$\pi(\sigma_k)$	0,0624	0,0709	0,0944
	$\pi^+{}_1(\sigma_i)$	0,7039	0,2172	0,0789

$$H^{(1)}{}_{\pi+} = 0{,}7791.$$

«Информационная цена» учета императива I_k есть

$$I_{\pi+} = H^{(0)}{}_{\pi+} - H^{(1)}{}_{\pi+} = -0{,}0762.$$

Следовательно, учет императива I_k ведет в данном случае к росту «экспорта информации». Смысл действия императива состоит в том, что он стимулирует меньший вес «потребительской корзины», воздержание в потреблении. В данном случае нельзя

было бы взять $\pi(I_k)$ в виде произведения x_ix_j как для полезности $U(\sigma_i)$, так как при такой структуре одно из количеств x_i (или x_j) может принимать бесконечно большое значение, если другое равно нулю.

3.11. «Вариационная задача» Вильсона. Две сопряженные вариационные задачи. О термодинамической аналогии

В книге Вильсона [40] весьма близкий к нашему вариационный принцип, в основе которого лежит энтропийный подход, применяется к моделированию сложных транспортных систем.

Изложим кратко содержание этого исследования в той части, в которой оно перекликается, с подходом, реализуемым в нашей работе. Работа Вильсона в целом посвящена проблеме миграции населения в городах.

Если T_{ij} — число индивидуумов, живущих в местности i и работающих в зоне j, Q_i — полное число работающих и живущих в зоне i, D_j — полное число рабочих мест в зоне j, c_{ij} — затраты на передвижение из зоны i в зону j, C — полные затраты и T — полное число жителей в городе, то должны выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{Q_i = \sum_j T_{ij}};\\ &\boldsymbol{D_j = \sum_i T_{ij}};\\ &\boldsymbol{C = \sum_i \sum_j c_{ij} T_{ij}};\\ &\boldsymbol{T = \sum_i \sum_j T_{ij}}. \end{aligned}\right\}$$

Обозначим через W наибольшее число возможных вариантов при отмеченных выше условиях-ограничениях.

$$\boldsymbol{W = \frac{T!}{\prod_i \prod_j T_{ij}!}}$$

Тогда

$$\boldsymbol{\ln W = \ln T! - \sum_i \sum_j \left(T_{ij} \ln T_{ij} - T_{ij}\right) = \ln T! - T \ln T + T - T \sum_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}}.$$

Здесь $p_{ij} = T^{-1} T_{ij}$ — соответствует классическому определению вероятности, но может, по-видимому, трактоваться, как характеристика осредненных предпочтений.

Последний член

$$\boldsymbol{S = -\sum_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}}$$

представляет из себя энтропию. Предлагается следующая вариационная задача: определить вероятности p_{ij} так, чтобы энтропия достигала максимального значения

$$\boldsymbol{S \to \max}$$

при ограничениях [33]:

$$\sum_i p_j f(x_i) = \varepsilon;$$

$$\sum_i p_j = 1,$$

где $p_i = \sum_j p_{ij}$.

Оптимальное распределение, которое получается в результате применения вариационного принципа, имеет вид:

$$p_{i\text{opt}} = \frac{e^{-\mu f(x_i)}}{\sum_j e^{-\mu f(x_i)}}.$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор «благ», а $I = \sum_i x_i p_i$ — бюджет, то индивидуальная полезность $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n, I)$. Задача максимизации полезности разрешается путем экстремизации функционала

$$L = U(x, I) + \lambda\left(I - \sum_i p_i x_i\right),$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i.$$

Здесь p_i играет роль цен «благ».

Эти уравнения совместно с уравнением бюджета позволяют определить оптимальный набор «благ»

$$x_{i\text{opt}} = \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, p_N, I).$$

Поскольку «блага» имеют различную размерность, вводят соответствующие безразмерные «блага»

$$y_i = \frac{x_i p_i}{I}.$$

Энтропию представляют в виде

$$S = -\sum_i y_i \ln y_i$$

с условием нормировки:

$$\sum_i y_i = 1.$$

Система с максимальной полезностью определяется экстремализацией критерия

$$L = U + \lambda\left(1 - \sum_i y_i\right), \quad \text{где} \quad U = U\left(\frac{y_1 I}{p_1}, \frac{y_2 I}{p_2}, \ldots, \frac{y_n I}{p_n}, I\right).$$

Из системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} = \lambda; \quad \sum_i y_i = 1$$

находим

$$\boldsymbol{y}_{i\mathrm{opt}} = \psi(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{I}).$$

Пусть теперь для поиска оптимального решения используется энтропийный подход и кроме нормировочного условия имеется ряд ограничений:

$$\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_N) = \boldsymbol{g}_k \ (\boldsymbol{k} \in \overline{1, \boldsymbol{L}}).$$

Критерий оптимальности выбирается в виде:

$$\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{S} + \lambda\left(1 - \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{y}_i\right) + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{L}} \mu_{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y})\right).$$

К условию нормировки и уравнениями, выражающими ограничения $g_k = f_k(y)$ добавляются уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{y}_i} = 0 \ \ (\boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{n}}).$$

Возникает большое разнообразие оптимизационных задач, отличающихся конкретным видом дополнительных ограничений.

Автор работы [40] рассматривает также некоторые вопросы динамики, использует термодинамические аналоги и вводит понятие «количества работы», проделанной над системой. Если

$$\bar{\boldsymbol{A}}_j = \boldsymbol{E}\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \alpha_i}\right)$$

— «внешние силы», α_i — некоторые параметры «положения», то работа есть $\bar{A}_j d\alpha_j$. В последнем выражении S — аналог энтропии. В работе развивается так называемая гравитационная модель. Как видно, несмотря на некоторое формальное сходство вариационного принципа, использующего энтропию как важную составляющую функционала, имеются существенные принципиальные отличия в трактовке между работой [40] и вариационным принципом, развиваемом в настоящей монографии, в частности, в трактовке функций $\pi(\sigma_i)$ как *субъективных предпочтений*, их связи с полезностями, этическими императивами, структурой функций эффективности и по ряду других элементов теории.

Продолжим анализ вариационного принципа, основанного на использовании субъективной энтропии.

Выводы и методы, которые должны последовать как результат постулирования вариационного принципа могут быть полезными с нашей точки зрения для того, чтобы иметь возможность более определенно прогнозировать поведение субъекта и получать некую более конкретную схему (задание) на проведение психологических и социологических экспериментальных исследований. Я имею здесь ввиду, что наличие теоретической модели, в которой определены «переменные» и «постоянные» параметры, поддающиеся статистическому измерению, а также соотношения, связывающие их (например, функции предпочтения), дает возможность спланировать соответствующий эксперимент, а именно: выбрать измеряемые величины, выбрать реципиентов, определить метрологические характеристики измерений, спланировать процесс эксперимента, наконец, использовать результаты теории для управления активными системами.

В достаточно общем виде функционал может быть взят в виде

$$\boldsymbol{\Phi}_\pi = \alpha \boldsymbol{H}_\pi + \beta\varepsilon + \gamma\mathcal{N}, \tag{3.195}$$

где H_π — субъективная энтропия; $\varepsilon = \varepsilon(\pi, U, \ldots)$ — функция субъективной эффективности; $\mathcal{N}$ — нормирующее условие.

Функцию эффективности ε назовем *линейной*, если она линейна относительно функции предпочтения $\pi(.)$. В противном случае ε нелинейна. Функция $\mathcal{N}$ формирует условие нормировки: $\mathcal{N} = A_0$, где A_0 — нормировочная константа (в большинстве случаев $A_0 = 1$). Функция $\mathcal{N}$ зависит только от функции предпочтения $\pi(.)$. Структурные параметры α, β, γ могут рассматриваться в различных ситуациях как коэффициенты Лагранжа, либо как весовые коэффициенты. В дальнейшем структурные параметры α, β, γ… будут определены как эндогенные параметры, отражающие, определенные свойства психики. С ними будет связываться, в частности, эндогенная динамика предпочтений. Вариационная задача, связанная с критерием, (3.195) есть задача на условный экстремум.

Мы будем рассматривать в основном две сопряженные задачи.

1. Найти распределение $\pi(.)$, доставляющее экстремальное значение субъективной энтропии H_π при наличии «изопериметрических условий»:

$$\boldsymbol{\varepsilon(\pi, U, \ldots) = \varepsilon_0}; \tag{3.196}$$

$$\boldsymbol{N(\pi) = A_0}; \tag{3.197}$$

$$\boldsymbol{\pi_{extr}(.) = \arg \underset{\pi(.)\in\Pi}{extr}\, H_\pi},$$

где Π — класс функций предпочтения, из которого выбирается экстремальное распределение $\pi_{extr}(.)$.

2. Найти распределение $\pi(.)$ доставляющее экстремальное значение функции эффективности $\varepsilon(\pi, U,\ldots)$ при наличии «изопериметрических» условий

$$\boldsymbol{H_\pi = H_0}; \tag{3.198}$$

$$\boldsymbol{N(\pi) = A_0}; \tag{3.199}$$

$$\boldsymbol{\pi_{extr}(.) = \arg \underset{\pi(.)\in\Pi}{extr}\, \varepsilon(\pi, U\ldots)}.$$

В первой задаче экстремальная функция $\pi_{extr}(.)$ ищется на *линейном* многообразии, задаваемом изопериметрическими условиями (3.196), (3.197). Во втором случае многообразие является *нелинейным*, поскольку энтропия H_π нелинейная функция $\pi(.)$, и задается уравнениями (3.198) и (3.199).

В первом случае можно считать, что параметр $\alpha = \pm 1$, а β и γ — множители Лагранжа, которые в конечном счете могут быть выражены, через ε_0 и A_0, во втором случае $\beta = \pm 1$, а α и γ — множители Лагранжа, являющиеся функциями H_0 и A_0.

Как уже говорилось выше, нормировочное условие рассматривается как модельное представление одного из свойств психики субъекта: при сдвиге «желаний» (предпочтений) на множестве альтернатив увеличение предпочтения одной из альтернатив неизбежно приводит к уменьшению «предпочтения» какой-нибудь другой. Другими словами предполагается наличие «баланса» предпочтений — своеобразных весов на множестве S_a.

Вернемся к вопросу о «*принципе максимума энтропии*». «Принцип максимума энтропии» первоначально был сформулирован в термодинамике, затем он был постулирован в теории информации, и позже перенесен на более широкий класс объектов.

Термодинамическая энтропия H обладает такими свойствами [42]:

Приращение энтропии

$$dH = d_eH + d_iH, \tag{3.200}$$

где d_eH — энтропия, поступающая в систему извне; d_iH — энтропия возникающая внутри системы. Согласно второму закону термодинамики $d_iH = 0$ для обратимых процессов в системе и

$$d_iH \geq 0 \tag{3.201}$$

для необратных процессов.

Приращение d_eH может быть положительным, отрицательным, либо равным нулю. Для незамкнутых систем согласно теореме Карно-Клаузиуса $d_eH = \frac{1}{T}dQ,$ где dQ — передача теплоты в систему извне. Следовательно,

$$dH \geq \frac{dQ}{T}, \quad \text{если} \quad dQ \geq 0.$$

Если система представляет собой сплошную среду с плотностью ρ и s — энтропия единицы массы, то количество энтропии в объеме V

$$\left.\begin{aligned} H &= \iiint_V \rho s dV; \\ \frac{d_eH}{dt} &= \oiint_\Omega \vec{q}_s d\Omega; \\ \frac{d_iH}{dt} &= \iiint_V \sigma dV. \end{aligned}\right\} \tag{3.202}$$

где $\vec{q}_s$ — удельный поток энтропии в единицу времени через единицу поверхности Ω ограничивающей объем V; σ — интенсивность локальных источников энтропии, распределенных в объеме V, имеет место интегральное соотношение

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + div\vec{q}_s - \sigma \right) dV = 0. \tag{3.203}$$

Отсюда следует уравнение:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -div\vec{q}_s + \sigma, \tag{3.204}$$

или вводя поток $\vec{I}_s = \vec{q}_s - \rho s\vec{v},$ где $\vec{v}$ — скорость элемента среды, в виде

$$\rho \frac{ds}{dt} = -div\vec{I}_s + \sigma, \tag{3.205}$$

если в системе имеет место термодинамическое равновесие.

Мы уже отмечали выше (в главе 2) принцип максимума энтропии, постулируемый в теории категорий [96] и информационный принцип максимума энтропии [137] являющийся частным случаем.

Вообще, энтропия как атрибут различных теорий от физики до экономики, социологии, психологии и даже истории, в последнее время привлекает все более пристальное внимание. В некоторых работах роль энтропии абсолютизируется и возводится в ранг сущности и атрибута, лежащего в основе процессов происходящих во вселенной в целом.

Высказываются мнения что «*материя становится «активной»: она порождает необратимые процессы, а необратимые процессы организуют материю*», и еще «*материя более не пассивная субстанция, описываемая в рамках механистической картины мира, ей также свойственна спонтанная активность*» [133].

В работах последнего времени Панченковым [129,130,131] введен и обсуждается в весьма общей форме *принцип максимума энтропии*. Энтропия представляется в виде суммы «*энтропии структуры*» и «*энтропии импульса*»:

$$\boldsymbol{H = H_f + H_p},$$

где H_f — «*энтропия структуры*», связанная с конфигурационным пространством системы, H_p — «энтропия импульсов», связанная с пространством импульсов.

Для консервативных систем автор доказывает, что энтропия H является инвариантом $H = \text{const}$ и изменения в системе сводятся к «перетеканию» H_f в H_p и наоборот. Для этой энтропии и различных обобщенных вариантов устанавливается принцип максимума.

Возвращаясь к обсуждаемому в настоящей книге предмету, отметим, что автор не претендует на придание всему материальному миру (Universum) статуса «*активной системы*», класс «активных систем», который мы рассматриваем, значительно уже и в концептуальном, и в пространственном, и во временном смыслах.

Мы постулируем следующее важное положение, которое можно назвать «*энтропийным принципом формирования субъективных предпочтений*».

1. Распределение субъективных предпочтений формируется на основе *вариационного принципа*. Экстимизируемый функционал зависит как от субъективных функций предпочтения, так и от величин и функций, являющихся объективными характеристиками проблемно-ресурсной ситуации.

Этот функционал является как бы связующим звеном между психическими процессами субъекта и объективными обстоятельствами, которые в «сумме» составляют проблемно-ресурсную ситуацию.

2. Основной аддитивной составляющей частью функционала является субъективная энтропия.

3. В зависимости от обстоятельств субъект формирует предпочтения на множестве S_a таким образом, что энтропия предпочтений принимает *максимальное* значение либо *фиксированное* значение.

Каждый из перечисленных трех пунктов представляет собой гипотезу, более или менее правдоподобную, не выпадающую, однако, из общего «*потока*» энтропийных исследований.

Сформулированный принцип созвучен с упомянутым выше высказыванием Леонарда Эйлера о том, что «… в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден

смысл какого-нибудь максимума или минимума», а также замечаний, что «… по Лейбницу наш мир является наилучшим из всех возможных миров, а поэтому законы можно описать экстремальными принципами».

Существует большое подозрение, что так оно и есть на самом деле. Законы Ньютона позволили получить уравнения движения материальных систем но потом оказалось, что по крайней мере в одном частном случае, а именно, в случае консервативных систем эти уравнения можно получить из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Долгое время считалось, что для диссипативных систем вариационный принцип отсутствует. Недавно было показано, что, по крайней мере, формально можно построить вариационный принцип для некоторых типов диссипативных систем [66,68].

Введение в субъективный анализ вариационного принципа не означает навязывание субъекту определенного метода анализа и принятия решения. Выдвигается предположение, гипотеза, что некий вариационный принцип органически вписан в человеческую психику и функционирует, так сказать, «независимо от его воли». Вопрос состоит в том, «каков этот принцип?».

Мы допускаем на различных этапах развития (возникновения, прогностического анализа и использования результатов), что субъект формирует и решает одну из двух перечисленных вариационных задач.

Рассмотрим частные случаи вариационных задач.

Пусть требуется определить каноническое распределение абсолютных предпочтений, соответствующее максимуму субъективной энтропии при заданном значении функции эффективности ε_0.

Конкретизируем несколько смысл функции эффективности $\varepsilon(\pi, \ldots)$. Сделаем дополнительное допущение о том, что наряду с функцией полезности $U(\sigma)$, имеющей позитивный смысл и устанавливающей на множестве S_a «возрастающее» вместе с численным значением $U(\sigma)$ отношение предпочтений:

$$\boldsymbol{\sigma \langle \eta \Leftrightarrow U(\sigma) < U(\eta)}, \tag{3.206}$$

субъект может пользоваться функцией потерь («вредности») (Losses function или harm function или ingery function) $L(\sigma)$, имеющий негативный смысл и устанавливающей на S_a «убывающее» с ростом $L(\sigma)$ отношение предпочтения

$$\boldsymbol{\sigma \langle \eta \Leftrightarrow L(\sigma) > L(\eta)}. \tag{3.207}$$

Введение такой функции расширяет и облегчает анализ альтернатив. Представим себе студента художественного вуза, которому предлагается рассмотреть N художественных полотен и сформулировать, не только достоинства, но и недостатки каждого полотна. Такой анализ будет более полным и, надо полагать, облегчает задачу ранжирования полотен по предпочтению по сравнению со случаем, когда учитывались бы только достоинства или только недостатки.

Другим примером позитивных и негативных предпочтений, могут быть раздумья былинного витязя у камня на перекрестке дорог. Пусть на камне написано: «направо пойдешь — богатство найдешь, налево — славу, прямо — власть», тогда витязь формирует позитивное предпочтение и делает позитивный выбор (выбор

наибольшей пользы), если же надпись гласит: «направо — честь потеряешь, налево — свободу, прямо — голову», то это есть выбор негативный (выбор наименьшего зла).

Множество альтернатив S_a в этом случае содержит три альтернативы, а субъективная энтропия витязя в случае максимальной «нерешительности» равна ln3.

Хорошим примером является поведение покупателя в аптеке при покупке лекарственного препарата из некоторого набора. Здесь возможны две тактики. В первом случае покупатель начинает с изучения «лицевой странички» описания лекарства, где излагаются «показания», то есть та польза, которая ожидается в результате его применения, делает предварительный выбор на основе этой информации и затем обращается к «обратной страничке», где можно прочесть о противопоказаниях, то есть об опасностях грозящих в случае употребления лекарства. Второй этап выбора осуществляется с учетом этой «негативной» информации. Во втором случае тактика покупателя (более осторожного) — читая, он начинает с «обратной странички» с негативного анализа и только потом обращается к анализу позитивному.

Ситуация с выбором созвучна тому, что в психологии называют «когнитивным диссонансом».

Пусть упорядочение производится раздельно: сначала только по $L(\sigma)$, затем по $U(\sigma)$. В первом случае получим функцию негативных предпочтений, которую обозначим $\pi^-(\sigma)$, во втором случае — функцию позитивных предпочтений обозначают $\pi^+(\sigma)$. Соответственно, используем две функции эффективности [29,40]:

$$\varepsilon^-\left(\pi^-, L(\sigma), \ldots\right) = \sum_{i=1}^{N} \pi^-\left(\sigma_i\right) L\left(\sigma_i\right); \tag{3.208}$$

$$\varepsilon^+\left(\pi^+, U(\sigma), \ldots\right) = \sum_{i=1}^{N} \pi^+\left(\sigma_i\right) U\left(\sigma_i\right). \tag{3.209}$$

Альтернативы, полезность которых равна нулю в множество S_a не включаются.

Условия нормировки одинаковы:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^-\left(\sigma_i\right) = 1; \quad \sum_{i=1}^{N} \pi^+\left(\sigma_i\right) = 1; \tag{3.210}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 \ge \pi^-\left(\sigma_i\right) \ge 0 \\ 1 \ge \pi^+\left(\sigma_i\right) \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall i \in \overline{1, N}. \tag{3.211}$$

В первом случае выберем функционал в виде:

$$\Phi_\pi^- = -\sum_{i=1}^{N} \pi^-\left(\sigma_i\right) \ln \pi^-\left(\sigma_i\right) - \beta \sum_{i=1}^{N} \pi^-\left(\sigma_i\right) L\left(\sigma_i\right) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi^-\left(\sigma_i\right). \tag{3.212}$$

Из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \Phi_\pi^-}{\partial \pi^-\left(\sigma_i\right)} = 0 \ \left(\forall i \in \overline{1, N}\right)$$

находим

$$-\ln\pi^-(\sigma_i)-1-\beta L(\sigma_i)+\gamma=0.$$

Отсюда

$$\pi^-(\sigma_i)=e^{-1+\gamma}e^{-\beta L(\sigma_i)} \quad \text{или} \quad \pi^-(\sigma_i)=Ce^{-\beta L(\sigma_i)}.$$

Используя условия нормировки, найдем константу C:

$$C=\left(\sum_{j=1}^{N}e^{-\beta L(\sigma_i)}\right)^{-1}.$$

Тогда

$$\pi^-(\sigma_i)=\frac{e^{-\beta L(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N}e^{-\beta L(\sigma_j)}}. \qquad (3.213)$$

есть монотонно убывающая функция $L(\sigma_i)$ имеет вид (a) изображенный на рис. 3.15.

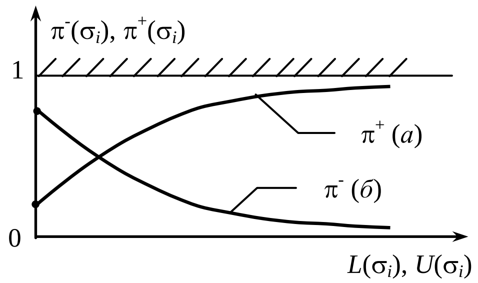


Рис. 3.15

Поскольку $\frac{\partial^2\Phi_\pi^-}{\partial\pi^{-2}(\sigma_i)}=-\frac{1}{\pi^-(\sigma_i)}<0, \quad \forall i\in\overline{1,N},$ то в данном случае функционал достигает максимального значения на многообразии заданном соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi^-(\sigma_i)L(\sigma_i)=\varepsilon_0; \quad \sum_{i=1}^{N}\pi^-(\sigma_i)=1.$$

Ввиду линейности функций ε^- и $\mathcal{N}$ относительно π_i^- имеет место равенство

$$\frac{\partial^2\Phi_\pi^-}{\partial\pi_i^{-2}}=\frac{\partial^2 H_\pi}{\partial\pi_i^{-2}}.$$

Это означает, что субъект выбирает распределение негативных предпочтений таким образом, что энтропия распределения $\pi^-(\sigma_i)$ максимальна при выполнении изопериметрических условий, то есть стремится к выравниванию негативных предпочтений — к максимальному учету всех негативных факторов.

Пусть теперь критерий Φ_π^+ имеет вид:

$$\Phi_\pi^+=-\sum_{i=1}^{N}\pi^+(\sigma_i)\ln\pi^+(\sigma_i)+\beta\sum_{i=1}^{N}\pi^+(\sigma_i)U(\sigma_i)+\gamma\sum_{i=1}^{N}\pi^+(\sigma_i). \qquad (3.214)$$

По аналогии с предыдущим случаем находим:

$$\pi^+\left(\sigma_i\right)=\frac{e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta U(\sigma_j)}}. \tag{3.215}$$

Функция $\pi^+(\sigma_i)$ монотонно возрастающая функция $U(\sigma_i)$. Как и в случае функционала (3.212), выполняется условие

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\pi_i^{+2}}=-\frac{1}{\pi_i^+}<0,\quad \forall i\in\overline{1,N}.$$

Распределение (3.215) снова доставляет энтропии H_π максимальное значение на соответствующем многообразии, задаваемом изопериметрическими условиями.

Если функция эффективности ε линейна по $\pi(\sigma_i)$, то матрица Гессе диагональна.

$$G=\left\|\frac{\partial^2\Phi_\pi^\pm}{\partial\pi_i^\pm(\sigma)\pi_j^\pm}\right\|=diag\left\|\frac{\partial^2\Phi_\pi^\pm}{\partial\pi_\pi^{\pm2}}\right\|$$

В зависимости от знака параметра α все диагональные элементы положительны если α = +1 и отрицательны если α = –1.

Главные миноры матрицы Гессе все положительны, если α = +1:

$$M_k\left(G\right)=\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial^2\Phi_\pi^\pm}{\partial\pi_i^{\pm2}}>0$$

и меняют знак, если α = –1:

$$M_k\left(G\right)=\left(-1\right)^k\left|\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial^2\Phi_\pi^\pm}{\partial\pi_i^{\pm2}}\right|.$$

Независимо от знака α и от величины параметра β канонические предпочтения доставляют максимум энтропии H_π. Связь между предпочтениями $\pi_i^\pm$ осуществляется в результате удовлетворения изопериметрических условий.

В дальнейшем параметр β используется как эндогенный параметр, а параметр γ определяется условием нормировки.

Функции предпочтения π_i^+ и π_i^- являются предпочтениями «принятия» соответствующей альтернативы. Мы можем интерпретировать π_i^+ и π_i^- следующим образом:

$\pi^+(\sigma)$ — предпочтение *принять* альтернативу σ, ориентируясь по величине полезности $U(\sigma)$;

$\pi^-(\sigma)$ — предпочтение *принять* альтернативу σ, ориентируясь по величине вредности $L(\sigma)$.

Предыдущие рассуждения приводят к мысли ввести в рассмотрение новую функцию предпочтения, однако на этот раз — предпочтение «отвергнуть» данную альтернативу, что также как введение наряду с функцией полезности функции потерь или «вредности» расширяет методическую базу исследования. Введение новой функции предпочтения позволяет взглянуть на каждую альтернативу двух точек зрения и образовать своеобразные весы: «полезно-вредно», «принято-отвергнуто».

Эту новую функцию предпочтения обозначим υ_i^+ и υ_i^-, где υ_i^+ — позитивное предпочтение «отвергнуть», υ_i^- — негативное предпочтение «отвергнуть». Более детально:

$\upsilon_i^+(\sigma)$ — предпочтение отвергнуть альтернативу σ ориентируясь по полезности $U(\sigma)$;

$\upsilon_i^-(\sigma)$ — предпочтение отвергнуть альтернативу σ ориентируясь по вредности $L(\sigma)$.

Схематически это можно отобразить следующей схемой отношений:

$$\boldsymbol{U}(\sigma)<\boldsymbol{U}(\eta)\begin{cases}\pi^+(\sigma)<\pi^+(\eta)\Rightarrow \boldsymbol{H}_\pi\to\mathbf{max};\\ \upsilon^+(\sigma)>\upsilon^+(\eta)\Rightarrow \boldsymbol{H}_\upsilon\to\mathbf{max}.\end{cases}\tag{3.216}$$

$$\boldsymbol{L}(\sigma)<\boldsymbol{L}(\eta)\begin{cases}\pi^-(\sigma)>\pi^-(\eta)\Rightarrow \boldsymbol{H}_\pi\to\mathbf{max};\\ \upsilon^-(\sigma)<\upsilon^-(\eta)\Rightarrow \boldsymbol{H}_\upsilon\to\mathbf{max}.\end{cases}\tag{3.217}$$

На этой схеме одновременно показано, что во всех случаях соответствующее распределение доставляет максимум энтропии.

Энтропия H^+_υ и H^-_υ даются формулами

$$\boldsymbol{H}_\upsilon^+=-\sum_{i=1}^{N}\upsilon^+(\sigma_i)\ln\upsilon^+(\sigma_i);\tag{3.218}$$

$$\boldsymbol{H}_\upsilon^-=-\sum_{i=1}^{N}\upsilon^-(\sigma_i)\ln\upsilon^-(\sigma_i).\tag{3.219}$$

Относительно распределений υ_i^+ и υ_i^- можно повторить то, что было сказано относительно распределений π_i^+ и π_i^-. В частности таким же образом вводятся абсолютные и условные распределения, предпочтения композиций альтернатив. По видимому, можно говорить о предпочтениях «отвергнуть» траектории. Мы не будем повторять соответствующие формулы, поскольку они подобны аналогичным формулам для распределений π_i^+ и π_i^-.

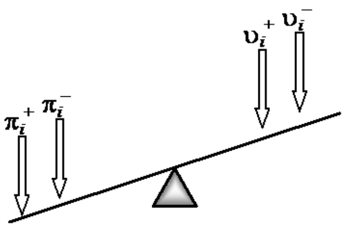


Рис. 3.16

Вопрос о том, каким образом субъект делает выбор на множестве S_a, имея в своем распоряжении распределения предпочтений π_i^+, π_i^-, υ_i^+, υ_i^- и пользуясь упомянутыми выше весами может быть рассмотрен и решен в динамике. Возможно, что здесь окажется уместным принцип Паретто.

Представляется перспективным использовать описанные выше четыре распределения предпочтений для упорядочения постановки, проектирования и обработки результатов психологических экспериментов, рассматривая их как набор инструментов, конкретизирующих задачу: что исследовать, что сравнивать, как обработать и получить количественные характеристики.

Теперь можно сказать, что теория полезности, функции полезности $U(\sigma)$ ($U(C^{(k)})$, $U(T^{(k)})$…), функции предпочтения типа $\pi^\pm(\sigma)$ являются частным случаем более широкой теории, оперирующей более широким спектром изучаемых характеристик. Мы

можем говорить, что множество альтернатив S_a снабжено, как минимум четырьмя распределениями.

Канонические распределения предпочтений зависящие от ресурсов

Выше мы ввели три основных вида ресурсов. Потребные ресурсы для каждой альтернативы — $R^{req}(\sigma_i)$, $(\sigma_i \in S_a)$. В каждой проблемно-ресурсной ситуации имеется свое распределение потребных ресурсов. Наряду с использованием абсолютных потребных ресурсов можно использовать нормированные ресурсы. Если

$$\boldsymbol{R}^{req} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i),$$

то нормированные ресурсы есть

$$\bar{\boldsymbol{R}}^{req}(\sigma_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i) \right)^{-1} \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i).$$

Можно положить, что $L(\sigma_i) = R^{req}(\sigma_i)$ (или $L(\sigma_i) = \bar{R}^{req}(\sigma_i)$). Тогда негативная функция предпочтения

$$\pi^-(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_j)}}. \tag{3.220}$$

Смысл этого распределения — чем больше потребные ресурсы для альтернативы σ_i, тем она менее предпочтительна.

Выберем в качестве функции полезности превышение располагаемых ресурсов над потребными. Здесь возможны два варианта. Располагаемые ресурсы R^{disp}, если они универсальны (например, деньги), не зависят от того, какую альтернативу выбирает субъект. Тогда превышение

$$\boldsymbol{R}^{d+}(\sigma_i) = \boldsymbol{R}^{disp} - \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i).$$

Если располагаемые ресурсы специализированы, то

$$\boldsymbol{R}^{d+}(\sigma_i) = \boldsymbol{R}^{disp}(\sigma_i) - \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i). \tag{3.221}$$

В первом случае, при одном и том же объеме располагаемых ресурсов, выраженных в эквивалентных единицах субъект располагает большей свободой в выборе альтернатив. Пусть

$$\boldsymbol{U}(\sigma_i) = \boldsymbol{R}^{d+}(\sigma_i).$$

Тогда модель функции предпочтения, соответствующая функции эффективности

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \pi^+(\sigma_i) \boldsymbol{R}^{d+}(\sigma_i), \tag{3.222}$$

имеет вид

$$\pi^+(\sigma_i) = \frac{e^{\beta R^{d+}(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta R^{d+}(\sigma_j)}}. \tag{3.223}$$

и также доставляет максимум субъективной энтропии.

Следующая возможность состоит в использовании в качестве функции полезности величины новых ожидаемых ресурсов в результате реализации альтернативы: $R^{exp}(\sigma_i)$, или превышения ожидаемых ресурсов над затрачиваемыми $R^{req}(\sigma_i)$:

$$\boldsymbol{R^{e+}(\sigma_i) = R^{exp}(\sigma_i) - R^{req}(\sigma_i)},$$

которую можно условно назвать ожидаемой прибылью. Тогда позитивная функция предпочтения может быть записана в виде:

$$\pi^+(\sigma_i) = \frac{e^{\beta R^{e+}(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta R^{e+}(\sigma_j)}}, \quad \pi^-(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta R^{e-}(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta R^{e-}(\sigma_j)}}.$$

$$\dot{\pi}(\sigma_i) = \dot{\pi}_i = 0, \ \forall i \in \overline{1,N}.$$

$$\frac{dH_\pi}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H_\pi}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i + \frac{\partial H_\pi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{dH_\pi}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} (\ln \pi_i + 1) \dot{\pi}_i = -\sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i \ln \pi_i.$$

Если величину $R^{e-}(\sigma_i) = -R^{e+}(\sigma_i)$ назвать ожидаемым убытком, то, соответствующая негативна функция предпочтения

Если субъективная энтропия не изменяется, отсутствует информационный обмен субъекта активной системы с окружающей средой, с другими активными системами. Такую ситуацию можно считать ситуацией информационной замкнутости. В частном случае энтропия не изменяется, если постоянными остаются предпочтения:

Это условие не является достаточным для постоянства энтропии. Для абсолютных предпочтений $\pi(\sigma_i) = \pi_i$ находим, если $H\pi$ = const.

Поскольку $H_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i$, то $\frac{\partial H_\pi}{\partial t} = 0$, тогда,

$$\frac{dH_\pi}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} (\ln \pi_i + 1)\dot{\pi}_i = -\sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i \ln \pi_i$$

Здесь учтено, что $\sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i = 0$. Таким образом, если $\frac{dH_\pi}{dt} = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i \ln \pi_i = 0. \tag{3.224}$$

Условием неизменности энтропии является ортогональность вектора скоростей изменения предпочтений $\dot{\pi}^{\text{т}} = \left(\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, ..., \dot{\pi}_N\right)$ и вектора ($\ln\pi_1, \ln\pi_2, ..., \ln\pi_N$).

Предположим, что π_i представляют собой каноническое распределение, то есть являются решением вариационной задачи с функционалом

$$\boldsymbol{\Phi_\pi = H_\pi \pm \beta\varepsilon + \gamma N \to \text{extp}},$$

где функцию эффективности возьмем в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \pi_i F_i}.$$

Величины F_i в зависимости от смысла задачи — либо полезности U_i, либо вредности L_i.

Каноническое распределение определяем, как решение уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial \boldsymbol{\pi}_i} = 0. \tag{3.225}$$

Заметим, что

$$\frac{\boldsymbol{d\Phi}_\pi}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial \boldsymbol{\pi}_i} \dot{\boldsymbol{\pi}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial \boldsymbol{t}}.$$

Учитывая (3.225) находим, что для канонических распределений

$$\frac{\boldsymbol{d\Phi}_\pi}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial \boldsymbol{t}}.$$

Для выбранной функции эффективности и учитывая, что $\sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i = 0,$ находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial \boldsymbol{t}} = \pm\beta \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi}_i \dot{\boldsymbol{F}}_i.$$

Уравнение (3.225) в развернутом виде дает

$$\boldsymbol{\ln\pi_i = -1 \pm \beta F_i + \gamma}, \ \ (\forall \boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}).$$

Подставим значение $\ln\pi_i$ в соответствие с этим соотношение в (3.224). Имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \left(-1 \pm \beta \boldsymbol{F}_i + \gamma\right) \dot{\boldsymbol{\pi}}_i = 0,$$

но $\sum_{i=1}^{N} \left(-1 + \gamma\right) \dot{\pi}_i = 0,$ поэтому условие стационарности энтропии свелось к равенству

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \dot{\boldsymbol{\pi}}_i = 0.$$

Можно сказать, что энтропия канонического распределения H_π постоянна, если вектор скоростей изменения предпочтений ортогонален к вектору $F^{\text{т}} = (F_1, F_2, \dots, F_N)$.

В частном случае, когда $F_i = U_i$, где U_i — полезность альтернативы σ_i, субъективная энтропия постоянна, если вектор $\dot{\pi}$ ортогонален к вектору полезностей.

Аналогично предыдущему можно воспользоваться относительными величинами $\bar{R}_i^{d\pm}$, $\bar{R}_i^{e\pm}$.

Покажем, что каждый раз энтропия H_π достигает максимума на многообразии, задаваемом изопериметрическими условиями. Пусть π_i — каноническое распределение, полученное в результате решения вариационной задачи. Дадим произвольные малые приращения Δ_i каноническим предпочтениям. Таким образом, проварьированное предпочтение $\tilde{\pi}_i = \pi_i + \Delta_i$. Вариация энтропии δH_π, обусловленная вариациями предпочтений есть

$$\delta \boldsymbol{H}_\pi = \boldsymbol{H}_\pi\left(\pi_i + \Delta_i\right) - \boldsymbol{H}_\pi\left(\pi_i\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_i \ln\left(\pi_i + \Delta_i\right) + \Delta_i \ln\left(\pi_i + \Delta_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i.$$

Полагая ввиду малости Δ_i, что

$$\ln\left(\pi_i + \Delta_i\right) \approx \ln \pi_i + \frac{1}{\pi_i}\Delta_i,$$

найдем

$$\delta \boldsymbol{H}_\pi \,|_{\Delta_i \to 0} \cong -\sum_{i=1}^{N} \Delta_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \ln \pi_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i^2}{\pi_i}.$$

Введем общее обозначение для $U(\sigma_i)$ и $L(\sigma_i)$: F_i. Необходимые условия оптимальности при решении вариационной задачи имеют вид:

$$-\ln \pi_i - 1 \pm \beta \boldsymbol{F}_i + \gamma = 0; \ \forall \boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}}.$$

Отсюда

$$\ln \pi_i = -1 + \gamma \pm \beta \boldsymbol{F}_i.$$

Изопериметрические условия должны выполняться для любых распределений π_i, поэтому имеют место соотношения:

$$-\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_i + \Delta_i\right)\boldsymbol{F}_i = \varepsilon_0; \quad \sum_{i=1}^{N}\left(\pi_i + \Delta_i\right) = 1.$$

Но каноническое распределение удовлетворяет изопериметрическим условиям, следовательно

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta_i \boldsymbol{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} \Delta_i = 0.$$

Учитывая необходимое условие оптимальности и последние два соотношения, найдем, что

$$\delta \boldsymbol{H}_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i^2}{\pi_i}.$$

Величины $\pi_i \geq 0$ для $\forall i$, следовательно

$$\delta H_\pi \le \mathbf{0}.$$

Это подтверждает тот факт, что канонические распределения π_i доставляют максимум энтропии на изопериметрическом многообразии.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенные выше соображения. Пусть множество S_a включает три альтернативы (две альтернативы исключаются, так как в этом случае распределение предпочтений можно было бы определить из уравнений двумерного изопараметрического многообразия) и соответствующие ресурсы есть r_1, r_2, r_3.

В одном случае они соответствуют позитивному эффекту, в другом — негативному.

Положим для простоты $\beta = 1$; примем $r_1 = 0{,}7$; $r_2 = 1{,}0$; $r_3 = 3{,}5$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \pi_1^+ &= \frac{e^{0,7}}{e^{0,7}+e^{1,0}+e^{3,5}} = 0{,}153211... \\ \pi_2^+ &= \frac{e^{1,0}}{e^{0,7}+e^{1,0}+e^{3,5}} = 0{,}17183... \\ \pi_3^+ &= \frac{e^{3,5}}{e^{0,7}+e^{1,0}+e^{3,5}} = 0{,}67503... \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{3} \pi_i^+ = 1.$$

Негативные распределения предпочтений:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1^- &= \frac{e^{-0,7}}{e^{-0,7}+e^{-1,0}+e^{-3,5}} = 0{,}55505... \\ \pi_2^- &= \frac{e^{-1,0}}{e^{-0,7}+e^{-1,0}+e^{-3,5}} = 0{,}4112... \\ \pi_3^- &= \frac{e^{-3,5}}{e^{-0,7}+e^{-1,0}+e^{-3,5}} = 0{,}03375... \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{3} \pi_i^- = 1.$$

Подсчитаем соответствующие субъективные энтропии

$$H_\pi^+ = -\left[\pi_1^+ \ln \pi_1^+ + \pi_2^+ \ln \pi_2^+ + \pi_3^+ \ln \pi_3^+\right] = 0{,}8553...;$$

$$H_\pi^- = -\left[\pi_1^- \ln \pi_1^- + \pi_2^- \ln \pi_2^- + \pi_3^- \ln \pi_3^-\right] = 0{,}8065...$$

Проварьируем величины π_i^+ и π_i^- на многообразии M:

$$M : \sum_{i=1}^{3} \pi_i^\pm r_i = \varepsilon_0; \sum_{i=1}^{B} \pi_i^\pm = 1.$$

Пусть $\Delta^\pm_1$, $\Delta^\pm_2$, $\Delta^\pm_3$ — вариации, такие что проварьированные значения величины предпочтений

$$\tilde{\pi}_i^\pm = \pi_i^\pm + \Delta_i^\pm.$$

Вариации $\Delta_i^\pm$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1^{\pm} + \Delta_2^{\pm} + \Delta_3^{\pm} = 0; \\ r_1\Delta_1^{\pm} + r_2\Delta_2^{\pm} + r_3\Delta_3^{\pm} = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\Delta_2^{\pm} = -\frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3}\Delta_1^{\pm};\ \ \Delta_3^{\pm} = -\left(\Delta_1^{\pm} + \Delta_2^{\pm}\right).$$

Положим $\Delta_1^{\pm} = 0{,}1$, тогда $\Delta_2^{\pm} = -0{,}112$ и $\Delta_3^{\pm} = 0{,}012$.

Проварьированные величины предпочтений есть:

$$\tilde{\pi}_1^{+} = 0{,}253211\ldots \qquad \tilde{\pi}_1^{-} = 0{,}6557\ldots$$

$$\tilde{\pi}_2^{+} = 0{,}05983\ldots \qquad \tilde{\pi}_2^{-} = 0{,}2992\ldots$$

$$\tilde{\pi}_3^{+} = 0{,}6873\ldots \qquad \tilde{\pi}_3^{-} = 0{,}0457\ldots$$

Получаем новые проварьированные значения энтропий (позитивной и негативной):

$$\tilde{H}_{\pi}^{+} = -\left[\tilde{\pi}_1^{+}\ln\tilde{\pi}_1^{+} + \tilde{\pi}_2^{+}\ln\tilde{\pi}_2^{+} + \tilde{\pi}_3^{+}\ln\tilde{\pi}_3^{+}\right] = 0{,}77418\ldots;$$

$$\tilde{H}_{\pi}^{-} = -\left[\tilde{\pi}_1^{-}\ln\tilde{\pi}_1^{-} + \tilde{\pi}_2^{-}\ln\tilde{\pi}_2^{-} + \tilde{\pi}_3^{-}\ln\tilde{\pi}_3^{-}\right] = 0{,}77934\ldots$$

Как видим

$$\tilde{H}_{\pi}^{+} = 0{,}774184\ldots < H_{\pi}^{+} = 0{,}8553\ldots;$$

$$\tilde{H}^{-} = 0{,}779340\ldots < H_{\pi}^{-} = 0{,}806548\ldots$$

Качественно тот же результат получается, если $r_1 = -0{,}1$.

Приведенный пример иллюстрирует, полученный вывод о том, что канонические распределения $\pi^{+}{}_i$ и $\pi^{-}{}_i$ доставляют максимум энтропии на изопериметрическом многообразии.

В термодинамике величина

$$Z = \sum_{i=1}^{N} e^{-\beta L(\sigma_i)}$$

называется «*статистической суммой*». Каноническое негативное распределение можно записать в виде

$$\pi^{-}\left(\sigma_i\right) = \frac{1}{Z}e^{-\beta L(\sigma_i)},$$

тогда аналог свободной энергии F есть

$$F = -T\ln Z,$$

где $T = \beta^{-1}$ — «температура». Она может быть определена из изопериметрического условия:

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{N}\pi^{-}\left(\sigma_i\right)L\left(\sigma_i\right) = \varepsilon^{-},$$

ε^{-} есть «среднее взвешенное» по предпочтениям «вредности» (потери, убытки)

$$T = \frac{d\varepsilon^-}{dH^-_{\pi\max}}.$$

Из этой формулы видно, что, если увеличение $H^-_{\pi\max}$ — степени неопределенности негативных предпочтений влечет увеличение средне-взвешенных потерь, то $T > 0$, если имеет место обратная зависимость, то $T < 0$. Аналог свободной энергии имеет вид:

$$F = \varepsilon^- - TH^-_{\pi\max}.$$

В теории информации $H^-_{\pi\max}$ называется «пропускной способностью» канала связи. С учетом предыдущего, «свободную энергию» в нашем случае можно назвать «свободными ресурсами». Каноническое распределение предпочтений можно представить в виде

$$\pi^-(\sigma_i) = e^{\frac{F - L(\sigma_i)}{T}},$$

что является аналогом распределения Гиббса. В данном случае параметр T можно интерпретировать как «температуру эмоционального нагрева». Энтропия отдельного состояния (Хартли)

$$H^-(\sigma_i) = -\ln \pi^-(\sigma_i).$$

Модели функций предпочтения, полученные в предположении, что функция эффективности ε линейная по $L(\sigma)$ (или $U(\sigma)$), отражают упрощенную, примитивную логику: «чем больше — тем лучше», или «чем меньше — тем хуже». Эти распределения представляют крайние гипотезы, можно сказать «экстремистские» психические типы. В действительности распределение предпочтений далеко не всегда соответствует этому «*прямолинейному*» принципу.

Более естественной является ситуация, когда очень «дорогие» и очень «дешевые» альтернативы менее предпочтительны, чем альтернативы, обладающие «стоимостью», соответствующей престижу, статусу субъекта и в то же время соизмеримые с его возможностями. Для того, чтобы построить канонические модели функций предпочтения, которые отражали бы эти обстоятельства, воспользуемся функциями эффективности нелинейными относительно функций полезности $U(\sigma_i)$ или вредности $L(\sigma_i)$. С целью упрощения записи ниже будем, где это не затрудняет понимания, писать

$$\pi(\sigma_i) = \pi_i;\ L(\sigma_i) = L_i;\ U(\sigma_i) = U_i$$

и так далее. Итак, пусть

$$\varepsilon^- = \sum_{i=1}^{N} \pi_i^- G(L_i);\ \ \varepsilon^+ = \sum_{i=1}^{N} \pi_i^+ G(U_i)$$

и пусть, например

$$G(L_i) = \beta L_i - \delta \ln L_i. \tag{3.226}$$

Первый член обеспечивает линейную зависимость, а второй — логарифмическую, более «мягкую». Функционал Φ^-_π выберем в виде:

$$\Phi^-_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i^- \ln \pi_i^- + \sum_{i=1}^{N} \left[-\beta L_i + \delta \ln L_i + \gamma\right] \pi_i^-. \tag{3.227}$$

Необходимое условие экстремума дает следующую модель для π_i^-:

$$\pi^-(\sigma_i) = CL_i^{\delta}e^{-\beta L_i}.$$

Нормируемый коэффициент C есть:

$$C = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} L_j^{\delta}e^{-\beta L_j}}.$$

Таким образом, модель канонической функции предпочтения задается формулой

$$\pi^-(\sigma_i) = \frac{L_i^{\delta}e^{-\beta L_i}}{\sum_{j=1}^{N} L_j^{\delta}e^{-\beta L_j}}. \quad (3.228)$$

Вид этой функции L_i показан на рис. 3.17.

На рис. 3.17 представлена функция $\pi^-_1 = \pi^-(\sigma_1)$, когда S_a содержит две альтернативы σ_1, σ_2 и $\delta = 1$. В случае, если $\delta \neq 1$, то $L_1^* = \frac{\delta}{\beta}$.

При этом

$$\pi_1^- = \frac{L_1e^{-\beta L_1}}{L_1e^{-\beta L_1} + L_2e^{-\beta L_2}}; \quad \pi_2^- = \frac{L_2e^{-\beta L_2}}{L_2e^{-\beta L_1} + L_2e^{-\beta L_2}}.$$

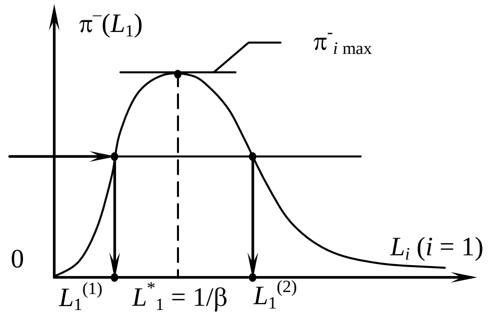


Рис. 3.17

Находим, что

$$\frac{\partial \pi_1^-}{\partial L_1} = L_2e^{-\beta(L_1+L_2)} - \beta L_1L_2e^{-\beta(L_1+L_2)} = 0,$$

отсюда $L^*_1 = \beta^{-1}$; кроме того видим, что

$$\pi_1^-\big|_{L_1^*} = \frac{1}{1+\beta L_2 e^{-\beta L_2+1}} = \pi_{1\max}^-$$

и выполняются условия:

при $L_2 = 0$ $\quad\pi^-_{1\max} = 1$;

при $L_1 = 0$ $\quad\pi^-_1 = 0$;

при $L_1 \to \infty$ $\quad\pi^-_1 \to 0$.

Если $L_2 > 0$, то $\pi^-_{1\max} < 1$. Для каждого значения $\pi^-_1 \in (0, 1)$ существует два одинаково предпочтительных состояния $L_1^{(1)} \sim L_1^{(2)}$. Это означает, что на возрастающей ветви $L_1 \in [0, L^*_1)$ функция π^-_1 устанавливает соответствие:

$$L_{1a} > L_{1b} \Rightarrow \pi_1^-\left(L_{1a}\right) > \pi_1^-\left(L_{1b}\right);\ \left(L_{1a}, L_{1b}\right) \in \left[0, L_1^*\right).$$

На ниспадающей ветви: $L_1 \in (L^*_1, +\infty)$ — соответствие

$$L_{1a} > L_{1b} \Rightarrow \pi_1^-\left(L_{1a}\right) < \pi_1^-\left(L_{1b}\right);\ \left(L_{1a}, L_{1b}\right) \in \left(L_1^*, +\infty\right).$$

В «точке» $L^*_1 = \beta^{-1}$ имеется единственное (наиболее предпочтительное) значение π^-_1, на двумерном многообразии:

$$M: \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i^-\left(\delta \ln L_i - \beta L_i\right) = \varepsilon_0; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i^- = 1. \end{cases}$$

Функция (3.228) реализует максимум субъективной энтропии.

Распределение (3.228) может соответствовать следующей логике решений субъекта. Предположим, что L_i — это потребные ресурсы $R^{req}(\sigma_i)$, тогда

а) альтернативы, требующие малых затрат — «дешевые», могут быть «непрестижными» для субъекта, обладающего значительно большими возможностями и, поэтому легко достижимыми. Поэтому «интенсивность» соответствующих желаний, выражаемая величиной функции будет низкой;

б) альтернативы слишком «дорогие» для данного субъекта имеют также малую предпочтительность ввиду предполагаемых больших затрат граничащих с возможностями;

в) существует некоторая область значений L_i соразмерных с возможностями и приемлемых для данного субъекта и потому обладающих наибольшей привлекательностью (предпочтительностью).

В дальнейшем будет внесено некоторое уточнение в формулировке функций $L(\sigma_i)$ и $U(\sigma_i)$ через ресурсы. Это связано с тем, что мы хотели бы рассматривать только конечные значения ресурсов всех типов, тогда как функции полезности могут принимать и бесконечные значения.

3.12. Энтропия порядковых распределений предпочтений

Выше мы определили энтропию кардинального распределения предпочтений $\pi(\sigma_i)$ на S_a, а также для различных модификаций: $\pi(\sigma_i|\,\sigma_j)\ldots$, которые при определенных условиях порождают упорядочения альтернатив в S_a. В настоящем параграфе вводится энтропия ординальных (порядковых) упорядочений. Пусть ρ: $\prec$ — отношение строгого предпочтения, и ρ: $\precsim$ — отношения нестрогого предпочтения. В первом случае имеем следующее упорядочение:

$$\boldsymbol{\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \sigma_3 \prec \ldots \prec \sigma_{N-1} \prec \sigma_N}.$$

Ту же информацию о предпочтениях несет ряд натуральных чисел

$$\boldsymbol{i\colon 1\ 2\ 3\ \ldots\ N-1\ N},$$

которые являются номерами альтернатив (рангами). Сумма рангов

$$\boldsymbol{S_N} = \frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)}{2}.$$

Определим нормированный номер альтернативы

$$\bar{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{S_N}} = \frac{2\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)}.$$

Тогда $\sum_{i=1}^{N}\bar{i} = 1.$ Базовая энтропия ряда нормированных рангов

$$\bar{\boldsymbol{H}}^*_{\langle} = -\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \frac{2\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)} \ln \frac{2\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)} = \frac{\boldsymbol{H}^*}{\boldsymbol{S_N}} + \ln \boldsymbol{S_N}, \tag{3.229}$$

где $H^* = -\sum_{i=1}^{n} i \ln i.$

Другой крайний случай представляет собой полное безразличие или полную эквивалентность:

$$\boldsymbol{\sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \sigma_3 \sim \ldots \sim \sigma_{N-1} \sim \sigma_N}.$$

В этом случае все альтернативы имеют одинаковый ранг $(S_N)^{-1}$: $\boldsymbol{\bar{\bar{i}} = (S_N)^{-1}\dfrac{1+N}{2}}$

$$\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}};\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}};\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}}\ldots\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}};\frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}},$$

а соответствующая энтропия есть

$$\bar{\boldsymbol{H}}^*_{\approx} = -\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}} \ln \frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}} = -\ln \frac{\bar{\bar{\boldsymbol{i}}}}{\boldsymbol{S_N}} = \ln \boldsymbol{S_N} \tag{3.230}$$

Отсюда видим, что поскольку $H^* < 0$, то

$$\bar{\boldsymbol{H}}^*_{\langle} \le \bar{\boldsymbol{H}}^*_{\sim} = \boldsymbol{H}_{\max}.$$

Ясно, что порядок полного безразличия имеет максимальную энтропию.

Рассмотрим порядок при наличии одного класса эквивалентности содержащего более одной альтернативы:

$$\boldsymbol{\sigma_1 \langle \sigma_2 \langle \sigma_3 \langle \ldots \langle \sigma_k \sim \sigma_{k+1} \sim \ldots \sim \sigma_{p+k} \langle \sigma_{p+k+1} \langle \ldots \sigma_{N-1} \langle \sigma_N}.$$

Пусть этот класс эквивалентности простирается от k-ой до $p + k$ альтернативы включительно. Пронумеруем элементы ряда так, что все альтернативы от σ_k до σ_{p+k} имеют одинаковый ранг k тогда сумма рангов r_i:

$$\boldsymbol{S_N\left(k,p\right)=\frac{1}{2}\Big[k\left(k-1\right)+2k\left(p+1\right)+\left(N-k-p\right)\left(N+k-p+1\right)\Big]}.$$

Например,

для порядка $\sigma_1 \langle \sigma_2 \sim \sigma_3 \sim \sigma_4 \langle \sigma_5$ $S_N(k, p) = S(2, 3) = 10$,

для порядка $\sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \sigma_3 \sim \sigma_4 \langle \sigma_5$ $S_N(k, p) = 6$,

для порядка $\sigma_1 \langle \sigma_2 \langle \sigma_3 \sim \sigma_4 \langle \sigma_5$ $S_N(k, p) = 13$.

Удобно использовать «скорректированные» ранги

$$\boldsymbol{r_i^* = r_i + \frac{S_N - S_N\left(k,p\right)}{N}}. \tag{3.231}$$

Сумма скорректированных рангов:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} r_i^* = \sum_{i=1}^{N}\left(r_i + \frac{S_N - S_N\left(k,p\right)}{N}\right) = S_N\left(k,p\right) + S_N - S_N\left(k,p\right) = S_N}.$$

Далее введем нормированные скорректированные ранги

$$\boldsymbol{\bar{r}_i^* = \frac{1}{S_N} r_i^* = \frac{r_i}{S_N} + \frac{1}{N}\left(1 - \frac{S_N\left(k,p\right)}{S_N}\right)}. \tag{3.232}$$

Видим, что

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i^*} = 1.$$

Таким образом, величины $\boldsymbol{\bar{r}_i^*}$ играют роль количественной меры предпочтения альтернативы σ_i. Аналогия, однако, является неполной.

Строгий порядок соответствует случаю, когда число классов эквивалентности равно числу альтернатив N в S_a. Если число классов эквивалентности $m < N$, то хотя бы в одном из них содержится более одного элемента. Положим, что нормированная энтропия на S_a в случае строго порядка должна быть равна нулю, поскольку имеет место «полная определенность». В этом случае $m = N$. Энтропия порядка на S_a должна возрастать по мере того как число классов эквивалентности будет уменьшаться и принимает максимальное значение при $m = 1$, то есть в случае, когда множество S_a представляет собой один класс эквивалентности. Энтропия, удовлетворяющая указанным условиям (для $1 \le m \le N$) выражается формулой

$$\boldsymbol{\bar{I}_{\precsim} = \bar{H}^* - \bar{H}_{\prec}^*},$$

где $\boldsymbol{H^*}$ — определяется как величина

$$\boldsymbol{H}^{*}=-\sum_{i=1}^{N}\bar{\boldsymbol{r}}_{i}^{*}\ln\bar{\boldsymbol{r}}_{i}^{*},\qquad(3.233)$$

а $\bar{H}_{\langle}^{*}$ есть базовая энтропия, введенная соотношением (3.229). Таким образом, в случае, если имеется один класс эквивалентности, содержащий более одного элемента (альтернативы), то

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\underset{\sim}{\langle}}=-\sum_{i=1}^{N}\bar{\boldsymbol{r}}_{i}^{*}\ln\bar{\boldsymbol{r}}_{i}^{*}-\frac{1}{\boldsymbol{S}_{N}}\boldsymbol{H}^{*}-\ln\boldsymbol{S}_{N}.\qquad(3.234)$$

Пусть теперь $S_{a\sim}$ — фактор-множество альтернатив, содержащее m классов эквивалентности S_{jk} ($k\in\overline{1,m}$), причем k-й класс содержит n_k элементов. Если в $S_{a\sim}$ установлен лексиминный порядок, то каждому классу (каждому элементу класса S_{ak}) приписывается ранг k, а сумма рангов есть

$$\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}_{k}.$$

Наибольшая возможная сумма рангов соответствует строгому порядку. когда $m = N$ и вес $n_k = 1$ и равна $\dfrac{N(N+1)}{2}$.

В общем случае дефицит суммы рангов в $S_{j\sim}$ есть

$$\frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)}{2}-\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}_{k}=\boldsymbol{S}_{N}-\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}_{k},$$

а исправляющая ранг добавка

$$\delta_{N}=\frac{\boldsymbol{S}_{N}-\sum\limits_{k=1}^{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}_{k}}{\boldsymbol{N}}.$$

Тогда скорректированный ранг

$$\boldsymbol{r}_{k}=\boldsymbol{r}_{k}+\delta_{N}=\boldsymbol{r}_{k}+\frac{\boldsymbol{S}_{N}-\sum\limits_{q=1}^{m}\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}_{q}}{\boldsymbol{N}},\qquad(3.235)$$

а относительный скорректированный ранг

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{k}^{*}=\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{S}_{N}}+\frac{1}{\boldsymbol{N}}\left(1-\frac{\boldsymbol{S}_{N}-\sum\limits_{q=1}^{m}\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}_{q}}{\boldsymbol{S}_{N}}\right).\qquad(3.236)$$

Учитывая это соотношение, получим

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\underset{\sim}{\langle}}=-\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{n}_{k}\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{S}_{N}}+\frac{1}{\boldsymbol{N}}\left(1-\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}_{q}}{\boldsymbol{S}_{N}}\right)\right]\ln\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{S}_{N}}+\frac{1}{\boldsymbol{N}}\left(1-\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}_{q}}{\boldsymbol{S}_{N}}\right)\right]-\frac{\boldsymbol{H}^{*}}{\boldsymbol{S}_{N}}-\ln\boldsymbol{S}_{N}.\qquad(3.237)$$

В частном случае, когда $m = N$ и $\forall n_q = 1$ из (3.237) находим

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\precsim} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{S_N} \ln \frac{i}{S_N} - \left(\frac{1}{S_N} H^* + \ln S_N \right) = 0. \qquad (3.238)$$

В случае, когда S_a есть единый класс эквивалентности ($m = 1$)

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\precsim} = \bar{\boldsymbol{H}}^*_{\precsim} = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{N} i \ln i - \ln \frac{N+1}{2}. \qquad (3.239)$$

Видим, что $\bar{H}_{\precsim} = 0$ только, когда $N = 1$.

Имеет место следующая таблица

N	$\bar{H}^*_{\sim}$	$\bar{H}_{\max} = \ln N$	$\bar{H}_{\sim}$
1	0	0	~1
2	0,0567…	0,69315…	12,2249…
3	0,08721…	1,09861…	12,5239…
4	0,10644…	1,38629…	13,02414…
5	0,11969…	1,60944…	13,4467…
6	0,12838…	1,79176…	13,84881…

Как видим энтропия $\bar{H}^*_{\sim}$ равна нулю только в случае, когда $S_{a\sim}$ состоит лишь из одного элемента — есть лишь одна альтернатива. Когда $N > 1$ энтропия $\bar{H}^*_{\sim} > 0$ и возрастает с ростом N.

Энтропия $\bar{H}_{\sim}$ велика и много больше энтропии $\bar{H}^*_{\sim}$. Если рассматривать субъективную энтропию как меру «сложности» при принятии решений, можно заключить, что строгие порядки являются более «простыми» объектами для анализа чем фактор-порядки, то есть порядки с не сингулярными классами эквивалентности ($m < N$).

Введенная в этом параграфе энтропия лексиминных упорядочений имеет несколько отличные свойства от энтропии определенной через нормированную функцию предпочтений.

Можно лексиминную энтропию определить иначе, а именно, таким образом, чтобы для случая «полного безразличия» (S_a — есть класс эквивалентности $m = 1$), эта энтропия совпадала с $H_{\max} = \ln N$.

Положим

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\precsim} = -\sum_{k=1}^{m} n_k \bar{r}_k \ln \bar{r}_k, \qquad (3.240)$$

где $\bar{r}_k = r_k \left(\sum_{s=1}^{m} s n_s \right)^{-1}$, $\sum_{s=1}^{m} n_s = N$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k n_k = 1.$$

В случае максимальной неопределенности (S_j — есть целиком класс эквивалентности) $m = 1$, $n_1 = N$ формула (3.240) дает

$$\bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = \bar{H}_{\sim} = \ln N.$$

В случае строгого порядка ($m = N$, $n_k = 1$, $\forall_k$):

$$\bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = \bar{H}_{\langle} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{S_N} \ln \frac{k}{S_N} > 0 \qquad (3.241)$$

и $\bar{H}_{\langle} = 0$ только для $N = 1$. В общем случае из (3.241) следует неравенство

$$S_N \ln S_N \geq \sum_{k=1}^{N} k \ln k.$$

Наконец, лексиминная энтропия может быть определена таким образом, что будут выполняться оба предельных условия:

при $m = 1$, $n = N$ $\quad \bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = \bar{H}_{\sim} = \ln N,$

при $m = N$, $n_k = 1, \forall k$ $\quad \bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = \bar{H}_{\sim} = \dfrac{1}{S_N} H^* + \ln S_N,$

где $H^* = -\sum_{k=1}^{N} k \ln k.$

Кроме того, потребуем, чтобы при $m = 2$, $n_1 = N - 1$, $n_2 = 1$ ранги всех альтернатив в классе n_1 были равны нулю. Тогда сумма рангов $S_N(m) = 1$ и для $\forall k \in [1, N - 1]$, $\bar{r}_k = 0$, а для $k = n$ $\bar{r}_N = 1$ и энтропия $\bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = \bar{H}$ ($m = 2$, $n_1 = N - 1$, $n_2 = 1$) $= 0$. Для того, чтобы выполнить все описанные условия, достаточно положить, чтобы ранг наименее предпочтительного элемента (σ_1) был равен нулю.

Формулу (3.240) перепишем в виде:

$$\bar{H}_{\underset{\sim}{\langle}} = -\sum_{k=1}^{m} n_k \frac{r_k}{S_N(m)} \ln \frac{r_k}{S_N(m)}, \qquad (3.242)$$

где $r_1 = 0$, а $S_N(m)$ есть сумма рангов:

$$S_N(m) = \sum_{k=1}^{m} (k-1) n_k.$$

Равенство нулю некоторого ранга r_k не приводит к расходимости в формуле (3.242), так как

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=0.$$

Лексиминная энтропия в таком виде может оказаться наиболее удобной, если удастся сформулировать вариационный принцип для лексиминных порядков. В частности функция эффективности (обобщение «риска») по-видимому может быть записана в виде

$$\varepsilon_\pi=\sum_{k=1}^{m} n_k \bar{r}_k U_k\,,$$

где U_k — полезность альтернативы σ_k, принадлежащей к классу n_k.

3.13. Связь принципа максимума субъективной энтропии с основными законами психологии

3.13.1. Постановка задачи

Поставим задачу выяснить, как и при каких условиях, принцип максимума субъективной энтропии (ПМСЭ) позволяет получить основные законы психологии. Убеждение, что этот принцип обладает большой общностью, позволяет предполагать, что основные законы психологии каким-либо образом могут быть заключены в упомянутом принципе.

К основным законам психологии относятся законы Бугера-Вебера, Вебера-Фехнера, Стивенса, Забродина [3, 4] и некоторые другие, которые характеризуют в основном соотношение между ощущениями и восприятиями.

Решение поставленной задачи позволяло бы с одной стороны установить связь эмпирических законов с априорно «навязываемым» психике вариационным принципом и послужило бы дополнительным обоснованием применимости самого вариационного принципа (ПМСЭ), а с другой стороны это дало бы возможность с иной точки зрения истолковать эмпирические закономерности. Цепочка проявлений психики, задействованных в процессе формирования «конечного продукта» – предпочтений (preferences), включает следующие звенья:

$\Rightarrow$ первичные стимулы (stimuli) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ощущения (sensations) $s(\sigma_i)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ восприятия (perceptions) $p(\sigma_i)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эмоции, желания (emotions, desires) $\varepsilon(\sigma_i)$, $d(\sigma_i)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предпочтения (preferences) $\pi(\sigma_i)$.

Величины $s(\sigma_i)$, $p(\sigma_i)$, $\varepsilon(\sigma_i)$, $d(\sigma_i)$, $\pi(\sigma_i)$ считаются нормированными.

Для каждого из этих факторов экспериментальная психология устанавливает классификацию, «номенклатуру», шкалу измерения и сравнения.

Так предпочтения мы связываем с альтернативами $\sigma_i \in S_a$. Мощность S_a есть N. Обозначая через S_I; S_s; S_p; S_ε; S_a соответственно множество первичных стимулов, множество ощущений, множество восприятий, множество эмоций, множество альтернатив мы можем утверждать, что самым «населённым» является множество альтернатив

S_a, число эмоций различных модальностей в принципе меньше числа возможных альтернатив, … еще меньше число различных восприятий и ощущений.

3.13.2. Вариационный принцип для восприятий

Предполагается, что восприятия генерируются на основе определенного вариационного принципа. Экстримизируемый функционал пусть имеет вид:

$$\Phi_p = -\sum_{k=1}^{K} p_k \ln p_k + \beta_p \sum_{k=1}^{K} p_k G_k(s_1, s_2, \ldots, s_L) + \gamma\left(\sum_{k=1}^{K} p_k - 1\right) \quad (3.243)$$

K - мощность множества различных восприятий

β_p - экзогенный параметр психики

где $G_k(\cdot)$ – функция ощущений

L - мощность множества различных ощущений

γ - множитель Лагранжа.

Предполагается далее, что вклад в восприятия p_k могут вносить все ощущения, то есть имеет место агрегирование ощущений. В качестве моделей агрегирующих функций рассмотрим следующие:

$$G_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j \quad (3.244)$$

$$G_k^{(2)} = \ln \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j \quad (3.245)$$

$$G_k^{(3)} = \ln \ln\left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j\right) \quad (3.246)$$

μ_{kj} - весовой коэффициент при агрегировании.

Могут рассматриваться и другие модели агрегирующей функции.

s_j – безразмерные нормированные и шкалированные меры ощущений.

В зависимости от вида функции G_k получаются различные формы отклика психики на стимулы.

Положим $G_k = G_k^{(1)}$. Тогда согласно ПМСЭ находим:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial p_k} = -\ln p_k - 1 + \beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j + \gamma = 0. \quad (3.247)$$

Заменяя k на q аналогично получим:

$$-\ln p_q - 1 + \beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{qj} s_j + \gamma = 0. \quad (3.248)$$

Поскольку члены $-1+\gamma$ взаимно сокращаются при приравнивании (3.247) и (3.248), то

$$-\ln p_k + \beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j = -\ln p_q + \beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{qj} s_j \ , \qquad (3.249)$$

откуда

$$\ln\left(\frac{p_k}{p_q}\right) = \beta_p \left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j - \sum_{j=1}^{L} \mu_{qj} s_j \right). \qquad (3.250)$$

Учитывая условия нормировки, найдем:

$$p_k = \frac{e^{\beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j}}{\sum_{q=1}^{K} e^{\beta_p \sum_{j=1}^{L} \mu_{qj} s_j}} \qquad (3.251)$$

В частном случае, когда

$$\mu_{kj} = \mu\delta(k-j); \mu_{qj} = \mu\delta(q-j); \mu = 1 \qquad (3.252)$$

где $\delta\ (\cdot)$ - δ - функция Дирака

получаем из (8):

$$\ln \frac{p_k}{p_q} = \beta_p \left(s_k - s_q \right) \qquad (3.253)$$

Эта зависимость описывает гораздо более интенсивную реакцию на изменение стимула, чем это имеет место в соответствии с законом Вебера-Фехнера.

Положим, что $G_k^{(2)} = \ln \sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j$, тогда вместо (3.250) получаем:

$$\frac{p_k}{p_q} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j \right)^{\beta_p}}{\left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{qj} s_j \right)^{\beta_p}} \qquad (3.254)$$

В частном случае (3.252) имеем

$$\frac{p_k}{p_q} = \left(\frac{s_k}{s_q} \right)^{\beta_p} \qquad (3.255)$$

Эта формула представляет собой закон Стивенса (рис. 3.18)

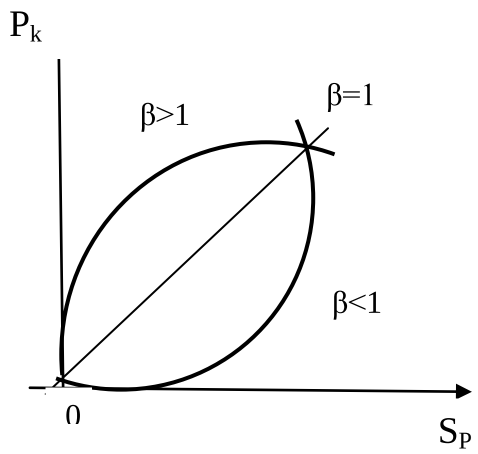


Рис. 3.18

Формулу (3.255) запишем в виде:

$$p_k = p_0 \left(\frac{s_k}{s_{q0}} \right)^{\beta_p} \tag{3.256}$$

где p_0 и s_{q0} – фиксированный уровень величин p_q и s_q перед появлением нового стимула s_k.

В случае если $G_k^{(3)} = \ln \ln \left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j \right)$, распределение принимает вид:

$$p_k = \frac{\left[\ln \left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{kj} s_j \right) \right]^{\beta_p}}{\sum_{r=1}^{K} \left[\ln \left(\sum_{j=1}^{L} \mu_{rj} s_j \right) \right]^{\beta_p}} \tag{3.257}$$

В условиях (3.252) находим частное условие связи:

$$\left(\frac{p_k}{p_q} \right)^{\frac{1}{\beta_p}} = \ln \frac{s_k}{s_q} \Rightarrow \left(\frac{p_k}{p_q} \right)^{T_p} = \ln \frac{s_k}{s_q} \tag{3.258}$$

Эта формула отражает закономерность, обычно называемую законом Вебера-Фехнера. Отличие состоит в том, что в левой части равенства имеется показатель

$\beta_p = T_p^{-1}$ и таким образом это соотношение открывает дополнительные возможности и сближает его с законом Забродина.

3.13.3. Вариационный принцип для предпочтений

Предыдущие рассуждения относятся к соотношению между ощущениями и восприятиями. Аналогичные рассуждения можно провести для пары категорий «желания»-«предпочтения». С «желаниями» связаны «эмоции». Место функции ощущений (sensetive function) займет так называемая когнитивная функция. F_d (cognitive function), индекс «*d*» обозначает «desire» – желание, «желание» можно было бы заменить «полезностью» (ufility).

Пусть $d = (d_1, d_2, ..., d_m)$ – вектор (нормированных и шкалированных) желаний. Полагая, что все d_s в той или иной мере могут влиять на формирование предпочтений, положим

$$F_{di}^{(1)} = \sum_{s=1}^{M} \mu_{is} d_s \tag{3.259}$$

$$F_{di}^{(2)} = \ln\left(\sum_{s=1}^{M} \mu_{is} d_s\right) \tag{3.260}$$

$$F_{di}^{(3)} = \ln\ln\left(\sum_{s=1}^{M} \mu_{is} d_s\right) \tag{3.261}$$

Функционал вариационной задачи запишем в виде:

$$\Phi_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i + \beta_\pi \sum_{i=1}^{N} \pi_i F_{di}^{(n)} + \gamma_\pi \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1\right) \tag{3.262}$$

Из (3.262) находим:

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_\pi F_{di}^{(n)}}}{\sum_{q=1}^{N}\left(e^{\beta_\pi F_{dq}^{(n)}}\right)} \qquad n = 1,\ 2,\ 3 \tag{3.263}$$

В случае (3.259)

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_\pi \sum_{s=1}^{M} \mu_{is} d_s}}{\sum_{q=1}^{N}\left(e^{\beta_\pi \sum_{r=1}^{M} \mu_{qr} d_r}\right)} \tag{3.264}$$

Отсюда следует, что для $\forall i, k$

$$\frac{\pi_i}{\pi_k}=\frac{e^{\beta_\pi \sum\limits_{s=1}^{M}\mu_{is}d_s}}{e^{\beta_\pi \sum\limits_{r=1}^{M}\mu_{kr}d_r}}=e^{\beta_\pi\left(\sum\limits_{s=1}^{M}\mu_{is}d_s-\sum\limits_{r=1}^{M}\mu_{kr}d_r\right)} \qquad (3.265)$$

В случае (3.260)

$$\frac{\pi_i}{\pi_k}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{M}\mu_{is}d_s}{\sum\limits_{r=1}^{M}\mu_{kr}d_r} \qquad (3.266)$$

Для третьего случая $\left(F_{di}^{(n)}=F_{di}^{(3)}\right)$ получаем:

$$\left(\frac{\pi_i}{\pi_k}\right)^{\frac{1}{\beta_\pi}}=\frac{\ln\left(\sum\limits_{s=1}^{M}\mu_{is}d_s\right)}{\ln\left(\sum\limits_{s=1}^{M}\mu_{ks}d_s\right)} \qquad (3.267)$$

что соответствует закону Забродина. (В частном случае *β=1* – закону – Вебера-Фехнера).

В частных случаях вместо «желаний» d_s могут быть использованы полезности u_s или шкалированные интенсивности эмоций (аффектов).

Заметим, что здесь один и тот же учет «сворачивания» желаний (полезностей), интенсивностей эмоций использован на предыдущих ступенях формирования предпочтений: от «стимулов» к «ощущениям», от «ощущений» к «восприятиям» и далее.

При «движении» по этой цепочке сверху вниз к предпочтениям вариационный принцип сохраняет свою форму, но происходит эволюция содержания участвующих в основном функционале распределений.

Примененный прием сворачивания, который в данном случае выражается формулами (3.259-3.261) и другими подобными, конечно, соответствует определенной добавочной гипотезе, требует экспериментальной проверки, а коэффициент μ_{is} – экспериментальной идентификации. Проведенное обсуждение имеет цель продемонстрировать принципиальную возможность построения подобных моделей уравнивания размерностей разнородных распределений.

Очевидно, что, если смотреть на генезис психологических факторов (стимулы → ощущения → восприятия → эмоции → желания → предпочтения) во временной ретроспективе, то восприятия, например, следуют за ощущениями и, строго говоря, не могут возникнуть раньше ощущений.

Предположим, однако, что существует обратная связь («восприятия» → «ощущения») P → S. Допустим, мы задались вопросом: как имея информацию о восприяти-

ях, попытаться восстановить, какие ощущения (или может быть даже стимулы) явились причиной данного восприятия.

Подобная возможность допускается в монографии Рубинштейна. Применение вариационного принципа типа принципа Джейнса в случае обратной ретроспекции, по сравнению с рассмотренной выше, также приводит к набору некоторых закономерностей из области психофизики. В частности, получаются аналоги законов упоминаемых выше. Отсюда можно сделать вывод, о не единственности трактовок психофизических законов с точки зрения постулируемых вариационных принципов.

Эта обратная задача в рамках постулируемого вариационного принципа не имеет единственного решения.

3.13.4. Вариационный принцип для двумерного распределения $\rho(S_i, P_n)$

Покажем, как можно получить аналоги основных законов психологии, основываясь на «двумерных» функциях распределения.

Как и выше, нормированные и шкалированные интенсивности ощущений обозначим через S_i, а соответствующие интенсивности восприятий – через P_k. Рассматривается ретроспекция $S_i \to P_k$.

Введем совместное распределение

$$\rho\left(S_i, P_k\right),$$

где S_i и P_k нормированные величины.

Дополнительно предположим, по аналогии с теорией вероятностей, что имеет место представление:

$$\rho\left(S_i, P_k\right) = \rho(S_i) \cdot \rho(P_k | S_i), \tag{3.268}$$

где $\rho(P_k | S_i)$ – условное распределение восприятий P_k (при условии, что имеет место ощущение S_i). Величины S_i и P_k считаются шкалированными, а их совместное распределение нормировано условием:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \rho\left(S_i, P_k\right) = 1 \tag{3.269}$$

Поскольку в ретроспекции восприятия следуют за ощущениями, то (3.268) может иметь смысл. Кроме (3.268) выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho(S_i) = 1; \sum_{k=1}^{M} \rho(P_k | S_i) = 1 \tag{3.270}$$

Введем энтропию двумерного распределения:

$$H_{S,P} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \rho(S_i, P_k) \ln \rho(S_i, P_k) \tag{3.271}$$

С учетом соотношения (3.268) находим:

$$H_{S,P} = -\sum_{i=1}^{N} \rho(S_i) \ln \rho(S_i) - \sum_{i=1}^{N} \rho(S_i) \sum_{k=1}^{M} \rho(P_k | S_i) \ln(P_k | S_i) = H_S + \sum_{i=1}^{N} \rho(S_i) H_{P/S}^{(i)} \tag{3.272}$$

где $H_{P|S}^{(i)}$ – условная энтропия.

В качестве функционала вариационной задачи возьмем величину:

$$\Phi_{S,P} = H_{S,P} + \beta\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\rho(S_i)\cdot\rho(P_k|S_i)G_S(S_i|k) + \gamma_1\sum_{i=1}^{N}\rho(S_i) + \\ + \sum_{i=1}^{N}\rho(S_i)\gamma_{2i}\cdot\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i) \tag{3.273}$$

Здесь $\rho(P_k|S_i)$ имеет смысл распределения возможности появления восприятия P_k как ответа на ощущение S_i.

$G_S(S_i|k)$ – соответствующая когнитивная функция

γ_1 – множитель Лагранжа

γ_{2i} – множитель Лагранжа

Формулу (3.273) перепишем в виде:

$$\Phi_{S,P} = H_S + \sum_{i=1}^{N}\rho(S_i)\cdot\Phi_{P|S}^{(i)} + \gamma_1\sum_{i=1}^{N}\rho(S_i) \tag{3.274}$$

где

$$\Phi_{P|S}^{(i)} = -\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i)\ln\rho(P_k|S_i) + \beta\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i)G_S(S_i|k) + \gamma_{2i}\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i)$$

Вычислим производную:

$$\frac{\partial\Phi_{S,P}}{\partial\rho(S_i)} = -\ln\rho(S_i) - 1 + \Phi_{P/S}^{(i)} + \gamma_1 = 0 \quad \left(\forall i \in \overline{1,N}\right) \tag{3.275}$$

Вычисляя вторую производную, найдем:

$$\frac{\partial^2\Phi_{S,P}}{\partial\rho(S_i)\partial\rho(P_k|S_i)} = -\ln\rho(P_k|S_i) - 1 + \beta G_S(S_i|k) + \gamma_{2i} = 0 \tag{3.276}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^2\Phi_{S,P}}{\partial\rho(S_i)\rho(P_k|S_i)} = \frac{\partial\Phi_{P/S}^{(i)}}{\partial\rho(P_k|S_i)} = 0 \tag{3.277}$$

Для определения γ_{2i} используем нормировки:

$$\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i) = 1$$

где

$$\sum_{k=1}^{M}\rho(P_k|S_i) = e^{-1+\gamma_{2i}}\cdot\sum_{k=1}^{M}e^{\beta G_S(S_i|k)} = 1 \tag{3.278}$$

Зависимость $G_S(S_i|k)$ от k обозначает, что для $\left(\forall i \in \overline{1,N}\right)$ «функция восприятия» зависит не только от интенсивности ощущения, но и от того «восприятия», которое порождается данным ощущением. Обозначая

$$c_i = e^{-1+\gamma_{2i}},$$

найдем, что

$$c_i = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{M} e^{\beta G_s(s_i|k)}}\; c_1 = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{M} e^{\beta G_S(S_i|k)}}. \tag{3.279}$$

В качестве моделей функции $G_S(S_i|k)$ возьмем выражения (3.244-3.246), а именно

$$G_S\left(S_i|k\right) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{ki} S_i; \\ \ln \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{ki} S_i; \\ \ln \ln \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{ki} S_i. \end{cases} \tag{3.280}$$

Функция $\rho(P_k|S_i)$ есть

$$\rho\left(P_k|S_i\right) = \frac{e^{\beta G_S(S_i|k)}}{\sum\limits_{m=1}^{M} e^{\beta G_S(S_i|m)}} \tag{3.281}$$

В частном случае. Если γ_{2i} не зависит от i, из (3.276) получаем, что

$$\ln\left(\frac{\rho(P_k|S_i)}{\rho(P_q|S_i)}\right) = \beta\left(G_S(S_i|k) - G_S(S_i|q)\right). \tag{3.282}$$

Из условия (3.275), находим:

$$\ln\left(\frac{\rho(S_i)}{\rho(S_j)}\right) = \Phi_{P|S}^{(i)} - \Phi_{P|S}^{(j)} \tag{3.283}$$

В настоящем разделе намечен путь получения математических моделей основных законов психологии на основе вариационного принципа максимума субъективной энтропии. Последний принимает специфический вид в зависимости от того, проявление каких психических реакций подвергается сравнению. В дополнение к тому, что было сделано в [83, 231] для распределения предпочтений, введена энтропия восприятий [306]. Рассматриваются частные случаи задания функции восприятия и когнитив-

ной функции. В частности предложены функции восприятия, в виде простого и повторного логарифма от интенсивности восприятия, что дает связь ощущений и восприятий. Можно показать, что простые преобразования приводят к закону, фактически совпадающему с законом Вебера-Фехнера. В случае модели простого логарифма тоже самое имеет место для модели Стивенса.

3.14. О субъективном восприятии вероятностей

Отметим еще одно свойство психики, выявленное экспериментально, которое должно учитываться при количественных оценках распределений предпочтений. Установлено, что малые вероятности событий обычно переоцениваются, а большие вероятности обычно недооцениваются.

Графически это обстоятельство можно выразить с помощью рис.3.19

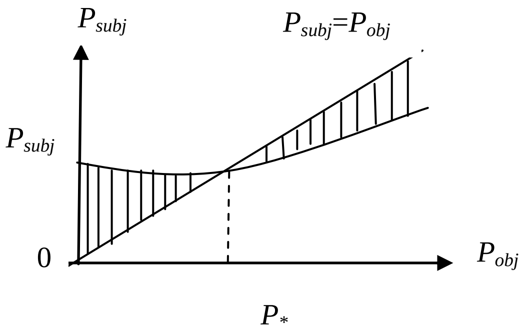


Рис.3.19 P_{subj} (P_{obj}).

В точке $P_{obj} = P_*$ должно выполняться условие $P_{subj} = P_{obj} = P_*$.

При $P_{obj} < P_*; P_{subj} > P_{obj}$; при $P_{obj} > P_*; P_{subj} < P_{obj}$.

Аналитически это условие выполняется, если зависимость P_{subj} от P_{obj} имеет, например, вид:

$$P_{subj} = P_{obj} + P_{subj}\Big|_{P_{obj}=0}\left(1 - \frac{P_{obj}}{P^*} e^{-\alpha(P_{obj}-P_*)}\right)$$

Это свойство психики будет учтено в дальнейшем в гл. 4 при построении модели взаимных полезностей.

3.15. О генезисе принципа максимума субъективной энтропии

В настоящей книге и других опубликованных работах этого направления *«Принцип максимума субъективной энтропии»* постулируется и как любой постулат не требует доказательства. Делается попытка обосновать его, опираясь на более общие теории, например, теорию категорий, на общие рассуждения Эйлера, Лейбница и др. Однако все такого рода пояснения не дают полного удовлетворения. В связи с этим возникает вопрос: существует ли возможность предложить рациональные объяснения, возможно на самом грубом уровне: почему нашей психике присуще постулируемое свойство.

Поскольку постулируется некий принцип функционирования психики, врожденный, заложенный на генетическом уровне, то мы не можем ограничиться простой его констатацией.

Необходимо сделать дополнительные допущения относительно причин его возникновения и закрепления. В качестве возможной рассмотрим эволюционную схему. При этом мы, конечно, отвергаем факт априорного «творения» , единовременного или занесенного извне.

В качестве природной «силы», способной сформировать соответствующее свойство психики человека, мы склонны видеть «эволюцию».

Вначале заметим, что экзогенная обстановка, то есть ситуация, в которой обитают живые организмы, изменяется неравномерно: периоды катаклизмов, скачкообразных изменений сменяются периодами постепенного, медленного изменения.

«В большом» мы говорим об «эволюции».

В основе эволюционной схемы генезиса вариационного принципа на генетическом уровне лежит утверждение, что субъект (активная система, вид…), который при быстром, скачкообразном возникновении новой экзогенной ситуации имеющий бо́льшую энтропию предпочтений, имеет также и бо́льшую вероятность выживания. Другими словами в этих условиях преимущество имеет тот, кто располагает бо́льшим количеством альтернативных стратегий поведения.

Продолжая рассуждения, приведенные в конце пункта 3.15, приведем численный пример.

Рассмотрим следующий простой пример. Пусть при возникновении новой экзогенной ситуации имеется три альтернативные стратегии поведения: σ_1, σ_2, σ_3 и вероятности «гибели» объективно распределены следующим образом:

$$p(\sigma_1)=1; p(\sigma_2)=0; p(\sigma_3)=0.$$

Стратегия σ_1 ведет к гибели (событие A) и пусть некто (первый субъект) «видит» только две возможности σ_1 и σ_2 и при этом существует полная неопределенность относительно последствий выбора из σ_1 и σ_2 так, что субъект распределяет свои предпочтения так:

$$\pi\left(A|\sigma_1\right)=\frac{1}{2}; \pi\left(A|\sigma_2\right)=\frac{1}{2}.$$

Вероятность гибели вычислим по формуле:

$$p_2(A)=p(\sigma_1)\cdot\pi\left(A|\sigma_1\right)+p(\sigma_2)\cdot\pi\left(A|\sigma_2\right)=1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=0,5.$$

Предположим, что второй субъект «видит» три возможности и в условиях полной априорной неопределенности делит свои предпочтения поровну между тремя альтернативами:

$$\pi\left(A|\sigma_1\right)=\frac{1}{3}; \pi\left(A|\sigma_2\right)=\frac{1}{3}; \pi\left(A|\sigma_3\right)=\frac{1}{3}$$

Вероятность гибели в этом случае

$$p_3(A)=p(\sigma_1)\cdot\pi\left(A|\sigma_1\right)+p(\sigma_2)\cdot\pi\left(A|\sigma_2\right)+p(\sigma_3)\cdot\pi\left(A|\sigma_3\right)=$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<p_2(A)$$

Энтропия распределения предпочтений в первом случае

$$H_\pi^{(1)}(A|\sigma_1)=\pi\left(A|\sigma_1\right)+p(\sigma_2)\cdot\ln\pi\left(A|\sigma_1\right)+\pi(A|\sigma_2)\cdot\ln\pi\left(A|\sigma_2\right)=0,6931...,$$

во втором случае

$$H_{\pi}^{(3)}(A|\sigma_1) = 1,0986... > H_{\pi}^{(1)}\left(A|\sigma_1\right)$$

Этот очень грубый пример показывает, тем не менее, что чем больше энтропия условных предпочтений, тем меньше вероятность «гибели» субъекта в условиях высокой неопределенности.

Таким образом, субъекты, которые «видят» большее количество альтернативных стратегий поведения, находясь при этом в условиях высокой неопределенности, имеют более высокие шансы выживания.

Видим, что «неопределенность» при субъективном восприятии новых независимых ситуаций играет в этом случае позитивную роль. Даже при полной априорной неопределенности выполняется описанное выше условие.

Генезис вариационного принципа можно представить себе следующим образом: при больших и быстрых изменениях экзогенных условий существования субъектов (индивидуумов, видов, организаций, социумов…) происходит более быстрое вымирание тех из них, у кого в момент «скачка» условий существования, во-первых, имеется весьма ограниченный (наблюдаемый) выбор вариантов поведения и, во-вторых, имеется устойчивая память, в том числе, генетическая и даже, физическая привычка к определенному поведению.

Наоборот, те субъекты, которые имеют «физическую» возможность реализации различных вариантов поведения после «скачка» экзогенной ситуации и «размытые» представления о полезности существующих вариантов, то есть высокую степень неопределенности имеют преимущественную возможность к выживанию.

Предполагается далее, что между скачкообразными изменениями ситуации происходит постепенный медленный дрейф экзогенных условий. У субъектов возникает привычка ходить по раз уже освоенным успешным путям – «протоптанным тропинкам». С другой стороны для них в этот период темп изменения условий не является критическим, не приводит к «гибели» и позволяет приспосабливаться, меняться, приобретая при этом свойства, расширяющие множество различных форм поведения - допустимых альтернативных стратегий.

Эти два происходящих одновременно в известной степени противоположных процесса определяют «готовность» субъекта к встрече с очередным «скачком» экзогенной ситуации.

Мы, следовательно, видим два вида эволюции: медленную, сохраняющую вид в особых его чертах и быстрые скачкообразные многократно повторяющиеся изменения, приводящие иногда к гибели субъекта (вида, социума…). В периоды между «скачками» происходит медленное приспособление видов; во время «скачков» происходит отбор видов (субъектов) на уровне первобытных сообществ и продолжается в наше время, формирование и закрепление «оптимальных» алгоритмов мышления (если речь идет о человеке) и «принятия решения».

Примеры, подтверждающие высказанное предположение видны повсюду в живой природе. В первую очередь они применимы к человеку и человеческим сообществам.

Применительно к животному миру хорошо известны примеры вымирания целых видов. Установлено, что они происходили в моменты природных катаклизмов.

Таким образом, мы утверждаем, что принцип максимума субъективной энтропии возникает на генетическом уровне в основном за счет «естественного отбора» на «скачках» экзогенной обстановки, так как в результате такого отбора сохраняются субъекты (виды, социумы…) имеющие более «широкий кругозор» - набор «физически» допустимых стратегий. Остальные, менее совершенные с меньшей исходной энтропией, гибнут.

Сохраняются субъекты со все более высокой субъективной энтропией и широкой «палитрой» вариантов выбора в момент кризиса.

Наиболее полезным является приложение этого принципа и этого пояснения к человеческим сообществам.

4 ГРУППА СУБЪЕКТОВ. РЕЙТИНГОВЫЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ. ВЗАИМНЫЕ ПОЛЕЗНОСТИ

4.1. Проблемы, связанные с субъективным анализом группы взаимодействующих субъектов

Предметом настоящей главы является группа субъектов – объект значительно более сложный по сравнению с субъективным анализом активной системы с одним изолированным субъектом. Предполагается, что субъекты внутри группы каким-либо образом взаимодействуют между собой [27, 28, 73, 106, 113, 141, 142, 143, 144, 145, 149, 172, 178, 179, 180, 181]. Возникает большой круг новых задач и понятий и, соответственно, – новых предположений. Когда мы говорим о группе, мы имеем в виду, что существует определенная связность между членами группы объективная и субъективная. Основой связанности являются общие альтернативы и проблемы, общие ресурсы (консолидированные ресурсы), совпадающие или близкие «механизмы» формирования индивидуальных предпочтений, «потоки» ресурсов всех видов внутри группы. Группа имеет структуру и исповедует определенный принцип «благополучия» (например — утилитаризм или эгалитаризм).

В «группе» существует взаимовлияние, взаимозависимость индивидуальных предпочтений различных субъектов, постулируются механизмы взаимодействия, осуществляемого во времени, как динамический процесс.

Группу могут связывать общие этические, религиозные, политические, культурные императивы.

В этом параграфе перечислим с краткими комментариями некоторые особенности и проблемы анализа предпочтений субъектов – членов группы.

Некоторые из этих проблем достойны того, чтобы быть самостоятельным объектом исследования и упоминание их здесь обусловлено желанием показать, что общей и достаточно эффективной основой может быть субъективный анализ, в основе которого, в свою очередь лежит энтропийная парадигма.

Важным вопросом является формирование групповых множеств альтернатив на основе сопоставления и комбинирования индивидуальных множеств S_{aj} ($j \in \overline{1,M}$). Здесь, как и ранее принимается «постулат индивидуального носителя» – все, что происходит в группе, «пропускается» через психику индивидуальных субъектов. Состав индивидуальных наборов альтернатив внутри группы сильно коррелирован. Так как внутри группы обычно существует иерархическая структура, должна возникать и иерархия альтернатив. Наличие одинаковых проблем и возникновение корпоративных проблем приводит в общем случае к изменению распределений располагаемых и потребных ресурсов, созданию корпоративных (консолидированных) ресурсов, обмену ресурсами между членами группы и, как следствие к изменению индивидуальных субъективных энтропий, потоков субъективной информации.

В более общем случае распределения предпочтений могут быть выражены через полезности, в том числе, через «корпоративные» полезности.

В дальнейшем будут введены взаимные полезности индивидуальных субъектов группы.

Форма и содержание модели функции предпочтений на S_{aj} зависит от того, как выбран экстремизуемый функционал. В частности, функции предпочтения могут быть монотонными и немонотонными, позитивными или негативными. Поэтому характеристики группы и процессы, протекающие в ней, будут зависеть от того, на основе одинаковых или различных по структуре функционалов строятся модели функций индивидуальных предпочтений членов группы. Это можно истолковать как совпадение или различие психологических типов субъектов группы или их интересов.

Существенной особенностью понятийного и аналитического аппарата субъективного анализа группы является вводимая в настоящей главе функция распределения предпочтений II рода или рейтинговая функция и, соответственно, – рейтинговая энтропия.

Мы изучим варианты задачи, канонические модели рейтинговых распределений, соответствующие нормировки, формулы для подсчета рейтинговой энтропии. Распределение рейтингов является основой субъективной структуризации группы, движения ресурсов, передачи полезностей внутри группы.

Наличие предметных предпочтений (I рода) и рейтинговых предпочтений (II рода) создает возможность изучать задачи агрегирования предпочтений.

Значительный интерес представляют динамические процессы изменения предпочтений I и II рода. В этом направлении мы постулируем ряд постановок вариационных задач, из которых следуют рекурсивные схемы изменения предпочтений во времени. В связи с этим находится вопрос об изменении во времени множеств альтернатив и, соответственно, набора корпоративных альтернатив, учет в моделях предпочтений в предыдущие моменты времени.

4.2. О порядковой теории корпоративных решений и теории агрегированной полезности

Существует обширная литература в области теории принятия корпоративных решений, базирующейся в основном на использовании порядковых распределений предпочтений, агрегированных функциях полезности, ожидаемой полезности, субъективной ожидаемой полезности.

В основе теории обычно лежит определенная система аксиом, отражающая априорные представления о свойствах психики субъектов, принимаемую концепцию справедливости — этическую концепцию.

Попытка дать достаточно полный обзор всех направлений и хотя бы основных результатов является безнадежной затеей. Поэтому в нашем кратком обзоре мы опираемся на одну из фундаментальных монографий по теории кооперативных решений — работу Э.Мулена [144], а также попутно на некоторые другие работы. Поскольку настоящая монография может выполнять роль пособия, вводящего в проблему, краткий обзор представляется уместным. Ссылка на работу Э. Мулена относится ко всему настоящему параграфу, который является в значительной части беглым конспектом этой книги, дополненный суждениями автора о связи между теорией кооперативных решений и теорией, в основе которой лежат канонические распределения предпочтений.

Теория кооперативных решений является аппаратом «теории благосостояния» (термин Амартии Сена [180]). Это одна из теорий направленных на разрешения извеч-

ной проблемы — «стремление людей к равенству является страстным, ненасытным, вечным и непобедимым» (Токвиль 1860 г.), от себя добавим — и абсолютно нереализуемым, и, в индивидуальном плане, — к превосходству над другими.

«Стремление к равенству» может быть учтено при постулировании функционалов для задачи получения канонических распределений предпочтений II рода (рейтингов). В виде этического императива «стремление к равенству» близко к норме «не сотвори себе кумира». Мы знаем, однако, что наряду с этим императивом в сознании людей «вмонтировано» стремление к поиску «лидера», к поиску того самого «кумира» и в религиозном и в рационалистическом смысле.

Емким обобщающим понятием является социальная справедливость которая вовсе не требует равенства членов сообщества, но так или иначе, в той или иной форме существует в сознании людей, в социальной практике, находит отражение в экономическом и политическом устройстве сообществ.

Более того, в одном сообществе различные группы («коалиции») могут исповедовать различные концепции справедливости.

В иерархических организационных системах «социальная справедливость» подвергается декомпозиции «*по вертикали*» и «*по горизонтали*». В целом необходимо заметить, что если говорить о роли государства, *то у него нет иной задачи кроме реализации в обществе определенной концепции социальной справедливости. Если «государство» не имеет концепции социальной справедливости и не реализует ее, то это не государство*.

Не вдаваясь в ретроспективный анализ категории «социальная справедливость» остановимся на двух крайних концепциях: эгалитаризм и утилитаризм, которым соответствуют определенные наборы этических постулатов, выражаемых в теоретическом анализе в виде аксиом.

Между эгалитаризмом и утилитаризмом существует целый ряд промежуточных компромиссных концепций.

Эгалитаризм — это принцип справедливости, который вкратце сводится к тому, что к равным субъектам должно быть равное отношение. С формально математической точки зрения он состоит в том, что, если $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — вектор индивидуальных полезностей, то принцип требует максимизации минимальной полезности («диктат» беднейшего). В качестве критерия оптимальности используется функция коллективной полезности (ФКП) $W(U) = W(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, которая агрегирует индивидуальные полезности (в данном случае на одном и том же множестве альтернатив S_a). Заметим также, что функции коллективной полезности в качестве агрегированных полезностей в соответствие с принятой здесь концепцией каждый раз имеет «индивидуального носителя». Это требование сразу придает теории новую окраску. Эгалитарный критерий имеет вид:

$$\boldsymbol{W}_{\text{ед}}\left(\boldsymbol{U}\right) = \min_{j \in \underline{1, M}} \boldsymbol{u}_j. \tag{4.1}$$

Эгалитарная стратегия является решением оптимизационной задачи.

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{opt}} = \underset{\sigma \in S_a}{\boldsymbol{Sup}} \boldsymbol{W}_{\text{ед}}\left(\boldsymbol{U}\right) = \underset{\sigma \in S_a}{\boldsymbol{Sup}} \left(\min_{j \in \underline{1, M}} \boldsymbol{u}_j \right). \tag{4.2}$$

Эгалитаризм ведет к выравниванию индивидуальных полезностей, но не отрицает неравенства.

Значительно более сложная ситуация возникает, если индивидуальные множества альтернатив S_{aj} не совпадают $S_{aj} \subset S_a$ ($\forall j \in \overline{1, M}$), а также в том случае, если мы задаемся целью построить динамические модели.

В «экономике благосостояния» ведущим является принцип единогласия, согласно которому плохие по Паретто решения единогласно отвергаются.

Оптимальность по Паретто (1907 г.) состоит в следующем: выбор (решение) $\sigma \in S_a$ является Парето-оптимальным если для $\forall\xi \in S_a$, когда кто-то один считает что $\xi \succ \sigma$, то кто-то другой считает, что $\sigma \succ \xi$. Парето-оптимальные решения называют также эффективными.

Принцип Парето может вступать в противоречие с выравниванием полезности, в результате возникает дилемма «равенство-эффективность».

Показано (Джон Ролс), что максиминная процедура приводит к Парето-оптимальному (в слабом смысле) решению. Эгалитаризм не заботится изначально о росте благосостояния общества (группы) в целом, это может достигаться опосредовано, через вторичные механизмы перераспределения полезностей.

Другой принцип — классический утилитаризм максимизирует сумму полезностей, то есть суммарную выгоду. Утилитарная функция коллективной полезности

$$\boldsymbol{W_* = \sum_{j=1}^{M} u_j}, \tag{4.3}$$

а выбор оптимального варианта осуществляется путем решения оптимизационной задачи

$$\boldsymbol{\sigma_{\mathrm{opt}} = \underset{\sigma \in S_a}{Sup} W_*\left(U\right) = \underset{\sigma \in S_a}{Sup}\left(\sum_{j=1}^{M} u_j\right)}. \tag{4.4}$$

Принцип в таком виде согласуется с принципом единогласия: любой вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_M)$ на S_a [144] оптимален по Парето.

В действительности, описанные оптимизационные задачи формируются при множестве дополнительных ограничений и условий, так что «голый» функционал, выраженный через функцию коллективной полезности, редко используется. В частности, члены группы могут иметь различающиеся множества альтернатив S_{aj}.

Вектор U Парето-оптимален, если из $V > U \Rightarrow V \,\overline{\in}\, S_a^M$, где неравенство $V > U$ означает, что $v_j \geq u_j$ и $V \neq U$. Вектор U слабо Парето-оптимален, если из $V >> U \Rightarrow V \,\overline{\in}\, S_a^M$, где неравенство $V >> U$ означает, что $v_j \geq u_j$ для $\forall j \in \overline{1, M}$, S_a^M — декартово произведение

$$\boldsymbol{\underbrace{S_a \times S_a \times \ldots \times S_a}_{M}}.$$

Классический утилитаризм не ограничивает неравенства субъектов в группе.

С нашей точки зрения *эгалитаризм* и *утилитаризм* являются экономической проекцией более глубоких этических принципов, генетически объединенных в недрах человеческой психики: коллективизма и индивидуализма. С точки зрения рассматри-

ваемой теории желательно было бы превратить эту дихотомию в рабочую гипотезу (постулат).

Не исключается, что внутри группы могут существовать коалиции исповедующие различные этические принципы, либо все субъекты группы исповедуют некий компромиссный принцип справедливости. Во втором случае условно можно было бы это выразить в виде формулы

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{W}_{\text{ед}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{W}_{*}, \ (0 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 1). \quad (4.5)$$

В первом случае, предполагая что в множестве субъектов существуют коалиции T_1 и T_2, такие что $T_1 \cup T_2 = M$, можно допустить, что коалиция T_1 решает эгалитарную задачу, а коалиция T_2 — утилитарную, пользуясь заданными ресурсами и технологиями.

Существуют различные схемы (алгоритмы) разрешения спора между коалициями.

Функция коллективной полезности (ФКП) индуцирует «*порядок коллективного благосостояния*» (ПКБ). Заметим, что полезности везде выражаются через объективные характеристики (расстояния, стоимости, доходы, …). В процессе агрегирования учитывается наличие корпоративных целей (возведение моста, больницы, создание армии, …). К индивидуальным полезностям предъявляется требование сравнимости и транзитивности. ФКП есть средство оценивания порядков коллективного благосостояния. ПКБ отвечает определенному этическому постулату. Заметим также, что функции коллективного благосостояния в качестве агрегированных полезностей в соответствие с принятой здесь концепцией должны каждый раз иметь «индивидуального носителя». Это требование сразу придает теории новую окраску.

Одним из часто используемых этических постулатов является *принцип Пигу-Дальтона*, который состоит в следующем: *«передача» полезности от субъекта i к субъекту j увеличивает (не уменьшает) коллективное благосостояние, если*

$$\boldsymbol{u_i} > \boldsymbol{u_j}$$

до и после «передачи».

Другими словами передача осуществляется от субъекта с большей полезностью к субъекту с меньшей полезностью так, чтобы после передачи полезность отдающего оставалась больше полезности получающего.

Заметим, что этот принцип может быть уточнен в условиях использования экнтропийно-информационного подхода, где понятие «коллективного благосостояния» принимает несколько иной и более содержательный смысл.

Видим, что при «революционной» экспроприации принцип Питу-Дальтона как правило нарушается. Если бы он не нарушался, то соответствующая «революция» была бы, условно говоря, *«справедливой» — эгалитарной революцией*. Понятие «эгалитарной революции»: — это такая революция, при которой не нарушается принцип Пигу-Дальтона.

В работе [64] приведено несколько вариантов оптимизационных задач, связанных с показателями коллективного благосостояния. В частности, в качестве наиболее простых описана эгалитарная схема как «диктатура» беднейшего, а также утилитарная схема. Однако одновременно отмечается, что возможны другие более «мягкие» (менее радикальные) постановки.

Примером является утилитаризм с ограниченным разрывом уровней полезностей самого богатого и самого бедного. Соответствующая задача является задачей на условный экстремум:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{opt}} = \underset{\sigma \in S_a}{Sup} W_* (U) = \underset{\sigma \in S_a}{Sup} \left(\sum_{j=1}^{M} u_j \right). \tag{4.6}$$

с дополнительным условием

$$\Delta_{\text{крит}} \geq u_{\max} - u_{\min}, \tag{4.7}$$

где $\Delta_{\text{крит}}$ — заданный разрыв крайних значений индивидуальных полезностей.

Если $u_{\min} < \Delta_{\text{крит}}$ — то можно говорить о практическом равенстве. Неравенство (4.7) выражает этический постулат и, конечно, отражается на эффективности активной системы.

Пусть теперь функционирование активной системы сопряжено с возможностью катастрофических событий, то есть событий, ставящих под вопрос существование всей системы или весьма серьезно ухудшающих ее состояние. В этих условиях система вынуждена производить затраты на обеспечение определенного уровня безопасности, что, в свою очередь снижает индивидуальные полезности. Взяв за основу предыдущую оптимизационную задачу, добавим еще одно ограничение:

$$P_{em} < 1 - P_s = \delta_s << 1,$$

где P_{em} — вероятность чрезвычайного неблагоприятного события, P_s — вероятность безопасного функционирования системы.

Другой класс стратегий — это позиционные стратегии, ориентированные на максимизацию скорости возрастания полезностей. «Эгалитарная» позиционная ФКП $V_e = \dfrac{dW_e}{dt}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{opt}} = \underset{\sigma \in S_a}{Sup} \frac{dW_e}{dt} = \underset{\sigma \in S_a}{Sup} \left(\frac{du_{\min}}{dt} \right) \tag{4.8}$$

при условии, что все остальные полезности не убывают:

$$\frac{du_k}{dt} \geq 0 \quad (k \in \overline{2, M}).$$

Существует множество возможных постановок вариационных задач на условный экстремум с полезностями ФКП в качестве основного компонента функционала. Например, при ограниченных ресурсах нужно обеспечить максимально быстрый рост среднего благосостояния (утилитарный позиционный критерий) при условии, что скорость роста благосостояния самого неблагополучного субъекта, будет не меньше заданной: $\dfrac{du_{\min}}{dt} \geq v_{\min}$, а для всех остальных $\dfrac{du_k}{dt} \geq 0$ ($k \in \overline{2, M}$). Здесь также в качестве дополнительных условий может быть учтен необходимый уровень безопасности, некоторые критерии, имеющие демографический характер и пр. Такие задачи могут вообще не иметь решения при определенных ресурсах.

Ряд показателей «справедливости» может быть сформулирован в духе теории игр, в том числе антагонистической либо неантагонистический игры с природой (учет вероятности катастроф природного характера: землетрясения, наводнения, цунами, засухи и т.д.).

Из этих и подобных достаточно общих формулировок уже в виде вторичных вытекают этические требования к статусу и поведению индивидуума (коалиции) и их взаимоотношения с другими индивидуумами (коалициями), сообществом в целом.

Что является первичным: индивидуальные этические принципы или групповые? Ответ на этот вопрос лежит в самом понятии «*социальной справедливости*», которое совместимо с формализацией в виде компромиссного критерия.

«*Рациональный выбор сообщества должен быть как можно ближе к способам выбора отдельных его членов*». (Кондорсе 1785 г.). Этот старинный принцип допускает множество трактовок и формализаций и, естественно, ведущую роль при этом играют (после основного критерия ФКП) различные дополнительные условия и ограничения, в частности те, которые определяются «открытостью» активной системы — воздействием внешних факторов.

Продолжим рассмотрение разных фактов теории принятия коллективных решений. К функциям коллективной полезности и порядку коллективного благосостояния обычно предъявляются определенные требования. Чаще всего эти требования (аксиомы) сводятся к сепарабельности, анонимности, единогласию, независимости от общей шкалы полезностей, независимости от общего нуля полезностей и другие.

Пусть для группы M субъектов на множестве альтернатив S_a определено множество $\varepsilon_n^{\mathrm{M}}$ профилей полезностей $U(\sigma_i)$; ($\sigma_i \in S_a$) и порядок коллективного благосостояния ПКБ — отношение $\rho:\succeq$ на множестве $\varepsilon_{\mathrm{n}}^{\mathrm{M}}$ полное, рефлексивное и транзитивное и пусть ($\succ$) — строгая компонента, а (~) — отношение безразличия:

$$\boldsymbol{U} \succ \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \left\{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{V};\boldsymbol{V}\bar{\rho}\boldsymbol{U}\right\};\quad \boldsymbol{U} \sim \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \left\{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{V};\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{U}\right\}.$$

Анонимность означает, что, если U и V различаются только перестановкой номеров субъектов, то они одинаковы по предпочтительности

$$\boldsymbol{U} \sim \boldsymbol{V}.$$

Таким образом, анонимность требует симметричности ФКП по отношению к перестановке компонент $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Единогласие означает, что если U и $V \in \varepsilon_n^M$ таковы, что $U \geq V$, ($U >> V$), то $W(U) \geq W(V)$, ($W(U) >> W(V)$), где W(.) — монотонно возрастающая функция.

Сепарабельность определена следующим образом. Пусть имеется группа, состоящая из M участников (субъектов). Порядок коллективного благосос-тояния ρ, заданный на ε_n^M является сепарабельным, если для любой подгруппы T группы M и любых векторов полезностей U, V, U', V' выполнено условие:

$$\{(\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{u'_i}, \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{v'_i} \text{ для } \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{T}) \text{ и } (\boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{u'_j} = \boldsymbol{v'_j} \text{ для } \forall \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{T})\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{U'}\rho\boldsymbol{V'}\}\ (\rho:\succeq).$$

Поясним это определение. Пусть

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_\tau, u_{\tau+1}, \ldots, u_M) = (U_T, U_{M\backslash T});$$

$$U' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_\tau, u'_{\tau+1}, \ldots, u'_M) = (U'_T, U'_{M\backslash T});$$

$$V = (v_1, v_2, \ldots, v_\tau, v_{\tau+1}, \ldots, v_M) = (V_T, V_{M\backslash T});$$

$$V' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_\tau, v'_{\tau+1}, \ldots, v'_M) = (V'_T, V'_{M\backslash T}).$$

Сепарабельность имеет место, если

$$(U_T, U_{M\backslash T}) \succeq (V_T, U_{M\backslash T}) \Leftrightarrow (U'_T, V'_{M\backslash T}) \succeq (V'_T, V'_{M\backslash T})$$

Это означает, что отношение ρ выполняется независимо от распределения полезностей на подгруппе $M\backslash T$, то есть сравнение благосостояния не зависит от «нерассматриваемых агентов».

Порядок коллективного благосостояния (ПКБ) ρ, заданный на ε_n^M, не зависит от общего нуля полезностей, если для $\forall U, V \in \varepsilon_n^M$ и любого $\rho \in R$ выполнено условие

$$U\rho V \Leftrightarrow (U + \beta I)\rho(V + \beta I),$$

где $I = \underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{M}$ — вектор с единичными элементами.

ПКБ ρ, заданный на положительном ортанте ε_n^M не зависит от общего масштаба, если для $\forall U, V \in \varepsilon_n^M$ и $\forall \alpha > 0$ выполняется условие

$$U\rho V \Leftrightarrow (\alpha U)\rho(\alpha V).$$

ПКБ ρ не зависит от общей шкалы полезности, если для любой монотонно возрастающей функции $f(\cdot)$ выполняется условие

$$U\rho V \Leftrightarrow f(U)\rho f(V).$$

Можно показать, что эгалитарная и утилитарная функции коллективной полезности не зависят от общего нуля и общего масштаба. Эгалитарная ФКП не зависит от общей шкалы полезности, а утилитарная ФКП — от нуля каждой индивидуальной полезности. Такая ФКП является единственной представляющей ПКБ, который удовлетворяет указанному свойству. Обычно предполагается, что ФКП удовлетворяет свойствам анонимности и единогласия. Такими ФКП являются эгалитарная W_e и утилитарная W_* ФКП.

Однако, уже в случае взвешенного агрегирования полезностей, например, для функции

$$\boldsymbol{W_{**}} = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \boldsymbol{u_j}, \tag{4.9}$$

где ξ_j — весовые коэффициенты, приписывающие «вес» каждому субъекту, аксиома анонимности не выполняется. Эта функция также несепарабельна.

Поскольку в дальнейшей теории все аналогичные функции будут иметь вид взвешенных «рисков», то многие из аксиом обычной теории коллективного благосостояния не будут выполняться. Приводимое здесь конспективное изложение основных аксиом

необходимо для того, чтобы иметь представление о тех жертвах, которые придется принести в рамках развиваемой в настоящей главе теории групповых предпочтений.

Доказано, что если ρ — непрерывный и сепарабельный порядок коллективного благосостояния на ε_n^M, то он не зависит от общего нуля полезностей в том и только в том случае, когда представлен одной из следующих ФКП:

$$\sum_{j=1}^{M} e^{\beta u_j} \ (\beta > 0); \quad -\sum_{j=1}^{M} e^{\beta u_j} \ (\beta < 0); \quad \sum_{j=1}^{M} u_j \tag{4.10а}$$

и не зависит от общего масштаба полезности, в том и только в том случае, если представлен одной из ФКП

$$\sum_{j=1}^{M} u_j^{\gamma} \ (\gamma > 0); \quad -\sum_{j=1}^{M} u_j^{\gamma} \ (\gamma < 0); \quad \sum_{j=1}^{M} \log u_j. \tag{4.10б}$$

Говорят, что функция коллективного благосостояния *порождает* порядок коллективного благосостояния (ПКБ) ρ, если выполняется условие

$$U \rho V \Leftrightarrow W(U) \ge W(V)$$

и слабо порождает порядок коллективного благосостояния (ПКБ) ρ, если выполняется условие

$$W(U) > W(V) \Rightarrow U \rho V \text{ для } \forall U, V \in \varepsilon_n^M.$$

Теорема (Roberts). Пусть ПКБ ρ такой, что его строгая компонента P удовлетворяет условию: для любых U, $V \in \varepsilon_n^M$, для которых $U\rho V$, существуют U' и V' сколь угодно близкие к U и V, причем $U' >> U$; $V' >> V$ и $U'\rho V'$, существуют другие векторы U'' и V'', для которых $U'' << U$; $V'' << V$ и $V''\rho U''$, тогда ρ слабо представим непрерывной функцией коллективного благосостояния ФКП.

Говорят, что ПКБ ρ не зависит от нуля, если он удовлетворяет одному из эквивалентных свойств

а) для $\forall U, V, W \in \varepsilon_n^M$: $U\rho V \Leftrightarrow (U + W)\rho(V + W)$;

б) для $\forall U, V \in \varepsilon_n^M$: $U\rho V \Leftrightarrow (U - V)\rho 0$.

Следующая теорема обосновывает слабую представимость ПКБ утилитарной ФКП W_*.

Теорема (д'Аткинсон, Дживерс). Утилитарная ФКП W_* не зависит от нуля полезностей. Обратно, независимый от нуля ПКБ слабо представим утилитарной ФКП. В частности, существует единственный независимый от нуля и непрерывный ПКБ. Он представим утилитарный ФКП W_*.

Говорят, что ПКБ ρ, определенный на положительном ортанте ε_+^M ($u_j > 0$ для $\forall j \in \overline{1, M}$), не зависит от масштаба, если выполняется одно из условий:

а) для $\forall U, V, W \in \varepsilon^M$: $U\rho V \Leftrightarrow (U\text{: } W)\rho(V\text{: } W)$;

б) для $\forall U, V \in \varepsilon^M$: $U\rho V \Leftrightarrow (U\text{:}V)\rho e$;

где

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} \equiv (\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M\cdot\boldsymbol{v}_M); \quad \boldsymbol{U} : \boldsymbol{V} \equiv \left(\frac{\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{v}_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{u}_M}{\boldsymbol{v}_M}\right);$$

$$\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1).$$

Наряду с функциями W_e и W_* рассматривается также функция коллективного благосостояния Неша:

$$\boldsymbol{W}_N = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\ldots\boldsymbol{u}_M = \prod_{j=1}^{M}\boldsymbol{u}_j. \tag{4.11}$$

Функция Неша такова, что обращение в нуль хотя бы одного u_j ($j \in \overline{1,M}$), обращает в нуль всю функцию W_N.

Теорема Неша утверждает, что функция Неша W_M (радикальная) не зависит от масштаба. Обратно, если ПКБ определен на ε_+^M и не зависит от масштаба, то он слабо представим ФКП Неша. В частности, существует единственный ПКБ на ε_+^M независимый от масштаба и непрерывный, представимый функцией Неша.

С точки зрения дальнейшего анализа важной является проблема агрегирования распределений индивидуальных предпочтений в коллективные предпочтения (групповые). В этом случае не следует забывать, что мы действуем в рамках предположения об «индивидуальном носителе» и, следовательно, должны каждый раз присваивать распределение предпочтений определенному индивидууму. В рамках теории порядковых распределений эта задача представляет собой значительные трудности, а в некоторых случаях вообще не имеет решения. Существует целый ряд «*отрицательных*» результатов. Наиболее известным является «*теорема Эрроу о невозможности*». Смысл этой теоремы состоит в том, что в общем случае и в определенных условиях невозможно разумно согласовать индивидуальные предпочтения и получить упорядочения коллективного благосостояния.

Простейшей версией этой теоремы является утверждение, что «нельзя получить транзитивный порядок коллективного благосостояния на основе парных сравнений по правилу большинства».

В подходе Эрроу возникает неразрешимое противоречие между «*решительностью*» и *анонимностью*.

Упорядочение коллективного благосостояния (коллективных предпочтений) осуществляется на основе парного сравнения альтернатив из S_a-бинарного выбора.

Заранее накладываются требования на процедуру голосования внутри группы, которые отражают некие этические принципы, а именно: «голосование» осуществляется *по правилу большинства*, и при этом должно быть *анонимным*, *нейтральным* и *монотонным*.

Скажем сразу, что с нашей точки зрения в подавляющем большинстве активных систем с групповым субъектом эти требования не выполняются. Тем не менее они могут быть отправной точкой при изучении других схем и других принципов, в частности тех которые развиваются в настоящей работе на основе энтропийного подхода.

Заметим, что рассмотренные выше функции коллективной полезности, вообще говоря, являются частным случаем взвешенной функции (4.9)

Из этой функции получим эгалитарную ФКП, если положим все $\xi_к = 0$ за исключением одного $\xi_к$ — коэффициента при наименьшем $u_к$ и утилитарная ФКП, если положить $\xi_к = 1$ для $\forall k \in \overline{1,M}$. Если несколько обобщить ФКП Неша (радикальную) и рассматривать функции

$$\boldsymbol{W'_N = \prod_{j=1}^{M} u_j^{\xi_j}}, \tag{4.12}$$

то, прологарифмировав придем к ФКП вида

$$\boldsymbol{\ln W'_N = W'_{**} = \sum_{j=1}^{W} \xi_j \ln u_j}. \tag{4.13}$$

Теперь достаточно принять $u'_j = \ln u_j$ (поскольку ln(.) монотонная функция) за новую полезность и получим

$$\boldsymbol{W'_{**} = \sum_{j=1}^{W} \xi_j u'_j}. \tag{4.14}$$

Рассмотрим, следуя упомянутой монографии Мулена [144] процедуру бинарного выбора на множестве S_a.

Пусть σ и η ∈ S_a. Предполагается, что каждый субъект реализует строгие предпочтения. Безразличия на этапе индивидуального выбора недопустимы. Пусть $(\sigma, \eta)^M$ — декартовы произведения двухэлементных множеств, а профиль предпочтений группы представляет собой вектор $U = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ со значениями из $(\sigma, \eta)^M$, то есть $u_j = \sigma$, либо $u_j = \eta$. Правило голосования G ставит в соответствие каждому профилю U непустое подмножество из $(\sigma, \eta)^M$. $G(U) = (\eta)$ означает выбор η, $G(U) = (\sigma)$ — выбор σ, $G(U) = \{\sigma, \eta\}$ — эквивалентность (безразличие) или ничья в результате «голосования».

Правило выбора $G(.)$ *анонимно*, если оно «*осуществляет симметричное отображение, зависящее от M переменных*».

Правило выбора $G(.)$ *нейтрально*, если перестановка предпочтений на $(\sigma, \eta)^M$ каждого субъекта приводит к перестановке коллективного предпочтения. Если A — вектор перестановки предпочтений на $(\sigma, \eta)^M$, то

$$\boldsymbol{G\Big(A\big(u_1\big), A\big(u_2\big), \dots, A\big(u_M\big)\Big) = AG\big(u_1, u_2, \dots, u_M\big)}.$$

Правило выбора $G(.)$ *монотонно*, если новый сторонник определенного выбора не приносит вреда. Если U и V два профиля такие, что $u_j = v_j$ $(j \neq i)$, $u_i = a$, $v_i = b$, то справедливы следующие отношения:

$$\{\eta \in \boldsymbol{G(U)} \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{G(V)}\};$$

$$\{\sigma \in \boldsymbol{G(V)} \Rightarrow \sigma \in \boldsymbol{G(U)}\}.$$

Следствием *монотонности* является *неманипулируемость*: у субъекта отсутствуют побудительные мотивы сообщать ложное мнение.

Теорема Эрроу о независимости от посторонних альтернатив.

Пусть S_a множество альтернатив состоит, по крайней мере, из трех альтернатив и ρ — упорядочение коллективного благосостояния, удовлетворяющее условию единогласия: для всех профилей U и альтернатив σ, η

$$\{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{M}\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma\rho\eta}.$$

Тогда **ρ** удовлетворяет аксиоме независимости от посторонних альтернатив (НПА (э)) в том и только в том случае, когда оно является диктаторским. Последнее означает, что существует такое $j \in \overline{1, M}$ — «диктатор» (субъект, имеющий номер j) для которого $\rho(U) = u_j$ для $\forall U$.

Здесь $M(U, \sigma, \eta) = \left\{ j \in \overline{1, M} \mid u_j(\sigma) > u_j(\eta) \right\}$.

Упорядочение ρ для данных S_a и M удовлетворяет аксиоме независимости от посторонних альтернатив Эрроу, если для $\forall \sigma, \eta \in S_a$ и $U, V \in L(S_a)$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \Rightarrow \left\{ \boldsymbol{\sigma\rho}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\eta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma\rho}(\boldsymbol{V})\boldsymbol{\eta} \right\}.$$

Проблема неагрегируемости, связанная с описанными выше предположениями (аксиомами), в частности анонимностью, может быть преодолена, если субъектам приписываются определенные рейтинги, например, в результате различной компетенции субъектов. Нитзан и Паруш (1982) и Шерм и Грофман (1984) оценки (предпочтения) субъектов учитывали с весом $\log[p_j(1 - p_j)^{-1}]$, где p_j — вероятность правильного суждения эксперта с номером j. Согласно Кондорсе существует объективное ранжирование альтернатив в соответствии с «наиболее вероятной комбинацией мнений». Соответствующий критерий имеет вид критерия максимального правдоподобия.

4.3. Группа взаимодействующих субъектов. Функции предпочтения II рода

Объектом изучения является группа M субъектов, между которыми существует определенная зависимость (связанность) и взаимодействие. Каждый субъект в данный момент времени имеет индивидуальное множество альтернатив S_{aj} ($j \in \overline{1, M}$), содержащее N_j альтернатив σ_k ($k \in \overline{1, N_j}$). Вообще говоря, альтернативы субъекта следовало бы отмечать двумя индексами σ_k^j. Мы эту особенность будем в явном виде учитывать там, где это будет необходимо. Как уже отмечалось σ_k — это либо желательные терминальные состояния, либо стратеги разрешения проблемно-ресурсной ситуации.

Среди группообразующих факторов можно было бы назвать следующие:

— общие (корпоративные) проблемы;

— влияние рейтингов (предпочтений II рода) на распределение ресурсов;

— взаимозависимость полезностей;

— наличие общих этических императивов;

— влияние событий «прошлого» (в ретроспекции) — своего рода «груз прошлого» — прошлых привычек, связей незавершенных проблемных ситуаций и т.д.;

— прямое взаимовлияние предпочтений.

Если индивидуальные множества альтернатив не пересекаются: $S_{aj} \cap S_{ai} = \varnothing$ для $\forall i, j \in \overline{1, M}$, то субъекты проблемно не связаны.

Если существует непустое пересечение индивидуальных множеств альтернатив, то субъекты в группе проблемно связаны. Виды проблемной связанности могут быть различными. Пусть имеет место только попарная «линейная» связанность (рис. 4.1).

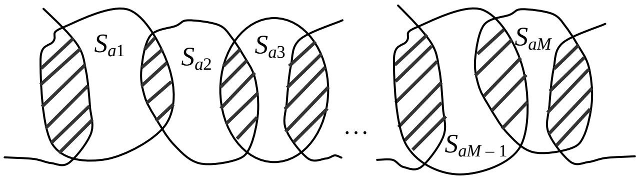


Рис. 4.1

Тогда каждое множество имеет непустое пересечения не более чем с двумя другими множествами, при этом отсутствуют тройные пересечения и пересечения большего числа множества. Однако все множества S_{aj} участвует в связности, если из

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{S}_{ai} \cap \boldsymbol{S}_{aj} \neq \varnothing \\ \boldsymbol{S}_{ai} \cap \boldsymbol{S}_{ak} \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{S}_{aj} \cap \boldsymbol{S}_{ak} = \varnothing,$$

то это означает, что отсутствуют циклы связанности: ситуация показанная на рис.4.2.

Если существуют множества типа S_{ai}, то мы имеем ситуацию, когда каждое множество альтернатив может иметь парное пересечение с тремя другими множествами.

Будем говорить, что в группе G имеются корпоративные проблемы, если существуют двойные, тройные, четверные, …, m-кратные пересечения (рис.4.3) индивидуальных множеств альтернатив.

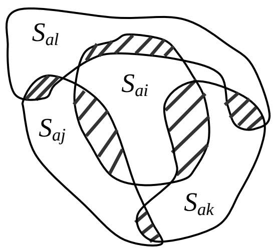


Рис.4.2

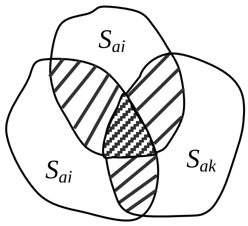


Рис.4.3

Вообще говоря, вариантов возможного взаимного расположения индивидуальных множеств много. Причем, если множества альтернатив счетны, то множество вариантов имеет мощность континуума.

Каждый из субъектов в группе в каждый момент (или «отрезок») времени «имеет» индивидуальное распределение предпочтений на S_{aj}: $\pi_j(\sigma_i)$ ($j \in \overline{1, M}$). Таким образом, для каждой группы субъектов (если имеет место какая-либо связанность внутри группы между субъектами) постулируется наличие набора индивидуальных распреде-

лений предпочтения $\pi_j(\sigma_i)$. Эти распределения формируются под воздействием «внешних» обстоятельств и «внутренних» взаимовлияний между индивидуальными субъектами группы. Формы и виды действия этих факторов мы рассмотрим в дальнейшем.

Аналогия, с *внутренними* и *внешними* силами, действующими на элементы материальной системы не являлась бы полной и адекватной, поскольку, суммарный результат внутренних взаимодействий не приводит в активной системе к нулевому результату.

Используя понятие индивидуального множества S_{aj} можно выделить определенные типы групп с точки зрения характера связанности субъектов.

Имеется в виду отрицательный результат Кеннета Эрроу о невозможности агрегирования индивидуальных порядковых предпочтений.

Одна из возможностей определения связанности заключается в следующем: пусть имеется два субъекта. Их множества альтернатив S_{a1}, S_{a2}. Пусть $S_a = S_{a1} \cup S_{a2}$. Тогда, если в S_a имеется хотя бы одна альтернатива $\sigma_k \in S_a$ такая, что предпочтения обоих субъектов i и j – $\pi_i(\sigma_k)$ и $\pi_j(\sigma_k)$ не равны нулю, будем считать, что имеет место субъективная связанность. Мерой связанности могли бы служить коэффициент корреляции Пирсона, критерии ранговой корреляции.

Индивидуальная функция предпочтений первого рода $\pi_j(\sigma_i)$: $\sigma_i \in S_{aj}$, как это было описано выше, определяет индивидуальное распределение предпочтений на индивидуальном множестве альтернатив S_{aj}. Ее можно рассматривать, как меру на S_{aj}, если выполнены следующие условия:

1. S_{aj} есть полукольцо подмножеств $\Omega \subset S_{aj}$.
2. $\pi_j(\Omega)$ действительна и

$$\pi_j(\Omega) \geq 0 \text{ для } \forall\Omega \subset S_{aj}.$$

3. $\pi_j(\Omega)$ аддитивна — для любого конечного разложения $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\ldots\cup \Omega_k$ на непересекающиеся множества ($\Omega_r \cap \Omega_s = \varnothing$; $\forall r, s \in \overline{1,k}$) имеет место равенство

$$\pi_j(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} \pi_j(\Omega_i)$$

Отсюда следует в частности, что $\pi_j(\varnothing) = 0$. Выполняется условие нормировки:

$$\pi_j(S_a) = 1.$$

При построении агрегированных функций предпочтения необходимо выполнение тех же требований.

Предлагаемая выше модель неаддитивной Н-меры, может быть использована на множестве альтернатив.

Существенным отличием субъективного анализа группы субъектов является необходимость и целесообразность введения новой функции предпочтения, которая отражает рейтинг каждого индивидуального субъекта «на фоне» всей группы:

$$\xi(j) = \xi_j \ (j \in \overline{1,M}). \tag{4.15}$$

Будем считать эту функцию нормированной:

$$\sum_{j=1}^{M} \xi_j = 1 \tag{4.16}$$

и назовем функцией положительных предпочтений второго рода (II рода) или абсолютными интегральными положительными рейтингами.

Неаддитивная мера (например, Н-мера) может быть применена и к распределениям рейтингов, которые являются своеобразными фотографиями субъектов.

Рейтинговая функция является интегральной характеристикой субъекта, как участника группы и «впитывает» в себя многие стороны его проявлений — его активности. Это по существу определенная интегральная мера, оценивающая все «графы» индивидуальной характеристики в совокупности. В связи с этим возникает естественное желание ввести более детальную «меру». Например, векторную функцию предпочтения $\vec{\xi}_j$ (векторный рейтинг). Это желание вполне естественно, но на данном этапе предстоит разобраться с интегральным рейтингом ξ_j.

Наряду с абсолютными положительными рейтингами определим функцию условных рейтингов $\xi(j|\,i) = \xi_{j|\,i}$ — это рейтинги, назначаемые для всех членов группы, в том числе, и для самого себя i-ым членом группы. Условие нормировки для этого распределения есть

$$\sum_{j=1}^{M} \xi_{j|i} = 1 \ (\forall i \in \overline{1, M}\,). \tag{4.17}$$

Даже если субъект не «следит» за выполнением нормировки и осуществляет оценки рейтингов в произвольной шкале, то всегда имеется возможность нормировки назначенных им рейтингов на заданное число (например, на 1).

Рейтинг субъекта может быть дифференцирован по отношению к альтернативам $\sigma_k \in S_{aj}$ (из его индивидуального множества альтернатив). В этом случае рассматриваются функции $\xi_j(\sigma_k)$, $\xi_{j|\,i}(\sigma_k)$, … Это означает, что субъект в группе оценивается поразному в зависимости от того, какая рассматривается проблема P: $(\sigma_0 \to \sigma_k)$. Строго говоря, при этом следовало бы учитывать и его начальное «состояние» σ_0. Простейшим является случай, когда альтернативные множества всех субъектов совпадают:

$$\bigcap_j S_{aj} = \bigcup S_{aj} = S_a,$$

либо принимается схема анализа, когда вводится единое множество альтернатив $S_a = \bigcup_{j=1}^{M} S_{aj}$, а индивидуальные распределения предпочтений I рода доопределяются на все S_a нулевыми значениями.

По отношению к распределению рейтингов так же, как это было сделано для множества альтернатив S_a, можно ввести порядковые отношения рейтингового предпочтения $\rho_\xi{:}\prec$ или $\rho_\xi{:}\precsim$ Отношение строго рейтингового предпочтения ρ_ξ *транзитивно*, *асимметрично* и *непрерывно*. Отношение рейтинговой эквивалентности $\rho_\sim{:}\sim$ *транзитивно*, *рефлексивно* и *симметрично*. Если использовать для субъекта в группе обозначение Σ_j, то отношение $\rho_\xi{:}\prec$ генерирует порядок:

$$\boldsymbol{\Sigma_1 \prec \Sigma_2 \prec \Sigma_3 \prec \ldots \prec \Sigma_{M-1} \prec \Sigma_M},$$

а отношение $\rho_\xi : \lesssim$ — порядок:

$$\boldsymbol{\Sigma_1 \prec \Sigma_2 \prec \ldots \prec \Sigma_k \sim \Sigma_{k+1} \sim \ldots \sim \Sigma_{k+l} \prec \ldots \prec \Sigma_{M-1} \prec \Sigma_M}.$$

Зона эквивалентности от k до $k + l$ предполагает одинаковые рейтинги субъектов равные рейтингу Σ_k. Зон эквивалентности может быть несколько, наконец, группа, субъекты которой имеют одинаковые рейтинги, представляют собой одну группу эквивалентности или класс эквивалентности (в соответствии с терминологией главы 1).

Группа субъектов может быть *слабоупорядоченной* (см. п.1.3), если отношение ρ_ξ: $\Sigma_i \rho_\xi \Sigma_j$ (Σ_i, $\Sigma_j \in M$) асимметрично и отрицательно транзитивно.

Группа субъектов *строго упорядочена*, если дополнительно к асимметричности и отрицательной транзитивности для отношения ρ_ξ имеет место слабая связанность.

Группа *строго частично упорядочена* если отношение ρ_ξ нерефлексивно и транзитивно. Как видим, существует определенная типология групп субъектов в зависимости от того, какое отношение ρ_ξ реализуется. Можно было бы говорить о функции полезности субъекта в группе по аналогии с полезностью альтернатив. Мы, однако, предпочитаем говорить о функции предпочтений II рода или о рейтинговой функции, которые, как увидим дальше можно определить в зависимости от взаимных полезностей.

В качестве примера рассмотрим два частных случая: ρ_ξ — отношение конкуренции и ρ_ξ — отношение антагонизма.

Отношение «продавец-покупатель» — это отношение антагонистическое: первый хочет продать подороже, второй — купить подешевле. В то же время отношение между двумя продавцами, которые хотят продать товар одному и тому же покупателю есть отношение конкуренции.

Пусть $\rho_\xi = \rho_c$ — отношение конкуренции и $A, B, C, \ldots$ — конкуренты. Отношение ρ_c

— нерефлексивно $A\bar{\rho}_c A$ («я не конкурент самому себе»);

— симметрично $A\rho_c B \Leftrightarrow B\rho_c A$ (если A — конкурент B, то B — конкурент A);

— транзитивно $(A\rho_c B; B\rho_c C) \Rightarrow A\rho_c C$ (если A — конкурент B, а B — конкурент C, то A — конкурент C).

— Отношение *антагонизма* $\rho_\xi = \rho_a$ можно считать

— нерефлексивным $A\bar{\rho}_a A$;

— симметричным $A\rho_a B \Leftrightarrow B\rho_a A$;

— отрицательно-транзитивным $(A\bar{\rho}_a B; A\rho_a C) \Rightarrow B\rho_a C$.

Одно из возможных определений антагонизма: «Враг нашего врага — наш друг» или «Кто не снами, тот против нас».

Антагонисты иногда полезны обеим субъектам, конкуренты всегда друг другу вредны. Разрешение противоречия между конкурентами нельзя назвать «революцией», разрешение противоречия между антагонистами иногда принимает форму «революции». Отношения между работодателем и работником — есть антагонизм.

Может быть наиболее существенным вопросом в рассматриваемом контексте является вопрос о том, кто — «носитель» (и пользователь) рейтингов, кто оперирует

рейтингами индивидуальных субъектов и принимает решения. Другими словами, кто обладает определенными властными полномочиями, достаточными для того, чтобы на основе информации об интегральных рейтингах принимать решения.

Как видим здесь естественным образом возникает задача о распределении *властных полномочий* внутри группы. Что следует понимать под властными полномочиями, а также в чем состоит задача об агрегировании предпочтений второго рода? В случае порядковых рейтингов эта задача сталкивается, как уже было сказано с трудностями типа теоремы Эрроу «о невозможности». Использование непрерывных рейтинговых распределений, во-первых, снимает значительную часть подобных трудностей, и во-вторых дает возможность постулирования определенных вариационных принципов, приписываемых человеческой психике.

Так же как в случае предметных предпочтений (предпочтений первого рода $\pi(\sigma_i)$) наряду с «положительными» рейтингами, которые можно обозначить ξ_j^+ можно допустить возможность формирования «отрицательных» рейтингов ξ_j^-, когда из двух (или нескольких) «зол» выбирают наименьшее. В мире есть такие демократии, когда каждый гражданин на выборах имеет абсолютное демократическое право из двух-трех бандитов выбрать лучшего. Можно представить себе последовательные процедуры оценивания членов группы, когда распределения ξ_j^+ и ξ_j^- получаются в результате следующих друг за другом этапов оценивания. Если t — моменты времени, то соответствующая цепочка может выглядеть следующим образом

$$\boldsymbol{\xi_j^+(t) \to \xi_j^-(t+1) \to \xi_j^+(t+2) \to \ldots}$$

При этом результаты оценивания на предыдущем этапе учитываются при выработке рейтингов на следующем этапе.

Эта схема может быть использована при многоэтапных выборах, либо в задаче выделения лидера.

4.4. Индивидуальные рейтинги. Функции групповой эффективности

Исследование функций предпочтения второго рода или рейтинговых предпочтений предполагает несколько исходных условий. Необходимо установить связь между индивидуальными «рейтингами» $\xi(j|\,i)$ (($\xi(i \to \underset{\vdots}{j}|\ldots)$ «j глазами i»), носителями которых являются субъекты i, назначающие рейтинги остальным членам группы ($j \in \overline{1,M}$), а также указать способы агрегирования индивидуальных распределений (условных рейтингов $\xi(j|\,i)$), с целью выявления интегральных рейтингов $\xi(\underline{j})$ и «носителя» этих рейтингов. Совершенно очевидно, что существует связь между предпочтениями первого рода ($\pi(\sigma_k)$, …) и предпочтениями второго рода ($\xi(j|\,i)$,…). Какова связь предпочтений второго рода с полезностями, функциями эффективности, с ресурсами? Рассмотрению этих вопросов посвящен настоящий и следующий параграфы.

Невозможно на «все случаи жизни» предложить универсальные рейтинговые распределения. Вид распределения рейтингов в группе зависит от того, как «*поставлен вопрос*» тому, кто назначает рейтинги. Это утверждение является важным, так как оно открывает возможность рассматривать большое разнообразие рейтинговых предпочтений, существенно расширяет поле исследований и область применения. «Пра-

вильно спросить — половина знания». Вид канонического распределения в основном определяется видом функции эффективности, которую в данном случае будем называть групповой рейтинговой функцией эффективности и обозначать символом ε_ξ, или проще, групповой рейтинговой эффективностью. Говоря о групповой эффективности, мы, следуя принятой концепции об обязательном «носителе», должны указать, кого конкретно интересует «групповая эффективность» — только «руководителя» или всех участвующих в разрешении корпоративной проблемы.

Напомним, что при формировании предметных предпочтений использовались функции «полезности» U и функции «вредности» L. Они, по соглашению, выражаются через объективные характеристики: все виды ресурсов, «скорости» преобразования или трансляции ресурсов… Будем говорить здесь только о полезностях, принимая во внимание, что вид канонических распределений, зависящих от вредностей мало отличается от вида распределений, зависящих от полезностей. К другим факторам, которые находят отражение в канонических распределениях, относятся априорные императивы, взаимное влияние субъектов друг на друга, влияние предшествующих по времени распределений.

Функции эффективности по определению отражают влияние на субъективные предпочтения объективных факторов, а также в некоторых случаях, таких субъективных факторов, как субъективные вероятности.

Если при формировании предпочтений первого рода $\pi(\sigma_i)$ мы говорим о *полезностях* $U(\sigma_i)$ той или иной альтернативы, точнее — разрешения проблемы, связанной с реализацией альтернативы σ_i, то в случае формирования рейтингового предпочтения $\xi(j)$, мы говорим о полезности данного субъекта (для другого субъекта, для группы при разрешении корпоративной проблемы и т.д.).

Рассмотрим различные варианты функции групповой рейтинговой эффективности.

$$\varepsilon_\xi\left(S_a\right)=\sum_{j=1}^{M}\xi^+\left(j\right)U_j\left(S_a\right) \tag{4.18}$$

— интегральная, отнесенная ко всему множеству S_a полезность взвешенная по абсолютным рейтингам $\xi^+(j)$. Здесь $U_j(S_a)$ полезность субъекта «j» по отношению ко всему множеству альтернатив S_a. Поскольку в качестве «цели» будет выбрана некоторая альтернатива σ_k или подмножество $S'_a \subset S_a$, то характеристика $U_j(S_a)$ является слишком грубой.

$$\varepsilon_\xi\left(S'_a\right)=\sum_{j=1}^{M}\xi^+\left(j\right)U_j\left(S'_a\subset S_a\right) \tag{4.19}$$

— интегральная взвешенная по абсолютным рейтингам полезность субъекта «j», отнесенная к подмножеству $S'_a \subset S_a$.

$$\varepsilon_\xi\left(\sigma_k\right)=\sum_{j=1}^{M}\xi^+\left(j\right)U_j\left(\sigma_k\right) \tag{4.20}$$

— взвешенная по абсолютным рейтингам дифференциальная полезность субъекта «j», отнесенная к альтернативе σ_k.

Ниже мы рассматриваем вариант теории «взаимных полезностей» [п. 4.5].

Когда функции эффективности выражаются через интегральные абсолютные рейтинги $\xi(j)$, предполагается, что «носителем» этих рейтингов является либо некоторый иерарх (менеджер), стоящий над группой, либо виртуальный субъект — то, что принято называть «коллективным разумом», либо то, что в последнее время подразумевают под «информационной сущностью».

С точки зрения субъективного анализа «коллективный разум» можно охарактеризовать как такое психологическое состояние группы, когда существуют эффективные механизмы выравнивающие как предметные так и рейтинговые предпочтения членов группы.

Применительно к предметным предпочтениям дополнительным условием существования «коллективного разума» является наличие подмножества $S'_a \subset S_a$, на котором предпочтения различных членов группы практически совпадают и, кроме того, S'_a содержит наиболее предпочтительные альтернативы. Если допустить наличие «коллективного разума», то мерой «единомыслия» можно считать энтропию вида

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}_k) = -\sum_{j=1}^{M} \bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{\sigma}_k) \ln \bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{\sigma}_k), \tag{4.21}$$

которая характеризует степень «единомыслия» или,что тоже самое, степень «расхождения во взглядах». Здесь

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{\sigma}_k) = \left(\bar{\boldsymbol{\pi}}(\boldsymbol{\sigma}_k)\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{\sigma}_k),$$

где $\bar{\pi}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j(\sigma_k)$. Нормированные по группе предпочтения I рода можно ввести для подмножества $S'_a \subset S_a$ альтернатив:

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{S}'_a) = \left(\sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{S}'_a)\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{S}'_a),$$

где $\pi_j(S'_a) = \sum_{\sigma_k \in S_a} \pi_j(\sigma_k)$ и соответствующую энтропию:

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{\Sigma}(\boldsymbol{S}'_a) = -\sum_{j=1}^{M} \bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{S}'_a) \ln \bar{\boldsymbol{\pi}}_j(\boldsymbol{S}'_a). \tag{4.22}$$

Предположительно «носителем» этих энтропий ($H_{\pi}^{\Sigma}(\sigma_k)$ и $H_{\pi}^{\Sigma}(S'_a)$) является виртуальный субъект — носитель «коллективного разума». Можно говорить о достаточном единодушии, если $\pi_j(\sigma_k) \to \frac{1}{M}$, (или $\pi_j(S'_a) \to \frac{1}{M}$).

Можно представить себе, что вклад каждого члена группы в формирование «образа» коллективного разума определяется не только величиной его предпочтения, но также его «собственным удельным весом» в группе, то есть его рейтингом. Обозначим приведенное предпочтение

$$\boldsymbol{\pi}_j^{\xi}(\boldsymbol{\sigma}_k) = \xi(\boldsymbol{j}) \boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{\sigma}_k).$$

Введем нормированные на множестве S_ξ величины

$$\bar{\pi}_j^\xi(\sigma_k) = \frac{\pi_j^\xi(\sigma_k)}{\bar{\pi}^\Sigma(\sigma_k)},$$

где $\bar{\pi}^\Sigma(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j^\xi(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j)\pi_j(\sigma_k)$, тогда энтропия «коллективного разума»

$$H_\pi^\xi(\sigma_k) = -\sum_{j=1}^{M} \bar{\pi}_j^\xi(\sigma_k) \ln \bar{\pi}_j^\xi(\sigma_k).$$

Признаком единомыслия в этом случае также является близость $H_\pi^\xi(\sigma_k)$ к $ln\ M$. Аналогично можно рассмотреть энтропию, отнесенную к фрагменту S'_a множества S_a.

В приведенных выше выражениях, как уже отмечалось, полезность U имеет иной смысл по сравнению с полезностями, используемыми в предметных распределениях предпочтений (предпочтениях I рода) (($\xi(i \rightarrow j|...)$: „j глазами i”).

Если в предпочтениях I рода имеется в виду полезность ресурсов (объектов) для решения той или иной проблемы, то в рейтинговых предпочтениях (предпочтениях II рода) имеется в виду полезность члена группы (субъекта). В этом, как нам кажется, состоит одно из принципиальных отличий понятия «полезность» в первом и втором случаях.

Дальнейшая детализация связана с более глубокой дифференциацией рейтинговых предпочтений. Легко представить себе, что один и тот же субъект (член группы) может быть в различной степени предпочтителен с точки зрения наличия у него возможностей и способности решать различные проблемы (будучи хорошим специалистом в физике, он может оказаться плохим менеджером, хороший спортсмен в одном виде спорта, не достигнет положительных результатов в другом виде и т.д.). Поэтому вполне естественным является рассмотрение наряду с функциями $\xi(j)$ и $\xi(j|\ i)$, которые мы называем интегральными, предпочтений $\xi^+(j|\ i,\ S'_a \subset S_a)$ — специализированных по подмножествам альтернатив. В связи с этими рассуждениями мы имеем основания ввести рейтинги, дифференцированные по альтернативам $\sigma_k \subset S_a$ или группам альтернатив $S'_a \subset S_a$

$$\varepsilon_\xi(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j|\sigma_k) R_j^{disp}(\sigma_k) \tag{4.23}$$

$$\varepsilon_\xi(S'_a) = \sum_{j=1}^{M} \xi^+(j|i, S'_a \subset S_a) R_j^{disp}(S'_a \subset S_a) \tag{4.24}$$

Если возникает задача распределения рейтингов в группе по отношению к затратам ресурсов разными субъектами для реализации одной и той же альтернативы σ_k, то в качестве объективной характеристики выступают потребные ресурсы $R_j^{req}(\sigma_k)$, а также, в некоторых случаях, таких субъективных факторов, как субъективные вероятности [60] (Де Гроот). Функция эффективности в этом случае отражает негативные свойства субъектов, (например, если ресурсы — это потребное время, то тот субъект,

который на реализацию альтернативы затратит меньшее время должен иметь более высокий рейтинг).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \xi^{-}(j) R_j^{req}(\sigma_k). \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \xi^{-}(j \mid i) R_j^{req}(\sigma_k). \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi_i}(\sigma_k) = -\sum_{j=1}^{M} \xi^{-}(j \mid i, \sigma_k) R_j^{req}(\sigma_k). \tag{4.27}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi_i}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi^{-}(j \mid i, \sigma_k)\left[\alpha \ln R_j^{req}(\sigma_k) - \beta R_j^{req}(\sigma_k)\right]. \tag{4.28}$$

В последней формуле структурные параметры психики α и β стабильные, либо меняющиеся со временем (например, с возрастом).

Внесение случайности в схемы субъективного анализа состоит в том, что эндогенные и экзогенные характеристики считаются случайными величинами или случайными функциями. Тогда связанные с ними предпочтения оказываются случайными. Изучение стохастических свойств предпочтений и статистических методов получения их оценок путем проведения психологических тестов не является предметом настоящей работы. Мы лишь конспективно коснемся некоторых вопросов из этой области.

Если воспользоваться функцией эффективности

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi^{+}(j \mid \sigma_k) \ln p_j(\sigma_k), \tag{4.29}$$

более толерантной по отношению к $p_j(\sigma_k)$, то соответствующее каноническое распределение будет представлено формулой

$$\xi^{+}(j \mid \sigma_k) = C_j p_j(\sigma_k), \tag{4.30}$$

где C_j — нормировочная константа

$$C_j = \frac{1}{\sum_{q=1}^{N} p_j(\sigma_k)} = 1,$$

поскольку $\sum_{q=1}^{N} p_j(\sigma_k) = 1$ для $\forall j \in \overline{1, M}$. Таким образом, как видим, в этом частном случае рейтинг $\xi(j \mid \sigma_k)$ просто совпадает с вероятностью $p_j(\sigma_k)$. Но если это так, то функция эффективности (4.29) равна энтропии H_p и равна субъективной энтропии $H_{\xi, j}$. Это же имеет место, если в задаче определения канонического распределения I рода $\pi_j(\sigma_k)$ качестве «ресурсов» выбрать вероятность разрешения проблемы $p_j(\sigma_k)$, а функцию индивидуальной эффективности взять в виде

$$\varepsilon_{\pi_j} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j(\sigma_k) \ln p_j(\sigma_k), \tag{4.31}$$

Тогда $\pi_j(\sigma_k) = p_j(\sigma_k)$, и

$$\varepsilon_{\pi_j} = -H_{p_j} = \sum_{k=1}^{N} p_j(\sigma_k) \ln p_j(\sigma_k) = -H_{\pi_j} = \sum_{k=1}^{N} \pi_j(\sigma_k) \ln \pi_j(\sigma_k). \tag{4.32}$$

Выше мы различаем предпочтения I рода $\pi(\sigma_k)$ и объективные полезности $U(\sigma_k)$ (либо вредности $L(\sigma_k)$). В отношении субъективных рейтингов роль *объективной характеристики* может играть *ранг субъекта* в группе. Ранг субъекта или «мера Диоклетиана» определяется формальным положением субъекта и связанными с этим полномочиями. «Мерой Диоклетиана» мы называем ранг, так как впервые «табель о рангах» был введен Диоклетианом, а в России узаконен Петром I. Более подробная информация о рангах приводится в п. 4.5 настоящего раздела.

Очевидно, что рейтинги $\xi(j)$ зависят от рангов $\bar{\eta}(j)$. Функция эффективности

$$\varepsilon_\xi = \sum_{j=1}^{M} \xi(j) \bar{\eta}_j \text{ или } \varepsilon_\xi = \sum_{j=1}^{M} \xi(j) \ln \bar{\eta}_j, \tag{4.33}$$

где $\bar{\eta}_j$ — ранг субъекта «j», а функция эффективности представляет собой сумму рангов $\bar{\eta}_j$ или их логарифмов, взвешенных по предпочтениям II рода.

Здесь $\bar{\eta}_j$ — относительный ранг.

В различных социальных системах существуют различные шкалы рангов (η_j).

Дисперсия рангов

$$D_M(\bar{\eta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}(s'_\xi)\right)^2 \rho_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{m} \bar{n}_i^2 \rho_i - \left(\bar{\eta}(s'_\xi)\right)^2 \tag{4.34}$$

Наконец, условные рейтинги можно связать с рангом того субъекта, который назначает рейтинги (Σi: $i \in \overline{1, M}$), если ввести эффективности вида:

$$\varepsilon_{\xi,i} = \sum_{j=1}^{M} \xi(j \mid i) \left(\bar{\eta}_j - \bar{\eta}_i\right)^\alpha, \ (\alpha = 1), \text{ или } (\alpha = 2). \tag{4.35}$$

Все приведенные функции эффективности не дают непосредственной связи между рейтинговыми и предметными предпочтениями. В то же время, очевидно, что они взаимозависимы. Один из путей организации такой зависимости состоит в постулировании функций эффективности, в которых «замешаны» и те и другие предпочтения. К функциям эффективности такого типа относятся следующие:

$$\varepsilon_\pi^\xi(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j) \pi_j^\pm(\sigma_k); \tag{4.36}$$

$$\varepsilon_\pi^\xi(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j \mid \sigma_k)\pi_j^\pm(\sigma_k); \tag{4.37}$$

$$\varepsilon_\pi^\xi(\sigma_k, i) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j \mid i, \sigma_k)\pi_j^\pm(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(i \to j \mid \sigma_k)\pi_j^\pm(\sigma_k) \tag{4.38}$$

Эти функции представляют собой осредненные по рейтингам предметные предпочтения, которые в то же время можно считать агрегированными предпочтениями.

Процедуры последовательного во времени определения канонических распределений ξ и π описаны в гл. 5.

Завершая обзор различных функций эффективности, отметим, что приведенными здесь вариантами не исчерпывается все множество возможных функций эффективности для групп и, соответственно, — возможных типов канонических распределений. В частности, можно рассмотреть аддитивные комбинации, например:

$$\varepsilon_{\xi,\pi,t} = \alpha \sum_{j=1}^{M} \xi_t(j \mid \sigma_k)\pi_{jt-1}^\pm(\sigma_k) + \beta \sum_{j=1}^{M} \xi_t(j \mid \sigma_k)\xi_{t-1}(j \mid \sigma_k), \tag{4.39}$$

где t — момент времени.

Второй член в сумме представляет еще один тип функций эффективности:

$$\varepsilon_{\xi t,t-1}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi_t(j|\sigma_k)\xi_{t-1}(j|\sigma_k),$$

которые используются в рекурсивных схемах, приспособленных для учета влияния распределения рейтинговых предпочтений в предшествующие моменты времени. Примеры таких схем рассмотрены в гл. 5.

Приведем несколько примеров получения канонических распределений рейтингов с использованием введенных выше функций эффективности.

Для функции (4.18) сформируем критерий

$$\Phi_\xi = -\sum_{j=1}^{M} \xi^+(j)\ln \xi^+(j) + \beta \sum_{j=1}^{M} \xi^+(j) U_j(S_a) + \gamma \sum_{j=1}^{M} \xi^+(j). \tag{4.40}$$

Каноническое распределение в этом случае имеет вид:

$$\xi^+(j) = \frac{e^{\beta U_j(S_a)}}{\sum_{k=1}^{M} e^{\beta U_k(S_a)}}; \tag{4.41}$$

Если вместо $U_j(S_a)$ использовать располагаемые ресурсы, то соответствующее распределение есть:

$$\xi^{+}(j)=\frac{e^{\beta R_j^{disp}}}{\sum_{k=1}^{M} e^{\beta R_k^{disp}}}; \tag{4.42}$$

где R_j^{disp} — располагаемы ресурсы, либо — распределение

$$\xi^{+}(j \mid S'_a)=\frac{e^{\beta R_j^{disp}(S'_a)}}{\sum_{S'_a \subset S} e^{\beta R_j^{disp}(S'_a)}}. \tag{4.43}$$

Здесь подразумевается суммирование по всему множеству подмножеств $S'_a \subset S_a$. Поскольку S_a содержит конечное число элементов σ_k, постольку множество подмножеств S'_a конечно. Если все S'_a содержит лишь по одному элементу σ_k, то

$$\xi^{+}(j \mid \sigma_k)=\frac{e^{\beta R_j^{disp}(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{M} e^{\beta R_q^{disp}(\sigma_k)}}. \tag{4.44}$$

Функция эффективности (4.27) приводит к распределению

$$\xi^{-}(j \mid i,\sigma_k)=\frac{e^{-\beta_i R_j^{req}(\sigma_k)}}{\sum_{q=1} e^{-\beta_i R_q^{req}(\sigma_k)}}, \tag{4.45}$$

а функция (4.28) к распределению,

$$\xi^{-}(j \mid i,\sigma_k)=\frac{\left(R_j^{req}(\sigma_k)\right)^{\alpha_i} e^{-\beta_i R_j^{req}(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{M}\left(R_q^{req}(\sigma_k)\right)^{\alpha_i} e^{-\beta_i R_q^{req}(\sigma_k)}}. \tag{4.46}$$

При определении интегральных рейтингов в группе существенной может оказаться величина отношения располагаемых ресурсов данного субъекта к сумме располагаемых ресурсов группы

$$\bar{R}_j^{disp}=\frac{R_j^{disp}}{\sum_{q=1}^{M} R_j^{disp}}, \tag{4.47}$$

либо отношение R_j^{disp} к максимальной величине $R_{\max}^{disp}=\max\limits_{j\in\overline{1,M}} R_j^{disp}$:

$$\bar{R}_{j,\max}^{disp}=\frac{R_j^{disp}}{R_{\max}^{disp}}. \tag{4.48}$$

В другом случае будет представлять интерес при назначении рейтингов отношение R_j^{disp} к минимальным по группе индивидуальным располагаемым ресурсам:

$$\bar{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{j},\min}^{\boldsymbol{disp}} = \frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{disp}}}{\boldsymbol{R}_{\min}^{\boldsymbol{disp}}}, \tag{4.49}$$

где $R_{\min}^{disp} = \min\limits_{j \in \overline{1,M}} R_j^{disp}$.

Наиболее естественным является сопоставление ресурсов данного субъекта R_j^{disp} с ресурсами субъекта «i», назначающего условные рейтинги $\xi(j|\, i)$ или $\xi(j|\, i,\, \sigma_k)$:

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{disp}} = \frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{disp}}}{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{disp}}}. \tag{4.50}$$

Использование в функции эффективности каждого из этих показателей вводит соответствующий тип распределения рейтингов. Представляет интерес изучение корреляции между распределениями условных рейтингов, носителями которых являются субъекты одной и той же группы.

Рассмотрим следующую ситуацию: иерарх, находящийся вне группы хочет получить оценку усредненных предметных предпочтений (так сказать, — «консолидированное желание группы»). Обозначим эту консолидированную оценку через $\pi^{\Sigma}(\sigma_k)$. В качестве весовых коэффициентов можно взять интегральные рейтинги $\xi(j)$, либо дифференциальные рейтинги $\xi(j|\, \sigma_k)$. Положим

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j(\sigma_k)\xi(j) \tag{4.51}$$

либо

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j(\sigma_k)\xi(j\,|\,\sigma_k). \tag{4.52}$$

Видим, что эти функции совпадают с функциями эффективности определенными формулами (4.36), (4.37).

Второй вариант представляется предпочтительным, поскольку используются рейтинговые оценки, учитывающие квалификацию субъектов, сопоставленную с альтернативой σ_k.

Пусть имеются две альтернативы σ_1 — принять участие в футбольном матче, σ_2 — прочитать лекцию по высшей математике, а в группе 2 субъекта: Лобачевский и Лобановский. Ясно, что использование для построения $\pi^{\Sigma}(\sigma_k)$ интегральных рейтингов $\xi(j)$ в этом случае приведет к грубым ошибкам. Использование функции (4.52) в качестве распределения невозможно, поскольку она не нормирована. Здесь из равенств

$$\sum_{k=1}^{N} \pi_j(\sigma_k) = 1, \quad \forall j \in \overline{1,M} \tag{4.53}$$

и

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j\,|\,\sigma_k) = 1, \quad \forall k \in \overline{1,N}$$

не следует, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \pi^{\Sigma}(\sigma_k) = 1$.

Сравнивая формулы (4.53) замечаем, что различие состоит в том, что суммирование в знаменателях в (4.54) проводится по номерам субъектов i, а в (4.53) – по номерам альтернатив k.

Функцию (4.52) можно нормировать, то есть ввести новую функцию $\bar{\pi}^{\Sigma}(\sigma_k)$ соотношением:

$$\bar{\pi}^{\Sigma}(\sigma_k)=\frac{\pi^{\Sigma}(\sigma_k)}{\sum_{q=1}^{N}\pi^{\Sigma}(\sigma_k)}=\frac{\sum_{j=1}^{M}\pi^{\Sigma}(\sigma_k)\xi(j\,|\,\sigma_k)}{\sum_{q=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\pi_j(\sigma_q)\xi(j\,|\,\sigma_q)}. \tag{4.54}$$

Распределения (4.54) и (4.53) определяют взвешенные предпочтения альтернативы σ_k в масштабах группы. Если иерарх определяет свои предпочтения ориентируясь на суммарные располагаемые ресурсы группы $R^{disp}(\sigma_k)=\sum_{j=1}^{M}R_j^{disp}(\sigma_k)$, где $R^{disp}(\sigma_k)$ — не универсальные ресурсы, то следует предположить, что все альтернативы рассматриваются им как корпоративные, и он имеет необходимые полномочия, чтобы осуществить консолидацию ресурсов. Предпочтения при этом будем отмечать знаком «+»: $\pi^{\Sigma+}(\sigma_k)$ или $\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)$. Заметим, что, если предположить, что иерарх распределяет свои предпочтения а результате «естественной» экстремизации функционала

$$\Phi_{\pi^{\Sigma}}=-\sum_{k=1}^{N}\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)\ln\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)+\beta\sum_{k=1}^{N}\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)R^{disp}(\sigma_k)+\gamma\sum_{k=1}^{N}\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k), \tag{4.55}$$

то получаемое канонические распределение

$$\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)=\frac{e^{\beta R^{disp}(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N}e^{\beta R^{disp}(\sigma_q)}} \tag{4.56}$$

не совпадает в общем случае с распределением, рассчитанным по формуле (4.54) или (4.56), где $\bar{\pi}^{\Sigma+}(\sigma_k)$ — определены как канонические индивидуальные предпочтения, а $\xi(j|\,\sigma_k)$ — определены как решение соответствующей вариационной задачи для дифференциальных рейтингов. Возникает вопрос: можно ли подобрать так структуры функционалов, чтобы оба распределения типа (4.54) и (4.56) совпадали. Аналогичная задача имеет место для предпочтений $\pi^{\Sigma-}(\sigma_k)$ (или $\bar{\pi}^{\Sigma-}(\sigma_k)$), когда в качестве объективного фактора берутся потребные ресурсы $R^{req}(\sigma_k)\le R^{disp}(\sigma_k)$ и все σ_k являются корпоративными. Тогда

$$\bar{\pi}^{\Sigma-}(\sigma_k)=\frac{e^{-\beta R^{req}(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N}e^{-\beta R^{req}(\sigma_q)}}. \tag{4.57}$$

При этом любой член группы не в состоянии разрешить проблему $P = (\sigma_0 \to \sigma_k)$ ввиду недостаточности индивидуальных располагаемых ресурсов. Можно предположить, что индивидуальные предпочтения $\pi_j(\sigma_k)$ и дифференциальные рейтинги $\xi(j|\ \sigma_k)$ будут определяться через величину выделяемых субъектом («j») парциальных ресурсов $R_j^{disp}(\sigma_k)$.

Аналогично тому, как это было сделано для индивидуальных предпочтений, в данном случае «коллективный разум» или иерарх может распределить предпочтения на множестве корпоративных альтернатив с учетом соображений профессионального престижа:

$$\bar{\pi}^{\Sigma}(\sigma_k) = \frac{\left(R^{req}(\sigma_k)\right)^{\alpha} e^{-\beta R^{req}(\sigma_k)}}{\sum\limits_{q=1}^{N}\left(R^{req}(\sigma_q)\right)^{\alpha} e^{\beta R^{req}(\sigma_q)}} \tag{4.58}$$

Вместо абсолютных ресурсов, как и ранее, могут выступать относительные приведенные ресурсы, которые соответствуют функции эффективности.

$$\varepsilon_{\xi}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M}\bar{\xi}(j|i,\sigma_k)\left[\alpha \ln R_j^{req}(\sigma_k) - \beta R_j^{req}(\sigma_n)\right]$$

Проблема, отмеченная выше, относительно возможности согласования двух способов получения групповых предпочтений сводится к вопросу о существовании решения системы уравнений (4.51), состоящей из N линейных уравнений. В этом случае левая часть считается известной и выраженной, например, формулами

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \frac{e^{-\beta R^{req}(\sigma_k)}}{\sum\limits_{q=1}^{N} e^{-\beta R^{req}(\sigma_k)}}, \text{ или} \tag{4.59}$$

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \frac{e^{\beta R^{disp}(\sigma_k)}}{\sum\limits_{q=1}^{N} e^{\beta R^{disp}(\sigma_k)}}, \text{ или} \tag{4.60}$$

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \frac{e^{-\beta \bar{r}^{r}(\sigma_k)}}{\sum\limits_{q=1}^{N} e^{-\beta \bar{r}^{r}(\sigma_k)}}, \tag{4.61}$$

где $\bar{r}(\sigma_k) = \dfrac{R^{req}(\sigma_k)}{R^{disp}(\sigma_k)}$.

Система N уравнений (4.51) дополняется условиями нормировки для $\pi_j(\sigma_k)$ и $\xi(j)$. Эта система уравнений может рассматриваться как система для определения рейтингов $\xi(j)$. С учетом условия нормировки для $\xi(j)$ имеем $N + 1$ связей наложенных на M переменных $\xi(j)$. Возможны три случая

$$M = N + 1;\ M > N + 1;\ M < N + 1.$$

Предполагается, что $\pi_j(\sigma_k)$ определены из решения индивидуальных вариационных задач. В случае $M = N + 1$ имеется единственное решение, если ранг матрицы

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1M} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NM} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

равен M. Если $M > N + 1$, задача не определена и необходимы дополнительные условия для выделения единственного решения. Наконец, если $M < N + 1$, — задача переопределена.

С практической точки зрения проблема состоит в том, чтобы увязать индивидуальные интересы и представления с групповыми. Заранее не очевидно, как они соотносятся друг с другом. Прояснение этого вопроса составляет принципиальный элемент исследования в каждом частном случае. Одним из инструментов такого исследования является определение корреляционных моментов между индивидуальными и групповыми предпочтениями.

Каждый раз необходимо выяснить, как «естественным» образом формируются вариационные задачи — групповые и индивидуальные, как они взаимосвязаны, какой вариационный принцип групповой или индивидуальный имеет приоритет, в какой логической и временной последовательности решаются групповые и индивидуальные вариационные задачи. При этом снова не должен нарушаться принцип индивидуального носителя. Носителем группового принципа может быть виртуальный субъект.

Снятие описанной выше неопределенности, возможно, состоит в признании того, что рейтинговые и предметные предпочтения, определяемые по различным схемам — это различные предпочтения. Скажем рейтинги, найденные из описанной линейной системы уравнений (4.51) вместе с условием нормировки можно трактовать как такие, «носителем» и пользователем которых является иерарх, а предпочтения, получаемые непосредственно из вариационной задачи с функционалом (4.40) — как отражение «общественного мнения» (виртуальный субъект). Во всех случаях, предполагается, что тот, кто формирует групповые предпочтения или рейтинги членов группы, осведомлен о величине аргументов канонических распределений (ресурсах, полезностях, индивидуальных предметных предпочтениях…), либо располагают их приближенными оценками.

В условиях неточной информации об этих факторах сразу возникает задача *о степени адекватности распределений предпочтений*: в какой степени искажение исходной информации искажает предпочтения. Частично, при малых искажениях исходной информации этот вопрос решается через анализ «эластичности психики».

Одна из возможных схем, позволяющих разрешить обсуждаемую неопределенность, состоит в привлечении временного фактора, то есть в допущении, что различного вида предпочтения определяются не одновременно, а в определенной последовательности.

4.5. Рейтинги и ранги. «Хорошо» организованные группы

Рейтинговые предпочтения, как и предметные предпочтения, являются субъективными характеристиками в первом случае — субъектов в группе, во втором случае — предметных альтернатив.

Над «множеством» субъектов пока еще не определена «проблема», подобно тому, как это было сделано над множеством предметных альтернатив S_a. Для того чтобы это сделать, предположим, что группа структурирована — задана система рангов. Ранг считается объективной характеристикой субъекта, тогда как рейтинг — его субъективная характеристика. Будем предполагать что, обретая ранг, субъект занимает определенное положение в группе и получает связанные с этим властные полномочия. Кто, когда, каким способом и на основании чего, присваивает данному субъекту ранг — это отдельный вопрос, которого мы коснемся позже.

Рассмотрим вначале соотношение между рангами и рейтингами. Мерой рейтинга является функция предпочтения II рода $\xi(j)$, $\xi(j|\, i)$, $\xi(j|\, i, \sigma_k)$… (для простоты мы назовем их «*рейтингами*»). Будем далее использовать количественную меру значимости ранга или «меру Диоклетиана». Естественным было бы связать эту меру с «*объемом властных полномочий*». Существует несколько возможностей количественной оценки этого «*объема*». В настоящей работе мы соотнесем эту меру с относительным количеством располагаемых ресурсов, а также с правом присвоения рангов другим членами группы.

Наиболее простой мерой является номер ранга, определяемый числом натурального ряда в порядке возрастания в иерархии рангов.

Пусть M_η — множество всех возможных систем рангов в группе, состоящей из M субъектов. Систему рангов будем характеризовать параметрами $\{m, q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, где m — число различных рангов (классов ранговой эквивалентности); $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — количества субъектов, получающих соответственно ранги $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Выполняется условие: $\sum_{s=1}^{m} q_s = M$. Пусть, например, все $q_s = 1$, $\forall s \in \overline{1, m}$, тогда ненормированной мерой Диаклетиана могут быть величины

$$\eta_s = s;\ (s \in \overline{1, m}).$$

Нормированной мерой можно считать величину

$$\eta_s = \frac{2s}{m(m+1)}. \tag{4.62}$$

Вес ранга можно определить как количественную меру властных полномочий, которыми обличен субъект данного ранга. Один из способов состоит в том, чтобы в качестве этой меры использовать относительную долю располагаемых ресурсов, которыми вправе распоряжаться субъект. Речь может идти о доле консолидированных ресурсов. Упрощая представления о динамических процессах, выделим два этапа: до принятия решения о выборе цели, то есть период анализа проблемно-ресурсной ситуации, и — после выбора цели — период, когда располагаемые ресурсы частично или полностью направлены на разрешение избранной проблемы.

Пусть $R^{disp}\left(\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}\right)$ — суммарные располагаемые ресурсы группы, консолидированные на пересечении индивидуальных проблемных множеств S_{aj}. Предположительно все альтернативы, содержащиеся в этом пересечении $\sigma_k \in \left(\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}\right)$ — являются корпоративными для всех членов группы (хотя это, конечно, значительное упрощение, так как могут существовать корпоративные проблемы лишь части членов группы). Если $R_s^{disp}\left(\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}\right)$ есть часть консолидированных ресурсов, которыми распоряжается субъект ранга A_s, то вес ранга η_s можно определить отношением

$$\boldsymbol{\eta_s = \frac{R_s^{disp}\left(\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}\right)}{R^{disp}\left(\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}\right)} = \frac{R_{sc}^{disp}}{R_c^{disp}}}, \tag{4.63}$$

где R_{sc}^{disp} и R_c^{disp} — располагаемые консолидированные ресурсы (sc), которыми распоряжается субъект ранга s, и полные консолидированные ресурсы (consolidated).

Если интегральная корпоративная проблема декомпозирована в виде иерархической структуры, которая соответствует ранговой иерархии, то аналогичным образом декомпозированы и располагаемые ресурсы.

Когда происходит выбор альтернативы σ_k из множества S_a и проблемы P: $\sigma_0 \to \sigma_k$ и обозначена цель, происходит изменение множества $S_a = \bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}$, а также располагаемых ресурсов, из которых удаляется часть, направляемая на разрешение избранной проблемы. Следовательно, каждый раз с принятием решения связано изменение весов рангов η_s.

Возможная схема распределения консолидированных располагаемых ресурсов, ориентированных на корпоративные проблемы, представлена на рис. 4.4.

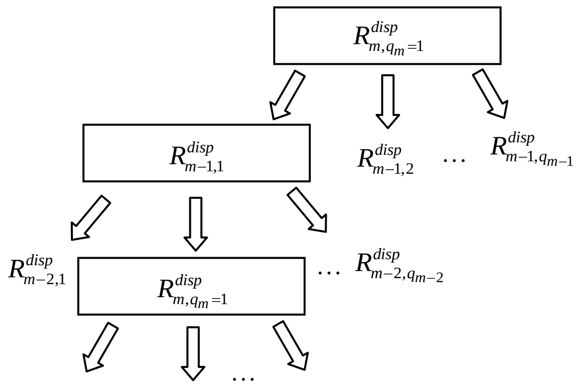


Рис.4.4

На каждом уровне иерархии каждый субъект, имеющий ранг A_s и «место» на данном уровне q_k имеет в своем распоряжении располагаемые консолидированные ресурсы R^{disp}_{s,q_s}, которые, естественно, в общем случае обличаются от его персональных располагаемых ресурсов R^{disp}_j, часть из которых может быть включена в состав консолидированных ресурсов.

Вес ранга A_s в связи со схемой, изображенной на рис. 4.4 можно в этом случае определить формулой

$$\eta_s = \frac{\min\limits_{q_s} \boldsymbol{R}^{disp}_{s,q_s}}{\boldsymbol{R}^{disp}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{m} \boldsymbol{S}_{aj}\right)}, \tag{4.64}$$

то есть как отношение минимального (на уровне s) объема располагаемых консолидированных ресурсов, находящихся в распоряжении всех субъектов данного ранга, к полному объему консолидированных ресурсов. Так выглядит оценка веса ранга при взгляде, так сказать, «сверху» то есть с позиции субъекта, имеющего наивысший ранг m, поскольку знаменатель в формуле (4.64) — это консолидированные ресурсы, находящиеся в его распоряжении.

Можно представить себе, что «вес» ранга при взгляде «снизу», то есть с позиции субъектов, находящихся на ступенях иерархии более низких, чем A_s, будет иметь другой вид и другое численное значение. Дальнейшую детализацию в этом направлении мы здесь не проводим.

Возвращаясь к рейтингам, заметим, что они могут определяться в зависимости от

1) отношения суммарных располагаемых ресурсов субъекта, которые включают как неконсолидированную, так и консолидированную части, к полным располагаемым ресурсам всей группы, либо к ресурсам наиболее «богатого», либо к ресурсам наиболее «бедного»;

2) отношения только консолидированной части индивидуальных ресурсов субъекта к суммарным консолидированным ресурсам всей группы.

В первом случае (формула (4.48)):

$$\xi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{f}_j\left(\bar{\boldsymbol{R}}^{disp}_j\right); \quad \bar{\boldsymbol{R}}^{disp}_j = \frac{\boldsymbol{R}^{disp}_j}{\sum\limits_{k=1}^{M} \boldsymbol{R}^{disp}_k}, \tag{4.65}$$

во втором случае:

$$\xi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{f}_j(\bar{\boldsymbol{R}}^{disp}_{jc}); \quad \bar{\boldsymbol{R}}^{disp}_{jc} = \frac{\boldsymbol{R}^{disp}_{jc}}{\sum\limits_{k=1}^{M} \boldsymbol{R}^{disp}_{kc}}. \tag{4.66}$$

В последнем случае рейтинг учитывает участие субъекта j через ресурсы в разрешении корпоративных проблем.

Связь рейтингов только с располагаемым ресурсами не является, конечно универсальной и обязательной для всех социумов и для всех ситуаций. В общине Назореев в Иерусалиме руководимой апостолом Петром, порядки были абсолютно социали-

стическими, в том числе, никто не обладал пассивными ресурсами, однако существовала иерархия рангов.

Ниже предлагается схема определения рейтингов субъектов в зависимости от «взаимных полезностей».

Важной является следующая точка зрения: ранги не определяются как решения вариационной задачи с энтропийным функционалом и играют роль более или менее стабильных характеристик активной системы подобно некоторым императивам. Распределение рангов и структура «*табеля о рангах*» формируется «исторически», на основе аккумуляции опыта и сохраняются определенное время неизменными. Кроме опыта в основе лежит та или иная система «групповой этики», которая регулирует не только индивидуальные, но и групповые решения.

В качестве временного отступления от основной темы мы хотим здесь продолжить обсуждение того, что выше было названо «*коллективным разумом*» или «*виртуальным субъектом*», как нам кажется, всегда присутствующими в группе, в социуме, и отвечающим за коллективное координированное поведение. Мы наблюдаем это в живой природе очень часто у разных форм жизни: поведение стаи пчел, полет стаи птиц, движение стаи рыб, миграция оленьих стад и так далее. У высшей формы жизни — в человеческих сообществах, коллективное координированное поведение проявляется как в наиболее совершенных, так и в примитивных формах. Примером примитивного проявления «*виртуального субъекта*» является поведение толпы на площади — возникновение кумулятивного эффекта, проявления «общественного мнения».

Следует признать, что «виртуальный субъект» существует объективно. Это означает, что каждая группа, каждый социум представляет собой не просто сумму индивидуумов, но одновременно является и неким мегаорганизмом, обладающим «коллективным разумом» — определенные «части» сознания индивидуумов в социуме работают скоординировано и от результатов этой работы в значительной мере зависят все атрибуты субъективных проявлений индивидуальных психик.

В отличие от рангов рейтинги более изменчивы, более динамичны, реагируют на любые изменения проблемно-ресурсной ситуации, и как мы видим, могут быть определены каждый раз как решение вариационной задачи с функционалом, главной составляющей которого является субъективная энтропия.

Поскольку мы признаем существование «виртуального разума», постольку мы должны допустить существование предпочтений как I, так и II рода, носителем которых является этот субъект и для определения которых мы вправе постулировать определенный вариационный принцип. Этот субъект может быть, например, носителем предпочтений $\pi^{\Sigma}(\sigma_k)$ и интегральных рейтингов $\xi(j)$…

Мы выяснили, то между рейтингами (предпочтениями II рода) и рангами (мерами Диоклетиана) существует существенное различие. Из этого следует, что изучение взаимосвязи между распределением рейтингов и распределением рангов в каждом социуме должно дать важную информацию, характеризующую данную группу (социум).

Если предположить, что в группе выполняется условие

$$\xi_j\left(\sigma_p\right) \geq \eta_j\left(\sigma_p\right);\ \ \forall \boldsymbol{j} \in \overline{1,\boldsymbol{M}};\ \ \forall \boldsymbol{p} \in \overline{1,\boldsymbol{N}}\left(\boldsymbol{S}_a\right), \tag{4.67}$$

где $\sigma_p \in S_a$ — является корпоративной альтернативой, это означало бы, что с точки зрения выше стоящего в ранговой иерархии субъекта. ранги распределены «правиль-

но»: никто не имеет незаслуженного высокого ранга, в каждом случае рейтинг субъекта выше или равен его рангу.

Легко, однако, заметить, что, если распределения ξ_j и η_j нормированы, то эта «правильная» структуризация всей иерархии невозможна. Действительно, если хотя бы для одного из субъектов выполняется строгое неравенство, то найдется хотя бы один субъект, для которого будет выполнено противоположное неравенство. Это видно из следующих примеров:

1. Пусть группа состоит из двух субъектов Σ_1 и Σ_2, их ранги и рейтинги нормированы на единицу $\xi_1 + \xi_2 = 1$; $\eta_1 + \eta_2 = 1$, группа структурирована, то есть $\eta_1 \neq \eta_2$. Из таблицы видно, что строгое неравенство не может выполняться одновременно для обоих субъектов

	Σ_1	Σ_2
ξ_j	0,2	0,8
η_j	0,3	0,7

$M = 2$; $m = 2$

То же имеет место для любых M и m. Выполнено может быть только равенство. Обсудим более подробно определения, приведенные на стр.125.

В п.4.3 мы определили понятия «слабо упорядоченной группы», «строго упорядоченной группы» и «строго частично упорядоченной группы» относительно бинарного рейтингового отношения ρ_ξ. При этом использовались свойства

— асимметрии:

$$\Sigma_i \rho_\xi \Sigma_j \Rightarrow \Sigma_j \bar{\rho}_\xi \Sigma_i; \tag{4.68}$$

— транзитивности:

$$\left(\Sigma_i \rho_\xi \Sigma_j; \Sigma_j \rho_\xi \Sigma_k\right) \Rightarrow \Sigma_i \rho_\xi \Sigma_k \tag{4.69}$$

— отрицательной транзитивности:

$$\left(\Sigma_i \bar{\rho}_\xi \Sigma_j; \Sigma_j \rho_\xi \Sigma_k\right) \Rightarrow \Sigma_i \rho_\xi \Sigma_k. \tag{4.70}$$

В первом случае — слабого упорядочения — отношение безразличия ~, определяемое как отсутствие строгого предпочтения на S_ξ является отношением эквивалентности (рефлексивным, симметричным и транзитивным). Если множество классов эквивалентности счетное, то при условии, что $\rho_\xi : \prec$ есть слабое упорядочение, субъектам $\Sigma_j \in S_a$ можно приписать количественную меру $\xi_j = \xi(j)$, которую мы называем рейтингом такую, что

$$\Sigma_i \rho \Sigma_j \Leftrightarrow \xi(i) < \xi(j) \tag{4.71}$$

и

$$\Sigma_i \sim \Sigma_j \Leftrightarrow \xi(i) = \xi(j). \tag{4.72}$$

В случае строго частичного упорядочения отношение безразличия не может быть транзитивным, но отношение $\approx$, определенное условием

$$\Sigma_i \approx \Sigma_j \Leftrightarrow (\Sigma_i \sim \Sigma_k \Leftrightarrow \Sigma_j \sim \Sigma_k, \forall \Sigma_k \in S_\xi), \tag{4.73}$$

является эквивалентностью.

Тогда, если отношение $\rho_\xi : \prec$ — строгое частичное упорядочение, а $S_{\xi\approx}$ — множество классов эквивалентности в смысле (4.73) счетно (в действительности — всегда конечно), элементам множества S_ξ (субъектам группы) могут быть поставлены в соответствие рейтинги:

$$\Sigma_i \prec \Sigma_j \Rightarrow \xi(i) < \xi(j) \tag{4.74}$$

и

$$\Sigma_i \approx \Sigma_j \Rightarrow \xi(i) = \xi(j). \tag{4.75}$$

Мы видим, что в этом случае эквивалентность субъектов Σ_i и Σ_j каждый раз устанавливается путем сравнения с определенным третьим субъектом.

Для того чтобы группа была «хорошо» структурирована, как минимум желательно, чтобы субъекты, наделенные разными рангами, принадлежали к различным классам рейтинговой эквивалентности.

Это возможно, если число рангов не превышает число классов рейтинговой эквивалентности. Отсюда, в частности, видна важность рейтинговых исследований, которые дают важную исходную информацию для проектирования административной структуры в группах, если она задается «сверху».

Рассмотрим таблицу, отражающую структуризацию группы из трех субъектов, в которой определены три ранга A_1, A_2, A_3.

Σ_j	Σ_1	Σ_2	Σ_3
ξ_j	0,2	0,3	0,5
η_j	0,1	0,2	0,7

Здесь, как видим, условие (4.67) не соблюдается, но выполняется условие

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \Leftrightarrow \eta_1 < \eta_2 < \eta_3. \tag{4.76}$$

В следующей таблице показан случай, когда группа состоит из трех субъектов $M = 3$ и определено два ранга $m = 2$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$.

Σ_j	Σ_1	Σ_2	Σ_3
ξ_j	0,2	0,3	0,6
$\eta_j^{(1)}$	0,15	0,15	0,7
$\eta_j^{(2)}$	0,3	0,3	0,4
$\eta_j^{(3)}$	0,1	0,1	0,8
$\eta_j^{(4)}$	0	0	1,0

Ввиду того, что рангов только два ($m = 2$), а субъектов $M = 3$ и, кроме того, предполагается единоначалие, $q_1 = 2$; $q_2 = 1$. В каждом из вариантов субъекты *первого* (низшего) ранга распоряжаются одинаковыми долями консолидированных ресурсов, в третьем ва-

рианте эти доли равны нулю и полным объемом консолидированных ресурсов распоряжается субъект *второго* (высшего) ранга. В третьем случае доля консолидированных ресурсов находящихся в распоряжении каждого из субъектов *первого* ранга, соответствует наинизшему рейтингу в первом классе ранговой эквивалентности. Во втором случае эта доля соответствует наивысшему рейтингу в первом классе ранговой эквивалентности. Первый случай в этом смысле занимает промежуточное положение. Возможны и другие варианты. Мы видим, что, вообще говоря, в каждом из вариантов может возникать психологическая напряженность, связанная с нарушением «полного порядкового соответствия» рангов и рейтингов. Скорее всего, обеспечить полное соответствие удается только в том случае, когда число субъектов M равно числу рангов m, либо когда число рангов равно числу классов рейтинговой эквивалентности и в (4.67) выполняется строгое равенство.

Эта таблица иллюстрирует (не доказывает) утверждение, отрицающее возможность выполнения строгого неравенства (4.76).

Группу можно считать «хорошо» структурированной, если для $\forall j \in \overline{1, M}$ выполняется условие:

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_M \Rightarrow \eta_1 \le \eta_2 \le \ldots \le \eta_M.$$

На схемах, приведенных ниже, показаны возможные варианты структуризации групп (рис. 4.5).

В случае (*а*) количество рангов m равно количеству классов рейтинговой эквивалентности. $M\tilde{}_k$ ($k \in \overline{1, m}$) – численности классов эквивалентности. «Управляющий» консолидированными ресурсами класса $m = k$ выбирается из класса эквивалентности $m = k + 1$. Тогда $\xi_j < \eta_j$; $j \in M\tilde{}_k$; $i \in M\tilde{}_{k+1}$. Наивысший ранг (в данном случае $m = 7$) имеют как «управляющий» классом $m - 1 = 6$, так и верховный иерарх, который управляет всеми ресурсами через субъекта с тем же рангом m, управляющим классом $m - 1 = 6$. Если в наивысшем классе только один субъект: $M\tilde{}_m = 1$, то управляющий классом $m - 1$ одновременно является верховным иерархом.

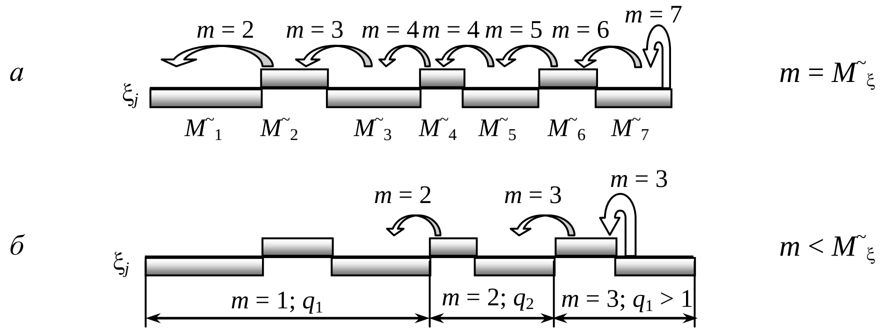


Рис. 4.5

В случае (*б*) $m < M\tilde{}_\xi$. Здесь также, если в высшем классе $M\tilde{}_3 > 1$, имеет место неопределенность в выборе верховного иерарха. Во всяком случае, решить этот вопрос сравнением рейтингов невозможно. Если же, как в случае (*а*) так и в случае (*б*), численность старшего класса равна единице, выбор иерарха можно сделать однознач-

но, если осуществлять выбор на основе сравнения рейтингов, а не из каких-либо других соображений.

Схема на рис. 4.6 показывает, что на каждом уровне иерархии существует q_k ($k \in \overline{1,m}$) субъектов, имеющих ранг A_k.

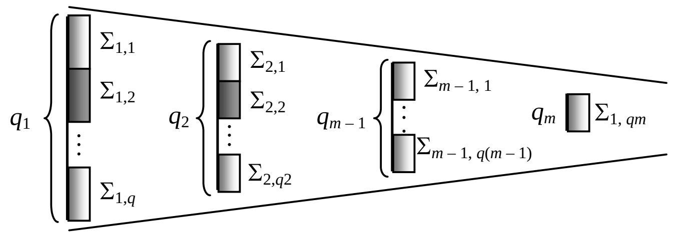


Рис. 4.6

Приведенные схемы далеко не исчерпывают возможных схем структуризации групп. В свою очередь рейтинговые предпочтения $\xi(j)$, $\xi(j|\,i)$, $\xi(j|\,i,\sigma_k)$, … зависят от условий решаемой задачи и, хотя, предположительно, каждый раз могут быть определены как решение вариационной задачи, будут различными в зависимости от того, какой вид и смысл имеет функция эффективности, входящая в функционал, как она выражается через ресурсы, функции полезности или функции вредности. Кроме того, рейтинги зависят от того, кто является их «носителем», в чьем сознании формируется задача, и, наконец, какая принята схема агрегирования индивидуальных предпочтений и кто выполняет это агрегирование.

Поскольку мы постулируем наличие в каждой группе «виртуального субъекта» ($M+1$)-го носителя «коллективного разума» или агента, осуществляющего агрегирование, то наряду с индивидуальными предпочтениями мы должны считаться с наличием предпочтений генерируемых «виртуальным субъектом». Эти последние в соответствии с гипотезой реализуются как составляющая индивидуальных предпочтений, однако должны быть результатом экстремизации определенного функционала, характеризующего коллективную компоненту психики $M+1$ субъекта.

Характеристиками структурированной группы служат рейтинговая энтропия, ранговая энтропия и коэффициент корреляции рейтингов ξ_i и рангов η_s ($j \in \overline{1,M}$, $s \in \overline{1,m}$).

Рейтинговая энтропия в разных вариантах рассматривалась выше, например, для интегральных рейтингов

$$\boldsymbol{H}_\xi = -\sum_{j=1}^{M} \xi(j)\ln\xi(j).$$

По аналоги введем ранговую энтропию

$$\boldsymbol{H}_\eta = -\sum_{s=1}^{m} q_s \eta_s \ln \eta_s \tag{4.77}$$

при выполнении условий

$$\sum_{s=1}^{m} q_s = M;\ \sum_{s=1}^{m} q_s \eta_s = 1. \tag{4.78}$$

Рейтинговая энтропия характеризует степень рейтинговой неоднородности группы. Если все рейтинги равны

$$\xi(j) = \frac{1}{M}, \quad \forall j \in \overline{1, M}, \tag{4.79}$$

то группа однородна и рейтинговая энтропия максимальна:

$$H_\xi = H_{\xi\max} = \ln M.$$

В остальных случаях $H_\xi < \ln M$.

Если один из субъектов, например, «j» имеет максимальный рейтинг $\xi(j) = 1$, а остальные субъекты «i» $\in \overline{i, M-1}$ следовательно, имеют нулевые рейтинги, то рейтинговая энтропия $H_\xi = 0$.

Ранговая энтропия H_η является характеристикой степени объективной структуризации группы. Чем меньше энтропия, тем четче структурирована группа. Так, если среди рангов имеется ранг, вес которого $\eta_s = 1$ (например, при $q_s = 1$, $s = 1$), то ранговая энтропия обращается в нуль, когда при $m = 2$, $M - 1$ субъектов имеют ранговый вес $\eta_1 = 0$ и лишь один субъект имеет ранговый вес $\eta_2 = 1$. Этот случай соответствует ситуации, когда никто, кроме единственного управляющего не имеет в своем распоряжении консолидированных ресурсов, а управляющий распоряжается всеми ресурсами.

Коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$ между $\xi(j)$ и η_s позволяет судить о взаимосвязи распределений субъективных предпочтений II рода $\xi(j)$ и рангов. Коэффициент $r_{\xi\eta}$ можно выразить формулой

$$r_{\xi\eta} = \frac{\sum_{s=1}^{m}\left(\overline{\eta}_s - \frac{1}{M}\right)\left(\sum_{j=1}^{q_s}\xi_j^{(s)} - \frac{s}{M}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{M}\left(\xi_j - \frac{1}{M}\right)^2 \sum_{j=1}^{m} q_s\left(\overline{\eta}_s - \frac{1}{M}\right)^2}}, \tag{4.80}$$

где $\xi_j(s)$ — нормированные рейтинги субъектов, попавших в класс s ранговой эквивалентности, $\overline{\eta}_s$ — нормированные ранги, q_s — численность класса ранговой эквивалентности, M — численность группы.

Если $r_{\xi\eta} \to 1$, распределение рангов в группе, отражает распределение рейтингов, то есть субъективные представления о «достоинствах» субъектов согласуется с объективно существующей «административной» структурой.

Если $r_{\xi\eta} \to -1$, ранговая организация группы находится в противоречии с распределением рейтингов, такая группа «плохо» структурирована и нужно считаться с возможностью психологической и, как следствие, социальной напряженности.

«*Табель о рангах*» и распределение весов рангов не отражают полностью структуру группы. Следовало бы еще определить «зону ответственности» для каждого ранга. Выше мы связали «зону ответственности» с объемом консолидированных располагаемых ресурсов, что опосредовано характеризует и «объем» властных полномочий, а также при определенных дополнительных условиях — численности классов ранговой

эквивалентности и, следовательно — численность непосредственно «подчиненных» q_s субъектов, имеющих ранг A_{s+1}.

В первой главе ресурсы были разделены на пассивные R_p (в том числе располагаемые R_p^{disp}) и *активные* R_a (в том числе располагаемые активные R_a^{disp}). Представляется, что рейтинги определяются наличием как первых, так и вторых. Если пассивные ресурсы в большинстве случаев можно легко измерить и даже представить их величину в соизмеримых шкалах, например, в денежном эквиваленте, то активные ресурсы в большинстве случаев, наоборот, трудно поддаются измерению, а универсальной шкалы для них подобной деньгам не существует.

Два возможных пути для измерения активных ресурсов в соизмеримых единицах, по крайней мере, для субъектов, имеющих близкие специализации, состоят в:

1. Тестировании с помощью заранее разработанных общих и профессиональных тестов и

2. Учете прошлых достижений в виде объектов интеллектуальной собственности, ранжированных также по согласованных методикам.

Например, если речь идет об ученом, вообще говоря, нетрудно определить количество и качество его научных достижений, — например, как количество и ценность научных публикаций, количество ссылок, количество подготовленных учеников и т. д., что обычно делается в вузах и научно-исследовательских учреждениях.

В настоящее время существуют различные международные и национальные наукометрические базы.

В связи с задачей количественной оценки активных ресурсов субъектов через объекты их интеллектуальной собственности более важной становится проблема защиты этих объектов, и защиты сообщества от недобросовестного использования чужих объектов интеллектуальной собственности.

Имеют место три варианта:

1. Рейтинги определяются исключительно наличием пассивных располагаемых ресурсов (в этом случае говорят: «Он стоит столько»).

2. Рейтинги определяются исключительно активными располагаемыми ресурсами (примеры: Христос, Моисей, Эйнштейн, …).

3. При определении рейтингов учитываются и те и другие ресурсы.

В качестве примера рассмотрим последствия организационной реформы, которую провел Моисей, после того как совершился исход из Египта. Некоторые данные мы возьмем из книги Скоузена [267] «Создание Америки».

Известно, что одними из основных источников идей, которые «отцы основатели» США положили в основу конституции, было установленное Моисеем административное устройство для огромного числа беглецов, оказавшихся в невероятно тяжелых, экстремальных условиях в Синайской пустыне.

Книга «Чисел» дает возможность оценить численность всей популяции, последовавшей за Моисеем: утверждается, что имелось 600000 мужчин, способных носить оружие. Добавляя сюда женщин, стариков, детей и взрослых мужчин, по каким-либо причинам не способных быть воинами, несложно оценить общую численность в 3000000 человек. Число семей оценивается как равное числу воинов, то есть 600000. В суровых условиях пустыни возникало множество самых различных проблем и, поскольку вначале масса — сообщество беглецов не было структурировано, не существовало никакой систе-

мы управления, все проблемы и вопросы вынужден был решать Моисей. Люди с утра до вечера стояли в очереди к Моисею со своими проблемами и невзгодами. Моисей не имел опыта управления таким огромным числом людей и не справлялся с обрушившимся на него потоком разнородных управленческих задач, требовавших срочного решения.

По совету Бога он осуществил, говоря современным языком, управленческую реформу. Была создана стройная иерархическая система управления: на нижнем уровне 3000000 человек естественным образом были разделены на 600000 семей. На следующем уровне были созданы группы по 10 семей, всего 60000 групп. В каждой такой группе выделялся глава группы, 5 групп по 10 семей составляли группу из 50 семей, которой также избирался старший. Таких руководителей было 12000. Затем были созданы группы из 100 семей, руководителей таких групп было 6000, и, наконец — группы из 1000 семей. Из руководителей таких групп, которых было всего 600, составлялся совет выборных представителей. Эта структура отразилась в американской политической системе как «Палата представителей». В структуре Моисея имелся еще «Совет семидесяти», аналогом которого является Сенат США. Наконец, существовали два «заместителя» Моисея — Аарон, выполнявший роль «вице-президента по иностранным делам» и Джошуа — «вице-президент по военных делам».

Была создана иерархическая система управления, содержащая 9 уровней, достигнуто дезагрегирование управления и введено 9 «рангов». Таким образом, своеобразная «табель о рангах» была изобретена задолго до Диоклетиана, но в отличие от «табели о рангах» Диоклетиана содержала только 9 рангов. Пользуясь нашими обозначениями и терминологией, рядовому члену сообщества можно приписать первый ранг A_1, а Моисею — девятый ранг A_9.

До административной реформы сообщество беглецов имело три иерархические ступени, схематически изображенные на рис. 4.7.

а *б*

Рис. 4.7

На рис.4.7 (*б*) показана численность субъектов каждого ранга: 2400000 человек имели самый низкий ранг A_1, 600000 глав семейств, которые теоретических общались с Моисеем, имели ранг A_2, наконец, сам Моисей имел ранг A_3.

После реформы получилась структура, представленная на рис. 4.8.

На рис. 4.8, *а* указана численность руководителей групп разных разрядов, на рис. 4.8, *б* показана численность субъектов, имеющих определенные ранги в предположении, что руководители более высокого ранга избирались из числа руководителей предыдущего ранга (это предположение, конечно, необязательно).

Попробуем подсчитать, как изменилась ранговая энтропия в результате проведенной реформы.

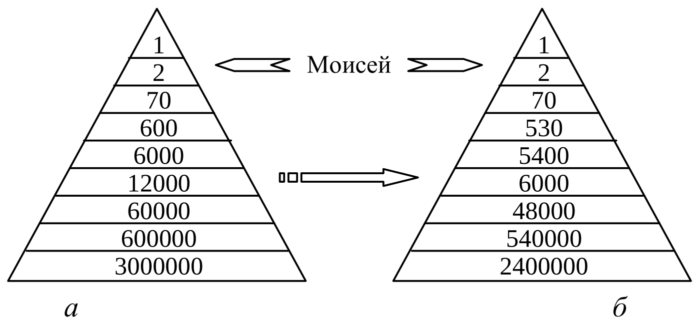


Рис. 4.8

Для этого необходимо каким-либо способом оценить вес субъекта данного ранга. Поскольку нам неизвестен объем властных полномочий у каждого из руководителей в иерархической системе Моисея и невозможно выразить ранговые веса через консолидированные ресурсы, примем, что вес ранга можно определить как величину обратно пропорциональную численности субъектов имеющих данный ранг. Полагая, что сумма весов рангов нормирована на единицу, найдем веса, представленные в таблицах:

До реформы			
ранг	роль	$\bar{\eta}_s = \dfrac{1}{3q_3}$	$-q_s\left(\bar{\eta}_s \ln \bar{\eta}_s\right)$
A_3	Моисей	0,333(3)	0,3162…
A_2	главы семей	0,000000556	4,80467…
A_1	члены семей	0,000000138	5,23164…
			$H_\eta - \Sigma q_s\left(\bar{\eta}_s \ln \bar{\eta}_s\right) = 10,4025$

В случае бесструктурного сообщества, когда все ранги одинаковы и равны $\bar{\eta}_1 = 0,000000333,$ энтропия максимальна и для M = 3000000

$$\boldsymbol{H}_\eta = 14,8992.$$

После реформы			
ранг	роль	$\bar{\eta}_s = \dfrac{1}{3q_3}$	$-q_s\left(\bar{\eta}_s \ln \bar{\eta}_s\right)$
A_9	Моисей	0,111(1)	0,2441…
A_8	два министра	0,055555(5)	0,32113…
A_7	член совета	0,001589…	0,7168…
A_6	представитель (группа 1000 семей)	0,00021…	0,9428…
A_5	глава группы из 100 семей	0,0000206…	1,2003…
A_4	глава группы из 50 семей	0,0000186…	1,2156…
A_3	глава группы из 10 семей	0,00000233	1,4505…
A_2	главы семьи	0,000000205	1,7048…
A_1	члены семьи	0,000000046	1,8646…
			$H_\eta = -\Sigma q_s\left(\bar{\eta}_s \ln \bar{\eta}_s\right) = 8,2098$

Относительная энтропия $H_\eta = H_\eta\left(H_{\eta\max}\right)^{-1}$ в первом случае равна

$$\bar{\boldsymbol{H}}_\eta = \frac{10,4025}{14,8992} = 0,6982...,$$

во втором случае

$$\bar{\boldsymbol{H}}_\eta = \frac{8,2098}{14,8992} = 0,5510...,$$

Как видим, реформа Моисея привела к уменьшению ранговой энтропии в 1,27 раза, что можно рассматривать как свидетельство более глубокой структуризации сообщества и, по-видимому, большей определенности в принятии решений.

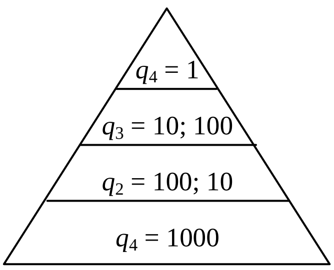


Рис. 4.9

Рассмотрим следующий отвлеченный пример, когда иерархическая структура управления имеет четыре уровня и представлена на рис. 4.9.

В соответствии со схемой на рис. 4.9 на «нижнем» уровне рядовых членов сообщества, которым приписывается ранг A_1 – q_1 = 1000, на втором снизу уровне имеется q_2 = 100 субъектов ранга A_2, каждому из которых подчинена группа из 10 человек, на третьем уровне имеется q_3 = 10 субъектов ранга A_3, каждый из которых управляет группой из 100 человек и, наконец, на четвертом уровне имеется «верховный руководитель» — субъект ранга A_4 и q_4 = 1.

Рассмотрим два способа определения веса ранга:

1. Вес ранга субъекта прямо пропорционален числу руководимых и обратно пропорционален числу субъектов того же ранга, то есть численности класса ранговой эквивалентности, к которому принадлежит данный субъект.

Нормированные ранги удовлетворяют нормировочному условию

$$\sum_{s=1}^{m} \boldsymbol{q}_s \bar{\eta}_s = 1. \quad (4.81)$$

Подсчитаем веса рангов для схемы на рис. 4.9, имеем:

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{1}{1000}; \ \tilde{\eta}_2 = \frac{10}{100}; \ \tilde{\eta}_3 = \frac{100}{10}; \ \tilde{\eta}_4 = \frac{1000}{1}.$$

Полный состав сообщества, изображенного на рис. 4.9 M = 1111 субъектов, поэтому нормированные ранги:

$$\bar{\eta}_1 = \frac{0{,}001}{1111} = 0{,}0000009; \ \boldsymbol{q_1} = 1000;$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{0{,}1}{1111} = 0{,}00009; \ \boldsymbol{q_2} = 100;$$

$$\bar{\eta}_3 = \frac{10}{1111} = 0{,}009; \ \boldsymbol{q_3} = 10;$$

$$\bar{\eta}_4 = \frac{1000}{1111} = 0{,}9001; \ \boldsymbol{q_4} = 1{,}0.$$

Как видим, условие (4.81) выполняется.

2. Вес ранга субъекта обратно пропорционален числу «коллег» — численности класса ранговой эквивалентности, к которому принадлежит данный субъект, и не зависит от числа управляемых. В нашем примере

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{1}{1000}; \ \tilde{\eta}_2 = \frac{1}{100}; \ \tilde{\eta}_3 = \frac{1}{10}; \ \tilde{\eta}_4 = 1.$$

Для получения нормированных рангов нужно величины $\tilde{\eta}_s$ поделить на 4, итак

$$\bar{\eta}_1 = 0{,}00025; \ \boldsymbol{q_1} = 1000;$$

$$\bar{\eta}_2 = 0{,}0025; \ \boldsymbol{q_2} = 100;$$

$$\bar{\eta}_3 = 0{,}025; \ \boldsymbol{q_3} = 10;$$

$$\bar{\eta}_4 = 0{,}25; \ \boldsymbol{q_4} = 1.$$

Эти веса также удовлетворяют нормировочному условию (4.81).

3. Вес ранга субъекта прямо пропорционален числу управляемых и не зависит от q_s — численности собственного класса ранговой эквивалентности:

$$\tilde{\eta}_1 = 1; \ \tilde{\eta}_2 = 10; \ \tilde{\eta}_3 = 100; \ \tilde{\eta}_4 = 1000.$$

Для получения нормированных весов, каждую величину $\tilde{\eta}_s$ следует разделить на 4000. В результате получится распределение весов аналогичное предыдущему.

Подсчитаем ранговые энтропии для каждого из трех случаев.

В первом случае имеем:

$$\boldsymbol{H}_{\eta_1} = -0{,}9001 \cdot \mathbf{ln}\, 0{,}9001 - 10 \cdot 0{,}009\, \mathbf{ln}\, 0{,}009 - 100 \cdot 0{,}00009\, \mathbf{ln}\, 0{,}00009 -$$

$$-1000 \cdot 0{,}0000009\, \mathbf{ln}\, 0{,}0000009 = 0{,}61504\,.$$

Во втором и третьем случаях получим одинаковую энтропию ($H_{\eta 2} = H_{\eta 3}$).

$$\boldsymbol{H}_{\eta_2} = \boldsymbol{H}_{\eta_3} = -0{,}25\, \mathbf{ln}\, 0{,}25 - 10 \cdot 0{,}025\, \mathbf{ln}\, 0{,}025 - 100 \cdot 0{,}0025\, \mathbf{ln}\, 0{,}0025 -$$

$$-1000 \cdot 0{,}00025\, \mathbf{ln}\, 0{,}00025 = 4{,}84016\,.$$

Видим, что в первом случае ранговая энтропия значительно (~ в 8 раз) меньше энтропии, соответствующей 2 или 3 случаям. Это обстоятельство косвенно можно рассматривать как свидетельство большей определенности структурированной системы и большей определенности и, по-видимому, эффективности руководителей каждого ранга.

Поскольку всего в системе $M = 1111$ субъектов, то

$$\boldsymbol{H}_{\eta \max} = \mathbf{ln}(1111) = 7{,}0130\ldots,$$

а относительные энтропии есть

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\eta_1} = \frac{\boldsymbol{H}_{\eta_1}}{\bar{\boldsymbol{H}}_{\eta \max}} = \frac{0{,}61504}{7{,}0130} = 0{,}0877;$$

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{\eta_2} = \frac{\boldsymbol{H}_{\eta_2}}{\bar{\boldsymbol{H}}_{\eta \max}} = \frac{4{,}84016}{7{,}0130} = 0{,}69026.$$

Пусть M_s — численность «управляемых», а q_s — численность класса, к которому принадлежит субъект ранга A_s, а нормированный вес определяется по формуле

$$\eta_{s1} = \frac{\boldsymbol{M}_s}{\boldsymbol{q}_s \boldsymbol{M}},$$

тогда энтропия $H_{\eta 1}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{H}_{\eta 1} = -\frac{1}{\boldsymbol{M}\, \mathbf{ln}\, \boldsymbol{M}} \left(\sum_{s=1}^{m} \boldsymbol{M}_s\, \mathbf{ln}\, \boldsymbol{M}_s + \sum_{s=1}^{m} \boldsymbol{M}_s\, \mathbf{ln}\, \boldsymbol{q}_s \right) + 1.$$

Когда вес определен формулой

$$\eta_{s2} = \frac{1}{\boldsymbol{q}_s \boldsymbol{m}},$$

энтропия $H_{\eta 2}$ задана формулой:

$$\boldsymbol{H}_{\eta 2} = -\frac{1}{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{M}} \left(\frac{1}{\boldsymbol{m}} \sum_{s=1}^{m} \mathbf{ln}\, \boldsymbol{q}_s + \mathbf{ln}\, \boldsymbol{m} \right).$$

Обе энтропии обращаются в единицу, если в первом случае $q_s = M_s = \dfrac{M}{m}$ и во втором случае $q_s = \dfrac{M}{m}$:

$$\boldsymbol{H}_{\eta 1} = \boldsymbol{H}_{\eta 2} = 1.$$

В начале этого раздела мы сопоставляли веса рангов с долей консолидированных ресурсов в распоряжении данного субъекта.

В экономических теориях результат часто характеризуют с помощью производственной функции (Кобба-Дугласа, Солоу, …), где в качестве основных аргументов выступают капитальные фонды и труд. И то и другое есть ресурсы. В последних примерах в качестве ресурсов используются, по сути, трудовые ресурсы.

Пусть иерархическая система имеет только два уровня: один лидер, вес ранга которого η_1 и $M - 1$ «рядовых субъектов». Из условия нормировки:

$$\boldsymbol{\eta}_1 + (\boldsymbol{M} - 1)\boldsymbol{\eta}_2 = 1$$

найдем, что

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1-\boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{M}-1},$$

тогда энтропия H_η имеет вид:

$$\boldsymbol{H}_\eta = -\boldsymbol{\eta}_1 \ln \boldsymbol{\eta}_1 - \left(\boldsymbol{M}-1\right)\left(\frac{1-\boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{M}-1} \ln \frac{1-\boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{M}-1}\right) =$$

$$= -\boldsymbol{\eta}_1 \ln \boldsymbol{\eta}_1 - \left(1-\boldsymbol{\eta}_1\right) \ln\left(1-\boldsymbol{\eta}_1\right) + \left(1-\boldsymbol{\eta}_1\right) \ln\left(\boldsymbol{M}-1\right)..$$

Видим, что

$$\lim_{\eta_1 \to 1} \boldsymbol{H}_\eta = 0; \quad \lim_{\eta_1 \to 0} \boldsymbol{H}_\eta = \ln\left(\boldsymbol{M}-1\right).$$

Величина H_η достигает максимума, когда $\eta_1 = \dfrac{1}{M}$, при этом $H_\eta = \ln M$. Зависимость $H_\eta(M, \eta_1)$ показана на рис. 4.10. Если отождествить величину веса $\eta_1 \in [0, 1]$ с объемом властных «полномочий» субъекта, то, как следует из рисунка, его можно считать «лидером» группы если $\eta_1 \in (\dfrac{1}{M}, 1]$. Причем, когда $\eta_1 = \dfrac{1}{M}$, то «полномочия» распределены между членами группы равномерно и «лидер» отсутствует, когда $\eta_1 = 1$, объем «полномочий» всех остальных равен нулю — они являются как бы «рабами».

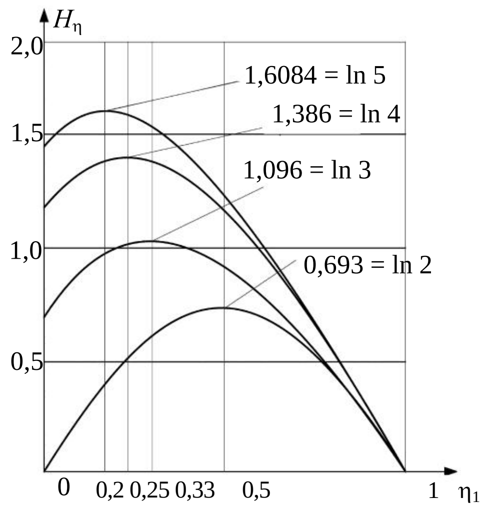


Рис.4.10

Рассмотрим следующую ситуацию: в группе M субъектов и три класса эквивалентности

$M_1^{\sim}$ — численность q_1;

$M_2^{\sim}$ — численность q_2;

$M_3^{\sim}$ — численность $q_3 = 1$ (лидер).

Поскольку $q_1 + q_2 + q_3 = M$ и условие нормировки имеет вид (4.81), обозначая $\overline{\eta}_k = x_k$, можем записать, что

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1 - \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{M} - 1 - \boldsymbol{q}_2},$$

где $M - 1 - q_2 = q_1$.
Энтропия рангов имеет вид:

$$\boldsymbol{H}_\eta = -\boldsymbol{x}_3 \ln \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{x}_2 \ln \boldsymbol{x}_2 - \left(\boldsymbol{M} - 1 - \boldsymbol{q}_2\right)\frac{1 - \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{M} - 1 - \boldsymbol{q}_2} \ln \frac{1 - \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{M} - 1 - \boldsymbol{q}_2}.$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_\eta}{\partial \boldsymbol{x}_3} = 0; \; \frac{\partial \boldsymbol{H}_\eta}{\partial \boldsymbol{x}_2} = 0$$

приводят к решению $x_2 = x_3 = \dfrac{1}{M}$, то есть равенству всех весов и, соответственно, максимальной неопределенности и, по-видимому, максимальной «неорганизованности». Это означает равномерное распределение «властных полномочий». Наложим дополнительное ограничение на распределение весов: пусть $\overline{\eta}_3 = \alpha\overline{\eta}_2$ или $x_3 = \alpha x_2$. Оптимальное значение $\overline{\eta}_2 = x_2$ определяется формулой

$$x_{2opt} = \frac{1}{\left(M - 1 - q_2\right)\alpha^{\frac{\alpha}{q_2+\alpha}} + q_2 + \alpha}.$$

Расчеты показывают, что $x_{2opt} < x_{3opt}$, но $x_{1opt} > x_{2opt}$. Этот результат является следствием требования максимальности энтропии.

Дисперсия и энтропия ранговых иерархий

Рассмотрим частные случаи ранговых иерархий и определим дисперсии и энтропии рангов на этих структурах. Эти величины могут служить сравнительными характеристиками иерархий.

Пусть в иерархии имеется L рангов и, соответственно L классов ранговой эквивалентности. Ненормированный ранг совпадает с номером ранга j, который исчисляется, как и выше, начиная с наинизшего ранга $\eta_j = j = 1$. Нормированный ранг определяется формулой

$$\bar{\eta}_j = \frac{\eta_j}{\sum\limits_{k=1}^{L} \eta_k q_k} = \frac{j}{\sum\limits_{k=1}^{L} k q_k},$$

где q_k — численность k-го класса ранговой эквивалентности. При таком определении нормированного ранга средний нормированный ранг

$$\bar{\bar{\eta}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{L} q_k} \sum_{k=1}^{L} \bar{\eta}_j q_j = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{L} \eta_k} \frac{\sum\limits_{k=1}^{L} j q_j}{\sum\limits_{k=1}^{L} k q_k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{L} q_k} = \frac{1}{M},$$

где M — полная численность группы. Дисперсию рангов определим формулой:

$$D_\eta = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{L} \left(\bar{\eta}_j - \bar{\bar{\eta}}\right)^2 q_j,$$

а энтропию рангов — формулой:

$$H_\eta = -\sum_{j=1}^{L} q_j \bar{\eta}_j \ln q_j \bar{\eta}_j = -\sum_{j=1}^{L} q_j \bar{\eta}_j \ln \bar{\eta}_j - \sum_{j=1}^{L} q_j \bar{\eta}_j \ln q_j.$$

Рассмотрим два типа ранговых иерархий:

1. «Геометрическая» иерархия — такая иерархия, в которой численности классов ранговой эквивалентности образуют геометрическую прогрессию с заданным знаменателем q.

2. «Параболическая» иерархия, численности классов эквивалентности которой q_j определяются как степени обратного номера ранга

$$q_j = \left(L + 1 - j\right)^m,$$

где m — показатель параболы. В таблице приведены численности классов эквивалентности для иерархии, включающей 5 рангов.

j	q^{1-j}	$s_j^{m=1}$	$s_j^{m=2}$	$s_j^{m=3}$	$s_j^{m=4}$
5	1	1	1	1	1
4	q	2	4	8	16
3	q^2	3	9	27	81
2	q^3	4	16	64	244
1	q^4	5	25	125	625
$\sum_{j=1}^{L}$	$\frac{q^L-1}{q-1}$	15	55	225	967

Здесь $S_j = L + 1 - j$.

Нормированные ранги для геометрической и параболической иерархий равны соответственно:

$$\bar{\eta}_j = \frac{j}{\sum_{k=1}^{L} q^{L-k} k}; \quad \bar{\eta}_j = \frac{j}{\sum_{k=1}^{L} (L+1-k)^m k}.$$

Для геометрической иерархии

$$D_\eta = \frac{q-1}{q^L-1} \sum_{j=1}^{L} \left(\frac{j}{\sum_{k=1}^{L} q^{L-k} k} - \frac{\eta-1}{q^L-1} \right)^2 q^{L-j};$$

$$H_\eta = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{L} q^{L-k} k} \left(q^{L-j} j \ln j + j n^{L-j} \ln n^{L-j} \right) + \ln \sum_{k=1}^{L} q^{L-k} k.$$

Для «параболической» иерархии:

$$D_\eta = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{L} \left(\frac{j}{\sum_{k=1}^{L} (L+1-k)^m k} - \frac{1}{N_m} \right)^2 (L+1-k)^m.$$

$$H_\eta = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{L} (L+1-k)^m k} \sum_{j=1}^{L} \left((L+1-k)^m j \ln j + j n^{L-j} \ln n^{L-j} \right) +$$

$$+ j (L+1-k)^m \ln (L+1-k)^m + \ln \sum_{k=1}^{L} (L+1-k)^m k.$$

Ниже представлены результаты расчета для системы с тремя классами ранговой эквивалентности $L = 3$. Для геометрической иерархии D_η и H_η представлены как функции знаменателя q:

$L = 3$		
q	D_η	H_η
1	0,01801	0,114
2	0,00438	1,090
3	0,001204	1,927

В случае параболической иерархии D_η и H_η определялись в зависимости от показателя параболы.

Из рис. 4.11 видно, что с ростом знаменателя q-дисперсия D_η уменьшается, а энтропия H_η возрастает. Рост энтропии можно трактовать как косвенное свидетельство увеличения дезагрегирования властных полномочий в «гиперболической» иерархии с ростом q.

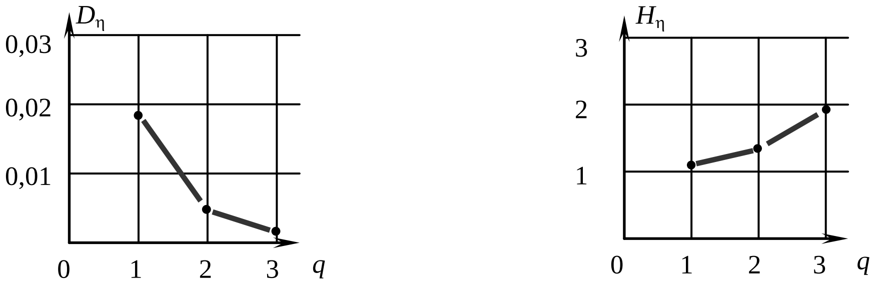


Рис. 4.11

$L = 3$		
q	D_η	H_η
1	0,004073	1,089
2	0,00097	1,0104
3	0,000121	0,8507
4	0,000013	0,7006

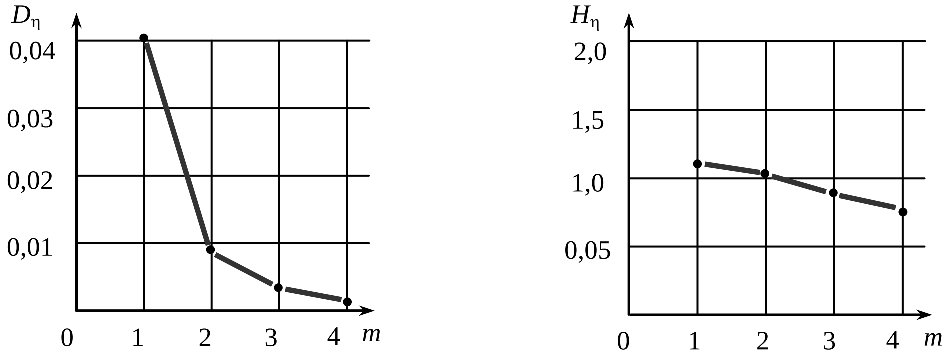


Рис. 4.12

В случае «параболической» иерархии видим, что рост показателя $\boldsymbol{m}$, то есть дифференциации численности классов эквивалентности ведет к медленному уменьшению энтропии и, по-видимому, к большему сосредоточению властных полномочий у более высоких рангов (рис.4.12).

Выше мы уже в качестве примера приводили «иерархию Моисея». Расчет показывает (диаграмма) на рис. 4.13, что эта структура довольно близка к «геометрической» иерархии с девятью классами (L = 9) и знаменателем q = 5,25

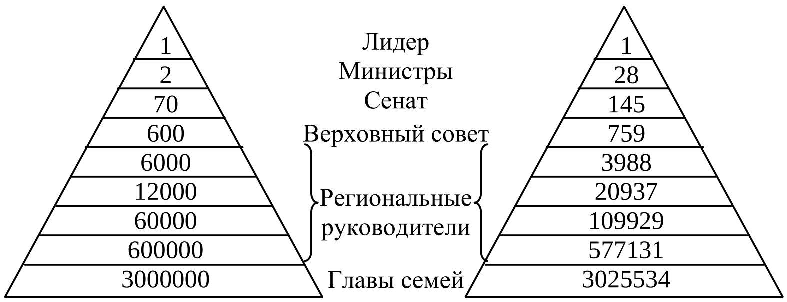


Рис. 4.13

Одна из задач состоит в том, чтобы выяснить в какой степени формальная иерархия рангов $\overline{\eta}_j$ согласуется с неформальной иерархией рейтингов ξ_j. Показателем степени согласования естественно считать соответствующие коэффициенты корреляции Пирсона $\rho_{\xi\eta}$. В данном случае имеется широкое поле для исследований, поскольку мы располагаем различными моделями распределения рангов и различными моделями рейтинговых показателей $\xi(j)$, $\xi(j|\ i)$, $\xi(j|\ i,\ \sigma_k)$, …, $\xi(j|\ i,\ S'_a)$, … Для каждого типа рейтинговых показателей можно рассчитать соответствующий коэффициент корреляции. Уже было сказано, что рейтинги определяются не только утилитарными факторами, но и личностными факторами, которые мы условно назвали «активными» ресурсами, ниже будут введены рейтинги, которые зависят от взаимных полезностей. Наконец, аналогичным образом мы можем исследовать рангово-рейтинговую согласованность с точки зрения отдельного субъекта «i», либо подгруппы субъектов (коалиции).

Поскольку, в каждом случае мы располагаем количественной моделью, как рангов, так и рейтинговых предпочтений это исследование становится в значительной степени предметом количественного анализа. Если вспомнить, что модели рейтинговых предпочтений содержат эндогенные параметры, то предметом анализа оказывается влияние эндогенных факторов (отражающих свойства психики) на соответствующие оценки.

Можно предполагать, что условием субъективного консенсуса в группе будет близость коэффициентов корреляции типа $\rho_{\xi\eta}$ к +1 и, наоборот, основой для социальной напряженности, показателем опасности внутреннего конфликта — близость $\rho_{\xi\eta}$ к –1.

Коснемся вопроса о зависимости распределения рейтинговых предпочтений от эндогенных факторов. В качестве таких факторов в описанных моделях предпочтений выступают структурные параметры α, β, … Уже говорилось, что такого рода структурные параметры являются априорными по отношению к вариационному принципу, формирующему количественные модели предпочтений и, скорее всего, индивидуализированы. Однако, в следующей модельной задаче с целью упрощения они считаются совпадающими для всех субъектов группы.

Предположим, что группа состоит из трех субъектов. В качестве модели распределения интегральных рейтинговых предпочтений ξ_j выберем наиболее простую модель; предположим, что ξ_j зависит от располагаемых ресурсов и одного эндогенного параметра β:

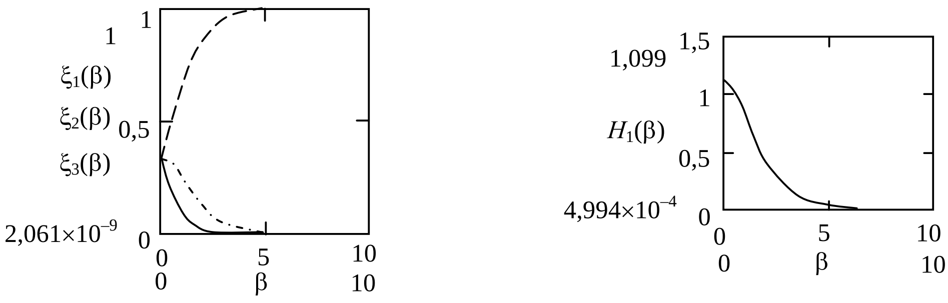
$$\xi_j(\beta) = \frac{e^{\beta R_{dj}}}{\sum_{k=1}^{3} e^{\beta R_{dk}}},$$

где $R_{dj} = R_j^{disp}$ — располагаемые ресурсы субъекта «j». На рис. 4.14 (*а*) показана зависимость $\xi_j(\beta)$ ($j \in \overline{1,3}$) от эндогенного параметра $\beta \in [0, 10]$ при фиксированных и различных значениях располагаемых ресурсов (в условных единицах): $R_{d1} = 1$; $R_{d2} = 2$; $R_{d3} = 3$. На рис. 4.14 (*б*) приведена групповая рейтинговая энтропия.

Из рисунков видно, что, когда эндогенный параметр β мал, то даже большие отличия в величине располагаемых ресурсов (в «богатстве») приводят к небольшому расхождению субъективных рейтингов и рейтинговая энтропия остается высокой (лидер явно не выделяется). С ростом β даже незначительных отличий в располагаемых ресурсах достаточно для возникновения больших различий рейтинговых предпочтений, а малое значение энтропии свидетельствует о наличии общепризнанного лидера. Как и в случае предметных предпочтений $\pi(\sigma_k)$, для рейтинговых предпочтений должен существовать порог субъективной рейтинговой энтропии H^*_ξ, такой, что условие

$$H_\xi \leq H^*_\xi$$

оказывается необходимым, но не достаточным для принятия решения об изменении формальных рангов и, соответственно, численности классов ранговой эквивалентности.



а *б*

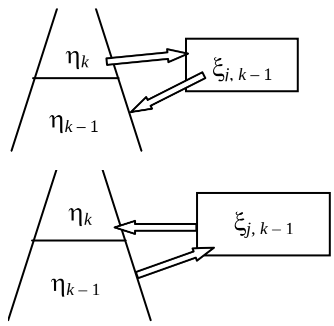
Рис. 4.14

Необходимо отметить, что как и в отношении предметных предпочтений $\pi(\sigma_k)$, в данном случае это условие «адресовано» тому субъекту (субъектам), который является носителем рейтинговых предпочтений данного типа и кто обличен полномочиями по назначению и изменению рангов. Не вдаваясь в подробности, скажем, что можно рассматривать, по крайней мере, две схемы распределения рангов:

1) «сверху–донизу» одним иерархом, либо последовательным движением «вниз» по ступеням иерархической лестницы;

2) «снизу–верх» в случае электоральной системы назначения рангов. Здесь также реализуется либо система «прямых выборов», либо последовательная процедура восхождения по иерархической лестнице.

В случае последовательных процедур как «сверху–вниз», так и «снизу–верх», носителем распределения указанного выше типа являются субъекты, осуществляющие полномочия по назначению рангов. Поясним сказанное схемами, приведенными на рис. 4.15.



$(j \in \overline{1, q_{k-1}})$

$H_{\xi_{k-1}}(k) \le H^*_{\xi_{k-1}}(k))$

$(j \in \overline{1, q_{k-1}})$

$H_{\xi_{k-1}}(k-1) \le H^*_{\xi_{k-1}}(k-1)$

Рис. 4.15

В первом случае (а) реализуется схема назначения рангов «сверху–вниз», то есть субъект имеющий ранг η_k осуществляет выбор из ниже лежащего класса субъектов ранга η_{k-1} претендента для перевода его на уровень η_k. Следовательно, носителем рейтингов субъектов класса q_{k-1} является субъект класса q_k. Для него же обязывающим условием является пороговое неравенство.

Во втором случае (*б*) реализуется схема назначения рангов «снизу–верх» (электоральная). Выбор может осуществляться по различным схемам: схемы Кондорсе или Борда [144], в соответствии с моделью коллективного выбора Эрроу. В гл.9 упомянутой работы рассматриваются многочисленные схемы коллективного выбора (коллективного принятия решения). Агрегирование индивидуальных предпочтений сопряжено с существенными трудностями, связанными с теоремой Эрроу «о невозможности» (см. также гл. 11).

В данном случае наша задача не состоит в анализе внутренне непротиворечивых правил выбора. Речь идет только о том, что выбор осуществляется с учетом канонических распределений предпочтений второго рода и очевидного наличия при каждом выборе и для каждого выборщика пороговых значений субъективной энтропии.

Как и в теории полезности здесь возможны упорядочения «кандидатов» на основе количественных сравнений рейтингов. При этом предполагается, что рейтинговые *субъективные* предпочтения непрерывно зависят от своих аргументов и в каждой ситуации в каждый момент *объективно существуют* в сознании субъектов (членов группы). Теория коллективного выбора (изложенная в частности, в упомянутой работе) может быть существенно дополнена, если при формировании процедур выбора учитывать индивидуальные рейтинговые пороги и влияние на «эластичность» предпочтений экзогенных факторов.

Приведем расчет распределения предпочтений в той же группе, если они определяются не только утилитарными факторами (например, располагаемыми ресурсами R_j^{disp}), но и определенным этическим принципом. Пусть рейтинг зависит с одной стороны от «относительного богатства», то есть от отношения $\frac{R_j^{disp}}{R_{\max}^{disp}}$, с другой стороны в сознании заложено стремление к «равенству». Выразим это таким образом, чтобы рейтинг при прочих равных условиях был тем больше, чем ближе «индивидуальное богатство» R_j^{disp} к средней по группе величине

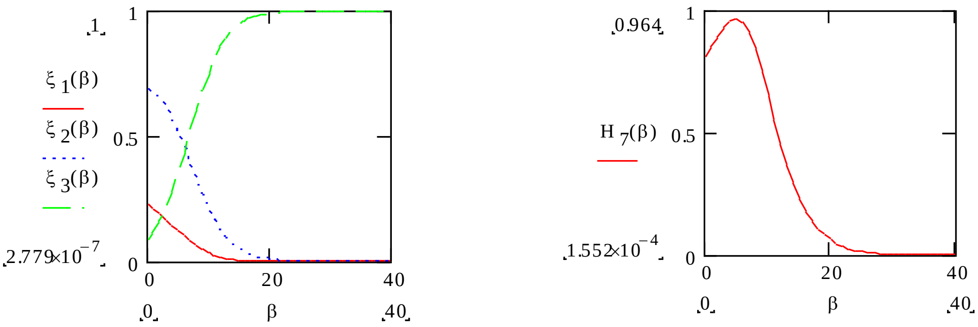
$$\bar{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{disp}} = \frac{1}{\boldsymbol{N}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{disp}}.$$

Для $\xi_j(\beta)$ примем выражение:

$$\xi_j(\beta) = \frac{\dfrac{\bar{\boldsymbol{R}}^2}{\left(\boldsymbol{R}_{dj} - \bar{\boldsymbol{R}}\right)^2} \boldsymbol{e}^{\beta \frac{\boldsymbol{R}_{dj}}{\boldsymbol{R}_{\max}}}}{\sum\limits_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \dfrac{\bar{\boldsymbol{R}}^2}{\left(\boldsymbol{R}_{dk} - \bar{\boldsymbol{R}}\right)^2} \boldsymbol{e}^{\beta \frac{\boldsymbol{R}_{dk}}{\boldsymbol{R}_{\max}}}},$$

где $\bar{R} = \bar{R}^{disp}$, $R_{\max} = R_{\max}^{disp}$, $R_{dj} = R_j^{disp}$.

Видим, что при $R_{dj} \to \bar{R}$, $\xi_j(\beta) \to 1$ при $\forall\beta$. Для случая $N = 3$, $R_{d1} = 1{,}8$; $R_{d2} = 2$; $R_{d3} = 3$; $\beta \in [0, 40]$ результаты расчета показаны на рис. 4.16.



а *б*

Рис. 4.16

Из рис. 4.16 (*а*) следует, что при малых β преобладает влияние этического начала — уравнительной тенденции, а энтропия возрастает и достигает максимума, при $\beta > \beta'$ распределение рейтингов в большей степени определяется относительными богатствами.

Возвращаясь к термодинамической аналогии (п.п. 3.5, 3.6) и трактовке параметра $T = \beta^{-1}$ как психологической «температуры» или «температуры эмоционального нагрева», сделаем следующее замечание.

Пусть распределение предпочтений имеет вид:

$$\boldsymbol{\pi_i = \frac{e^{-\beta x_i}}{\sum_{q=1}^{N} e^{-\beta x_q}};}\ \forall \boldsymbol{x_q} > 0,$$

тогда, если $T_\pi \to \infty$ $(\beta \to 0)$, то $\pi_i \to \dfrac{1}{N}$ — равномерному распределению. Энтропия стремится к максимальному значению: $H_\pi \to H_{\max} = \ln N$. Если $T_\pi \to 0$ $(\beta \to \infty)$, распределение π_i стремится к сингулярному: $\pi(x_{\max}) \to 1$ и $\pi(x_i) \to 0$ для $\forall i \neq j$. Энтропия $H_\pi \to 0$.

Таким образом, с ростом «температуры» при неизменной экзогенной обстановке (x_i = const) степень неопределенности увеличивается, реакция на изменение внешних условий становится все более слабой.

При достаточно высокой «температуре» энтропия не преодолевает «снизу вверх» порог H^*, в результате чего принятие решения становится невозможным. Наоборот, при понижении «температуры» распределение предпочтений стремится к сингулярному, а степень неопределенности — к минимальной ($H_\pi \to 0$).

К аналогичным выводам приходим рассматривая рейтинговые предпостения. Пусть, например, распределения индивидуальных рейтинговых предпочтений субъекта в группе из M субъектов имеет вид:

$$\xi(j \mid i) = \frac{e^{-\beta f(j|i)}}{\sum_{q=1}^{N} e^{-\beta f(q|i)}}; \ \forall f(q \mid i) > 0.$$

Определяя в этом случае Tξ = β–1 как «социальную температуру», приходим к подобным выводам.

При $T_\xi \to \infty$ ($\beta \to 0$) распределение $\xi(j|\ i)$ стремится к равномерному: $\xi(\ j|\ i) = \dfrac{1}{M}$, соответственно энтропия $H_\xi \to H_{\max} = M$.

Имеет место выравнивание рейтингов — рейтинговая «неразличимость» субъектов в группе. В связи с этим исчезает, по-видимому, субъективная основа для самоорганизации группы, одновременно уменьшается влияние изменения экзогенных факторов и изменения межсубъективных взаимодействий.

При $T_\xi \to 0$, ($\beta \to \infty$) распределение рейтингов стремится к сингулярному, то есть к определенному выделению неформального лидера j. В глазах всех остальных членов группы его рейтинги $\xi(j|\ i)$, $(\forall i)$ стремится к максимальному значению: $\xi(j|\ i) \to 1$, а $\xi(q|\ i) \to 0$ для $\forall q \neq j$. Условно в этом случае можно говорить, что в группе складываются условия для возникновения тоталитарной организации.

Эти рассуждения можно распространить на другие частные случаи распределения предпочтений, в том числе, на распределение предпочтений «виртуального субъекта» (п. 4.12).

Состояние индивидуального субъекта или группы с высокой «температурой эмоционального нагрева» не может существовать длительное время, если оно не будет поддерживаться извне, поскольку при этом должны интенсивно расходоваться активные ресурсы. Следовательно, опираясь, на общие, эвристические соображения можно предположить, что психическая «температура» субъекта, предоставленного самому себе при неизменных внешних факторах, должна постепенно падать (см. еще п.4.14).

Обсуждение некоторых аспектов динамики рейтингов дано в главе 5.

В следующем параграфе также используется временная рекурсия.

4.6. Взаимные полезности

4.6.1. О взаимных полезностях. Определение

В группе взаимодействующих субъектов, в том числе в задачах о принятии коллективных решений, необходимо дополнить теорию полезностей [60, 228, 248, 271, 272, 273]. Речь идет о введении понятия «взаимной полезности» («mutual utility») – полезности одного субъекта для другого субъекта (или для группы субъектов).

Взаимные полезности были введены в [83, 231]. Эти полезности в том смысле, которым им придается в [83, 231] существенно отличаются от агрегированных полезностей, которые обсуждаются в других работах, например, в [144, 156, 187, 208, 210, 211, 212, 261, 269] и др. (Фишберн, Нейман-Моргенштерн, Мулен…).

Есть отличие в смысле терминов «mutual utility» –и «transferable utility». Во втором случае из всех видов полезности выделяется та часть, которая может быть передана (to be transferred) и воспринята.

Представляемая в настоящей работе модель не является единственно возможной, но тем не менее, она позволяет изучать экономические и социальные процессы в группах, например, развитие конфликтов всех типов, задачи управления конфликтами.

Отличительное свойство этой модели состоит в том, что она основана на предположении, что в основных своих проявлениях психика работает оптимальным образом.

В теории искусственных нейронных систем [190] развиваются эффективные нейронные методы оптимизации. Почему бы не «повернуть» задачу в обратном направлении, т.е. перенести успех в теории искусственных нейронных систем на естественные (реальные) нейронные системы и на разум, сделать допущение о том, что он подобным образом работает оптимально.

Принимая это утверждение в качестве гипотезы, мы вынуждены ответить на вопросы:

– в каком смысле работа психики оптимальна?

– что является критерием относительности?

– какие факторы или переменные оптимизируются?

Здесь мы обсуждаем только одну функцию психики: выработку предпочтений (предметных и рейтинговых). В качестве критериев будут использоваться субъективная энтропия предпочтений, либо субъективная информация Кульбака.

Принцип оптимальности сводится к «Принципу максимума субъективной энтропии».

Существует мнение, что выбор критериев неопределенности (в данном случае – энтропии Шеннона на распределении предпочтений), является не единственным [77]. Считают, в частности, что критерий неопределенности должен быть некоторым образом согласован с функцией потерь.

В качестве «математической упаковки» этого принципа используется принцип Джейнса [282, 283]. В принципе Infomax речь идет о максимуме взаимной субъективной информации, а в качестве критерия – субъективная информация Кульбака. В отличие от принципа Джейнса и принципа «Infomax» Линскера используются введенные в [83, 231] «субъективная энтропия» и «субъективная информация».

Поскольку при формулировке критериев в упомянутых принципах используются полезности, то в задачах, относящихся к группе субъектов используются взаимные полезности. Важным условием, которое входит в формулировки принципов является предположение об «индивидуальном носителе». Согласно этой гипотезе все «события», связанные с принятием решения, происходят в недрах индивидуальной психики, а субъекты в составе группы каждый раз индивидуальным образом оценивают экзогенную обстановку и экзогенную информацию.

Одинаковость или близость условий для всех членов группы, а также подобие свойств психики (в том числе близость знаний, индивидуального опыта, подобие эндогенных свойств и т.д.) обусловливают принятие членами групп одинаковых, либо близких решений.

Тем не менее, пытаясь построить количественную прогнозную модель работы психики мы должны каждый раз определить индивидуального носителя. Это – принципиальное требование.

Это обстоятельство не исключает коллективных решений, тесного материального и информационного взаимодействия. Напомним, наконец, что в [83, 231] были предложены две модели, так называемого «виртуального субъекта», которому при определенных условиях может быть поручена роль «индивидуального носителя».

4.6.2. Взаимные полезности. Основания модели

Будем различать полезность альтернативы $\sigma_k \in S_{aj}$, где S_{aj} - множество альтернатив, изучаемых субъектом *j*, заданную на S_{aj} $(j \in \overline{1, M})$, а также полезность субъекта «*i* для субъекта *j*», относительно альтернативы σ_k, причем $\sigma_k \in S_{ai}$ и $\sigma_k \in S_{aj}$. В дальнейшем для упрощения предполагаем, что для всех субъектов группы их проблемные множества совпадают:

$$S_{ai} = S_{aj} : \forall i, j \in \overline{1, M}$$

Обозначим полезность «*i* для *j*» $U_t(i \to j|\sigma_k)$ в момент *t*. Стрелка обозначает, что «располагаемая» взаимная полезность реализуется в виде передачи полезности в момент *t* от «*i*» к «*j*». Можно говорить о полезности «*i*» для «*j*» на подмножестве альтернатив S_{ai}', $S_{ai}' \in S_{ai}$ более того, на всем множестве S_{ai}. Полезность $U_t(i \to j|\sigma_k)$ назовем дифференциальной взаимной полезностью. Полезность, накопленная субъектом *i* относительно σ_k за один временной шаг, может быть представлена следующей формулой:

$$U_t(i|\sigma_k) = U_{t-1}(i|\sigma_k) \cdot m(t, t-1) + \sum_{j=1}^{M} \breve{U}_t(j \to i(\sigma_k) - \sum_{j=1}^{M} \hat{U}_t(i \to j|\sigma_k) \qquad (4.82)$$

Здесь значок «$\vee$» над $\breve{U}$ означает «получаемую» от *j* полезность, а значок «$\wedge$»над $\hat{U}$ – «отдаваемую» полезность. Отдаваемая полезность может в некоторых случаях не уменьшать полезность отдающего, например, передача «полезных» знаний преподавателем студенту в большинстве случаев не уменьшает полезность преподавателя. Если речь идет о передаче денег, то для получающего нет ограничений, наоборот, если передаются знания , вообще информация, то у получающего может быть ограничена «пропускная способность канала» поглощения этой информации.

Множитель *m*(*t, t-1*) характеризует «производство» полезности субъектом *i* при переходе *t-1*→*t*, читается так:

$\hat{U}_t(i \to j|\sigma_k)$ - полезность, отдаваемая субъектом *i* субъекту *j* относительно альтернативы σ_k.

$\breve{U}_t(j \to i|\sigma_k)$ - полезность, принимаемая *i* от *j* для реализации альтернативы σ_k.

Тогда $\sum_{i=1}^{M} \hat{U}_t(i \to j|\sigma_k)$ полезность, отдаваемая для *j* всеми числами группы, относительно σ_k,

$\sum_{j=1}^{M}\hat{U}_t(i \to j|\sigma_k)$ - полезность, отдаваемая субъектом i всем остальным членам группы, наконец,

$\sum_{S'_a}\hat{U}_t(i \to j|S'_a)$ есть полезность, отдаваемая i для j относительно подмножества альтернатив $S'_a \in S_a$.

Принимаемая полезность $\breve{U}_t(i \to j|\sigma_k)$ трактуется аналогично отдаваемым полезностям. Предполагается, что при $i = j$ $\hat{U}_t(i \to j|\sigma_k) = 0$, также $\breve{U}_t(i \to j|\sigma_k) = 0$.

Частное предположение, что

$$\breve{U}_t(j \to i|\sigma_k) = \hat{U}_t(i \to j|\sigma_k) \tag{4.83}$$

соответствует гипотезе об идеальности канала передачи полезностей или «гипотезе отсутствия посредника». «Посредником» могут являться механизмы потери полезности в процессе передачи. Для неидеального канала имеем:

$$\breve{U}_t(j \to i|\sigma_k) \neq \hat{U}_t(i \to j|\sigma_k) \tag{4.84}$$

Передача полезностей может выглядеть как продажа, обмен ресурсами, оказание услуг, помощь, реклама, голосование за желательного кандидата и т.д. Таким образом, полезность не совпадает в общем случае с ресурсами и является более общей категорией, исчисляется иногда в условных единицах – «ютилях».

Чем обусловлена (мотивирована) передача полезностей (utility transfer)? Как минимум можно представить себе две возможности.

Во-первых, в качестве мотива может выступить приказ извне либо от одного из взаимодействующих субъектов, то есть принуждение, либо с другого иерархического уровня, если в группе существует иерархия.

Типичным примером последнего является национализация, проведенная после Октябрьской революции в России.

Другая причина действует при «добровольной» передаче. В основе «добровольной» передачи лежит личный интерес в получении дополнительной пользы в будущем от субъекта, которому передается полезность («процент на переданную полезность» более ловкому, успешному, разворотливому субъекту).

Эта полезность имеет либо сугубо материальный характер, либо относится к гуманитарной области – к области этики, идеологии, политики и, в конечном итоге может принести утилитарную выгоду в более или менее отдаленном будущем.

Передача полезностей, как и ее последствия, представляет собой процесс, развивающийся во времени и должен с самого начала рассматриваться в нестационарной постановке – во временной перспективе. Соответствующий алгоритм должен оформляться как рекурсия.

Субъект может обладать ресурсами разового использования и ресурсами многократного использования. В качестве полезности может выступать информация. Передача очень небольшой порции информации может оказаться критически важной, кардинально изменить результаты.

На рис. 4.17 представлена схема обмена полезностями между двумя субъектами:

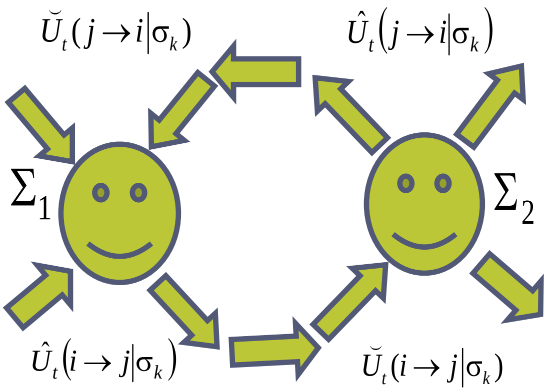


Рис.4.17

Баланс обмена полезностями на этапе t определяется соотношениями:
у субъекта «*i*»:

$$\delta U_t(i,j|\sigma_k) = \breve{U}_t(j \to i|\sigma_k) - \hat{U}_t(i \to j|\sigma_t) \tag{4.85}$$

у субъекта «*j*»:

$$\delta U_t(j,i|\sigma_k) = \breve{U}_t(i \to j|\sigma_k) - \hat{U}_t(j \to i|\sigma_t) \tag{4.86}$$

Принимается в качестве аксиомы, что

$$\breve{U}_t(i \to i|\sigma_k) = \hat{U}_t(i \to i|\sigma_t) = 0; \forall_k \in 1,\overline{N} \tag{4.87}$$

при $\forall_t$ и $\forall i \in 1,\overline{M}$

Другими словами, передача полезности «самому себе» не имеет места, хотя самостоятельное «производство» полезности, определяемое множителем *m*(*t, t-1*) или $m(i|t)$ изменяет индивидуальную полезность.

В качестве предварительного замечания скажем, что следует различать объективную полезность («objective utility») и субъективную полезность («subjective utility»). Объективной будем считать такую полезность, которая реально существует и проявляется в процессе функционирования системы: ресурсы материальные, энергетические, информационные,… выражаемые в денежных единицах, килограммах, калориях, метрах, градусах и т.д. Субъективная полезность представляет собой отражение объективной полезности в сознании субъекта. Она может выражаться в ютилях.

Модели субъективной полезности строятся на основе основных законов психологии (Вебера – Фехнера, Стивенса, Забродского и др.).

Предпочтения первого и второго рода, являющиеся продуктами психики, должны выражаться через субъективные полезности. Это можно принять в качестве аксиомы.

Построим вначале модели для объективных полезностей. Пусть:

$$\hat{U}_t^{obj}(i \to j|\sigma_k) = k(i|t,t-1) \cdot U_{t-1}^{obi}(i|\sigma_k) \times$$
$$\times\left[m(j,t)\xi_t(i \to j|\sigma_k) - m(i|t)\xi_t(\alpha \to i|\sigma_k)\right]\theta_{i,j}(t,k) \tag{4.88}$$

Здесь $\theta_{i,j}(t)$ - функция Хэвисайда, вид которой описан ниже, коэффициент $k(i|t,t-1)$ характеризует «темп обмена полезностями», т.е. долю накопленной к моменту *t* полезности; $m(j|t)$ – характеризует «репродуктивную силу» субъекта *j* (получателя полезности), $m(i|t)$ - репродуктивную силу отдающего полезность $k(i|t,t-1) \in [0,1], m(i|t) \in [0,\infty]; m(j|t) \in [0,\infty]$.

В (4.88) величины $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$ и $\xi_t(i \to i|\sigma_k)$ - условные дифференциальные характеристики взаимных рейтингов, или, просто «условные дифференциальные рейтинги». Так $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$ - рейтинг «*j* в глазах *i*» в момент *t* относительно альтернативы σ_k, $\xi_t(i \to i|\sigma_k)$ - «саморейтинг *i*»: рейтинговая самооценка «*i*».

Если группа состоит из 2-х субъектов (M=2), то выполняется нормировка

$$\xi_t(i \to j|\sigma_k) + \xi_t(i \to i|\sigma_k) = 1$$

Если группа состоит из M > 2 взаимодействующих субъектов, то условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{V} \xi_y(i \to j|\sigma_k) = 1$$

Смысл формулы (4.88) состоит в следующем: коэффициент $0 \le k(i|t,t-1) \le 1$ определяет, какая часть накопленной полезности *i* подлежит передаче для *j*, если $k(i|t,t-1) = 1$, то отдается на каждом шаге вся полезность.

Коэффициенты $m(j|t,t-1) \ge 1$; $m(i|t,t-1) \ge 1$ определяют прирост полезности за счет репродуктивной деятельности субъектов *j* и *i* соответственно.

Функция (4.88) имеет следующие свойства:

1. Если $\xi_t(i \to j|\sigma_k) = \xi_t(i \to i|\sigma_k)$, то передаваемая полезность определяется только различием в продуктивной деятельности, т.е. разностью

$$m(j|t) - m(i|t)$$

2. Наоборот, если $m(j|t) = m(i|t)$, передаваемая полезность определяется только различием рейтингов.

3. Если выражение в квадратных скобках равно нулю, $\hat{U}_{t-1}^{obj},(i|\sigma_k) = 0$, то передача полезности отсутствует.

4. Величина $\hat{U}_t^{obi}(i \to j|\sigma_k) \ge 0$ и не может быть по определению отрицательной, поэтому вводится множитель $\theta_{i,j}(t)$ (функция Хэвисайда).

$$\theta_{i,j}(t,k)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{m(j|t)\xi_t(i\to j|\sigma_k)-m(i|t)\xi_t(i\to i|\sigma_k)}{\left[m(j|t)\xi_t(i\to j|\sigma_k)-m(i|t)\xi_t(i\to i|\sigma_k\right]}\right] \tag{4.89}$$

Очевидно, что

$$\theta_{i,j}(t,k)=[1]\;\theta_{i,j}(t,k)=\begin{cases}1,\to m(j|t)\xi_t(i\to j|\sigma_k)\geq m(i|t)\xi_t(i\to i|\sigma_k);\\ 0,\to \xi(j|t)\xi_t(i\to j|\sigma_k)< m(i|t)\xi_t(i\to i|\sigma_k)\end{cases} \tag{4.90}$$

Более естественной в формуле (4.88) была бы зависимость не от рейтингов, а от рангов: $\eta(j|\sigma_k);\eta(i|\sigma_k)$ (дифференциальных рангов). Наличие в этих величинах зависимости от σ_k может быть использовано для распределения властных полномочий. Будем считать группу «хорошо организованной», т.е. такой, в которой распределение рангов близко к распределению рейтингов.

Если обозначить

$$\delta_{i,j}(t,k)=m(j|t)\xi(i\to j|\sigma_k)-m(i|t)\xi(i\to i|\sigma_k) \tag{4.91}$$

то график $\theta_{i,j}(t,k)$ можно представить в виде

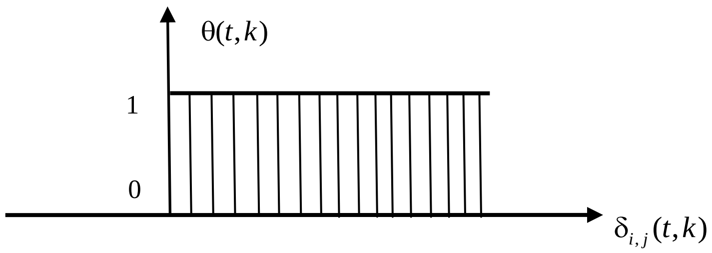


Рис. 4.18

Правило, которое содержится в формуле (4.88) таково: если для двух взаимодействующих субъектов ранг (читай – рейтинг) одного из них в глазах другого выше, чем ранг (саморейтинг), то второй отдает свою полезность при условии, что также репродуктивная сила первого выше, чем у второго и наоборот. Допускается, однако, ситуация, когда рейтинг второго ниже, чем саморейтинг первого, но репродуктивная сила второго выше. При этом будет иметь место передача в направлении $i\to j$. Нейтральный случай определяется условием

$$\delta_{i.j}(t|\sigma_k)=0$$

то есть

$$\frac{\xi_t(i\to j|\sigma_k)}{\xi_t(i\to i|\sigma_k)}=\frac{m(i|t)}{m(j|t)} \tag{4.92}$$

Если группа состоит из 2-х субъектов, то имеет место условие нормировки:

$$\xi_t(i\to j|\sigma_k)+\xi_t(i\to i|\sigma_k)=1$$

тогда условие (4.92) принимает вид:

$$\frac{1}{\xi_t(i \to i|\sigma_k)} - 1 = \frac{m(i|t)}{m(j|t)} \quad (4.93)$$

Вышесказанное следует понимать так, что существует некий механизм, заставляющий менее рейтингового субъекта отдавать часть своей полезности более рейтинговому и более продуктивному субъекту. В этом случае роль таких принципов, как принцип Пигу - Дальтона существенно снижается.

Что это за механизмы?

1. В хорошо организованной группе, когда распределение рангов приблизительно соответствует распределению рейтингов, субъект более высокого ранга имеет полномочия на управление ресурсами подчиненного.

2. Этические факторы, связанные с категорией «социальная справедливость», закреплены либо религиозными догматами, либо светскими законами.

3. Экономическая выгода, когда консолидация ресурсов «бедных» в руках одного высокорейтингового субъекта сулит в будущем бóльшую выгоду, чем самостоятельное использование (идея коллективизации…).

В случае, если при обмене полезностями применяется правило Пигу-Дальтона, то должно выполняться условие, что в результате передачи полезность от «*i*» к «*j*» у «*i*» остается больше полезности, чем будет после передачи у «*j*». При двусторонней передаче это правило приобретает модифицированную форму.

2.2. Получаемая полезность «*j*» от «*i*» может, по-видимому, быть как меньшей, так и большей, а также равной накопленной полезности $U(j|\sigma_k)$, т.е.

$$\breve{U}_t(i \to j|\sigma_k) \geq U(j|\sigma_k)$$

Это относится как к объективной, так и к субъективной полезностям.

Что здесь имеется ввиду?

Допустим, что для принятия решения σ_k «*j*» не достает самой малости – очень малой дополнительной полезности (м. б. очень малой порции ресурсов). Тогда субъективное восприятие получаемой полезности резко возрастает (не хватает небольшого количества топлива, чтобы доехать, долететь из пункта *A* в пункт *B* и отдаваемая *i* полезность в восприятии *j* приобретает значительно больший вес, один голос при голосовании может решить очень многое: изменить политику страны, вызвать войну и т.д.) здесь очевидно различие между объективной и субъективной полезностями.

2.3. Принимается, что если σ, η - две альтернативы и η более предпочтительно для «*i*», чем σ: $\sigma < \eta$, то

$$\hat{U}_t(i \to j|\sigma) > \hat{U}_t(i \to j|\eta) \quad (4.94)$$

то есть, «*i*» предпочитает отдавать полезность, предназначенную для альтернативы σ. Этому соответствует неравенство

$$\pi(i|\sigma) < \pi(i|\eta) \quad (4.95)$$

Выразим аналитически влияние этого обстоятельства введением множителя $1-\pi_t(i|\sigma)$, полагая

$$\hat{U}_t(i \to j|\sigma) = (1-\pi(i|\sigma))U(i|\sigma)...$$

Видим, что если субъект «*i*» не заинтересован альтернативой σ, то $\pi_t(i|\sigma) \to 0$ и полезность $u(i|\sigma)$ может быть передана полностью. Конечно, множитель $1-\pi(i|\sigma)$ не отражает всех факторов влияющих на передачу полезностей.

4.6.3. Связь с рейтинговыми распределениями

Следующий чрезвычайно важный аспект связан с ролью рейтинговых предпочтений. Распределение рейтингов (предпочтений II рода) является основным группообразующим фактором. Учет рейтинговых распределений в теории взаимных полезностей является одной из отличительных особенностей излагаемой теории. Об этом уже говорилось выше.

Необходимо учитывать, что с одной стороны восприятие величины «принимаемой» полезности может зависеть от условного рейтинга «принимающего», а также от накопленной к данному моменту дифференциальной (для определенной альтернативы σ_k) или интегральной полезности. Здесь мы имеем нечто подобное первому закону Госсена (или более определенно – закону Вебера - Фехнера [19] – так называемые «логарифмические очки»). С другой стороны условные рейтинги $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$ («*j* в глазах *i*» формируются в зависимости от величины передаваемых (отдаваемой и пронимаемой) полезностей.

$$\xi_t(i \to j|\sigma_k) \sim \left(\hat{U}_t^{Subj}(i \to j|\sigma_k); \breve{U}_t^{Subj}(j \to i|\sigma_k)\right)$$

относительно альтернативы σ_k, либо

$$\xi_t(i \to j|S'_a) \sim \left(\hat{U}_t^{Subj}(i \to j|S'_a); \breve{U}_t^{Subj}(j \to i|S'_a)\right)$$

Здесь $\hat{U}_t^{Subj}(...)$ - субъективные передаваемые полезности. Должны использоваться субъективные полезности, поскольку рейтинговые коэффициенты $\xi_t(...)$ по определению субъективные характеристики.

Получаемые субъективные полезности $\breve{U}_t^{Subj}(i \to j|\sigma_k)$ субъектом «*j* от *i*», зависят от рейтинга «*j*» в данный момент, причем таким образом, что чем больше этот рейтинг, тем уровень восприятия этой полезности субъектом «*j*» меньше.

4.6.4. Некоторые аксиомы относительно передаваемых полезностей

А 1. Объективная отдаваемая полезность тем больше, чем меньше предпочтения данной альтернативы у отдающего: $\pi(i|\sigma)$ и чем больше условный рейтинг получающего по отношению к рейтингу отдающего, наконец, чем больше собственная располагаемая (накопленная к моменту *t*) полезность относительно σ_k у отдающего $U(i|\sigma_k)$.

Это утверждение имеет эвристический характер. Можно подобрать примеры, которые демонстрируют несовершенство этой зависимости.

Пусть передаются знания от преподавателя (i) к студенту (j). Обладают ли знания преподавателя полезностью? Как эту полезность можно измерить, и, вообще, всю задачу формализовать, имея ввиду, что полезность каждой порции учебной информации зависит от контекста, места «в программе», учебном плане, в которых эта порция преподносится. Кроме того, такая информация может преподаваться многократно, причем каждый акт передачи учебной информации не уменьшает ее полезности, хотя очевидно, что такая информация обладает свойством устаревания. Так что через какое-то время она сохраняет лишь исторический интерес.

Примером агрегирования информации является любая музыкальная композиция из нотных знаков. Полезность ноты возрастает, когда она включена в композицию. Аналогично в языках, полезность слова зависит от контекста, в котором оно используется. Это обстоятельство должно отражаться при передаче полезностей.

А 2. Порция объективной передаваемой полезности зависит от того, к какой накопленной полезности она добавляется в результате передачи. «Окраска» полезности частично может быть отражена отнесением ее к той или иной альтернативе.

Мы в настоящей работе рассматриваем только дифференциальные полезности, то есть отнесенные к определенной альтернативе.

А 3. Принимаемая полезность тем больше, чем выше индивидуальное предпочтение данной альтернативы у принимающего $\pi(i|\sigma_k)$, чем больше условный рейтинг отдающего и, наконец, чем меньше собственная располагаемая (накопленная к моменту t) полезность данной альтернативы.

О какой полезности объективной или субъективной идет речь в этом утверждении зависит от смысла решаемой проблемы.

Во всех трех аксиомах предполагается, что у субъектов имеется полная информация о существующей на данный момент ситуации, в том числе, о предпочтениях I и II рода у противоположной стороны.

Наряду с моделью отдаваемой полезности (4.88) можно рассматривать модель

$$\hat{U}_t^{obj}(i \to j|\sigma_k) = k(i|t, t-1, \sigma_k) \cdot U_t^{obj}(i|\sigma_k)\left(1 - \pi_{t-1}(i|\sigma_k)\right) \times \delta_{i,j}(t-1|\sigma_k);$$

$$k(i|t, t-1, \sigma_k) \in [0,1], \tag{4.96}$$

где $\delta_{i,j}(t-1|\sigma_k) = \left[m(j|t-1) \cdot \xi_{t-1}(i \to j|\sigma_k) - m(i|t-1)\xi_{t-1}(i \to i|\sigma_k)\right]$ из (4.91).

Эта модель содержит по сравнению с (4.88) дополнительный множитель $\left(1 - \pi_t(i|\sigma_k)\right)$. Его роль проявляется, когда одновременно рассматривается несколько альтернатив $\sigma_k \in S_a$.

Здесь возникает определенное противоречие. Мы выражаем предпочтение через полезность. Следовательно, если передача полезности «j от i» увеличивает полезность данной альтернативы, что и предпочтение данной альтернативы должно возрастать.

Примем, что вся отданная от «i к j» полезность будет принята j с некоторым искажением

$$\breve{U}_t(i \to j|\sigma_k) = \varphi_t(i \to j|\sigma_k) \cdot \hat{U}_t(i \to j|\sigma_k) \tag{4.97}$$

Коэффициент $\varphi_t(i \to j|\sigma_k)$ должен учитывать ряд факторов:

− существующее в момент t предпочтение $\pi(j|\sigma_k)$ альтернативы σ_k принимающего субъекта;

− сравнительное значение рейтингов отдающего и принимающего;

− «физическое» содержание (качество) передаваемой полезности. Чем более универсальными являются единицы измерения этой полезности (деньги, например), тем легче передается полезность. В частности, если имеет место полная замещаемость, то полезность $\hat{U}_t$ может в полном объеме превращаться в $\breve{U}_t$. В противном случае эффект неполной замещаемости можно выразить через значение предметных предпочтений.

Из (4.96) следует, что при $U_t^{obj}(i|\sigma_k) \to 0$ «передача» $\hat{U}_t^{obj}(i \to j|\sigma_k) \to 0$, коэффициент $k(i|t, t-1)$ показывает какую долю накопленной полезности «*i*» готов передавать «*j*». Для установления этого коэффициента можно обратиться к принципу Пигу - Дальтона коэффициент считается $k(i|t, t-1)$ заданным «извне»:

$$0 \le k \le 1$$

Если $\pi_t(i|\sigma_k) \to 1$, то передача полезности прекращается ввиду того, что субъект «*i*» сам максимально заинтересован в альтернативе σ_k, наконец, с уменьшением рейтингового коэффициента «*j* в глазах *i*» $\left(\xi_t(i \to j|\sigma_k)\right)$ пропорционально уменьшается передача $i \to j$.

Объективная полезность, получаемая j, если канал передачи «идеальный» (без посредника) должна быть равна полезности, отдаваемой «*i* для *j*», то есть

$$\hat{U}(i \to j|\sigma_k) = \breve{U}(i \to j|\sigma_k)$$

Неидеальность канала может иметь место, если предпочтение *j* альтернативы σ_k мало: $\pi(i|\sigma_k) \to 0$, тогда «*j*» будет сопротивляться получению дополнительной полезности для альтернативы σ_k.

Если замещаемость отсутствует, то $\varphi_t(i \to j|\sigma_k) = 0$ и отданная полезность $\hat{U}_t(i \to l|\sigma_k)$ может считаться «выброшенной на ветер».

По аналогии с тем, как это было сделано с ресурсами, полезно ввести понятие располагаемой полезности U_t^{av}, (available), потребной полезности U_t^{req} (required) и ожидаемой полезности $U_t^{\exp}$ (expected). Предпочтения определяются в зависимости от соотношения располагаемой, потребной и «ожидаемой полезностью», а именно, должно быть

$$U_t^{\exp} > U_t^{ver}\,;\; U_t^{av} > U_t^{req}$$

Для дальнейшего мы примем предположение о полной взаимозамещаемости всех рассматриваемых полезностей. Без этого предположения теория существенно усложняется. Для того, чтобы сделать развиваемую теорию продуктивной, необходимо предположить, что существует универсальная мера полезностей в данной системе и все «физически» различные полезности могут быть субъективно выражены в универсальных единицах.

В частном случае для $\varphi_t(i \to j|\sigma_k)$ может быть принята следующая модель:

$$\varphi_t(i \to j|\sigma_k) = k(i \to j|\sigma_k)\cdot\left(1-\xi_{t-1}(j|\sigma_k)\right)\cdot\pi_{t-1}(j|\sigma_k) \qquad (4.98)$$

из которой следует, что если абсолютный рейтинг $\xi_{t-1}(j|\sigma_k)$ субъекта «*j*» (принимающего) высок (в пределе $\to 1$), то для него субъективная ценность получаемой полезности не высока (вместо $\xi_{t-1}(j|\sigma_k)$ может быть взят условный рейтинг $\xi_{t-1}(i \to j|\sigma_k)$. При этом

$$\xi_{t-1}(i \to i|\sigma_k) + \xi_{t-1}(i \to j|\sigma_k) = 1$$

Далее видим, что чем выше полезность $\pi_{t-1}(j|\sigma_k)$, тем выше φ_t и, соответственно $\breve{U}_t(i \to j|\sigma_k)$.

Введенные выше формулы для $\hat{U}$ и $\breve{U}$ несмотря на имеющиеся в схеме субъективные факторы (предпочтения I и II рода) будем считать объективным, поскольку они определяют реальную полезность, участвующую в передачах $\hat{U}^{obj}, \breve{U}^{obj}$.

Мы уже говорили о том, что функции предпочтений, будучи порождениями психики, могут принципиально зависит только от субъективных полезностей: $\hat{U}^{Subj}$ и $\breve{U}^{Subj}$.

Рассмотрим модели предметных предпочтений. Положим:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{e^{\beta_\pi \cdot U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} e^{\beta_\pi \cdot U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}} \qquad (4.99)$$

Здесь $U_t^{Subj}(i|\sigma_k)$ - накопленная индивидуальная полезность субъектом *i* к моменту *t*.

Свойства распределения (4.99):

1. Если все полезности равны нулю: $U_t^{Subj}(i|\sigma_k) = 0$ для $\forall \in \overline{1,N}$, то все предпочтения одинаковы и равны $\frac{1}{N}$.

2. Если полезности одинаковы $U_t^{Subj}(i|\sigma_q) = idemq$, то распределения $\pi_t(i|\sigma_k)$ равномерны

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{1}{N} \quad \forall \in 1,\overline{N}$$

Модель (4.99) соответствует функционалу:

$$\Phi_{\pi t,i} = \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\ln\pi_t(i|\sigma_k) + \beta_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k) U_t^{Subj}(i|\sigma_k) + \gamma_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k) \qquad (4.100)$$

Недостаток этой модели в том, что она не учитывает предысторию – влияние предшествующих предпочтений. Для того, чтобы учесть предысторию используем рекурсию, задаваемую функционалом.

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi_{t,t-1,i}} = &-\sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\ln\pi_t(i|\sigma_k) + \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\ln\pi_{t-1}(i|\sigma_k) + \\ &+\beta_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k) U_t^{Subj}(i|\sigma_k) + \gamma_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\end{aligned} \qquad (4.101)$$

Соответствующее каноническое распределение имеет вид:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{\pi_{t-1}(i|\sigma_k)\, e^{\beta_\pi \cdot U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} \pi_{t-1}(\dot{q}|\sigma_q)\, e^{\beta_\pi \cdot U_t^{Subj}(q|\sigma_k)}} \qquad (4.102)$$

Свойства распределения (4.101):

1. Если субъективные полезности одинаковы для всех альтернатив, распределение $\pi_t(i|\sigma_k) = \pi_{t-1}(i|\sigma_k)$, т.е. не изменяется на шаге $t-1 \to t$. Принято, что $\sum_{q=1}^{N} \pi_{t-1}(i|\sigma_k) = 1$ для $\forall t$.

2. Если $\pi_{t-1}(i|\sigma_k) = 0$, то $\pi_t(i|\sigma_k) = 0$. Но все $\pi_t(i|\sigma_k)$ не могут одновременно равняться нулю ввиду условия нормировки для $\forall t$.

Свойство «2» весьма обременительно и может считаться существенным недостатком этой модели. Ниже мы предлагаем путь исправления этого недостатка и, соответственно, новый тип моделей (формулы (4.103), (4.104)).

Возможность определения распределения предметных предпочтений с учетом предыстории возникает, если функционал выбрать в виде:

$$\Phi_{\pi_{t,t-1}} = -\sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\ln\pi_t(i|\sigma_k) + \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\ln\left[\pi_{t-1}(i|\sigma_k) + \beta F_t(i|\sigma_k)\right] + \gamma_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)$$
(4.103)

Для этого функционала находим:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{\pi_{t-1}(i|\sigma_k)}{1+\beta\sum_{\dot{q}=1}^{N} F_t(i|\sigma_q)} + \frac{\beta F_t(i|\sigma_k)}{1+\beta\sum_{q=1}^{N} F_t(i|\sigma_q)} \qquad (4.104)$$

Здесь также выполнено условие нормировки функции $\boldsymbol{\pi_t(i|\sigma_k)}$. $F_t(i|\sigma_k)$ может являться полезностью.

По поводу формулы (4.104).

Если $\beta \to 0$ $\pi_t(i|\sigma_k) \to \pi_{t-1}(i|\sigma_k)$;

Если $\beta \to \infty$ $\dfrac{\beta F_t(i|\sigma_k)}{1+\beta\sum_{q=1}^{N} F_t(i|\sigma_k)} = \dfrac{F_t(i|\sigma_k)}{\beta^{-1}+\sum_{q=1}^{N}\pi \to F(i|\sigma_q)}$

$$\Rightarrow \pi_t(i|\sigma_k) = \frac{F_t(i|\sigma_k)}{\sum_{q=1}^{N}\pi_t(i|\sigma_q)}$$

если к тому же

$$F_t(i|\sigma_q) = F_t(t|\sigma_q) = idem; \forall t \Rightarrow \pi_t(i|\sigma_k) = \frac{1}{N}$$

Полагая, $F_t(i|\sigma_k) = U_t^{Subj}(i|\sigma_k)$ видим, что распределение (4.99) не зависит от нуля полезностей, но зависит от масштаба.

Приведем еще несколько моделей распределений предметных предпочтений.

Рассмотрим функционал, в котором когнитивная функция $F_t(i|\sigma_k)$ выбирается в виде

$$F_t(i|\sigma_k) = \beta_\pi U_t^{Subj}(i|\sigma_k) + \alpha \ln U_t^{Subj}(i|\sigma_k)$$

Пусть

$$\Phi_{\pi_{i,t}} = -\sum_{k=1}^{N}\pi_t(i|\sigma_k)\ln\pi_t(i|\sigma_k) + \sum_{k=1}^{N}\pi_t(i|\sigma_k)\left[\beta_\pi U_t^{Subj}(i|\sigma_k) + \alpha\ln U_t^{Subj}(i|\sigma_k)\right] + \\ +\gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_t(i|\sigma_k) \qquad (4.105)$$

Отсюда:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{U_t^{Subj}(i|\sigma_k)^{\alpha}\, e^{\beta U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} U_t^{Subj}(i|\sigma_q)^{\alpha}\, e^{\beta U_t^{Subj}(i|\sigma_q)}} \qquad (4.106)$$

1. При $\alpha = 0$ это распределение совпадает с распределением (4.99)
2. При $\beta = 0$ это распределение дается формулой:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k) \tag{4.107}$$

где

$$\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k) = \frac{U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}{\sum\limits_{q=1}^{N} U_t^{Subj}(i|\sigma_k)} = \frac{U_t^{Subj}(i|\sigma_k)}{\overline{U}_t^{Subj}(i)} \tag{4.108}$$

где
$$\overline{U}_t^{Subj}(i) = \sum_{q=1}^{N} \overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k) - \tag{4.109}$$

− суммарная полезность, которой обладает *i* относительно альтернативы σ_q. Нужно различать понятия: «полезность альтернативы», т.е. полезность, связанная с достижением соответствующей альтернативной цели, и полезность, которой располагает субъект *i* для достижения альтернативной цели ($U^{\exp}$ и U^{aV}).

Следующий функционал приводит к так называемому «предельно гиперболическому распределению»:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi_{it}} &= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\pi_t(i|\sigma_k)\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k)}{\overline{U}_t^{Subj}(i)} \ln \frac{\pi_t(i|\sigma_k)\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k)}{\overline{U}_t^{Subj}(i)} + \\ &+\beta\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\pi_t(i|\sigma_k)\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k)}{\overline{U}_t^{Subj}(i)} - 1\right) + \gamma_\pi \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\end{aligned} \tag{4.110}$$

Здесь $\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k)$ и $\overline{U}_t^{Subj}(i)$ заданы формулами (4.108) и (4.109).

Упростим обозначения: $\overline{U}_t^{Subj}(i|\sigma_k) = U_t(i|\sigma_k)$ и $\overline{U}_t^{Subj}(i) = U_t(i)$.

Из (4.110) следует распределение:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)} \cdot e^{-1+\beta+\gamma\frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)}} \tag{4.111}$$

Используя условие нормировки на S_a, найдем

$$\begin{aligned}\pi_t(i|\sigma_k) &= \frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)} \cdot \frac{e^{\gamma\frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)}}}{\sum\limits_q \frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)} \cdot e^{\gamma\frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)}}} \Rightarrow \pi_t(i|\sigma_k) = \\ &= \frac{\frac{U_t(i)}{U_t(i|\sigma_k)} e^{\gamma\frac{U_t(\dot{q})}{U_t(q|\sigma_k)}}}{\sum\limits_q \frac{U_t(q)}{U_t(q|\sigma_k)} \cdot e^{\gamma\frac{U_t(\dot{q})}{U_t(q|\sigma_k)}}}\end{aligned} \tag{4.112}$$

Из условия нормировки найдем также, что

$$\gamma_t = -\frac{U^*}{U_t(i)}$$

где U^* - точка экстремума функции (4.112) по $U_t(i|\sigma_k)$, тогда находим

$$\frac{\pi_t(i|\sigma_k)}{\pi_t^*(i)} = \frac{U^*(i)}{U_t(i|\sigma_k)} \cdot e^{\left(1-\frac{U_t^*(i)}{U_t(i|\sigma_k)}\right)} \tag{4.113}$$

Построим, наконец, рекурсивную схему исходя из вариационного принципа Лейблера - Кульбака «Максимума взаимной информации».

Возьмем функционал вида:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi_{i,t,t-1}} &= -\sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k) \ln \frac{\pi_t(i|\sigma_k)}{\pi_{t-1}(i|\sigma_k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\left[\beta U_{t-1}^{Subj}(i|\sigma_k) + \alpha \ln U_{t-1}^{Subj}(i|\sigma_k)\right] + \gamma \sum_{k=1}^{N} \pi_t(i|\sigma_k)\end{aligned} \tag{4.114}$$

Экстремизация этого функционала соответствует принципу максимума информации связи между распределением предпочтений в момент *t-1* и момент *t*.

Соответствующее каноническое распределение имеет вид:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{\pi_{t-1}(i|\sigma_k) U_{t-1}^{\alpha}(i|\sigma_k) e^{\beta U_{t-1}(i|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} \pi_{t-1}(i|\sigma_q) U_{t-1}^{\alpha}(i|\sigma_q) e^{\beta U_{t-1}(i|\sigma_q)}} \tag{4.115}$$

Видим, что:

1. при $\pi_{t-1}(i|\sigma_k) = 0$, $\pi_t(i|\sigma_k) = 0$

Все $\pi_{t-1}(i|\sigma_k)$ не могут быть одновременно равны нулю. Однако, если в определённый момент *t* $\pi_t(i|\sigma_k) = 0$, то при любом $\tau > t$ будет $\pi_\tau(i|\sigma_k) = 0$.

2. Если $U_{t-1}^{\alpha}(i|\sigma_k)$ одинаковы для всех *k*, то предпочтения сохраняют свои значения

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \pi_{t-1}(i|\sigma_k); \quad \forall k \in 1,\overline{N}$$

3. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то распределение сохраняется

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \pi_{t-1}(i|\sigma_k) \cdot (\forall k \in 1,\overline{N})$$

4.6.5. Условные дифференциальные рейтинги

Выше были введены рейтинговые предпочтения (предпочтения II рода). Без учета рейтинговых предпочтений невозможно построить модели взаимных полезностей и,

наоборот, модель рейтинговых предпочтений невозможно построить без использования взаимных полезностей.

Сразу заметим, что, как и предпочтение I рода условные дифференциальные рейтинги (УДР) – могут зависеть лишь от субъективных полезностей.

Заметим также, что распределение рейтингов связано с распределением рангов, которые, в свою очередь, определяют функциональное распределение властных полномочий, правил «дележа» ресурсов и, следовательно, полезностей.

Ниже рассматриваются варианты построения распределений рейтингов. Как и выше, мы должны придерживаться постулата «индивидуального носителя». Построить логически строгую теорию для группы, игнорируя этот постулат, невозможно.

Как и ранее, предполагается, что распределение условных рейтингов получается на основе вариационного принципа. Пусть численность группы *M*.

Обозначим рейтинг «*j* в глазах *i*» относительно альтернативы σ_k $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$. Назовем его «условным дифференциальным». Рейтинг $\xi_t(i \to j|S'_a)$ есть рейтинг «*j* в глазах *i*», но относительно подмножества альтернатив $S'_a \subset S_a$, рейтинг $\xi_t(i \to j|S_a) = \xi_t(i \to j)$ есть интегральный рейтинг на всем множестве альтернатив, которое можно представлять как $\overset{M}{\underset{j=1}{U}} S_{aj}$.

Носителем распределения $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$ является субъект «*i*».

4.6.5.1. Вычисление распределения рейтингов

Рассмотрим несколько вариантов функционалов, вводящих принцип максимума рейтинговой субъективной энтропии.

Для определения $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$ выберем функционал в виде:

$$\Phi^*_{\pi,t-1} = -\sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k)\ln \xi_t(i \to j|\sigma_k) + \beta_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k) \times$$
$$\times \left[U^{Subj}_{t-1}(j|\sigma_k) m_{t-1}(i \to j|\sigma_k) + \breve{U}^{Subj}_{t-1}(j|\sigma_k) - \widehat{U}^{Subj}_{t-1}(i \to j|\sigma_k)\right] + \gamma_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k) \tag{4.116}$$

Здесь $U^{Subj}_{t-1}(j|\sigma_k)$ - полезность, накопленная субъектом *j* к моменту *t-1*.

Множитель $m_{t,t-1}(j|\sigma_k)$ характеризует способность *j* изменять накопленную полезность.

Более простой вырожденный, но нетривиальный вариант получается, если выбрать функционал относительно интегральных рейтингов $\xi_t(i \to j)$, отнесенных ко всему набору альтернатив S_a в виде:

$$\Phi_{\xi it,t-1} = -\sum_{j=1}^{MN} \xi_t(i \to j) \ln \xi_t(i \to j) + \beta'_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j) \times$$
$$\times \left[U_{t-1}^{subj}(j) m_{t-1}(j \to j) + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(j \to i) - \hat{U}_{t-1}^{subj}(i \to j) \right] + \gamma'_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j) \qquad (4.117)$$

Суммарные полезности

$$\left. \begin{aligned} \breve{U}_t^{Subj}(j \to i) &= \sum_{k=1}^{N} \breve{U}_t^{Subj}(j \to i | \sigma_k) \\ \hat{U}_t^{Subj}(i \to j) &= \sum_{k=1}^{N} \hat{U}_t^{Subj}(i \to j | \sigma_k) \end{aligned} \right\}$$

передаются «на встречных курсах» от «*j*» к «*i*» и от «*i*» к «*j*». Как было отмечено выше, в общем случае они не равны.

В функционалах (4.116) и (4.117) величину $U_{t-1}^{Subj}(j|\sigma_k)$ можно будет опустить, это будет означать, что для субъекта *i* при определении рейтинга накопленная индивидуальная полезность не играет роли, а имеет значения только результат обмена полезностями.

Если принять в качестве вариационного принципа принцип максимума взаимной информации (информации связи) распределяемой в моменты *t* и *t-1* – принцип максимума взаимной информации Линскера, то функционал следует принять в виде:

$$\Phi_{\xi it,t-1} = -\sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k) \ln \frac{\xi(i \to j|\sigma_k)}{\xi_{t-1}(i \to j|\sigma_k)} + \beta'_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k) \times$$
$$\times \left[U_{t-1}^{Subj}(j|\sigma_k) m_{t-1}(j|\sigma_k) + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(j \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{subj}(i \to j|\sigma_k) \right] + \gamma_\xi \sum_{j=1}^{M} \xi_t(i \to j|\sigma_k) \qquad (4.118)$$

Функционал (4.116) дает распределение:

$$\xi_t(i \to j|\sigma_k) = \frac{e^{\beta_\xi (U_{t-1}^{Subj}(j|\sigma_k) m_{t-1} + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(j \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to j|\sigma_k))}}{\sum_{q=1}^{M} e^{\beta_\xi (U_{t-1}^{Subj}(q|\sigma_k) m_{t-1} + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(q \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to q|\sigma_k))}} \qquad (4.119)$$

Функционал (4.117) приводит к распределению:

$$\xi_t(i \to j) = \frac{\xi_{t-1}(i \to j) e^{\beta_\xi (U_{t-1}^{Subj}(j|\sigma_k) m_{t-1} + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(j \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to j|\sigma_k))}}{\sum_{q=1}^{M} \xi_{t-1}(i \to q) e^{\beta_\xi (U_{t-1}^{Subj}(q|\sigma_k) m_{t-1} + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(q \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to q|\sigma_k))}} \qquad (4.120)$$

Распределение (4.119) не содержит в числителе множителя $\xi_{t-1}(i \to j|\sigma_k)$ и, в отличие от распределения (4.120), ни для какого субъекта никогда не обращается в нуль, т.е. в этом случае нулевые рейтинги невозможны, тогда как в случае распреде-

ления (4.120) некоторые рейтинги могут быть нулевыми (но в силу условий нормировки – не все). При этом если определенный рейтинговый коэффициент равен нулю в момент t, то он остается нулевым впоследствии.

Чтобы преодолеть этот существенный недостаток приведенной выше модели, применим прием, уже использованный выше при выводе формулы (4.104).

Глубинный смысл моделей этого типа состоит в том, что психике навязывается иной принцип относительно выбора: принцип максимума информации связи между состояниями в смежные моменты времени (t_r, t_{r-1}), т.е. функционирование на отрезке $\Delta t_r = (t_r - (t_{r-1}))$. Здесь, как и в случае (4.103) (4.104), время t теряет свой «астрономический смысл», но превращается во время «снятия» информации или момента соответствующих интерактивных действий, связанных с принятием решения.

Вместо функционала (4.118) возьмем функционал, предполагающий временную рекурсию:

$$\begin{aligned}\Phi^{(k)}_{\xi_{it,t-1}} = &-\sum_{j=1}^{M}\xi_t(i\to j|\sigma_k)\ln\xi_t(i\to j|\sigma_k)+\sum_{j=1}^{M}\xi_t(i\to j|\sigma_k)\\ &\ln\left[\xi_{t-1}(i\to j|\sigma_k)+\beta_\xi U^{Subj}_{t-1}(i,j,k)\right]+\gamma_\xi\sum_{j=1}^{M}\xi_t(i\to j|\sigma_k)\end{aligned} \tag{4.121}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$U^{Subj}_{t-1}(i,j,k)=U^{Subj}_{t-1}(i\to j|\sigma_k)\times m_{t-1,i,k}+\breve{U}^{Subj}_{t-1}(j\to i|\sigma_k)-\hat{U}^{Subj}_{t-1}(i\to j|\sigma_k)$$

β имеет размерность $\left[U^{Subj}_{t-1}\right]^{-1}$.

4.6.5.2. Распределение на основе принципа Линскера

Функционал (4.121) представляет собой модификацию принципа Линскера «минимума информации связи» – ситуаций в моменты t и t-*1*. В данной задаче лучше назвать его «модифицированный принцип максимума субъективной информации связи» (МПМСИС).

Запишем уравнение:

$$\frac{\partial\Phi^{(k)}_{\xi it/t-1}}{\partial\xi_t(i\to j|\sigma_k)}=0$$

в подробной форме имеем:

$$\ln_{\xi t}(i\to j|\sigma_k)-1+\ln\left[\xi_{t-1}(i\to j|\sigma_k)+\beta_\xi U^{Subj}_{t-1}(i,j,k)\right]+\gamma_\xi=0$$

Отсюда:

$$\xi_t(i\to j|\sigma_k)=e^{-1+\gamma_\xi}\cdot e^{\ln\left[\xi_{t-1}(i\to j|\sigma_k)+\beta_\xi U^{Subj}_{t-1}(i,j,k)\right]}=$$

и далее:

$$\xi_t(i\to j|\sigma_k)=C_k\left[\xi_{t-1}(i\to j|\sigma_k)+\beta_\xi U^{Subj}_{t-1}(i,j,k)\right],\ \text{где}\ \ C=e^{-1+\gamma_\xi}$$

Из условия нормировки находим:

$$C_k \sum_{j=1}^{M} \left[\xi_{t-1}(i \to j | \sigma_k) + \beta_\xi U_{t-1}^{Subj}(i,j,k) \right] = 1$$

или

$$C_k = \frac{1}{1 + \beta_\xi \sum_{j=1}^{M} U_{t-1}^{Subj}(i,j,k)}; \quad \sum_{j=1}^{M} \xi_{t-1}(i \to j | \sigma_k) = 1; \quad \forall k \in \overline{1,N}$$

Следовательно

$$\xi_t(i \to j | \sigma_k) = \frac{1}{1 + \beta_\xi \sum_{j=1}^{M} U_{t-1}^{Subj}(i,j,k)} \xi_{t-1}(i \to j | \sigma_k) + \\ + \frac{\beta_\xi}{1 + \beta_\xi \sum_{q=1}^{M} U_{t-1}^{Subj}(i,q,k)} \cdot U_{t-1}^{Subj}(i,j,k) \tag{4.122}$$

Из этого уравнения следует, что если $\beta_\xi = 0$, т.е $\beta_\xi^{-1} = \tau_\xi = \infty$, то рейтинговое распределение сохраняется, т.е. «структура» группы «застывает» – «замерзает», если все полезности $U_{t-1}^{Subj}(i,j,k) = 0$, то место тот же эффект: рейтинговые распределения (а, следовательно, и ранговая структура) сохраняются. Наконец, если все полезности $U_{t-1}^{Subj}(i,j,k)$ одинаковы, или $U_{t-1,0}^{Subj} = U_0$, то

$$\xi_t(i \to j | \sigma_k) = -\frac{1}{1 + \beta_\xi M, U_0} \cdot \xi_{t-1}(i \to j | \sigma_k) + \frac{\beta_\xi}{1 + \beta_\xi M \cdot U_0} \tag{4.123}$$

В последней модели, как и в модели (4.104) $\beta_\xi^{-1} = \tau_\xi$ нельзя отождествлять с «психической температурой» введенной ранее, поскольку соответствующие распределения $\pi_t(i | \sigma_k)$ и $\xi_t(i \to j | \sigma_k)$ формально не совпадают с распределением Гиббса. Тем не менее, влияние этих параметров на результат поведения этих распределений оказывается аналогичным и поэтому, мы можем условно сохранить принятую терминологию.

4.6.6. Субъективные и объективные полезности

Вернемся к формулам (4.119) и (4.120). В обеих формулах содержатся субъективные полезности и, кроме того, принята гипотеза о том, что рейтинги зависят лишь от субъективных полезностей.

Объективная накопленная полезность к моменту *t* субъектом определяется по формуле:

$$U_t^{obj}(i \to \sigma_k) = m_i(t, t-1) U_{t-1}^{obj}(i | \sigma_k) + \sum_{j=1}^{M} \breve{U}_{t-1}^{obj}(j \to i | \sigma_k) - \sum_{j=1}^{M} \hat{U}_{t-1}^{obj}(i \to j | \sigma_k)$$

Смысл этой формулы:

$U_{t-1}^{obj}(i | \sigma_k)$ - объективная полезность индивидуума «*i*» накопленная к моменту *t-1*. Множитель $m_i(t, t-1)$ характеризует производство новой полезности субъектом *i* за

время $(t,t-1)$, за счет использования уже накопленной полезности. Полезность $\breve{U}_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)$ - объективная полезность, получаемая «*i*» от «*j*» в момент *t-1*, $\widehat{U}_{t-1}^{obj}(i\to j|\sigma_k)$ - объективная полезность, отдаваемая в момент *t-1* «*i*» для субъекта «*j*».

Суммы обозначают, что учитывается взаимодействие со всеми М членами группы. При этом принимается, что $\breve{U}_{t-1}^{obj}(j\to i|\sigma_k)=\hat{U}_{t-1}^{obj}(j\to i|\sigma_k)=0.$

Если рассматривается взаимодействие только двух субъектов, то есть пар субъектов, то будем использовать формулу

$$U_t^{obj}(i|\sigma_k)=m_i(t,t-1)U_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)+\breve{U}_{t-1}^{obj}(j\to i|\sigma_k)-\widehat{U}_{t-1}^{obj}(i\to j|\sigma_k) \qquad (4.124)$$

Субъективную полезность получим в результате трансформации первой теоремы Госсена применительно к взаимным полезностям. Предлагаемая модель субъективной полезности отражает следующее свойство (или закон Вебера–Фехнера): отдаваемая полезность переоценивается отдающим, получаемая полезность недооценивается получающим.

Представляется, что наиболее простая модель, учитывающая этот факт, имеет следующий вид:

$$\breve{U}_t^{Subj}(j\to i|\sigma_k)=\breve{U}_t^{obj}(j\to i|\sigma_k)\left[1-\frac{\breve{U}_t^{obj}(j\to i|\sigma_k)}{U_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)}\right] \qquad (4.125)$$

соответственно:

$$\hat{U}_t^{Subj}(i\to j|\sigma_k)=\hat{U}_t^{obj}(i\to j|\sigma_k)\left[1+\frac{\hat{U}_t^{obj}(i\to j|\sigma_k)}{U_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)}\right] \qquad (4.126)$$

Другие, более общие, зависимости могут быть взяты в виде:

$$\breve{U}_t^{Subj}(j\to i|\sigma_k)=\breve{U}_t^{obj}(j\to i|\sigma_k)\left[1-\varphi\frac{\breve{U}_t^{obj}(j\to i|\sigma_k)}{U_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)}\right] \qquad (4.127)$$

$$\hat{U}_t^{Subj}(i\to j|\sigma_k)=\hat{U}_t^{obj}(i\to j|\sigma_k)\left[1+\psi\frac{\hat{U}_t^{obj}(i\to j|\sigma_k)}{U_{t-1}^{obj}(i|\sigma_k)}\right] \qquad (4.128)$$

где $0<\varphi\le 1$; $0<\psi\le 1$.

Обозначая $x=\breve{U}_t^{obj}(j\to i|\sigma_k)$ и $y=\breve{U}_t^{Subj}(j\to i|\sigma_k)$, получим зависимость, показанную на рис. 4.19. $y=\varphi(x)$:

x	$1+\frac{x}{v}$	$x\left(1+\frac{x}{u}\right)$	ΔU_s
0	1	0	
1	1,1	0,11	1,1

2	1,2	2,4	1,3
3	1,3	3,9	1,5
4	1,4	5,6	1,4
5	1,5	7,5	1,9
6	1,6	9,6	2,1
7	1,7	11,9	2,3

Отдаваемая *i* полезность $\hat{U}_t(i \to j|\sigma_k)$ должна восприниматься, в соответствие с формулой (4.125) или (4.127) в сокращенном виде: $\hat{U}_t^{Subj} = x\left(1+\frac{x}{u}\right)$

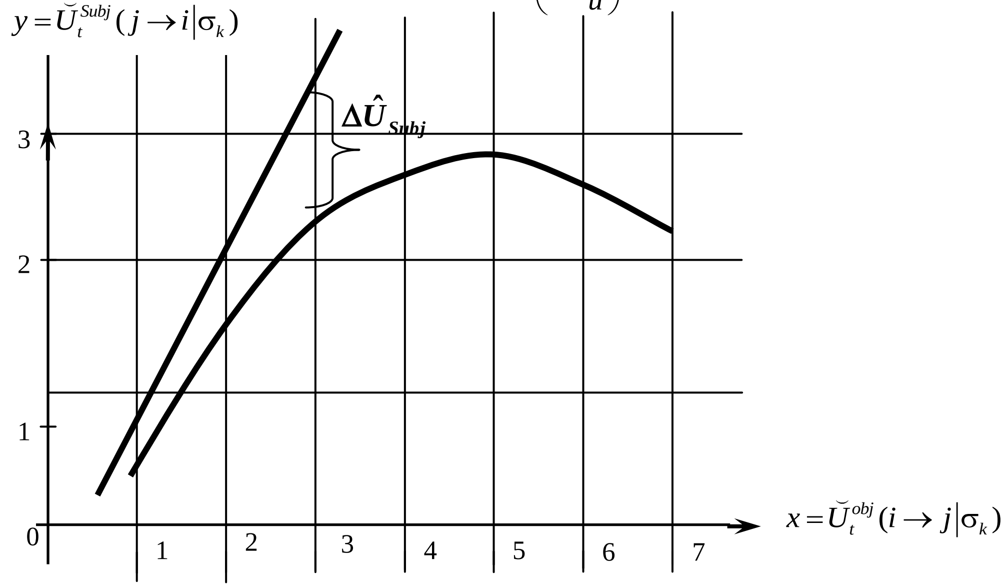
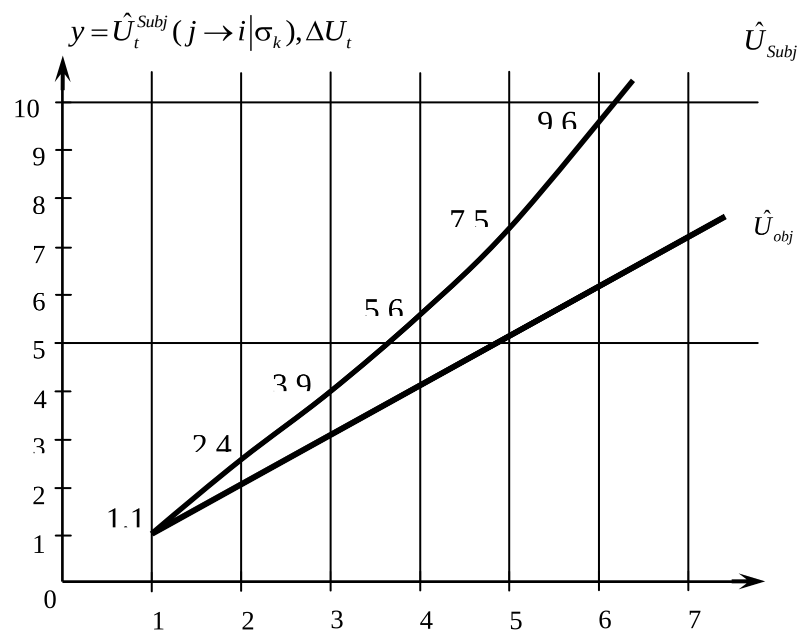


Рис. 4.19 Объективная и субъективная полезности «получающего» (по формуле (4.125)).

x	$1+\frac{x}{v}$	$x\left(1+\frac{x}{u}\right)$	ΔU_s
0	1	0	
1	1,1	0,11	1,1
2	1,2	2,4	1,3
3	1,3	3,9	1,5
4	1,4	5,6	1,4
5	1,5	7,5	1,9
6	1,6	9,6	2,1
7	1,7	11,9	2,3



$$x = \hat{U}_t^{obj}(i \to j \mid \sigma_k)$$

Рис. 4.20 Объективная и субъективная полезности «отдающего» (по формуле (4.126)).

Рассмотрены модели «субъективной полезности» (под «объективной полезностью» мы понимаем количество калорий, лечебные свойства медицинских препаратов, прочность или долговечность технических изделий). Они отражают как видно из графиков на рис. 4.19 и 4.20 свойства, созвучные с эффектом, который следует из одного из главных законов психологии, а именно – закона Вебера–Фехнера. Этот закон в макроэкономике трансформирован в 1-й закон Гессена.

4.6.7. Обобщение рассмотренной модели

Более полная модель относится ко всей группе M субъектов и ко всему множеству альтернатив. Так, полная накопленная полезность учитывает не одну альтернативу, а, в общем случае, подмножество альтернатив $S'_a \subset S_a$. Может быть построена модель для группы из 3-х взаимодействующих субъектов, 4-х субъектов и т.д.

Это изменение не внесет существенных изменений в модель. Есть, однако, две важные проблемы принципиального характера.

Первая проблема относится к принципиальным допущениям относительно взаимной информированности субъектов.

Вторая проблема касается учета качественных характеристик полезностей. Та теория, которая изложена в настоящей работе предполагает, что полезность выражается в универсальных единицах (например, утилях, или какой-либо общей (конвертируемой) валюте).

Однако если имеется в виду «натуральный обмен», то возникает проблема замещаемости и воспринимаемости «j» полезности, которой «может поделиться» «i». Готов ли студент, который не знает математики, воспринять какую-либо математизированную техническую дисциплину. Можно предложить множество примеров невосприимчивости субъектов к определенным «полезным» вещам.

Выше мы говорили, что, как минимум, можно выделить ресурсы материальные, энергетические и информационные.

Существенное различие между ними состоит в том, что материальные и энергетические ресурсы могут быть переданы единожды, с убылью их у отдающего, а информационные ресурсы могут передаваться многократно одним и тем же субъектом без потери их располагаемого объема у него.

Предложение, которое мы можем сделать сейчас, состоит в том, что это можно отразить как раз в моделях передачи полезностей.

Пусть некоторая часть полезности субъекта «*i*» представляет собой определенную информацию:

$$U_t^{obj}(i|\sigma_k) = Inf_t^{obj}(i|\sigma_k)$$

Заметим, что при передаче информационной полезности субъект расходует определенные материальные ресурсы – время, например. Поэтому передача информационных ресурсов не является полностью «нулевой» операцией. В упрощенной модели мы это обстоятельство учитывать не будем.

Тогда, можно положить, что при «отдавании» информационной полезности «количество» этой полезности у «*i*» не уменьшается. Зато:

$$\boldsymbol{\overline{Inf}_t^{obj}(i \to j|\sigma_k)} \neq 0.$$

Я могу бесконечное число раз рассказывать студентам о законах Ньютона, при этом моя «информационная полезность» не изменится, а информационная принимаемая полезность студентов, поскольку законы механики, например, обладают для них полезностью, возрастает.

В модели это может выглядеть так:

$$Inf_t^{obj}(i|\sigma_k) = const$$

$$Inf_t^{obj}(j|\sigma_k) = Inf_{t-1}^{obj}(j|\sigma_k) + \breve{Inf}_t^{obj}(i \to j|\sigma_k)$$

при передаче от «*i*» к «*j*».

Следующий вопрос, который требует дальнейшей разработки: причины, (стимулы) вызывающие передачу полезностей (обмен полезностями между субъектами), как группообразующий фактор (некоторые соображения по этому поводу см. выше).

Заметим, что для определения коэффициентов $m_i(t,t-1)$, характеризующих воспроизводство полезности субъектом *i* за время $\Delta t = (t,t-1)$ необходимо иметь модель его частной производственной функции, которая подобно функции Кобба – Дагласа может зависеть от факторов «труда» - L_i и «капитала» K_i.

4.6.8. Упрощенный вариант расчета взаимных полезностей для системы M:N = 2 x 2

Число субъектов в группе M = 2, число принимаемых во внимание альтернатив N = 2.

1. Взаимные интегральные полезности (объективные).

$$U_t^{obj}(2 \to 1) = \breve{U}_t^{obj}(2 \to 1|\sigma_1) + \breve{U}_t^{obj}(2 \to 1|\sigma_2) - \hat{U}_t^{obj}(1 \to 2|\sigma_1) - \hat{U}_t^{obj}(1 \to 2|\sigma_2) \tag{4.129}$$

это полезность «*2* для *1*»

Полезность «*1* для *2*»

$$U_t^{obj}(1 \to 2) = \breve{U}_t^{obj}(1 \to 2|\sigma_1) + \breve{U}_t^{obj}(1 \to 2|\sigma_2) - \hat{U}_t^{obj}(2 \to 1|\sigma_1) - \hat{U}_t^{obj}(2 \to 1|\sigma_2) \quad (4.130)$$

2. Взаимные субъективные полезности

Полезность «*2* для *1*»

$$U_t^{Subj}(2 \to 1) = \breve{U}_t^{Subj}(2 \to 1|\sigma_1) + \breve{U}_t^{subj}(2 \to 1|\sigma_2) - \hat{U}_t^{Subj}(1 \to 2|\sigma_1) - \hat{U}_t^{Subj}(1 \to 2|\sigma_2) \quad (4.131)$$

Полезность «*1* для *2*»

$$U_t^{Subj}(1 \to 2) = \breve{U}_t^{Subj}(1 \to 2|\sigma_1) + \breve{U}_t^{Subj}(1 \to 2|\sigma_2) - \hat{U}_t^{Subj}(2 \to 1|\sigma_1) - \hat{U}_t^{Subj}(2 \to 1|\sigma_2) \quad (4.132)$$

Распределение предметных предпочтений (I-го рода) определяется пользой, накопленной к моменту t субъективной полезностью по формуле:

$$\pi_t(i|\sigma_k) = \frac{\pi_{t-1}(i|\sigma_k) e^{\beta_\pi U_{t-1}^{Subj}(i|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{2} \pi_{t-1}(i|\sigma_q) e^{\beta_\pi U_{t-1}^{Subj}(i|\sigma_q)}} \quad (4.133)$$

где $i \in \overline{1,2} : k \in \overline{1,2}$

На каждом шаге (t, t-1) индивидуальные, накопленные предметные (I-го рода) полезности рассчитываются по формулам:

$$U_t^{Subj}(i|\sigma_k) = m_i(t, t-1) \cdot U_{t-1}^{Subj}(i|\sigma_k) + \breve{U}_{t-1}^{Subj}(j \to i|\sigma_k) - \hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to j|\sigma_k) \quad (4.134)$$

где $i, j \in \overline{1,2} : k \in \overline{1,2}$

Коэффициенты $m_i(t$, t-$1)$ задаются извне. Они определяют производство дополнительной полезности субъектом i за промежуток времени (t, t-1), если известна его производственная функция:

$$m_i(t, t-1) = F(L_i, K_i)$$

«Труд» L_i и «капитал» K_i служат факторами наполнения конкретным смыслом теории полезности. Ниже мы приводим соответствующие формулы с учетом того, что

$$\hat{U}_{t-1}^{Subj}(i \to i|\sigma_k) = \breve{U}_{t-1}^{Subj}(i \to i|\sigma_k) = 0; (\forall k \in \overline{1,2})$$

Условные дифференциальные рейтинги определим только через взаимные субъективные полезности:

$$\xi_t(1 \to 1|\sigma_k) = \frac{\xi_{t-1}(1 \to 1|\sigma_k)}{\xi_{t-1}(1 \to 1|\sigma_k) + \xi_{t-1}(1 \to 2|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) - \overline{U}_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) \right]}} \quad (4.135)$$

$$\xi_t(1 \to 2|\sigma_k) = \frac{\xi_{t-1}(1 \to 2|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) - U_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) \right]}}{\xi_{t-1}(1 \to 1|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) - U_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) \right]} + \xi_{t-1}(1 \to 1|\sigma_k)} \quad (4.136)$$

$$\xi_t(2 \to 1|\sigma_k) = \frac{\xi_{t-1}(2 \to 1|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) - U_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) \right]}}{\xi_{t-1}(2 \to 1|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) - U_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) \right]} + \xi_{t-1}(2 \to 2|\sigma_k)} \quad (4.137)$$

$$\xi_t(2 \to 2|\sigma_k) = \frac{\xi_{t-1}(2 \to 2|\sigma_k)}{\xi_{t-1}(2 \to 2|\sigma_k) e^{\beta_\xi \left[\breve{U}_{t-1}^{Subj}(1 \to 2|\sigma_k) - U_{t-1}^{Subj}(2 \to 1|\sigma_k) \right]} + \xi_{t-1}(2 \to 2|\sigma_k)} \tag{4.138}$$

Заметим, что в случае парных взаимодействий должны выполняться условия нормировки:

$$\xi_t(1 \to 1|\sigma_k) + \xi_t(1 \to 2|\sigma_k) = 1; \forall k \in \overline{1, N} (\forall k \in \overline{1,2})$$

$$\xi_t(2 \to 1|\sigma_k) + \xi_t(2 \to 2|\sigma_k) = 1; (\forall k \in \overline{1,2})$$

Используя это свойство, можно упростить соотношения и объем расчетов вычисляя, скажем с помощью формул (4.136) и (4.137) рейтинги $\xi_t(1 \to 2|\sigma_k)$ и $\xi_t(2 \to 1|\sigma_k)$, а затем с помощью условий нормировки, величины $\xi_t(1 \to 1|\sigma_k)$ и $\xi_t(2 \to 2|\sigma_k)$ (то есть – саморейтинги).

Далее подсчитываются субъективные полезности с помощью формул (4.125) и (4.126) или (4.127) и (4.128). В последнем случае величины φ и ψ задаются априорно как степень отличия воспринимаемого действия от реального действия.

Конечной целью теории взаимной полезности является создание математического аппарата для анализа процессов принятия решений в группах субъектов. Настоящая работа лишь частично решает эту задачу, так как рассматривается группа лишь из двух субъектов, делается ряд упрощающих предположений. В работе не рассмотрены вопросы, связанные со структурой энтропийного пространства каждого из взаимодействующих субъектов. В теории содержатся структурные параметры, которые должны определяться опытным путем. Можно, однако, провести численное моделирование с целью определения влияния величины этих параметров на результаты (распределение предпочтений, моменты принятия решений, корреляционные моменты).

В приведенной теории «передача» полезностей рассматривается как процесс, имеющий место в любой момент времени.

В действительности опыт говорит о том, что «передача» полезности происходит тогда, когда возникают определенные условия. Эти условия было бы логично связать с энтропийными порогами для предметных и рейтинговых энтропий. Таким образом, если стратегии являются альтернативами и предусматривают «передачу» полезностей, то выбор той или иной стратегии и соответственно выбор момента «передачи» и величины передаваемой полезности осуществляются с учетом моментов пересечения определенных энтропийных порогов.

Развитие в этом направлении представляет собой задачу дальнейшего исследования и развития теории взаимных полезностей.

4.6.9. Теория конфликтов с учетом взаимных полезностей

Дальнейшее исследование предполагает изучение динамики конфликтов в группе субъектов с учетом взаимных полезностей.

Последовательность генезиса предпочтений не обязательно строго выдерживается, скорее всего, имеет место определенный итерационный процесс. Сложность приводимых формул не должна пугать, во-первых, потому, что в действительности реальные психические процессы не менее, а скорее более сложны, а во-вторых, потому, что

в реальных условиях число альтернатив σ_k – N_i, изучаемых одновременно, и число субъектов M_j, между которыми распределяются рейтинги не велико. Считается, что оптимальные значения:

$$\boldsymbol{N_{i\text{opt}}} \le 5\ldots6;$$

$$\boldsymbol{M_{j\text{opt}}} \le 6\ldots7.$$

Очевидно, что оба процесса: определение распределений $\pi_i(\sigma_k)$ и определение распределений $\xi(j\to i \mid \sigma_k)$ «разнесены» во времени и, что различные субъекты имеют индивидуальные навыки и методы изучения и разрешения проблемно-ресурсных ситуаций и в этом также проявляется особенность субъективного анализа.

Введение взаимных полезностей $\hat{\boldsymbol{U}}$ и $\breve{U}$ позволяет в рамках субъективного анализа в формализованном виде отразить понятия индивидуализма и коллективизма. Если имеется субъект i, для которого все $\hat{\boldsymbol{U}}$ и $\breve{U}$ равны нулю, то его позиция отвечает максимальному индивидуализму: он может обходиться без группы и группа может обходиться без него. Величина взаимных полезностей, вообще, характеризует «тесноту» связи группы. *При обращении их в нуль для всех членов группы группа распадается!*

Подобно тому, как это было сделано для предпочтений первого рода $\pi(\sigma_k)$ в главе 3, где были введены *позитивные* и *негативные* предпочтения $\pi^-(\sigma_k)$ и $\pi^+(\sigma_k)$, связанные с «*полезностями*» $U(\sigma_k)$ и «*вредностями*» $L(\sigma_k)$, мы можем ввести позитивные и негативные рейтинги $\xi^+(i, j|\sigma_k)$ и $\xi^-(i, j|\sigma_k)$, которые можно связать с ожидаемой «пользой j для i» $\bar{U}(i, j \mid \sigma_k)$ и ожидаемым «вредом j для i» $\bar{L}(i, j \mid \sigma_k)$. При этом предполагается, что субъект i в состоянии проводить соответствующий анализ раздельно, в том числе, в определенной последовательности во времени. Критерии выбора, которые органически «встроены» в сознание субъекта также могут быть сепарированы, так сказать, «во времени и в пространстве»: $\Phi^+_{\xi i}$ и $\Phi^-_{\xi i}$. Мы не приводим здесь соответствующих выкладок, поскольку они практически аналогичны тем, которые даны в гл. 3. Как и там, мы готовы здесь повторить *гипотезу* о том, что при назначении «негативных» рейтингов ξ^-_j носитель — субъект i находится в дискомфортном психическом состоянии, соответствующим большой энтропии рейтингов, а при назначении «позитивных» ξ^+_j — в наиболее комфортном состоянии, соответствующим меньшей энтропии рейтингов.

Очевидно, что распределение ξ^+ и ξ^- порождают две энтропии: H^+_ξ и H^-_ξ, соответственно два виды информации:

$$\boldsymbol{I^+_\xi = H^+_\xi - H^+_\xi(|A)};$$

$$\boldsymbol{I^-_\xi = H^-_\xi - H^-_\xi(|A)},$$

где A — некоторое событие (или сообщение), приводящее к изменению энтропий H^+_ξ и H^-_ξ.

Представляет интерес задача согласования рассмотренной выше схемы «*обмена полезностями*» с принципом Пигу-Дальнона, который накладывает существенные ограничения на параметры обмена.

В заключении этого параграфа рассмотрим один частный случай. Обозначим $\breve{U}(j \to i \mid \sigma_k) = U_{ji}$ и $\xi(j\to i \mid \sigma_k) = \xi^+_{ji}$.

Положим, что для всех $j \neq i$ $U_{ji} = U_e$, то есть «никто» не оказывает помощи i. Критерий примет вид:

$$\Phi^+_{\xi i} = -\sum_{j=1}^{M} \xi^+_{ji} \ln \xi^+_{ji} + \beta \sum_{j=1}^{M} \xi^+_{ji} U_{ji} + \gamma \sum_{j=1}^{M} \xi^+_{ji}.$$

Из условий

$$\left.\frac{\partial \Phi^+_{\xi i}}{\partial \xi^+_{ji}}\right|_{j\neq i} = -\ln \xi^+_{ji} + \beta U_e - 1 + \gamma = 0; \quad \left.\frac{\partial \Phi^+_{\xi i}}{\partial \xi^+_{ji}}\right|_{j=i} = -\ln \xi^+_{ii} + \beta U_{ii} - 1 + \gamma = 0, ,$$

найдем

$$\xi^+_{ji} = C_1 e^{\beta U_e}; \ \xi^+_{ii} = C_2 e^{\beta U_{ii}},$$

здесь $C_1 = C_2 = C = e^{-1+\gamma}$.

Из условия нормировки найдем:

$$Ce^{\beta U_e}\left(M-1\right) + Ce^{\beta U_{ii}} = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{e^{\beta U_e}\left(M-1\right) + e^{\beta U_{ii}}}.$$

Тогда

$$\left.\xi^+_{ji}\right|_{j\neq i} = \frac{e^{\beta U_e}}{e^{\beta U_e}\left(M-1\right) + e^{\beta U_{ii}}} = \frac{1}{M-1+e^{\beta\left(U_{ii}-U_e\right)}};$$

$$\xi^+_{ii} = \frac{e^{\beta\left(U_{ii}-U_e\right)}}{M-1+e^{\beta\left(U_{ii}-U_e\right)}}.$$

Все субъекты $j \neq i$ имеют одинаковые рейтинги. Если их полезности $U_e \to 0$, то все $\left.\xi^+_{ji}\right|_{j\neq i} \to \frac{1}{M-1+e^{\beta U_{ii}}}$ (и при $U_{ii} \to \infty$, $\xi^+_{ji} \to 0$); $\xi^+_{ii} \to \frac{e^{\beta U_{ii}}}{M-1+e^{\beta U_{ii}}}$ (и при $U_{ii} \to \infty$, $\xi^+_{ii} \to 1$). Таким образом, условия нормировки выполняются. При одновременном стремлении к нулю U_e и U_{ii} $\xi^+_{ji} \to \xi^+_{ii} \to \frac{1}{M}$, то есть при всеобщей «бесполезности» все рейтинги равны — наступает *полное равенство*.

Видим, что когда все полезности одинаковы: $U_e = U_{ii}$, то и все рейтинги одинаковы $\xi^+_{ji} = \xi^+_{ii} = \frac{1}{M}$. Наконец, если $U_{ii} = 0$ (собственная полезность i равна нулю), то рейтинги распределяются следующим образом

$$\xi^+_{ji} = \frac{1}{M-1+e^{-\beta U_e}};$$

$$\xi_{ii}^{+} = \frac{e^{-\beta U_e}}{M - 1 + e^{-\beta U_e}}.$$

Отношения рейтингов

$$\frac{\xi_{ji}^{+}}{\xi_{ii}^{+}} = e^{\beta U_e},$$

то есть, чем больше абсолютная полезность U_e, тем больше это отношение. При $U_e \to \infty$, отношения рейтингов также стремится к бесконечности.

Рост отношений рейтингов носит *экспоненциальный характер*. Аналогичные результаты получаются, если использовать функцию полезности вида:

$$U^{*}_{ji} = U_{ji} + \alpha \ln U_{ji},$$

соответственно

$$U^{*}_{ji} = U_e + \alpha \ln U_e;$$

$$U^{*}_{ii} = U_{ii} + \alpha \ln U_{ii}.$$

Тогда рейтинги определяются формулами при $\alpha = 1$:

$$\xi_{ji}^{+} = \frac{U_e^{\beta} \cdot e^{\beta Ue}}{(M-1)U_e^{\beta} \cdot e^{\beta Ue} + U_{ii}^{\beta} \cdot e^{\beta U_{ii}}}$$

$$\xi_{ii}^{+} = \frac{U_{ii} e^{\beta U_{ii}}}{\left(M-1\right) U_e e^{\beta U_e} + U_{ii} e^{\beta U_{ii}}}.$$

Здесь видим, что при $U_e \to 0$; $\xi^{+}_{ji} \to 0$; $\xi^{+}_{ii} \to 1$, а при $U_e \to U_{ii}$ $\xi_{ji}^{+} \to \xi_{ii}^{+} \to \frac{1}{M}$ и условия нормировки в каждом случае выполняются.

4.7. Консолидация ресурсов в группе

В данном параграфе полезности отождествляются с ресурсами и задача несколько сужается.

Рассматривается ситуация, когда в группе имеются корпоративные проблемы. При этом члены группы могут договориться об объединении усилий при их разрешении. Речь идет о стадии анализа до момента принятия решения о выборе цели. В зависимости от того, как определены индивидуальные альтернативы, кто является распорядителем консолидированных ресурсов, как распределяется ответственность за реализацию корпоративной альтернативы, возможны различные варианты консолидации ресурсов. Мы рассмотрим некоторые частные случаи и на простых примерах, определим, как в результате консолидации изменяются предпочтения, индивидуальные энтропии, связанные с изменением энтропии порции информации.

Пример 1 Рассматривается группа, состоящая из двух субъектов S_ξ: (Σ_1, Σ_2). Каждый из них первоначально изучает две альтернативы так, что

$$S_{a1}: (\sigma_1, \sigma_2);\ S_{a2}: (\sigma_2, \sigma_3).$$

Совпадающей является альтернатива σ_2 и пусть эта альтернатива такова, что выполняется условие:

$$\boldsymbol{P_1}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{01} \to \sigma_2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P_2}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{02} \to \sigma_2}), \tag{4.139}$$

где P_1 и P_2 соответствующие проблемы первого и второго субъектов, σ_{01} и σ_{02} их исходные состояния. При справедливости условия (4.139) альтернатива σ_2 может быть реализована каждым из субъектов либо совместными усилиями (при наличии достаточных ресурсов). Если имеет место условие

$$\boldsymbol{P_1}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{01} \to \sigma_2}) \Rightarrow \boldsymbol{P_2}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{02} \to \sigma_2}), \tag{4.140}$$

то решение корпоративной проблемы может быть поручено первому субъекту, либо она может разрешаться совместно. Если, наоборот

$$\boldsymbol{P_2}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{02} \to \sigma_2}) \Rightarrow \boldsymbol{P_1}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_{01} \to \sigma_2}), \tag{4.141}$$

то решение корпоративной проблемы поручается второму субъекту либо она разрешается сообща.

Дополним множество S_{a1} и S_{a2} так, чтобы они совпадали, то есть содержали все три альтернативы

$$\boldsymbol{S'_{a1} = S'_{a2} = S_a}\text{: } (\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}).$$

Этот описанный ранее прием позволяет каждый раз организовать общее «поле» игры для нескольких субъектов. При этом придется положить $\pi_1(\sigma_3) = \pi_2(\sigma_1) = 0$. В обозначении $\pi_j(\sigma_i)$, j — номер субъекта, i — номер альтернативы. Пусть имеют место неравенства

$$\boldsymbol{R_1^r}(\sigma_2) > \boldsymbol{R_1^r}(\sigma_1);\ \boldsymbol{R_1^r}(\sigma_1) < \boldsymbol{R_1^d} < \boldsymbol{R_1^r}(\sigma_2);$$
$$\boldsymbol{R_2^r}(\sigma_2) > \boldsymbol{R_1^r}(\sigma_3);\ \boldsymbol{R_2^r}(\sigma_3) < \boldsymbol{R_2^d} < \boldsymbol{R_2^r}(\sigma_2).$$

Таким образом, корпоративную альтернативу σ_2 не один из субъектов в одиночку реализовать не может, поэтому следует заведомо положить $\pi_1(\sigma_2) = 0$; $\pi_2(\sigma_2) = 0$. В исходной ситуации распределения $\pi_1(\sigma_i)$ и $\pi_2(\sigma_i)$ на расширенном множестве S_a даются табл. 1:

Таблица 1

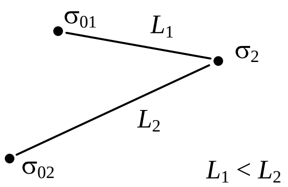
σ_i	σ_1	σ_2	σ_3
$\pi_1(\sigma_i)$	1	0	0
$\pi_2(\sigma_i)$	0	0	1

а энтропии $H_{\pi 1} = 0$; $H_{\pi 2} = 0$. Далее полагаем, что предпочтения моделируются функцией

$$\boldsymbol{\pi_j(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta x_{ji}}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\beta x_{ji}}}}, \tag{4.142}$$

где $x_{ji} = \dfrac{R_j^r(\sigma_i)}{R_j^d}$; располагаемые ресурсы R_j^d — универсальны.

Располагаемые ресурсы будем считать такими, что они обеспечивают «достижимость» альтернативы σ_1 для первого субъекта и альтернативы σ_3 для второго субъекта. Другими словами проблемы $\sigma_{01} \to \sigma_1$ и $\sigma_{02} \to \sigma_3$ разрешимы. Пусть, кроме того, выполняется условие



$$R_1^r(\sigma_2) < R_2^r(\sigma_2).$$

Последнее означает, что выгодно предложить решать проблему $\sigma_{01} \to \sigma_2$ первому субъекту. Различие в потребных ресурсах для достижения σ_2, возможно, обусловлено различием начальных позиций субъектов.

Тогда второй субъект передает первому ресурсы так, чтобы выполнилось отношение $\sigma_2 \succ \sigma_1$, если это при данной ресурсной ситуации возможно.

После передачи ресурсов, располагаемые ресурсы первого субъекта $R_1^{d'} = R_1^r(\sigma_2) + \delta$; $(\delta > 0)$.

В результате такой консолидации

$$\boldsymbol{x}_{11} = \frac{\boldsymbol{R}_1^r(\sigma_1)}{\boldsymbol{R}_1^d}; \quad \boldsymbol{x}_{12} = \frac{\boldsymbol{R}_1^r(\sigma_2)}{\boldsymbol{R}_1^r(\sigma_2)+\delta};$$

$$\boldsymbol{x}_{21} = \frac{\boldsymbol{R}_1^r(\sigma_2)}{\boldsymbol{R}_1^r(\sigma_2)+\delta}; \quad \boldsymbol{x}_{23} = \frac{\boldsymbol{R}_2^r(\sigma_3)}{\boldsymbol{R}_2^d + \boldsymbol{R}_1^d - \boldsymbol{R}_1^r(\sigma_2) - \delta}.$$

Субъект «2» передавая ресурсы субъекту «1», сохраняет интерес к альтернативе σ_2 и, в связи с этим мы предполагаем, что $x_{12} = x_{21}$ (субъект 1 «строит мост», но пользоваться будут оба. При этом «2» участвует частью своих ресурсов). Поскольку в начальном состоянии S_{a1} и S_{a2} содержат по одной альтернативе, то энтропии $H^0_{\pi 1} = H^0_{\pi 2} = 0$.

Для численного примера выберем следующие исходные данные:

$$\boldsymbol{R_1^r(\sigma_1)} = 3{,}0;\ \boldsymbol{R_1^r(\sigma_2)} = 3{,}5;\ \boldsymbol{R_2^r(\sigma_2)} = 4{,}0;\ \boldsymbol{R_1^d} = 3{,}1;\ \boldsymbol{R_2^d} = 3{,}8.$$

Здесь $R_1^r(\sigma_2) < R_2^r(\sigma_2)$. Пусть «2» передает «1» количество ресурсов 0,7 так, что после передачи $R_1^{d'} = 3{,}8$; $R_2^{d'} = 3{,}1$. В этом случае

$$\boldsymbol{x}_{11} = \frac{3}{3{,}1} = 0{,}96774; \quad \boldsymbol{x}_{12} = \frac{3{,}5}{3{,}8} = 0{,}92105;$$

$$\boldsymbol{x}_{22} = \frac{3{,}5}{3{,}6} = 0{,}92105; \quad \boldsymbol{x}_{23} = \frac{3}{3{,}1} = 0{,}96774.$$

Принято, что $x_{12} = x_{21}$: оба субъекта воспринимают корпоративную альтернативу одинаково. Получаем $\pi_1(\sigma_1) = 0{,}48834$; $\pi_1(\sigma_2) = 0{,}51166$; $\pi_2(\sigma_1) = 0{,}51166$; $\pi_2(\sigma_3) = 0{,}48834$. Энтропии после передачи ресурсов $H_{\pi 1} = H_{\pi 2} = 0{,}69281$, приращение энтропий $\Delta H_\pi =$

0,00337. Этот численный пример имеет частный характер. Не всегда удается в результате передачи ресурсов обеспечить предпочтительность корпоративной проблемы (альтернативы). Заметим, что для обеспечения условия $\pi_1(\sigma_2) > \pi_1(\sigma_1)$ и $\pi_2(\sigma_2) > \pi_2(\sigma_3)$ передача осуществлена с «поощряющим избытком». Отмеченного выше недостатка рассмотренной схемы лишена схема корпоратизации проблем и консолидированного использования ресурсов предлагается в следующем примере.

Пример 2 Субъекты группы состоящей из двух субъектов ($M = 2$) имеют одно и то же множество допустимых состояний S_σ: (σ_1, σ_2, σ_3). Состояния σ_1 и σ_3 достижимы каждым в отдельности при наличии располагаемых ресурсов $R_1{}^d$ и $R_2{}^d$, а состояние σ_2 для каждого в отдельности не достижимо. Это означает, что выполняются условия:

$\boldsymbol{R_1{}^r(\sigma_2) > R_1{}^d}$; $\boldsymbol{R_1{}^r(\sigma_1) > R_1{}^r(\sigma_3)}$;

$\boldsymbol{R_1{}^r(\sigma_3) < R_1{}^d}$;

$\boldsymbol{R_2{}^r(\sigma_1) < R_2{}^d}$;

$\boldsymbol{R_2{}^r(\sigma_2) > R_2{}^d}$; $\boldsymbol{R_2{}^r(\sigma_3) > R_2{}^r(\sigma_1)}$;

$\boldsymbol{R_2{}^r(\sigma_3) < R_2{}^d}$.

Если $R_1{}^r(\sigma_1) \neq R_2{}^r(\sigma_2)$, то при консолидации ресурсов выбираем большее из них: если $R_2{}^r(\sigma_2) > R_1{}^r(\sigma_2)$, то выбирается $R_2{}^r(\sigma_2)$. Схема решения проблемы в данном примере предполагает участие в определенной пропорции в реализации σ_2: затраты, направляемые на реализацию σ_2 теперь делятся между субъектами так, что

$$\boldsymbol{R_1{}^{r\prime}(\sigma_2) = \mu R_2{}^r(\sigma_2)};$$

$$\boldsymbol{R_2{}^{r\prime}(\sigma_2) = (1-\mu) R_2{}^r(\sigma_2)};\ \mu \in [0, 1].$$

Должно выполняться условие:

$$\boldsymbol{R_2^r(\sigma_2) + \varepsilon < R_1^d + R_2^d};\ \varepsilon > 0$$

Пусть $R_2^r(\sigma_2) = \eta\left(R_1^d + R_2^d\right)$ и, кроме того

$$\boldsymbol{R_2^r(\sigma_2) = k_1 R_1^d};\ \ \boldsymbol{R_2^r(\sigma_2) = k_2 R_2^d}\ \ (k_i > 1).$$

Найдем, что $\eta = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Результаты расчетов численного примера приведены в табл. 3. Модель распределения предпочтений примем ту же, что и в предыдущем примере, положим $\beta = 1$. До решения о консолидации ресурсов множества альтернатив $S_{a1} = S_{a2} = S_a$ и включали две альтернативы: σ_1 и σ_3. Консолидация приводит к расширению S_a на одну альтернативу σ_2 ($N = 3$). Положим, что $\mu = 0{,}5$, то есть субъекты в равной мере участвуют в достижении σ_2.

Из табл. 2 видим, что не один из субъектов не в состоянии реализовать σ_2, опираясь только на свои ресурсы.

$$\boldsymbol{k}_1 = \frac{\boldsymbol{R_2^d(\sigma_2)}}{\boldsymbol{R_1^d}} = \frac{5}{3} = 1{,}666;\quad \boldsymbol{k}_2 = \frac{\boldsymbol{R_2^r(\sigma_2)}}{\boldsymbol{R_2^d}} = \frac{5}{4} = 1{,}25;\quad \eta = \frac{1{,}666 \cdot 1{,}25}{1{,}666 + 1{,}25} = 0{,}7142.$$

Таблица 2 **НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ**

Субъект 1	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	$H_{\pi 1}$ = 0,6795
	$R_1^r(\sigma_i)$	3	4	2	
	x_{1i}	1	∞	0,666	
	$e^{-\beta x_{1i}}$	0,3679	0	0,5134	
	$\pi_1(\sigma_i)$	0,4175	0	0,5825	
Субъект 2	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	$H_{\pi 2}$ = ln2 = 0,6795
	$R_2^r(\sigma_i)$	3	5	3	
	X_{2i}	0,75	∞	0,75	
	$e^{-\beta x_{2i}}$	0,4724	0	0,4724	
	$\pi_2(\sigma_i)$	0,5	0	0,5	

Таблица 3 **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПОСЛЕ КОНСОЛИДАЦИИ**

Субъект 1	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	$H'_{\pi 1}$ = 1,07846
	$R_1^{r'}(\sigma_i)$	3	$\mu\cdot 5 = 2{,}5$	2	
	$R_1^{d'}(\sigma_i)$	3 + ε	5,00 + ε	3 + ε	
	x'_{1i}	1	0,5	0,666	
	$e^{-\beta x'_{1i}}$	0,3679	0,0065	0,5134	
	$\pi'_1(\sigma_i)$	0,2473	0,4076	0,3451	
Субъект 2	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	$H'_{\pi 2}$ = ln2 = 1,09137
	$R_2^{r'}(\sigma_i)$	3	$\mu\cdot 5 = 2{,}5$	3	
	$R_2^{d'}(\sigma_i)$	4 + ε	5,0 + ε	4 + ε	
	x'_{2i}	0,75	0,5	0,75	
	$e^{-\beta x'_{2i}}$	0,4724	0,6065	0,4724	
	$\pi'_2(\sigma_i)$	0,3045	0,3910	0,3045	

Из табл. 3 видим, что после консолидации располагаемые ресурсы оказываются различными для различных альтернатив. Это объясняется тем, что консолидированные ресурсы по предположению не могут быть использованы каждым субъектом для других целей, кроме σ_2.

Видим, что в результате консолидации ресурсов и расширения множества S_a *энтропия обеих субъектов увеличилась* — имеет место производство энтропии внутри системы и импорт информации:

$$\boldsymbol{I}_{\pi 1} = \boldsymbol{H}_{\pi 1} - \boldsymbol{H'}_{\pi 1} = 0{,}6795 - 1{,}07846 = -0{,}39896,$$

$$I_{\pi 2} = H_{\pi 2} - H'_{\pi 2} = 0{,}6931 - 1{,}09137 = -0{,}39827.$$

Импорт информации для обоих субъектов практически одинаков. По-видимому, это объясняется тем, что они участвуют в реализации σ_2 на паритетных началах: $\mu = 0{,}5$.

Пример 3 Рассмотрим предыдущую задачу, однако предположим теперь, что модель распределения имеет вид

$$\pi_j(\sigma_i) = \frac{x_{ji}^{\alpha} e^{-\beta x_{ji}}}{\sum\limits_{k=1}^{N} x_{ji}^{\alpha} e^{-\beta x_{ji}}} \tag{4.143}$$

при дополнительном условии, что структурные параметры α и β одинаковы для первого и второго субъектов.

Для упрощения расчетов положим $\alpha = \beta = 1$. Распределение (4.143) имеет максимум в точке $x^* = \dfrac{\alpha}{\beta}$, для $\forall j \in \overline{1, M}$. Это означает, что если выполняются неравенства

$$\frac{\alpha}{\beta} < x'_{ji} < x_{ji}, \quad \text{то} \quad \pi_j\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > \pi'_j(\sigma_i) > \pi_j(\sigma_i),$$

и, наоборот, если

$$x_{ji} < x'_{ji} < \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{то} \quad \pi_j(\sigma_i) < \pi'_j(\sigma_i) < \pi_j\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

В первом случае «направление» неравенств для x_{ji} и $\pi_j(\sigma_i)$ противоположно, во втором случае — одинаково. Результаты расчетов при тех же исходных условиях представлены в табл. 4, 5.

Таблица 4

НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Субъект 1	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3
	$\pi_1(\sigma_i)$	0,5186	0	0,4820
	$H_{\pi 1} = 0{,}6925$			
Субъект 2	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3
	$\pi_2(\sigma_i)$	0,5	0	0,5
	$H_{\pi 2} = 0{,}6931$			

Таблица 5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПОСЛЕ КОНСОЛИДАЦИИ

Субъект 1	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3
	$\pi'_1(\sigma_i)$	0,3628	0,2996	0,3376

	$H'_{\pi 1} = 1{,}09430$			
Субъект 2	σ_i	σ_1	σ_2	σ_3
	$\pi'_2(\sigma_i)$	0,35015	0,2997	0,35015
	$H_{\pi 2} = 1{,}0960$			

Из сравнения табл. 2, 3 и 4, 5 видно, что в первом случае (для «радикального» распределения), корпоративная альтернатива σ_2 после принятия решения о консолидации ресурсов предпочтительнее остальных альтернатив (σ_1 и σ_3), во втором случае предпочтение σ_2 после консолидации оказывается ниже по сравнению с предпочтениями σ_1 и σ_3 как у первого субъекта, так и у второго субъекта.

В первом случае, скорее всего, будет принято решение о консолидации и σ_2 будет в дальнейшем выбрана как цель.

Во втором случае консолидация ресурсов и включение дополнительной альтернативы σ_2 в множество S_a могут показаться обоим субъектам не выгодными, а в качестве цели будет выбрана одна из альтернатив σ_1, σ_3.

4.8. Агрегирование рейтинговых предпочтений

В предыдущем параграфе, мы рассмотрели индивидуальные рейтинги, дифференцированные по альтернативам $\sigma_k \in S_{ai}$. Задачей, которая естественным образом возникает на пути исследования предпочтений, является задача их агрегирования, а также агрегирования предпочтений I рода.

Первый шаг — агрегирование индивидуальных рейтингов на множестве альтернатив S_{ai}, который состоит в следующем: субъект i агрегирует дифференциальные рейтинги субъекта j $\xi(i, j| \sigma_k)$ в единый рейтинг $\xi(j| i)$ («рейтинг j с точки зрения i»), отражающий общую полезность j для i на всем множестве альтернатив S_{ai}. Здесь есть еще несколько возможностей:

При формировании рейтинга $\xi(j| i)$ субъект i не учитывает мнение других членов группы и не дифференцирует их по значимости — предпочтительности альтернатив σ_k. В этом случае $\xi(j| i)$ можно определить формулой:

$$\xi(j \mid i) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \xi(i, j \mid \sigma_k). \tag{4.144}$$

Величины $\xi(j| i)$ нормируются условием:

$$\sum_{j=1}^{M_i} \xi(j \mid i) = 1.$$

Заметим, что величина $\frac{1}{N_i}$ есть предпочтение каждого $\sigma_k \in S_{ai}$, если они все одинаково предпочтительны.

Естественным обобщением формулы (4.144) является формула

$$\xi(j \mid i) = \sum_{k=1}^{N_i} \pi_i(\sigma_k) \xi(i, j \mid \sigma_k). \tag{4.145}$$

В этом случае рейтинг $\xi(j|\,i)$ агрегирует дифференциальные рейтинги с весами равными предпочтениям альтернатив $\sigma_k \in S_{ai}$.

Рейтинги $\xi(j|\,i)$, как впрочем, и $\xi(i, j|\,\sigma_k)$ могут формироваться субъектом i с учетом мнений других членов группы («агентов»). При этом эти мнения «других» могут быть функциями выработанных ими рейтингов: $\xi(j|\,q)$ или $\xi(q, j|\,\sigma_k)$, $q \in \overline{1, M_i}$, $j \in \overline{1, M_q}$, если, конечно, эта информация доступна i.

Необходимо учитывать, что в общем случае множества альтернатив S_{aq} могут не совпадать с S_{ai} и между собой. Кроме того, каждый субъект из $S_{\xi i}$ может воспринимать группу « по-своему», то есть считать себя членом группы, отличной от $S_{\xi i}$. Здесь $S_{\xi i}$ — группа, которую изучает и оценивает субъект i. Каждый раз следует оговаривать условия нормировки.

Рассмотрим одну из схем, когда при определении рейтинга каждого субъекта мнение других членов группы учитывается в виде «веса» равного рейтингу данного субъекта, установленного другими субъектами. Эту схему можно назвать «*схемой круговой поруки*».

Пусть рейтинг $\xi(j|\,i)$ определяется по правилу, выраженному формулой

$$\xi(j\,|\,i)=\sum_{q=1}^{M}\xi(j\,|\,q)\xi(q\,|\,i). \tag{4.146}$$

Принимается, что множества $S_{\xi i}$ всех членов группы ($i \in 1, N$) совпадают и субъект i располагает точной информацией о $\xi(j|\,q)$, назначенных субъекту j другими субъектами группы.

Соотношения (4.146) можно рассматривать как уравнения, связывающие рейтинги $\xi(j|\,i)$, количество которых $M{\times}M$. К уравнениям (4.146) следует добавить условия формировки

$$\sum_{j=1}^{M}\xi(j\,|\,i)=1 \text{ для } \forall i\in\overline{1,M}.$$

Таким образом, для $M{\times}M$ переменных $\xi(j|\,i)$ имеем $M{\times}(1 + M)$ уравнений. Можно показать, что эта система имеет единственное решение

$$\xi(j\,|\,i)=\frac{1}{M};\ (\forall i,j\in\overline{1,M}),$$

то есть — все $\xi(j|\,i)$ одинаковы. Следовательно, имеет место Микро-Теорема: **в условиях «*круговой поруки*» рейтинги всех членов группы одинаковы**.

Посмотрим, можно ли выйти за пределы этого тривиального случая. Очевидно, для этого нужно модифицировать уравнение (4.146).

Предположим, что имеются априорные рейтинги $\xi(j|\,0)$ либо имевшие место на предыдущем этапе, либо назначаемые «внешним» субъектом — «*иерархом*» которого можно назвать «*третейским судьей*». Будем считать априорные рейтинги также нормированными на единицу.

Вместо системы (4.146) получим неоднородную систему

$$\xi(j\,|\,i)=\alpha\xi(j\,|\,0)+(1-\alpha)\sum_{q=1}^{M}\xi(j\,|\,q)\xi(q\,|\,i) \tag{4.147}$$

с условиями нормировки

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j \mid 0) = 1; \quad \sum_{j=1}^{M} \xi(j \mid q) = 1 \quad (\forall q \in \overline{1, M}). \tag{4.148}$$

Параметр α отражает распределение степени доверия между «иерархом» и членами группы. Величины α и $1 - \alpha$ можно также считать предпочтениями распределенными между двумя возможностями (1) «иерарх» верит только себе и не учитывает мнение других участников группы ($\alpha = 1$, $1 - \alpha = 0$); (2) «иерарх» целиком полагается на коллективное мнение группы: ($\alpha = 0$, $1 - \alpha = 1$). Но в последнем случае, как показано выше, все рейтинги оказываются (в данной схеме агрегирования) одинаковыми и равными $\frac{1}{M}$.

Следующим шагом агрегирования является формирование «интегральных» рейтингов $\xi_j(\sigma_k)$ и ξ_j.

Возникает вопрос: кому нужны эти рейтинги, кто является «носителем» соответствующей информации и ее пользователем?

Принимается гипотеза, что *интегральные рейтинги можно агрегировать из индивидуальных*, и что возможны различные схемы агрегирования в виде взвешенных сумм. Изначально, как уже было сказано, можно предполагать наличие «*третейского судьи*», назначающего априорные рейтинги членам группы. В качестве такого судьи может выступать «*иерарх*», то есть стоящий над группой субъект, имеющий полномочия, относящиеся к деятельности группы. Интересной гипотезой является утверждение, что роль такого «*третейского судьи*» играет некий *этический постулат*, либо некий «*коллективный разум*», который существует, как суверенный субъект и, следовательно, имеет свои предпочтения, характеризуется в каждый момент времени своей энтропией предпочтений.

Мы видим, как в сознании членов сообществ существует, постоянно вырабатывается и обновляется *«коалиционная» составляющая психики*, другими словами, *некая составляющая распределения индивидуальных предпочтений, которая является общей для всех членов группы*. Она является проявлением коллективной компоненты сознания каждого человека, которая существует на генетическом уровне и есть следствием эволюции и «спрессованного» обобщенного жизненного опыта сообщества в течение его истории. Говоря языком, принятым в нашей работе, по мере того как возникали «корпоративные» проблемы (то есть возникали непустые пересечения индивидуальных множеств альтернатив: $\bigcap_{j=1}^{M} S_{aj} \neq \varnothing$), возникало и укреплялось коллективистское сознание как часть сознания каждого индивидуума вообще. Процесс способствовал развитию и укреплению, завоеванию равного права на существование как коллективистского, так и индивидуалистического сознания.

Изобретение огня и необходимость в племени поддерживать его годами явилось корпоративной проблемой и укрепило коллективизм, так же как совместная охота на крупного зверя, необходимость защиты от нападения другого племени и т.д. В наше время сообщества существуют только потому, что существуют корпоративные проблемы (непустые пересечения индивидуальных проблемных множеств S_{aj}), существует сегодня и историческая (может быть генетическая) память о том, как эта кол-

лективная (корпоративная) часть психики помогала выжить всему племени (народу) и каждому индивидууму — члену социальной корпорации.

Этические постулаты (императивы) влияют на принятие решений наряду с актуальными (утилитарными) факторами, являясь важнейшей составляющей безопасности и прогресса сообщества. Они выражаются в виде учений, религиозных заповедей, философских концепций. Примером являются заповеди Моисея. В современных теориях они находят отражение в моделях гуманизма, социализма, коммунизма, либерализма… — моделях «социальной справедливости». В теории полезности их представляют в виде моделей функций коллективной полезности (см. начало этой главы), концепцией эгалитаризма, утилитаризма, промежуточных моделей ФКП, принципа Пигу-Дальтона, Паретто-оптимальных схем и т.д. Коалиционная психология возникает «на площадях» как эффект толпы, в результате целенаправленного продолжительного воздействия средств массовой информации в масштабах страны, или целого мира — научно-обоснованных технологий манипулирования сознанием [98, 108, 109, 157, 172, 175].

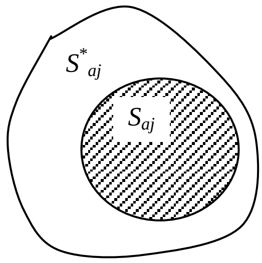


Рис.4.21

Недостатком предыдущих построений в данной работе, является исключительно рационалистический (утилитарный) характер моделей распределения предпочтений, когда учитывается в качестве аргумента полезность, либо ресурсы. Конечно, попытка в математической форме (более точно — в символической форме) учесть *этические принципы* должна законно вызывать скептическое отношение, как философов, так и математиков. Скорее всего, соответствующие модели будут носить спекулятивный характер. Тем не менее, абсолютная убежденность, что решения всегда принимаются не только на основе учета лишь рациональных факторов, ставит автора перед *дилеммой*: либо вовсе отказаться от того, что определяется как *субъективный анализ*, либо попытаться каким-либо образом учесть существенное влияние *этических факторов*. Скорее всего, это можно сделать, двигаясь тем же путем, по которому идут авторы теорий полезности. Этот путь состоит в том, что содержательная часть этических принципов игнорируется (почти всегда), но в теорию вводятся элементы, отражающие последствия воздействия этих принципов на те характеристики, которые допускают количественную интерпретацию. В нашем случае это распределения предпочтений I и II рода — $\pi_j(\sigma_k)$, $\xi_j(\sigma_k)$, проблемные множества S_{aj}, множества индивидуумов S_ξ,…

Сделаем некоторые общие *предположения*.

1. *Этические постулаты (императивы) возникают в сообществах*. Это не означает, однако, что они не влияют на индивидуальные предпочтения I рода $\pi_j(\sigma_k)$… Это влияние может реализоваться в виде ограничений, накладываемых на состав альтернатив $\sigma_k \in S_{aj}$, то есть на проблемное множество S_{aj}, как результат религиозных соображений. Чаще всего — это запрет на определенные действия по отношению к другим членам группы (сообщества рис.4.18). Так если S^*_{aj} — множество альтернатив, допустимых в рационалистическом смысле (достаточности ресурсов, например, то $S_{aj} \subset S^*_{aj}$ — множество альтернатив полученное отбрасыванием недопустимых по этическим соображениям альтернатив.

2. *Учет этических постулатов можно осуществить путем учета определенных ограничений, налагаемых на распределения предпочтений, и состав проблемного множества S_{aj}.*

3. *Учет этических постулатов можно осуществить путем введения эталонных распределений* (императивов).

4. Для функций предпочтения II рода (рейтингов) существенным ограничением может быть *допустимость принадлежности данного субъекта к группе* (*к множеству $S_{\xi i}$*), *то есть ограничения накладываемые на состав группы S_ξ или $S_\xi(\sigma_k)$*, в зависимости, например, от его предпочтений I рода.

Определим интегральный рейтинг соотношением

$$\xi_j = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\xi(j\,|\,i)$$

если $\xi(j|\,i)$ получен усреднением по $\sigma_k \in S_{aj}$, и

$$\xi_j(\sigma_k) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\xi(i,j\,|\,\sigma_k)$$

Пусть теперь интегральный рейтинг субъекта j определяется как сумма дифференциальных рейтингов j, назначаемых другим членами группы, взвешенных пропорционально их интегральным рейтингам:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{M}\xi_i\xi(j\,|\,i). \tag{4.149}$$

При этом условные рейтинги $\xi(j|\,i)$ нормированы:

$$\sum_{i=1}^{M}\xi(j\,|\,i) = 1,\ (\forall j \in \overline{1,M}\,). \tag{4.150}$$

Нормированы также интегральные рейтинги:

$$\sum_{i=1}^{M}\xi_j = 1. \tag{4.151}$$

В соотношении (4.149) нормировки слева и справа согласованы.

Имеет место утверждение: при определении интегральных рейтингов ξ_j по схеме (4.130) при наличии нормировок (4.150) и (4.151) существует бесконечное множество решений однородных уравнений для ξ_j, при заданных $\xi(j|\,i) \geq 0$, причем все $\xi_j \geq 0$.

Система (4.149) однородна и определитель матрицы Z – I, где I — единичная матрица, при наличии условий нормировки (4.150) равен нулю. Можно показать, что в условиях «*круговой поруки*», когда все $\xi(j\,|\,i) = \frac{1}{M}$, интегральные рейтинги ξ_j также все одинаковы и вследствие условия нормировки

$$\xi_j = \frac{1}{M},\ (\forall j \in \overline{1,M}\,).$$

В случае если не все $\xi(j|\ i)$ одинаковы, каждому набору условных рейтингов соответствует множество решений для интегральных рейтингов. Таким образом, имеется определенная свобода и для получения единственного решения ξ_j знания условных рейтингов недостаточно. Аналогичная ситуация имеет место, если рассматриваются рейтинги $\xi_j(\sigma_k)$.

Рассмотрим соотношение:

$$\boldsymbol{\xi_j = \alpha\xi_j^0 + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{M}\xi_i\xi(j\,|\,i)}, \tag{4.152}$$

которое определяет систему M линейных уравнений относительно ξ_j, для которых принимается условие нормировки (4.151).

Система (4.152) для каждого $0 < \alpha < 1$ имеет единственное решение, поскольку определитель матрицы

$$\mathrm{I} - \mathrm{Z} = \|\delta_{ji} - \xi(j|\ i)\|$$

отличен от нуля, если не все $\xi(j|\ i)$ одинаковы и не равны $\frac{1}{M}$.. В случае «круговой поруки» или абсолютного равенства интегральных рейтингов в группе $\xi(j\,|\,i) = \frac{1}{M}$, ($\forall j, i \in \overline{1, M}$), система (4.152) не имеет решения. Это может означать, что в условиях круговой поруки

а) вмешательство «внешнего» субъекта (иерарха) со своими оценками ξ_j^0 не приводит к нарушению «status cuo», либо

б) не может существовать корпоративная составляющая психики с распределением рейтинговых предпочтений отличных от равномерного ($\xi_j^0 = \frac{1}{M}$).

Возможна еще одна остроумная трактовка отмеченного факта: вмешательство «иерарха» только тогда эффективно (приводит к изменению интегральных рейтингов), когда в группе отсутствует «*круговая порука*».

Запишем систему (4.152) в матричном виде:

$$(\alpha\mathrm{I} - (1-\alpha)\mathrm{Z})\xi = \alpha\xi^0, \tag{4.153}$$

где Z – $M\times M$ матрица условных рейтингов $\xi(j|\ i)$, ξ — М-вектор интегральных рейтингов и ξ^0 — м-вектор рейтингов, назначенных «иерархом». Из (4.153) следует, что

$$\xi = (\alpha\mathrm{I} - (1-\alpha)\mathrm{Z})^{-1}\alpha\xi^0. \tag{4.154}$$

Чтобы остаться последовательно в рамках концепции субъективных предпочтений мы можем величины α и $1-\alpha$ рассматривать как общие для всех членов группы предпочтения π_α и $\pi_{1-\alpha}$: $\pi_\alpha + \pi_{1-\alpha} = 1$.

Теперь попытаемся дать ответы на поставленный выше вопрос: кому нужды интегральные рейтинги $\xi(j)$ и для чего? Ответ зависит от того, считаем ли мы эти рейтинги принадлежностью внешнего «иерарха» или принадлежностью компонента корпоративной психики, который мы в этом случае рассматриваем в качестве

«виртуального» субъекта, местом «обитания» которого является мозг каждого из членов группы. Обозначим этого субъекта значком (*) (или припишем ему номер «0»).

Представляется, что (*) может использовать информацию о рейтингах $\xi(j)$ для того, чтобы

а) влиять на структуризацию группы, например при выборе «лидера» группы, установлении объективных рангов внутри группы,

б) выбирать партнера для решения кооперативной проблемы (используя рейтинги $\xi_j(\sigma_k)$),

в) принимать для себя решение о вхождении в ту или иную коалицию с другими субъектами,

г) информировать вышестоящего на иерархической лестнице субъекта («иерарха») о распределении рейтингов в подчиненной группе.

В связи с изложенным, мы может наряду с энтропией условных рейтингов $\xi(j|\, i)$ (или $\xi(i, j|\, \sigma_k)$) рассматривать энтропию «иерарха».

$$\boldsymbol{H}_{\xi}^{*} = -\sum_{j=1}^{M} \xi_j \ln \xi_j \quad \text{или} \quad \boldsymbol{H}_{\xi}^{*}(\sigma_k) = -\sum_{j=1}^{M} \xi_j(\sigma_k) \ln \xi_j(\sigma_k).$$

Компонента ξ^0, рассматриваемая как отражение в психике «коллективного разума» как раз и может быть носителем этических принципов. В зависимости от соотношения величин π_α и $\pi_{1-\alpha}$ «вмешательство» в принятие решений этических принципов будет большим или меньшим.

Отражение ограничений налагаемых этическими принципами может быть осуществлено через распределение предпочтений как I рода, так и II рода.

4.9. Понятие «проблемы» на множестве рангов

В первой главе было введено понятие «проблемы» на множестве предметных альтернатив. С этим понятием в дальнейшем связывались распределения предметных предпочтений — предпочтений I рода. В настоящей главе мы изучаем рейтинговые предпочтения субъектов в группе. Было бы естественным попытаться ввести аналогичное понятие, соотнесенное с распределением рейтингов и рангов. Условно назовем такую проблему «организационной проблемой» индивидуума. Можно предложить следующую схему. В качестве альтернатив выступает множество рангов S_η: $A_r \in S_\eta$.

Пусть r — номер ранга ($r \in \overline{1,m}$) и одновременно номер класса ранговой эквивалентности. Если система рангов имеет строго вертикальную линейную иерархическую структур, то будем считать, что ранги образуют систему, задаваемую соотношением

$$\boldsymbol{r} < \boldsymbol{r} + 1 \Rightarrow \eta(\boldsymbol{r}) < \eta(\boldsymbol{r} + 1), \tag{4.155}$$

другими словами вес ранга (объем властных полномочий) тем выше, чем выше номер ранга и в субъективном смысле ранг A_{r+1} всегда предпочтительней, чем ранг A_r, то есть

$$\boldsymbol{r} < \boldsymbol{r} + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A_r} \prec \boldsymbol{A_{r+1}}. \qquad 4.156)$$

Множество S_η, как уже сказано, считается множеством организационных альтернатив и является «полем битвы» на котором разыгрываются баталии за продвижение вверх по ранговой иерархии. «Линейность» ранговой иерархия понимается в том

смысле, что не существует ветвлений по профессиональным признакам. В действительности существует много случаев и систем с ветвлениями, когда субъект, достигнув определенной ранговой ступени в одной профессиональной области (например, в науке), переходит на другую "лестницу" ранговой иерархии (например, в политику).

Если допускается "ветвление" в системе рангов, то множество возможностей ранговых альтернатив существенно расширяется. При переходе с одной ветви на другую возможны "шаги" как "вверх" так и "вниз".

В любом случае "движение" субъекта по иерархической системе рангов сопровождается изменением "объема властных полномочий", то есть веса $\eta_s(j)$.

Если субъект в данный момент имеет ранг $\eta_s(j)$, но предпочитал бы получить $\eta_r(j)$; $r > s$, то «осознанное» желание изменить ранг $A_s \to A_r$ можно назвать «организационной проблемой» субъекта j:

$$P_j(S_\eta)\colon A_s \to A_r;\ \eta_s \to \eta_r. \tag{4.157}$$

Возможность разрешения такой проблемы зависит от объективных и субъективных обстоятельств.

Переход $A_s \to A_r$ есть в то же время переход из одного класса ранговой эквивалентности в другой. Объективная возможность перехода зависит от теоретической численности класса ранговой эквивалентности $M^{\sim}{}_{\eta r}$ и его фактической «заполненности» q_r, а также от наличия других претендентов, которые хотели бы попасть в данный класс, либо уже имеющих ранг A_r и не желающих с ним расставаться. Для такого субъекта, который хотел бы сохранить статус-кво, проблему определим, как проблему гомеостазиса

$$P_j(S_\eta)\colon A_s \to A_s. \tag{4.158}$$

Другой объективный фактор — наличие у субъекта «j» пассивных и активных ресурсов R_{jp}^{disp} и R_{ja}^{disp}, необходимых для реализации властных полномочий, соответствующих данному рангу и в интегральном виде характеризуемых весом η_r желаемого ранга A_r.

Сделаем предположение, что переход из одного класса рейтинговой эквивалентности в другой определяется субъективным рейтингом интегральным $\xi(j)$, либо дифференциальными $\xi(j|\ \sigma_k)$, $\xi(j|\ S'_a)$, где $S'_a \subset S_a$ — подмножество корпоративных проблем.

Множество рангов является конечным, и переход $A_s \to A_r$ имеет скачкообразный характер. Функции ранговых предпочтений являются непрерывными, принимающими значения в интервале [0, 1]. Присвоение ранга зависит от субъекта i либо, может быть, результатом коллективного решения.

В любом из этих случаев субъективным критерием служит величина рейтингового предпочтения соответствующего типа:

$$\boldsymbol{\xi(j|\ i),\ \xi(j|\ S_\xi) = \xi(j),\ \xi(j|\ i,\ \sigma_k)\ldots}$$

Так, если решение относительно субъекта j принимает субъект i, то используется величина $\xi(j|\ i)$. Очевидно, что одним из условий перехода $A_s \to A_r$ с точки зрения i является неравенство

$$\xi(j|\ i) \geq \eta_r. \tag{4.159}$$

Административная карьера субъекта j с точки зрения предложенной схемы представляется как «блуждание» по иерархической «лестнице» рангов (по «табели о рангах»).

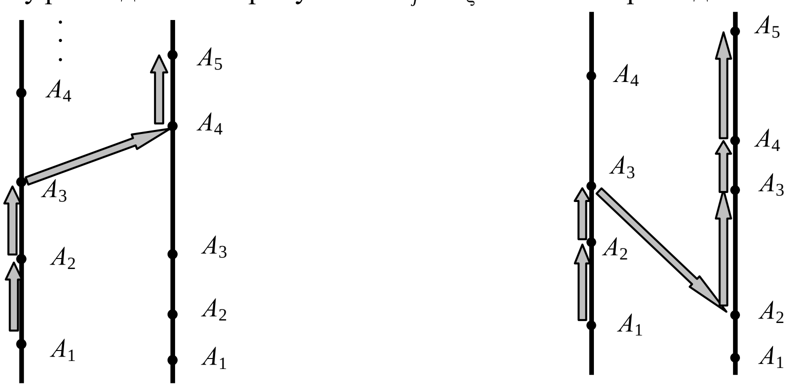
Рейтинг субъекта с течением времени изменяется. Эти изменения обусловлены изменением располагаемых пассивных и активных ресурсов, в частности. изменением образовательного уровня, ростом или снижением популярности, накопленными личными достижениями, физиологическими и возрастными факторами и т.д.

Если имеет место «ветвление» ранговой лестницы, то это можно выразить как зависимость рангов от профессиональной специфики, более конкретно от типа решаемой задачи, то есть $\eta_s = \eta_s(\sigma_k)$, $\sigma_k \in S_a$ или $\eta_s = \eta_s(S'_a)$; $S'_a \subset S_a$.

Рис. 4.22 иллюстрирует варианты переходов в случае «ветвления административной карьеры».

В случае (*а*) субъект, имея ранг A_3 в одной профессиональной сфере деятельности переходит в более высокий класс ранговой эквивалентности в другой профессиональной сфере. В случае (*б*) переход в другую область профессиональной деятельности происходит с понижением ранга. Очевидно, что даже в одной и той же профессиональной области переходы осуществляются как «вверх» так и «вниз».

Мы уже говорили об энтропийных барьерах, определяющих моменты принятия решения на множестве предметных альтернатив S_a: H_π^*, H_π^{**},… В случае рейтиногово-рангового процесса можно говорить о неких энтропийных барьерах на множестве S_ξ: H_ξ^*, H_ξ^{**},… поскольку речь идет о выборе субъекта $\Sigma_j \in S_\xi$ в качестве претендента на ранг.



а Рис.4.22 *б*

Задача несколько отличается от случая предметных предпочтений. Так, при выборе субъекта на ранг A_s в «конкурсе» могут участвовать либо только субъекты, принадлежащие классу $s - 1$, число которых q_{s-1}, либо все субъекты имеющие ранг ниже A_s, то есть A_{s-1}, A_{s-2}… Это требование определяет условие нормировки предпочтений и выражение для вычисления энтропии, например:

$$\boldsymbol{H}_{\xi_i} = -\sum_{j=1}^{q_1+q_2+\ldots+q_{s-1}} \xi(j \mid i) \ln \xi(j \mid i); \tag{4.160}$$

$$\sum_{j=1}^{q_1+q_2+\ldots+q_{s-1}} \xi(j \mid i) = 1.$$

Либо, если рассматриваются только представители класса $s - 1$, то

$$H_{\xi_i} = -\sum_{j=1}^{q_{s-1}} \xi(j \mid i) \ln \xi(j \mid i); \qquad (4.161)$$

$$\sum_{j=1}^{q_{s-1}} \xi(j \mid i) = 1.$$

Здесь в суммах участвуют рейтинговые предпочтения только тех субъектов, которые входят в соответствующие классы ранговой эквивалентности.

К необходимому условию (4.159) следует добавить условие

$$H_\xi \le H^*_\xi. \qquad (4.162)$$

Условие (4.159) носит вспомогательный «совещательный» характер, так как при необходимости заполнения класса s оно может быть проигнорировано. Чтобы пояснить этот термин напомним, что в условиях войны в случае выхода из строя командиров более высокого ранга, на их место назначали людей более низкого ранга, не имевших часто достаточного образования и боевого опыта.

Предел H_ξ^{**} — это верхний предел рейтинговой энтропии, провоцирующий принимающего кадровое решение на поиск дополнительной информации, либо свидетельствующий о его недостаточных организаторских способностях — неспособность принимать кадровые решения. «Кадровая чехарда» часто говорит о неуверенности и нерешительности принимающего решения — о резких колебаниях рейтинговой энтропии вблизи верхнего предела $H_\xi^{**} \lesssim H_{\xi\max}$.

Таким образом, исследование процесса структуризации группы или «кадрового процесса» можно связать с динамикой предпочтений II рода, канонические распределения которых находятся как решения соответствующих вариационных задач.

4.10. Учет стабильных императивов в схемах субъективного анализа

Системы этики реализуются в виде системы императивов, которые в исторической перспективе ложатся в основание систем права. Императивы являются стабильными на достаточно больших отрезках времени. В психике каждого субъекта, они отражаются индивидуальным образом, но при этом сохраняют некую общность и служат «цементирующим раствором» сообществ. Это — национальные обычаи, политические концепции и теории, религиозные взгляды и верования. Кроме этических императивов существуют другие мощные регуляторы, генетически укоренившиеся в сознании: стремление к наслаждениям, страх, стремление к лидерству, превосходству над себе подобными, и, одновременно, — стремление к подчинению, поиск лидера, покровителя, который мог бы взять на себя часть трудных проблем. Соответствующие свойства психики, если они выражены в явной форме, можно назвать императивами (может быть — «генетическими императивами»). Эти императивы наиболее стабильны, хотя в общем случае, «распределены» между индивидуумами неравномерно и поддаются коррекции в процессе воспитания, приобретения опыта, изменяются с возрастом.

Этические императивы являются благоприобретенными, значительно менее стабильны, но изменяются медленнее, чем рациональные (утилитарные) предпочтения. Мы знаем, что люди меняют вероисповедание, привычки, политические взгляды, эстетические вкусы.

Существуют императивы, выраженные в форме правил, предписаний, инструкций, законов. Такого рода императивы являются наиболее жесткими и категоричными, но и они не определяют однозначно выбор решений.

Перейдем к такой формализации понятия «императив», которая позволяла бы вписать его в теоретическую схему, основанную на канонических распределениях предпочтений.

Будем говорить, что императив I_k ($k \in \overline{1, L}$) является количественным (либеральным), если его наличие изменяет численную величину предпочтения ($\pi(\sigma_i)$ или $\xi_j \ldots$) и качественным (радикальным или категорическим), если его наличие обращает данное предпочтение в ноль. Влияние императивов будет определяться мерой $\pi(I_k)$. Для количественного императива (кардинальна схема)

$$\pi(\boldsymbol{I_k}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}],$$

для качественного (ординальная схема) —

$$\pi\left(\boldsymbol{I}_k\right) = \begin{cases} 0, \boldsymbol{I}_k \text{ не учитывается} \\ 1, \boldsymbol{I}_k \text{ учитывается.} \end{cases}$$

В последнем случае система императивов сингулярна.

Императив является *абсолютным*, если он «действует» всегда независимо от проблемно-ресурсной ситуации (от начального σ_0 и альтернативного $\sigma_i \in S_a$ состояний). Императив является относительным, если его действие зависит от типа ситуации. Например, императив «не обмани» действует в мирное время, но во время войны обман противника не только допустим, но даже считается геройством.

Императив I_k относительно инвариантен на подмножестве $S'_a \subset S_a$, если «сила» его действия (мера $\pi(I_k)$) одинакова для $\forall \sigma_i \in S'_a$.

Императив «сродственен» альтернативе $\sigma_i \in S_a$ (или проблеме P: (σ_0, σ_a)), если он связан с σ_a (или P) в содержательном смысле и «несродственным», если такой связи нет.

Пусть в S_a содержится N альтернатив, размерность множества императивов L. Обозначим через $\pi(\sigma_i | S^L_I)$ предпочтение, отдаваемое альтернативе $\sigma_i \in S_a$, когда принимаются во внимание все императивы. Здесь S^L_I — множество императивов. Множество S^L_I является полным, а соответствующая этическая система сбалансированной или полной, если

$$\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{L}} \pi\left(\boldsymbol{I}_k\right) = 1. \tag{4.163}$$

Положим, что

$$\pi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{S}_I^L\right) = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{L}} \pi\left(\boldsymbol{I}_k\right) \pi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_k\right). \tag{4.164}$$

Множество S_a является полным относительно императива I_k, если выполняется условие нормировки

$$\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} \pi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_k\right) = 1, \ (\forall \boldsymbol{k} \in \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{L}}). \tag{4.165}$$

Предполагается, что систему альтернатив S_a всегда можно дополнить таким образом, что она будет содержать альтернативы «разрешенные» этическим императивом I_k. При выполнении этого условия

$$\sum_{i=1}^{N} \pi\left(\sigma_i \mid S_j^L\right) = 1. \tag{4.166}$$

Это означает, что этическая система, акцептированная субъектом, никогда не создает *безвыходных ситуаций*. При этом конечно, может оказаться, что добавляемые альтернативы являются для субъекта катастрофическими. Множество альтернатив полное относительно императива I_k обозначается через $S_a(I_k)$, множество полное относительно набора альтернатив $(I_i, I_j, \ldots, I_q) \in S^L{}_I$ есть $S_a(I_i, I_j, \ldots, I_q)$. Можно принять, что имеет место система вложенных множеств

$$S_a\left(S_I^L\right) \subseteq S_a\left(S_I^{L-1}\right) \subseteq \ldots \subseteq S_a\left(S_I^1\right).$$

Добавление императива в исходную систему сужает (не расширяет) множество этически допустимых альтернатив.

В зависимости от типа отношений между элементами множеств S_a и S_I можно, опираясь на главу 2.5, говорить о различных типах этики, например:

- «всюду определенная этика»;
- «сюрьективная этика»;
- «функциональная этика»;
- «инъективная этика».

Всюду определенная этика соответствует такой ситуации, когда каждая альтернатива $\sigma_i \in S_a$ имеет непустой «образ» (хотя бы один элемент $I_k \in S^L{}_I$) в S_j, но может иметь и несколько «образов». То есть для каждой альтернативы σ_i найдется в S_j хотя бы один «сродственный» императив. Это означает, что этика «имеет ответы» на любые вопросы, в том числе и новые, которые могут возникнуть в будущем.

Сюръективная этика — это такая этика, когда каждый этический постулат (императив) $I_k \in S^L{}_I$ найдет хотя бы одну «точку» приложения — одну альтернативу $\sigma_i \in S_a$, которой будет дана этическая оценка. Однако в S_a могут быть такие альтернативы, относительно которых этика (множество S_I) «молчит». Другими словами в сюръективной этике нет таких этических норм, которые не имели бы рационалистических применений.

Под «*функциональной этикой*» понимается такая этика, когда каждая альтернатива $\sigma_i \in S_a$ либо не имеет этической оценки в рамках S_I^L, либо может быть оценена с точки зрения только одного этического постулата $I_s \in S_I^L$. При этом каждый постулат (императив) может быть применен к нескольким (подмножеству $S_a(I_s)$) альтернативам: $S_a(I_a) \subset S_a$.

Проекция S_I на S_a выделяет в S_a множество подмножеств $M_a(I)$, в том числе подмножество $S^-{}_a$ «не обслуживаемых» функциональной этикой альтернатив.

Инъективная этика — это такая этика, когда любой этический императив $I_s \in S^L{}_I$ либо не «обслуживает» ни одной альтернативы $\sigma_i \in S_a$, либо «обслуживает» только одну альтернативу. Можно представить себе комбинированные отношения между S_a и $S^L{}_I$. Например, если каждую альтернативу «оценивает» только один этический постулат и, наоборот, каждый этический постулат предназначается для «оценки»

только одной рациональной альтернативы, то здесь выполняется одновременно все четыре сформулированных выше предположения, а соответствующая этика есть так называемая *биективная этика*.

Рассмотрим некоторые модели количественного учета этических императивов.

Пусть первая модель определяется соотношениями (4.163)—(4.165). В этой модели предпочтения — показатели значимости этических постулатов (императивов I_k) считаются заданными («a priori»). Их ценность может быть выражена в кардинальном смысле, однако более естественным будет предположение, что сознание субъекта может воспринять (либо осуществить) в отношении этических постулатов только *ординальную* схему на основе отношения ρ: $\prec$, $\succ$, ~. Внутри множества S^L_I возможно наличие классов эквивалентности, в том числе, все множество S^L_I может являться одним классом эквивалентности. Системой этики условно можно считать пару (S^L_I, ρ), где ρ — бинарное отношение, заданное на S^L_I. Можно предположить, что ρ есть слабое упорядочение, строгое упорядочение, строгое частичное упорядочение (см. п. 1.3). При этом мы имеем дело с различными системами этики.

Наличие бинарного отношения в множестве императивов S_I говорит о некой внутренней координированности этической системы, например, возможности расположить императивы в определенном порядке по мере возрастания их значимости. Такие этические системы имеют внутреннюю связанность и обусловленность. Однако не все системы имеют внутреннюю логическую обусловленность. Императивы «не убий» и «не кради» логически не взаимообусловлены. Совершенно очевидно, тем не менее, что первый из них имеет больший вес.

Вообще говоря, система этики действует тогда, когда предъявляется определенное множества альтернатив. Предложенная выше классификация систем этики также, очевидно, имеет смысл только при сопоставлении с данным множеством S_a. Можно говорить о проекции множества императивов S_I на множество альтернатив S_a

$$\boldsymbol{S^L_I \to S_a}.$$

Последнее является как бы «полем битвы», на котором «этика» сражается с «утилитаризмом».

Конкуренция между этическими императивами возникает тогда, когда два и более императивов «встречаются» при оценке одной и той же альтернативы как показано на рис. 4.23.

Сопоставляя это утверждение с описанными выше системами этики, мы видим, что такая конкуренция, а, следовательно, и возможность ранжировать императивы

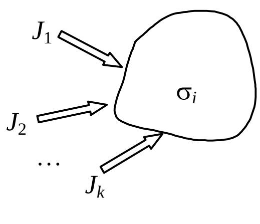


Рис.4. 23

возможны только в случаях всюду-определенной этики, сюръективной и инъективной этики (точнее речь идет о «парах» (S_I, S_a)), В случаях *функциональной* и *биективной* этик конкуренция императивов отсутствует. Повторяя схемы из параграфа 2.1.3. применительно к данному случаю, проиллюстрируем четыре основных типа пар (S_I, S_a) на рис. 4.24.

В случае (*а*) *всюду — определенной пары* имеются незадействованные «спящие» императивы: S^L_I избыточно по отношению к S_a. В случае (*б*) *сюръективной пары* имеются альтернативы, относительно которых данное множество императивов S^L_I не дает этических оценок.

В случае (*в*) *функциональной пары* (S_I, S_a) имеются как *неоцениваемые* альтернативы, так и «*не работающие*» (спящие) императивы, но отсутствует конкуренция императивов на множества S_a. Наконец, в четвертом случае (*г*) как и в третьем случае есть *неоцениваемые* (не обслуженные) альтернативы и «*не работающие*» императивы, но может иметь место конкуренция императивов на S_a. В каждом конкретном случае на основе комбинаторики можно дать количественные характеристики ситуаций.

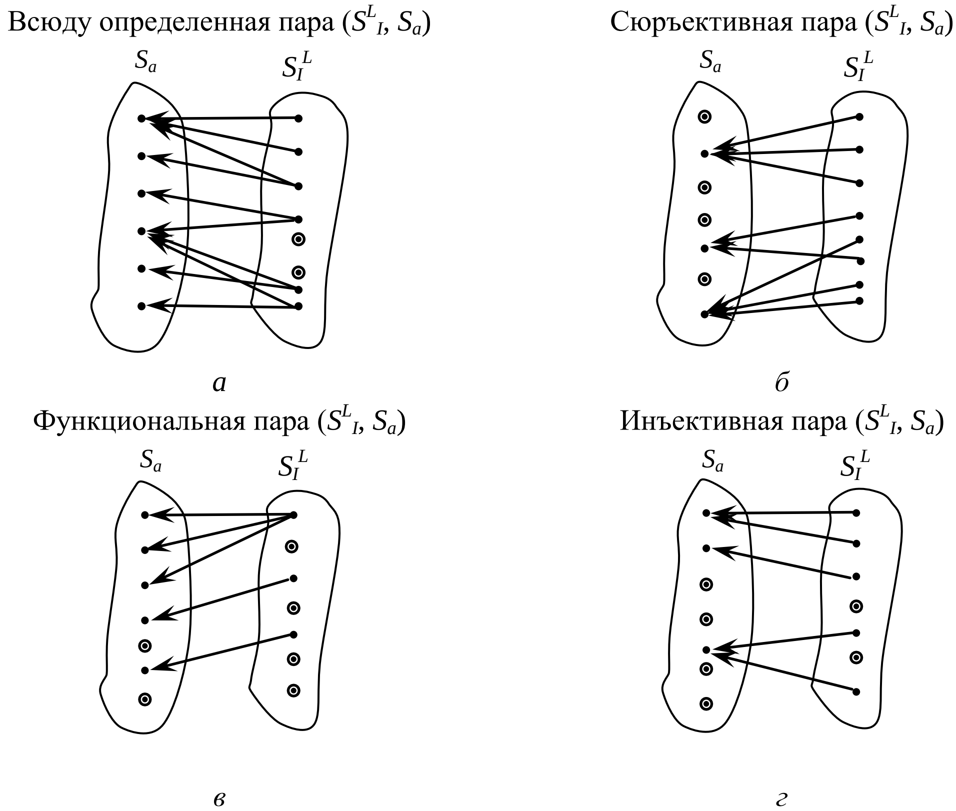


Рис. 4.24

Поскольку системы этики возникали в ретроспективе в течение длительных отрезков времени, можно утверждать, что каждая из систем имеет некое обобщенное канонизированное множество альтернатив $S^*{}_a$, которое служит для данного множества императивов, как бы «пробным камнем» или «оселком», на котором оттачивалось множество $S^L{}_I$.

Пусть система этики состоит из L постулатов и ρ задает на $S^L{}_I$ отношение предпочтения нерефлексивное и транзитивное, то есть вводит строгую частичную упорядоченность. Если количество классов эквивалентности m не совпадает с количеством постулатов (императивов): $m < L$ то согласно с пунктом 3.10, «энтропия» системы этики

$$\bar{H}\left(S_I^L\right) = -\sum_{k=1}^{m} n_k \frac{r_k}{S_L(m)} \ln \frac{r_k}{S_L(m)}, \qquad (4.167)$$

где r_k — ранг императива, $S_L(m)$ — сумма рангов

$$S_L(m) = \sum_{k=1}^{m} kn_k$$

при условии, что $\sum_{k=1}^{m} n_k = L$. В случае, если $n_k = 1$, $\forall k$, $m = L$), то

$$\bar{H}\left(S_I^L\right) = -\sum_{k=1}^{L} \frac{k}{S_L(L)} \ln \frac{k}{S_L(L)}. \tag{4.168}$$

Видно, что $S_L(L) = \dfrac{L(L+1)}{2}$ и, следовательно

$$\bar{H}\left(S_I^L\right) = -\sum_{k=1}^{L} \frac{2k}{L(L+1)} \ln \frac{2k}{L(L+1)} > 0. \tag{4.169}$$

Энтропия может быть меньше, чем $\bar{H}\left(S_j\right)$ в (4.169), если ранги некоторых императивов будут равны нулю и энтропия будет равна нулю, если система этики является «сингулярной»: состоит из одного единственного императива.

Энтропия $\bar{H}\left(S_I^L\right)$ является интегральной характеристикой системы этики. В случае если $m < L$, то есть имеются классы «эквивалентности императивов», содержащие более одного элемента, энтропия $\bar{H}\left(S_I^L\right)\Big|_{m<L} > \bar{H}\left(S_I^L\right)\Big|_{m=L}$.

Однако, эквивалентность императивов понимается только с точки зрения их оценок (их веса) в системе этики субъекта — «носителя» данной системы этики. Можно говорить об ограниченной (весовой) эквивалентности. Если в условие эквивалентности включить множества $S_a(I_k)$, «обслуживаемые» данными императивами в системе, например, *биективной этики*, то эквивалентность приобретает более широкий смысл и может быть названа функциональной. Во всяком случае, мера $\pi(I_k)$ значимости императива I_k с точки зрения субъекта «носителя» системы этики считается априорной и не зависит от альтернативы $\sigma_i \in S_a$ и от S_a в целом.

Можно говорить об «этической» информации $J^L(S^L_I, \rho)$, которая связана с учетом или неучетом этических императивов. Так если $\pi^0(\sigma_i)$ — исходное утилитарное распределение на S_a, а $\pi(\sigma_i | S^L_I)$ — распределение предпочтений на S_a, «стесненное» системой этики S^L_I, то

$$J^L\left(S_j^L, \rho\right) = H_{\pi^0(\sigma)} - H_{\pi\left(\sigma|S_I^L\right)}. \tag{4.170}$$

Если структура S^L_I определяется бинарным отношением строго порядка:

$$J_1 \rangle J_2 \rangle J_3 \rangle \ldots \rangle J_n;\ \sum_{k=1}^{L} \pi^-\left(I_k\right) = 1;\ \pi^-\left(I_k\right) = \frac{k}{S_L},$$

либо множество $S^L{}_I$ содержит классы эквивалентности или даже целиком является единым классом эквивалентности $\pi^{-}\left(I_k\right)=\dfrac{1}{L}$, существует возможность подсчитать информацию $J_{\pm}{}^1(S^L{}_I, \rho)$, связанную с учетом одного дополнительного императива или отбрасыванием одного из них

$$\boldsymbol{H}_{\pi\left(\sigma|S_j^L\right)}-\boldsymbol{H}_{\pi\left(\sigma|S_j^{L\mp1}\right)}=\boldsymbol{J}_{\pm}^{1}\left(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{L}},\boldsymbol{\rho}\right). \tag{4.171}$$

Рассматриваемый подход без существенных изменений можно отнести к системе правовых императивов, культурологических императивов. Твердо усвоенные навыки, некоторые фундаментальные теоретические положения могут приобретать характер императивов.

Если например, рационалистическая часть образования состоит в усвоении обучающимся знаний, умений, навыков, то воспитание состоит в усвоении определенной системы этики и способа ее реализации на множествах S_a — в различных проблемно-ресурсных ситуациях.

Кроме энтропии характеристикой распределения предпочтений является субъективная дисперсия

$$\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{L}}\right)=\frac{1}{\boldsymbol{L}}\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{m}}\left(\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{r}}\right)^2\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}}, \tag{4.172}$$

где $\overline{r}=\dfrac{1}{L}\sum\limits_{n=1}^{m}\overline{r}_k n_k,\ \ \sum\limits_{n=1}^{m}n_k=1.$

Видим, что в случае ограниченной эквивалентности, когда $\overline{r}_k=\overline{r}\ \ (\forall_k)$, $D(S^L{}_I)=0$. В приведенных выше формулах предпочтения $\pi(I_k)$ отождествляются с относительными рангами:

$$\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{k}}\right)=\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}.$$

Предположим, что два субъекта i и j являются «носителями» систем этики $(S_I^{L_i},\rho_i)$; $(S_I^{L_j},\rho_j)$ и пусть эти системы относятся к одному и тому же множеству альтернатив S_a. Точнее множества альтернатив S_{ai} и S_{aj} одинаковы, и возможность разрешения субъектом i проблемы P_i: $\sigma_0{}^{(i)}\to\sigma_k{}^{(i)}\in S_{ai}$ не исключает разрешения субъектом j проблемы P_j: $\sigma_0{}^{(j)}\to\sigma_k{}^{(j)}\in S_{aj}$ даже если $\sigma_k{}^{(i)}$ и $\sigma_k{}^{(j)}$ идентичны. Степень соответствия или различия двух систем этики двух различных субъектов — «носителей» может быть оценена показателями корреляции распределений $\pi_i(I_k)$ и $\pi_j(I_k)$. При этом целесообразно дополнить S_I^{Li} либо S_I^{Lj} фиктивными императивами так, чтобы оба множества имели одинаковую размерность

$$\boldsymbol{L}=\mathbf{max}\left(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{i}},\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{j}}\right), \tag{4.173}$$

а предпочтения фиктивных императивов считаем равным нулю.

Тогда коэффициент корреляции Пирсона определяется по формуле

$$\rho_J\left(\pi_i,\pi_j\right)=\frac{\sum_{k=1}^{L}\left(\pi_i\left(I_k\right)-\frac{1}{L}\right)\left(\pi_j\left(I_k\right)-\frac{1}{L}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{L}\left(\pi_i\left(I_k\right)-\frac{1}{L}\right)^2\sum_{k=1}^{L}\left(\pi_j\left(I_k\right)-\frac{1}{L}\right)^2}}, \quad (4.174)$$

где выполняются условия:

$$\sum_{k=1}^{L}\pi_i\left(I_k\right)=1;\ \sum_{k=1}^{L}\pi_j\left(I_k\right)=1, \quad (4.175)$$

а средние значения рассчитываются по формулам:

$$\bar{\pi}_i=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\pi_i\left(I_k\right)=\frac{1}{L};\ \bar{\pi}_j=\frac{1}{L}. \quad (4.176)$$

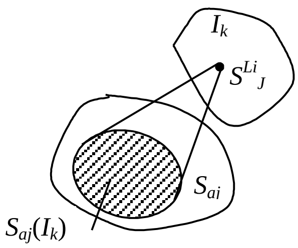


Рис.4. 25

Коэффициент корреляции $\rho_J(\pi_i, \pi_j)$ не является полной характеристикой степени подобия двух этических систем. Необходимо также изучить топологии двух фактор-множеств M_{ai} и M_{aj}, образованных подмножествами в S_{ai} и S_{aj}, на которые «проецируются» соответствующие императивы $I_k \in S_I^{L_i}$ и $I_k \in S_I^{L_j}$.

Разработка соответствующих количественных мер представляет самостоятельную задачу.

Кроме коэффициента корреляции Пирсона степень подобия распределений этических предпочтений можно оценить с помощью коэффициента ранговой корреляции, например, критерия Спирмена

$$\rho_{JSp}\left(\pi_i,\pi_j\right)=1-\frac{6\sum d_k^2}{L\left(L^2-1\right)}, \quad (4.177)$$

где $d_k = r_{ik} - r_{jk}$ — разность рангов «присвоенных» двумя «носителями» одному и тому же императиву.

Если ранги одноименных императивов I_k совпадают $\rho_{JSp}=1,$ тот же результат имеем, если каждое из множеств S_{ai} и S_{aj} представляет собой один класс эквивалентности. При этом

$$d_k=\frac{1}{L}-\frac{1}{L}=0;\ \forall k\in \mathbf{1}, L.$$

Вернемся к модели (4.163—4.165). Поскольку предпочтения $\pi(I_k)$ считаются заданными, задача состоит в получении моделей канонических условных распределений $\pi(\sigma_i| I_k)$. Рассмотрим ряд видов энтропии:

$$H_{\pi(I_k)}=-\sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\ln\pi(I_k) \quad (4.178)$$

$$H_{\pi(\sigma|I_k)}=-\sum_{k=1}^{N}\pi\left(\sigma_i\mid I_k\right)\ln\pi\left(\sigma_i\mid I_k\right); \quad (4.179)$$

$$H_{\pi(\sigma,I_k)} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{L}\pi(\sigma_i, I_k)\ln\pi(\sigma_i, I_k) = \tag{4.180}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\pi(\sigma_i \mid I_k)\ln\pi(I_k)\pi(\sigma_i \mid I_k) =$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\ln\pi(I_k) + \sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i \mid I_k)\ln\pi(\sigma_i \mid I_k)\right) =$$

$$= H_{\pi(I_k)} + \sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)H\pi(\sigma|I_k);$$

$$H_{\pi(\sigma|S_j)} = -\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i \mid S_I^L)\ln\pi(\sigma_i \mid S_I^L). \tag{4.181}$$

Энтропию $H_{\pi(\sigma|S_j)}$ представим подробнее, так как:

$$\pi(\sigma_i \mid S_I^L) = \sum_{n=1}^{L}\pi(I_k)\pi(\sigma_i \mid I_k), \tag{4.182}$$

то

$$H_{\pi(\sigma|S_j)} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\pi(\sigma_i \mid I_k)\right)\ln\left(\sum_{k=1}^{L}\pi(I_k)\pi(\sigma_i \mid I_k)\right). \tag{4.183}$$

Вариационные задачи, использующие различные энтропии, приводят к различным распределениям. В случае (4.179) критерий оптимальности примем в виде

$$\Phi_\pi = H_{\pi(\sigma|I_k)} + \varepsilon\left(\pi(I_k), U_k, L_k \ldots\right) + N_{\pi(\sigma|I_k)}, \tag{4.184}$$

где $\varepsilon(\ldots)$ — функция эффективности, $N(\ldots)$ — член, отвечающий за условие нормировки. Для того, чтобы распределение $\pi(\sigma_i| I_k)$ зависело от императивов, функция $\varepsilon(\ldots)$ должна зависеть от $\pi(I_k)$.

Введем редуцированную полезность

$$\tilde{U}(\sigma_i \mid I_k) = \left(1 - \chi(\sigma_i \mid I_k)\pi^-(I_k)\right)U(\sigma_i). \tag{4.185}$$

Здесь $U(\sigma_i)$ — рационалистическая полезность, понимаемая в обычном смысле, $\pi^-(I_k)$ — предпочтение или ценность императива I_k, который имеет по отношению к альтернативам $\sigma_i \in S_a$ ограничивающий (воспрещающий) смысл. $\chi(\sigma_i| I_k)$ имеет следующий смысл: она задана на прямом произведении множеств S_a и S^L_I: $S_a \times S^L_I$ — множество всех упорядоченных пар (σ_i, I_k), и равна 1, если I_k «сродственен» σ_i, и 0, если I_k «не сродственен» σ_i. «Сродственность» понимается так, что I_k в содержательном смысле связан с σ_i и его наличие может оказывать влияние на величину предпочтения σ_i и, наоборот I_k несродственен с σ_i, если он в смысловом отношении не связан с σ_i.

Мы здесь конечно должны сказать, что эта связанность I_k с σ_i зависит в общем случае от исходного состояния σ_0, в котором находится система, то есть от «точки зрения». Пока, чтобы не усложнять теорию мы будем молчаливо подразумевать, что все дальнейшие рассмотрения ведутся с одной и той же «точки зрения». Более общей и соответствующей здравому смыслу является постановка, когда изучается «сродство» определенного императива I_k не с «конечным» состоянием σ_i, а с проблемой P: ($\sigma_0 \to \sigma_i$), то есть с упоря-до-ченными парами (σ_i, σ_j), являющимися элементами прямого произведения $S_a \times S_a$.

Имея в виду это замечание, мы опускаем в дальнейшем упоминание состояния σ_0. Редуцированная полезность $\tilde{U}$ — это в известной степени искусственная структура, основанная на «здравом смысле» и отражающая не только объективную полезность но и субъективизм, сосредоточенный в данном случае в распределении $\pi^{-}(I_k)$. Как и во всех случаях ранее, мы еще раз подчеркиваем, что система этики вместе с распределением $\pi^{-}(I_k)$ является достоянием субъекта — имеет индивидуальных носителей и, вообще, существует, как атрибут индивидуального и группового сознания. Если данная система этики является общепризнанной или признанной в определенной группе (сообществе), это означает, что индивидуальные «проекции» этой системы некоторым образом подобны. Развиваемый подход, по-видимому, способен предложить определенные критерии подобия и, тем самым, аппарат более глубокой структуризации изучения этик.

Рассмотрим критерий, который основан на предположении, что субъект способен дифференциально изучать все множество предметных альтернатив S_a с точки зрения нормы, связанной с данным императивом I_k:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\pi(\sigma|I_k)} = -\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i \mid I_k) \ln \pi(\sigma_i \mid I_k) + \tag{4.186}$$

$$+\beta \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i \mid I_k) \tilde{U}(\sigma_i \mid I_k) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i \mid I_k).$$

Каноническое распределение $\pi(\sigma_i | I_k)$ имеет вид:

$$\pi(\sigma_i \mid I_k) = \frac{e^{\beta\left(1-\chi(\sigma_i|I_k)\pi^{-}(I_k)\right)U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta\left(1-\chi(\sigma_j|I_k)\pi^{-}(I_k)\right)U(\sigma_j)}}. \tag{4.187}$$

Если все $\chi(\sigma_i | I_k) = 0$, в этом тривиальном случае система этики никак не связана с множеством S_a. Как видно из (4.187) в этом случае $\pi(\sigma_i | I_k)$ не зависят от $\pi^{-}(I_k)$ и равны «исходным» рациональным (или утилитарным) предпочтениям $\pi(\sigma_i | I_k) = \pi^0(\sigma_i)$. Если все $\chi(\sigma_i | I_k)$ одинаковы, то $\pi(\sigma_i | I_k)$ также совпадает с утилитарными предпочтениями $\pi^0(\sigma_i)$.

Все $\pi^{-}(I_k)$ в силу нормировки не могут быть одновременно равные 1. Если, однако, для некоторого $\pi^{-}(I_k) = 1$, все соответствующие $\chi(\sigma_i | I_k) = 1$ для $\forall i \in \overline{1, N}$, то распределение $\pi(\sigma_i | I_k)$ равномерно по i:

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i | I_k) = N^{-1}};\ (\forall \boldsymbol{i} \in \overline{\boldsymbol{1, N}}). \tag{4.188}$$

Другими словами, если редуцированные полезности для данного I_k все равны нулю, то энтропия $H_{\pi(\sigma_i|I_k)} = \ln N$ максимальна, независимо от величин частных значений полезностей $U(\sigma_i)$.

«Интегральные» предпочтения $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$, которые выражаются по формуле (4.187) в первом случае также совпадают с утилитарными (рациональными) предпочтениями

$$\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right) = \sum_{k=1}^{L} \pi^-\left(I_k\right) \frac{e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta U\left(\sigma_j\right)}} = \frac{e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta U\left(\sigma_j\right)}} = \pi^0\left(\sigma_i\right). \quad (4.189)$$

Во втором случае

$$\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right) = \frac{1}{N}$$

и энтропия

$$H_{\pi\left(\sigma_i|S_I^L\right)} = H_{\max}^L = \ln N.$$

Другой вид распределения получаем, если функция эффективности выбирается в виде:

$$\varepsilon\left(\pi\left(I_k\right), U_k, \ldots\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\alpha \ln\left(1 - \chi\left(\sigma_i \mid I_k\right)\pi^-\left(I_k\right)\right) + \beta U\left(\sigma_i\right)\right). \quad (4.190)$$

Этой функции эффективности соответствует распределение:

$$\pi\left(\sigma_i \mid I_k\right) = \frac{\left(1 - \chi\left(\sigma_i \mid I_k\right)\pi^-\left(I_k\right)\right)^{\alpha} e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N}\left(1 - \chi\left(\sigma_j \mid I_k\right)\pi^-\left(I_k\right)\right)^{\alpha} e^{\beta U\left(\sigma_j\right)}}. \quad (4.191)$$

Это распределение имеет следующее свойство: если все $\chi(\sigma_i| I_k)$ для $\forall i \in 1, N$ одинаковы, в том числе, может быть равны нулю, то

$$\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right) = \pi\left(\sigma_i \mid I_k\right) = \pi^0\left(\sigma_i\right).$$

Это также означает, что $\pi(\sigma_i| I_k) = \pi(\sigma_i| I_q)$ для $\forall k, q \in \overline{1, L}$.

Представляя полезность $U(\sigma_i)$ в виде $U(\sigma_i) = \delta \ln V(\sigma_i) + \beta W(\sigma_i)$ получим распределение

$$\pi\left(\sigma_i \mid I_k\right) = \frac{\left(1 - \chi\left(\sigma_i \mid I_k\right)\pi^-\left(I_k\right)\right)^{\alpha} V\left(\sigma_i\right)^{\delta} e^{\beta W(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N}\left(1 - \chi\left(\sigma_j \mid I_k\right)\pi^-\left(I_k\right)\right)^{\alpha} V\left(\sigma_j\right)^{\delta} e^{\beta W\left(\sigma_j\right)}}. \quad (4.192)$$

Теорема

Суммируя свойства рассмотренных распределений, сформулируем следующее простое правило: если дифференциальные условные распределения $\pi(\sigma_i | I_k)$ совпадают с утилитарными предпочтениями $\pi^0(\sigma_i)$ и система этики является полной, то есть $\sum_{k=1}^{L} \pi^-(I_k) = 1$, то распределение интегральных предпочтений $\pi(\sigma_i | S_I^L) = \pi^0(\sigma_i)$ совпадает с утилитарным распределением и этика в целом не влияет на это распределение.

Если в S_a две альтернативы σ_0, σ_1 ($N = 2$) и субъект находится в состоянии σ_0, то есть две возможности:

1) он остается в состоянии σ_0;

2) он переходит в состояние σ_1;

и пусть соответствующие полезности равны U_1 и U_2.

Предположим, что система этики состоит из двух постулатов I_1 и I_2, причем $\pi^-(I_1) = \pi^-(I_2) = 0{,}5$. Матрица χ пусть имеет вид:

$$\chi_{(ik)} = \begin{bmatrix} \chi(\sigma_1 | \boldsymbol{I}_1) & \chi(\sigma_1 | \boldsymbol{I}_2) \\ \chi(\sigma_2 | \boldsymbol{I}_1) & \chi(\sigma_2 | \boldsymbol{I}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2\times 2}. \qquad (4.193)$$

Этот вид матрицы $\chi_{(ik)}$ соответствует ситуации, когда императив I_1 «действует» против альтернативы σ_0 (остаться в σ_0), а I_2 — против альтернативы σ_1 (перейти в σ_1).

Тогда, пользуясь распределением (4.191), найдем матрицу $\Pi(\sigma_i | I_k) = \Pi_{(ik)}$

$$\Pi_{(ik)} = \begin{bmatrix} \pi(\sigma_1 | \boldsymbol{I}_1) & \pi(\sigma_1 | \boldsymbol{I}_2) \\ \pi(\sigma_2 | \boldsymbol{I}_1) & \pi(\sigma_2 | \boldsymbol{I}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \qquad (4.194)$$

$$\pi(\sigma_1 | \boldsymbol{S}_I^2) = 0{,}5; \quad \pi(\sigma_2 | \boldsymbol{S}_I^2) = 0{,}5.$$

Если воспользоваться функционалом, основанном на энтропии $H_{\pi(\sigma, I)}$ и разыскивать оптимальные (канонические) распределения $\pi(\sigma_i | I_k)$ из условия

$$\frac{\partial \Phi_{\pi(\sigma | \boldsymbol{I})}}{\partial_{\pi(\sigma_i | \boldsymbol{I}_k)}} = 0, \qquad (4.195)$$

то будут получены те же распределения, что и выше.

Существенно другой результат имеет место, если вариационную задачу сформулировать относительно «интегральных» распределений $\pi(\sigma_i | S_I^L)$, то есть таких, которые учитывают все этические нормы, содержащиеся в S_I^L.

Запишем соответствующий функционал:

$$\Phi_{\pi(\sigma | \boldsymbol{S}_I^L)} = -\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i | \boldsymbol{S}_I^L) \ln \pi(\sigma_i | \boldsymbol{S}_I^L) + \qquad (4.196)$$

$$+\beta \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i | \boldsymbol{S}_I^L) \tilde{U}(\sigma_i | \boldsymbol{S}_j^L) + \gamma \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i | \boldsymbol{S}_I^L).$$

Для того чтобы каноническое распределение не совпадало с утилитарным распределением $\pi_0(\sigma_i)$, необходимо, чтобы редуцированная полезность зависела каким-либо образом от «ценностей» $\pi^-(I_k)$. В данном случае выберем редуцированную полезность в виде:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{S}_I^L\right)=\prod_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{L}}\left(1-\chi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_k\right)\pi^-\left(\boldsymbol{I}_k\right)\right)\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right). \qquad (4.197)$$

Здесь, если все $\chi(\sigma_i| I_k)$ и $\pi^-(\sigma_k)=\dfrac{1}{N}$ одинаковы, то

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{S}_I^L\right)=\left(1-\chi^0\frac{1}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right);\ \chi^0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad (4.198)$$

если распределение $\pi^-(I_k)$ сингулярно:

$$\boldsymbol{\pi^-(I_q)}=1;\ \boldsymbol{\pi^-(I_k)}=0,$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{S}_I^L\right)=\begin{cases}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right),\ \text{если}\ \chi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_q\right)=1,\\ 0,\ \text{если}\ \chi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_q\right)=0.\end{cases} \qquad (4.199)$$

Распределение $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$ имеет вид

$$\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)=\frac{\exp\left(\beta\prod\limits_{k=1}^{L}(1-\chi(\sigma_i|I_k)\pi^-(I_k))U(\sigma_i)\right)}{\sum\limits_{j=1}^{N}\exp\left(\beta\prod\limits_{k=1}^{L}(1-\chi(\sigma_i|I_k)\pi^-(I_k))U(\sigma_i)\right)} \qquad (4.200)$$

Это распределение устроено таким образом, что если во всех произведениях имеется хотя бы один сомножитель равный нулю, то распределение $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$ совпадает с утилитарным $\pi^0(\sigma_i)$. Это может иметь место только в одном случае, когда распределение $\pi^-(I_k)$ сингулярно: $\pi^-(I_q) = 1$; $\pi^-(I_k) = 0$ при $k \neq q$ и императив I_q сродственен всем альтернативам $\sigma_i \in S_a$.

Если редуцированную полезность $\tilde{U}\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$ выбрать в виде

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{S}_I^L\right)=\alpha\ln\prod_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{L}}\left(1-\chi\left(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{I}_k\right)\pi^-\left(\boldsymbol{I}_k\right)\right)+\delta\ln\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right)+\beta\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{\sigma}_i\right), \qquad (4.201)$$

то вместо распределения (4.193) получим следующее распределение:

$$\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)=\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{L}(1-\chi(\sigma_i|I_k)\pi^-(I_k))\right)^{\alpha}V^{\delta}(\sigma_i)e^{\beta W(\sigma_i)}}{\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\prod\limits_{k=1}^{L}(1-\chi(\sigma_j|I_k)\pi^-(I_k))\right)^{\alpha}V^{\delta}(\sigma_j)e^{\beta W(\sigma_j)}} \qquad (4.202)$$

Как и выше произведения $\prod_{k=1}^{L}...$ могут обращаться в нуль только, если распределение $\pi^{-}(I_k)$ сингулярно и, если $\pi^{-}(I_q) = 1$, $\chi(\sigma_i| I_k) \neq 0$. При этом $\pi(\sigma_i|S_I^L) = 0$, однако, при условии, что некоторые из $\chi(\sigma_i| I_k) \neq 0$ (хотя бы для одного $j \neq i$).

В связи с формулой (4.202) можно поставить вопрос об определении дифференциальных предпочтений $\pi(\sigma_i| I_k)$, поскольку правая часть равенства есть линейная комбинация величин $\pi(\sigma_i| I_k)$. Обозначим правую часть (4.202) через $G(\sigma_i)$, тогда можем записать

$$\sum_{k=1}^{L}\pi^{-}\left(I_k\right)\pi\left(\sigma_i \mid I_k\right)=G\left(\sigma_i\right),\ (i \in \overline{1,N}).$$

Это — система уравнений относительно N×L величин $\pi(\sigma_i| I_k)$, где коэффициенты $\pi^{-}(I_k)$ и правые части $G(\sigma_i)$ считаются заданными величинами. Поскольку к этим уравнениям следует добавить L условий нормировки для величин $\pi(\sigma_i| I_k)$, то всего имеем $L + N$ уравнений. Если $\nu = NL - N - L < 0$ система переопределена. Если $\nu > 0$ — система не определена. Если $\nu = 0$, то $N = L = 2$. Таким образом, если постулируется оптимальность распределения $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$, то в случае недоопределенности можно ввести дополнительные условия, например, оптимальность некоторых дифференциальных предпочтений. Если $L = 1$, то есть имеется только один императив, то $\nu = -1$ и недостает одного дополнительного условия. Но в этом случае S^L_I: $I_1 \Rightarrow \pi(I_1) = 1$ и распределение $\pi(\sigma_i| I_k)$ совпадает с утилитарным распределением. Рассмотренные выше варианты условных распределений имеют тот недостаток, что предпочтения могут обращаться в нуль только в случае сингулярного распределения $\pi^{-}(I_k)$. Если распределение $\pi^{-}(I_k)$ несингулярно: $\pi^{-}(I_k) \neq 1,\ \forall k \in \overline{1,L},$ распределения $\pi(\sigma_i| I_k)$ и $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$ в нуль не обращаются. Для того, чтобы добиться обращения в нуль некоторых предпочтений, необходима дальнейшая модификация критериев $\Phi_{\pi(\dots)}$. То дополнение, которое будет сделано ниже можно условно назвать «*моделью категорического императива*».

Запишем следующее выражение для дифференциальных предпочтений:

$$\pi\left(\sigma_i \mid I_k\right)=\frac{\left(1-\chi\left(\sigma_i \mid I_k\right)\pi^{-}\left(I_k\right)\right)\prod_{q=1}^{L}\chi\left(\sigma_i \mid I_k\right)V^{\delta}\left(\sigma_i\right)e^{\beta W\left(\sigma_i\right)}}{\sum_{j=1}^{N}\left(1-\chi\left(\sigma_j \mid I_k\right)\pi^{-}\left(I_k\right)\right)\prod_{q=1}^{L}\chi\left(\sigma_j \mid I_k\right)V^{\delta}\left(\sigma_j\right)e^{\beta W\left(\sigma_j\right)}}. \tag{4.203}$$

Здесь добавлен множитель $\prod_{q=1}^{L}\chi\left(\sigma_i \mid I_k\right),$ который *равен нулю*, если хотя бы один из императивов $I_k \in S^L_I$ «воспрещает» σ_i. Все слагаемые в знаменателе не могут равняться нулю в силу предположения о полноте системы императивов, которая *всегда должна оставлять субъекту «выход» из ситуации*, не противоречащий данной системе этики. Аналогично, можно построить распределение для $\pi\left(\sigma_i \mid S_I^L\right)$.

Характеристическая функция $\chi(\sigma_i| I_k)$ (в более общем случае $\chi(S'_a \subset S_a| I_k)$) определяет тип этики. Приведенные ниже таблицы иллюстрируют это обстоятельство.

Пусть функция $\chi(\sigma_i | I_k)$, заданная на прямом произведении $S^N{}_a \times S^L{}_I$, определена таблицей (L = 5; N = 4) (табл.6).

Таблица 6

I_k \ σ_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
σ_1	0	0	0	0	1
σ_2	0	0	1	0	0
σ_3	1	0	0	1	0
σ_4	0	0	0	0	0

В этом случае этика является *инъективной*: любой императив либо не «обслуживает» ни одной альтернативы, либо обслуживает лишь одну из них.

Табл. 7 представляет пример функциональной этики

Таблица 7

I_k \ σ_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
σ_1	1	0	0	0	0
σ_2	0	0	1	0	0
σ_3	0	0	0	0	0
σ_4	1	0	0	0	0

Когда каждая альтернатива σ_i либо не «обслуживается» ни одним из $I_k \in S^L{}_I$, либо обслуживается только одним из них.

«*Сюръективная*» этика может быть представлена в качестве примера табл.8.

Таблица 8

I_k \ σ_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
σ_1	1	0	1	1	1
σ_2	0	0	0	0	0
σ_3	1	1	1	0	0
σ_4	1	0	0	0	1

Наконец, «всюду определенная» этика представляется табл. 9:

Таблица 9

I_k	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5

σ_i					
σ_1	1	0	0	0	0
σ_2	1	1	1	1	1
σ_3	0	0	1	0	0
σ_4	0	0	1	1	1

Из всех приведенных случаев, только этика, представленная табл.9 совместима с распределением $\pi(\sigma_i| I_k)$ типа (4.203), содержит «категорический императив» (не имеющий ничего общего с категорическим императивом Канта), поскольку существует альтернатива σ_2, для которой

$$\prod_{k=1}^{5}\chi\left(\sigma_2 \mid I_k\right)=1.$$

Предложенные в данном разделе распределения, учитывают в той или иной степени, влияние императивов — устойчивых постулатов различного, в том числе, этического характера. Особенность подхода состоит в том, что императивы считаются априорно заданными и не подлежат определению на основе какого-либо принципа более высокого уровня.

В заключение рассмотрим простой пример вычисления энтропии и информации, связанных с системой этики.

Пусть в S_a имеется две альтернативы $N = 2$: σ_1 и σ_2 и полезности соответственно $U(\sigma_1) = 2$; $U(\sigma_2) = 1$. Утилитарное (рационалистическое) предпочтение есть

$$\pi^0\left(\sigma_1\right)=\frac{e^2}{e^1+e^2}=0{,}7310;\;\; \pi^0\left(\sigma_2\right)=\frac{e^1}{e^1+e^2}=0{,}2689.$$

Энтропия $H_{\pi^0(\sigma)}=0{,}5822.$

Пусть теперь субъект подчинен системе этики содержащей лишь императив I_1, который сродственен σ_1: $\chi(\sigma_1| I_1) = 1$ и несродственен σ_2: $\chi(\sigma_2| I_1) = 0$, и императив I_1 является «воспрещающим» и в силу нормировки $\pi^{-}(I_k) = 1$, тогда

$$\pi\left(\sigma_1 \mid S_I^1\right)=\pi^-\left(I_1\right)\pi\left(\sigma_1 \mid I_1\right)=1\frac{\left(1-1\cdot 1\right)e^2}{\left(1-1\cdot 1\right)e^2+\left(1-0\cdot 1\right)e^1}=0;$$

$$\pi\left(\sigma_2 \mid S_I^1\right)=\pi^-\left(I_1\right)\pi\left(\sigma_2 \mid I_1\right)=1\frac{\left(1-0\cdot 1\right)e^1}{\left(1-1\cdot 1\right)e^2+\left(1-0\cdot 1\right)e^1}=1.$$

Энтропия $H_{\pi\left(\sigma|S_I^L\right)}=-0\ln 0-1\ln 1=0.$ Следовательно, «внесение» императива I_1 уменьшает энтропию

$$I\left(S_I^1,\rho\right)=H_{\pi^0(\sigma)}-H_{\pi\left(\sigma|S_I^1\right)}=0{,}5822\ldots>0.$$

Пусть теперь $L = 2$, в S_j^2 — два императива I_1 и I_2 и, соответственно, их значимости $\pi^-(I_1) = 0{,}2$, $\pi^-(I_2) = 0{,}8$, а $\chi(\sigma_1|\, I_1) = 1$, $\chi(\sigma_2|\, I_1) = 0$, $\chi(\sigma_1|\, I_2) = 1$, $\chi(\sigma_2|\, I_2) = 1$.

Тогда

$$\pi\left(\sigma_1 \mid S_I^2\right) = \pi^-\left(I_1\right)\pi\left(\sigma_1 \mid I_1\right) + \pi^-\left(I_2\right)\pi\left(\sigma_1 \mid I_2\right) =$$

$$= 0{,}2\frac{\left(1-1\cdot 0{,}5\right)e^2}{\left(1-1\cdot 0{,}2\right)e^2+\left(1-1\cdot 0{,}5\right)e^1} + 0{,}8\frac{\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^2}{\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^2+\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^1} = 0{,}72186;$$

$$\pi\left(\sigma_2 \mid S_j^2\right) = \pi^-\left(I_1\right)\pi\left(\sigma_2 \mid I_1\right) + \pi^-\left(I_2\right)\pi\left(\sigma_2 \mid I_2\right) =$$

$$= 0{,}2\frac{\left(1-1\cdot 0{,}2\right)e^1}{\left(1-1\cdot 0{,}2\right)e^2-\left(1-0\cdot 0{,}2\right)e^1} + 0{,}8\frac{\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^1}{\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^2+\left(1-1\cdot 0{,}8\right)e^1} = 0{,}2781.$$

Энтропия в этом случае $H_{\pi\left(\sigma|S_I^1\right)} = 0{,}59117$ и, следовательно

$$I\left(S_I^1, \rho\right) = H_{\pi\left(\sigma|S_I^1\right)} - H_{\pi\left(\sigma|S_I^2\right)} = -0{,}00897.$$

Это означает, что при расширении множества императивов от одного до двух имеет место «производство» энтропии в системе, конечно для «сродства», заданного матрицей χ, и «значимостями» императивов $\pi^-(I)$:

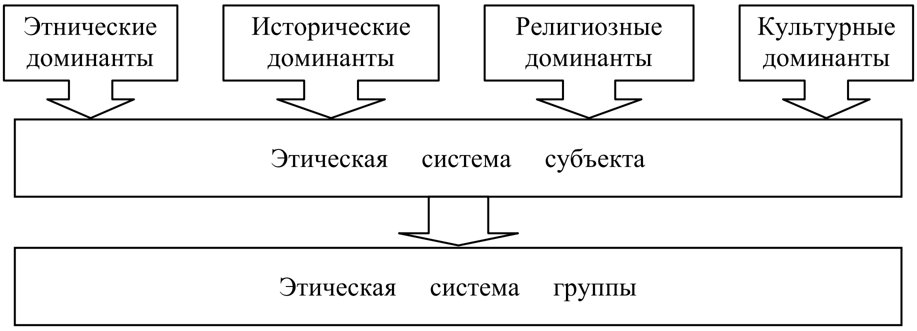
$$\chi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \pi^-\left(I\right) = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

4.11. Еще раз о «виртуальном субъекте»

На протяжении этой главы мы не раз затрагивали вопрос о «виртуальном субъекте», как связующем факторе группы субъектов. Автор вполне сознает, что какой-либо пусть даже частной, но завершенной модели, создать не удалось. В целом была лишь намечена задача. В настоящем параграфе мы сделаем попытку продвинутся еще немного в направлении построения такой модели, и рассмотрим несколько дополнительных построений.

Одним из принципиальных вопросов, которые нужно решить на этом пути, является учет этических факторов. Выше уже обсуждались как общие вопросы, касающиеся этики, так и некоторые модели предпочтений, включающие учет этических факторов.

В общем случае можно говорить о четырех неутилитарных компонентах, которые совместно формируют этическую систему каждого субъекта и, если допустимо такое понятие, — этическую систему группы: этническая, историческая, религиозная, культурная [117].



Этическая система как бы интегрирует, нарабатывает, соединяет в единое целое этнические, исторические, религиозные, культурные особенности данного социума (группы) в систему этических императивов, оказывающих влияние на формирование распределений предпочтений I и II рода.

Идея «виртуального субъекта» (коллективного разума) не является абсолютно новой. Можно сослаться, например, на монографию американского социолога Дж. Тернера [276], где мы можем прочитать следующее: «*Может показаться, что руководитель принимает решения смелее, чем группа как целостность, но в действительности общее решение группы бывает намного более обоснованным и ответственным, чем сделанное индивидуально (Kogan, Wallach, Janis). Существует две причины этого явления: во-первых, когда человек вынужден сам принимать решение, страх перед совершением ошибки склоняет его к осторожности, тогда как групповое решение разделяет ответственность между членами группы, что ведет к проявлению большей решительности: во-вторых, в общей группе, ее члены, часто воздерживаются от взаимной критики, следствием чего могут также быть менее критичными по отношению к более смелым предложениям, что ведет к тому, что группа действует более решительно*».

И далее автор упомянутой работы делает вывод: «*Этот процесс часто ведет к тому, что определяется термином «групповое мышление» (Janis, 1982), которое состоит в том, что отдельные члены группы, подавляют свои индивидуальные взгляды до такой степени, что перестают обращать внимание на частности и начинают чувствовать и вести себя смелее*».

То, что Дж. Тернер называет «*групповым мышлением*», мы обозначаем термином «*виртуальный субъект*».

В этой же работе мы находим подтверждение того, что *религия является группообразующим фактором*. Впрочем, это очевидно и без каких-либо литературных подтверждений.

Интересным и важным является тезис о том, что *материальное неравенство* не только разделяет социум, но служит также и объединяющим фактором, поскольку обеспечивает зависимость одних от других. Чем больше неравенство, тем больше зависимость продавца своего труда (рабочего) от покупателя (работодателя). У первого есть, что продать — свой труд, у второго есть, за что купить — деньги. Здесь Дж. Тернер ссылается на К.Маркса и М.Вебера.

Как в любом акте купли-продажи отношения «покупатель-продавец» *являются антагонистическими*. Общество, в котором существует большое материальное неравенство не может быть свободным, причем, в данном случае несвободны и покупатель и продавец. В таком обществе продавец (рабочий) не обладает внешней свободой. Тем больше он стремится к свободе внутренней. Мы уже говорили о явлении «рекомпенсации», когда раб, передавая свою «душу» богу, частично освобождается от власти земного хозяина.

В обществе, обремененном глубоким материальным неравенством, нельзя говорить о свободе, и, следовательно, и о демократии. В таком обществе формальная демократия превращается во «власть денег», а не народа.

В качестве примера приведем данные из книги Дж. Тернера, характеризующие уровень материального неравенства в США. В табл. 10 приведены данные, отражающие неравномерность распределения собственности между пятью группами американских граждан в 1962 и 1983 гг. Источником этих данных является Министерство федеральных резервов США.

Таблица 10

Группа	Процент общей собственности	
	1962	1983
Верхние 20 %	76,0	74,7
II 20 %	15,0	14,2
III 20 %	6,2	6,9
IV 20 %	2,1	3,0
Нижние 20 %	0,2	0,1

Таблица 11 иллюстрирует неравномерность распределения доходов в американском обществе по данным Бюро Учета населения США.

Таблица 11

Группы	1960	1970	1980	1990
Верхние 20 %	42,0	43,3	44,2	46,6
II 20 %	23,6	23,5	24,8	24,0
III 20 %	17,6	14,4	16,8	15,9
IV 20 %	12,0	10,8	10,2	9,6
Нижние 20 %	4,3	4,1	4,1	3,9

Коэффициент имущественного неравенства Лоренца, рассчитанный по первой таблице для 1983 г. $K \approx 0{,}65$. Этот показатель устроен так, что он равен 0 при полном равенстве и 1 при «полном» неравенстве («одни имеет все, остальные — ничего»).

С точки зрения целей нашего исследования существенным является то, что материальное неравенство является группообразующим фактором. Предполагается, что это обстоятельство можно учесть, используя взаимные полезности. Чем больше неравенство и чем больше взаимные полезности в абсолютном исчислении, тем крепче «спаяна» группа, однако тем меньшую роль в «*сознании виртуального субъекта*» играют беднейшие члены группы. Следуя этим рассуждениям можно предположить, что в группе с полным равенством взаимные полезности хотя и могут быть сильными (технологическая кооперация, например), но «виртуальный субъект» равномерно, если можно так выразиться, инвестируется всеми членами группы.

Попытаемся интерпретировать эти рассуждения в терминах субъективного анализа. Поскольку основным постулатом субъективного анализа является оптимальность распределения предпочтений, то возникает вопрос: кто в данном случае является «*автором*» оптимизации, где, так сказать, дислоцируется «*виртуальный субъект*», в формальном смысле, — кто выстраивает функционал и решает соответствующую вариационную задачу?

Будем считать, что «виртуальный субъект» (или «коллективный разум») — это те части индивидуальных сознаний и психик, которые функционируют «в унисон», имеют общее множество альтернатив S'_a, как пересечение индивидуальных альтернативных подмножеств. Причем, некоторые из альтернатив S'_a могут существовать только как корпоративные, так как соответствующие потребные ресурсы превышают возможности каждого из членов группы в отдельности, и требуют для своей реализации консолидации индивидуальных ресурсов, как пассивных, так и активных.

«Виртуальный субъект» — это не формальный начальник или иерарх, но при определенных условиях на него может опираться руководитель при управлении группой, если он одновременно является неформальным лидером. Если между формальным руководителем и «виртуальным субъектом» имеется расхождение «во взглядах», то возникает конфликт, а управление становится неэффективным. Количественным показателем совпадения или расхождения «во взглядах» может служить какая либо мера корреляции (коэффициент Пирсона, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена, Кендала и др.), выражаемые через распределения предпочтений. Особую роль может играть *коэффициент множественной корреляции.*

Возможны два различных подхода к формированию облика «виртуального субъекта». Первый состоит в том, что каждый индивидуальный субъект экстимизирует свой собственный критерий (функционал) и вырабатывает свое индивидуальное распределение предпочтений с учетом наличия корпоративных проблем и передачи ресурсов с целью их консолидации.

Дополнительно к тому, что уже говорилось о различии между пассивными и активными ресурсами заметим, что отличительной особенностью *активных ресурсов* является невозможность их передачи от одного индивидуального субъекта к другому, в то время как на передачу пассивных ресурсов принципиальных запретов не накладывается.

Второй подход к формированию облика «виртуального субъекта» предполагает, что этот субъект существует на равных правах с остальными реальными субъектами как $M + 1$ субъект и «оккупирует» часть сознания каждого реального субъекта. При этом имеется необходимый информационный контакт, который обеспечивает функционирование этой информационной сущности как целого. В этом варианте «виртуальный субъект» является «носителем» единого функционала и решает $M + 1$ вариацион-

ную задачу с целью выработки коллективного, признанного всеми распределения предпочтений на выделенном общем множестве альтернатив S'_a.

Пусть S_{aj} ($j \in \overline{1,M}$) — индивидуальные множества утилитарных (или предметных) альтернатив. Пользуясь приемом построения охватывающего множества, положим, что это множество есть

$$\boldsymbol{S_a = \bigcup_{j=1}^{M} S_{aj}}.$$

Выделим множество корпоративных альтернатив

$$\boldsymbol{S'_a = \bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}}.$$

При этом предполагается, что возможность консолидации индивидуальных ресурсов была обусловлена заранее, так что в S_{aj} включены также те альтернативы, которые требуют консолидации ресурсов. Очевидно, что среди альтернатив S'_a могут быть и такие, которые не требуют консолидации ресурсов. Наконец, мы можем рассматривать пересечения множеств S_{aj} различных подгрупп субъектов размерности $M-1$, $M-2$, $M-3$, …

Пусть далее, S_{Jj} — индивидуальные множества этических императивов. Сформируем множество

$$\boldsymbol{S'_I = \bigcap_{j=1}^{M} S_{Ij}},$$

представляющее собой множество тех этических императивов, которые «признают» все члены группы. Пару $\{S'^{n}_{I}, \pi(I)\}$ будем считать «этикой группы». Предполагается кроме того, что индивидуальные предпочтения $\pi_j(\sigma_k)$ альтернатив $\sigma_k \in S'_a$, а также индивидуальные характеристики значимости императивов $\pi_j(I_s)$ на множестве S'_I мало отличаются друг от друга, «неразличимы извне»:

$$\boldsymbol{\pi_j(\sigma_k) \approx \pi_i(\sigma_k)};$$

$$\boldsymbol{\sigma_k \in S'_a;\ \forall i, j \in \overline{1,M}};$$

$$\boldsymbol{\pi_j(I_s) \approx \pi_i(I_s)};$$

$$\boldsymbol{I_s \in S'_I;\ \forall i, j \in \overline{1,M}}.$$

Если на произведении $S' = S'_a \times S'_I$ использовать, как это было сделано выше, распределение $\pi_j(\sigma_k, I_s)$, то нужно предположить, что

$$\boldsymbol{\pi_j(\sigma_k, I_s) \approx \pi_i(\sigma_k, I_s);\ \forall j, i \in \overline{1,M}}.$$

Степень близости распределений можно оценить количественно. Отнесем пару к S', если

$$\boldsymbol{|\pi_j(\sigma_k, I_s) - \pi_i(\sigma_k, I_s)| \le \rho^*},$$

где ρ^* — малая величина (0,1; 0,05; 0,01;…).

В этом случае члены группы могут воспринимать себя «на множестве S'« как нечто «единое», появляется суверенный «виртуальный субъект». Для этого субъекта в нашем лексиконе есть слово «мы». Эта коллективистская часть сознания заставляет каждого реального субъекта действовать сообща в составе группы.

Рассмотрим три различных модели. Первая модель соответствует наименее автономному и обособленному «виртуальному субъекту». Она базируется на следующих допущениях:

1. Каждый из N индивидуальных субъектов оптимизирует свой собственный функционал.

2. Для каждого субъекта j его множество альтернатив разделено на два подмножества S'_{aj} и S_{am}: $S_{aj} = S'_{aj} \cup S_{am}$, где S_{am} содержит альтернативы общие (в частности — корпоративные) для всех субъектов, S'_{aj} — множество исключительно персональных альтернатив j. Они могут входить в пересечения меньшей размерности.

3. Функция эффективности включает слагаемые, в которых утилитарные составляющие не зависят от номера субъекта. Это имеет место для альтернатив $\sigma_s \in S_{am}$.

Пусть каждый индивидуальный функционал имеет вид:

$$\Phi_{\pi j} = -\sum_{k=1}^{N'_j} \pi_j(\sigma_k) \ln \pi_j(\sigma_k) - \sum_{k=1}^{N'_j} \pi_{jm}(\sigma_s) \ln \pi_{jm}(\sigma_k) \pm \tag{4.204}$$

$$\pm \beta_{1j} \sum_{k=1}^{N'_j} \pi_j(\sigma_k) F_j(\sigma_k) \pm \beta_{2j} \sum_{k=1}^{N'_j} \pi_{jm}(\sigma_s) F_m(\sigma_k) + \gamma \left(\sum_{k=1}^{N'_j} \pi_j(\sigma_k) + \sum_{S=N'_j+1}^{N} \pi_{jm}(\sigma_s) \right).$$

Заметим, что каждый субъект имеет индивидуальные эндогенные параметры β_{1j} и β_{2j}.

Распределения предпочтений $\pi_j(\sigma_k)$ и $\pi_{jm}(\sigma_s)$ имеют вид:

$$\pi_j(\sigma_k) = \frac{e^{\pm \beta_{ij} F_i(\sigma_k)}}{\sum_{p=1}^{N'_j} e^{\pm \beta_{1j} F_i(\sigma_p)} + \sum_{s=N'_j+1}^{N} e^{\pm \beta_{2j} F_m(\sigma_s)}}; \tag{4.205}$$

$$\pi_{jm}(\sigma_k) = \frac{e^{\pm \beta_{2j} F_m(\sigma_s)}}{\sum_{p=1}^{N'_j} e^{\pm \beta_{1j} F_j(\sigma_p)} + \sum_{s=N'_j+1}^{N} e^{\pm \beta_{2j} F_m(\sigma_s)}}. \tag{4.206}$$

В этом случае предпочтения корпоративных альтернатив $\sigma_s \in S_{am}$ сохраняют свою индивидуальность, то есть зависят от номера субъекта j связаны с некорпоративными предпочтениями формулой:

$$\pi_{jm}(\sigma_s) = \pi_j(\sigma_k) \frac{e^{\pm \beta_{2j} F_m(\sigma_s)}}{e^{\pm \beta_{1j} F_j(\sigma_k)}}.$$

В этих формулах через F_j и F_m обозначены либо полезности U_j, U_m либо вредности L_j, L_m.

Вторая модель основана на следующих допущениях:

1. Группа функционирует как целое. Поэтому вариационная задача формулируется для всей группы с помощью единого функционала.

2. Индивидуальность субъектов членов группы тем не менее сохраняется. Каждый имеет персональное распределение предпочтений $\pi_j(\sigma_k)$ на «окраинах» $S_{aj}\backslash S'_a$ и действует на этих «окраинах» самостоятельно. Распределения $\pi_j(\sigma_k)$ за-висят, однако от предпочтений $M + 1$ «виртуального субъекта» на S'_a: $\pi_{M+1}(\sigma_s)$.

Функционал для всей группы принимаем в виде:

$$\Phi_\pi = -M^{-1}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N'_j}\pi_j(\sigma_k)\ln\pi_j(\sigma_k) - \sum_{s=N'+1}^{N}\pi_{M+1}(\sigma_s)\ln\pi_{M+1}(\sigma_s)\pm$$

$$\pm M^{-1}\sum_{j=1}^{M}\beta_{1j}\sum_{k=1}^{N'}\pi_j(\sigma_k)F_j(\sigma_k)\pm\beta_2\sum_{s=N'+1}^{N}\pi_{M+1}(\sigma_s)F_{M+1}(\sigma_s)+ \quad (4.207)$$

$$+\gamma\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N'}\pi_j(\sigma_k)+\sum_{s=N'+1}^{N}\pi_{M+1}(\sigma_s)\right).$$

Здесь β_{ij} — индивидуализированные эндогенные параметры, β_2 — эндогенный параметр, относящийся к «виртуальному субъекту».

Множитель M^{-1} в первом, третьем и последнем членах играет роль весового множителя, уравновешивающего роль реальных членов группы и «виртуального субъекта». Если этот множитель не вводить, то при большой численности группы M, даже при малых N', первый член будет подавлять второй лчен, отражающий вклад в энтропию «виртуального субъекта».

Число N' в данном случае определяется так: $S_a = \bigcup_{j=1}^{M} S_{aj}$ — «охватывающее» множество альтернатив, $S'_a = \bigcap_{j=1}^{M} S_{aj}$ — множество альтернатив, которыми оперирует «виртуальный субъект», распределения $\pi_j(\sigma_k)$ дополнены так, чтобы на альтернативах, содержащихся в $S_a\backslash S_{aj}$ соответствующие $\pi_j(\sigma_k) = 0$.

Наличие в формулах двух знаков «+» и «–» подчеркивает то обстоятельство, что $F_j(\sigma_k)$ может быть полезностью либо вредностью. Распределения предпочтений определяются формулами:

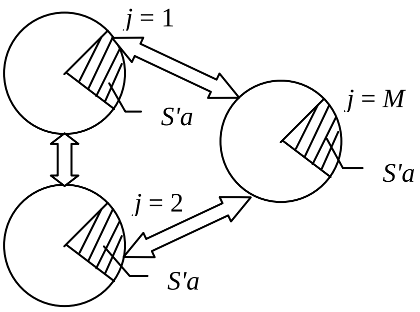
$$\pi_j(\sigma_k) = \frac{e^{\pm\beta_{1j}F_j(\sigma_k)}}{\frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M}\sum_{k=1}^{N'}e^{\pm\beta_{1j}F_j(\sigma_p)} + \sum_{q=N'+1}^{N}e^{\pm\beta_{2j}F_{M+1}(\sigma_q)}}; \quad (4.208)$$

$$\pi_{M+1}\left(\sigma_s\right)=\frac{e^{\pm\beta_2 F_{M+1}\left(\sigma_s\right)}}{\frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M}\sum_{k=1}^{N'}e^{\pm\beta_{1j}F_j\left(\sigma_p\right)}+\sum_{q=N'+1}^{N}e^{\pm\beta_2 F_{M+1}\left(\sigma_q\right)}}. \quad (4.209)$$

Величины $F_j(\sigma_k)$, $F_{M+1}(\sigma_s)$, а, следовательно, $\pi_j(\sigma_k)$ и $\pi_{M+1}(\sigma_s)$ определяются с учетом влияния этических императивов I_e. Здесь мы с целью упрощения записи формул влияние I_e в явном виде не выделяем.

В приведенной модели «виртуальный субъект» выделен как отдельная «сущность», находящаяся во взаимодействии с остальными, реальными членами группы. Предпочтения $\pi_{M+1}(\sigma_s)$ не зависят от индекса j.

Общая энтропия может быть представлена как энтропия всей группы, состоящей из $M+1$ субъекта — это первые два слагаемых. В этой модели «виртуальный субъект» существует как бы изолировано: каждый реальный субъект занимается своими собственными проблемами (на $S_{aj}\backslash S'_a$) (рис. 4.26, *б*). Рис. 4.26, *а* иллюстрирует первую модель, в которой «виртуальный субъект» не выделяется как отдельная сущность».



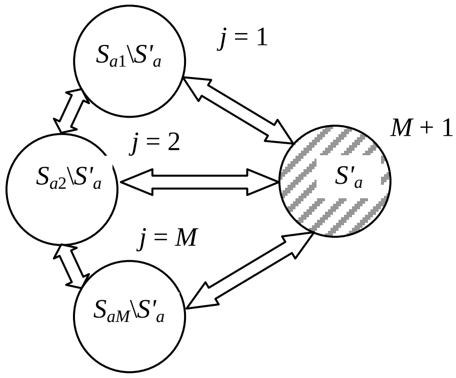


Рис. 4.26

Связи между распределениями осуществляются через нормировку, влияние этических императивов, взаимных полезностей или вредностей.

Для того, чтобы записать энтропии каждого из $M+1$ субъектов, необходимо осуществить перенормировку:

$$\bar{\pi}_j\left(\sigma_k\right)=\frac{\pi_j\left(\sigma_k\right)}{\sum_{p=1}^{N'}\bar{\pi}_j\left(\sigma_p\right)};\quad \sum_{k=1}^{N'}\bar{\pi}_j\left(\sigma_k\right)=1;$$

$$\bar{\pi}_{M+1}\left(\sigma_k\right)=\frac{\pi_{M+1}\left(\sigma_k\right)}{\sum_{q=1}^{N'}\bar{\pi}_{M+1}\left(\sigma_q\right)};\quad \sum_{q=N'+1}^{N}\bar{\pi}_{M+1}\left(\sigma_s\right)=1.$$

Соответствующие энтропии вычислим по формулам:

$$H_{\pi j}=-\sum_{k=1}^{N'}\bar{\pi}_j\left(\sigma_k\right)\ln\bar{\pi}_j\left(\sigma_k\right),\ (\,j\in\overline{1,M}\,);$$

$$H_{\pi M+1}=-\sum_{q=N'+1}^{N}\bar{\pi}_{M+1}\left(\sigma_q\right)\ln\bar{\pi}_{M+1}\left(\sigma_q\right).$$

Величины $F_{M+1}(\sigma_q)$ зависят от консолидированных ресурсов, а также, возможно, от более интенсивной «поддержки» или «противодействия» этики.

Если принять, что, все β_{2j} одинаковы, а также одинаковы все N'_j, то сумма всех M функционалов (4.204) будет отличаться от функционала (4.207) только наличием множителя M во втором и четвертом слагаемых. Этот вариант можно рассматривать как третью промежуточную модель.

Рассмотрим частный случай. Пусть все β_{1j} и $F_j(\sigma_k)$ одинаковы для $\forall j$ и $\forall_k$, аналогично, пусть одинаковы все $F_{M+1}(\sigma_s)$. Обозначим

$$e^{\pm\beta_{1j}F_j\left(\sigma_s\right)}=A;\ \ e^{\pm\beta_2 F_{M+1}\left(\sigma_s\right)}=B.$$

Для модели энтропия всей группы (первые два слагаемых в формуле(4.207)) может быть записана в виде

$$H_\pi=-\frac{N'A}{N'A+\left(N-N'\right)B}\ln\frac{N'A}{N'A+\left(N-N'\right)B}-$$

$$-\left(\left(N-N'\right)\frac{B}{N'A+\left(N-N'\right)B}\ln\frac{B}{N'A+\left(N-N'\right)B}\right).$$

Пусть $B = mA$, тогда

$$H_\pi=\ln\left(N'+\left(N-N'\right)m\right)-\frac{\left(N-N'\right)m}{N'+\left(N-N'\right)m}\ln m. \tag{4.210}$$

Если $m = 1$, то есть $A = B$, то $H_\pi = \ln N$.

В этом случае энтропия всей группы не зависит от численности группы. Выполним расчеты для случая $N = 2$ ($N' = 1$); $m = 2$; 3; 4 (см. рис. 4.27).

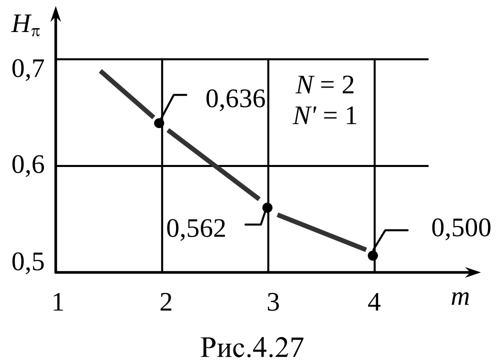


Рис.4.27

Если нормирующий весовой множитель M^{-1} в функционале отсутствует, в качественном смысле это означает, что «виртуальный субъект» воспринимается как «рядовой» член группы. В этом случае при тех же упрощающих предположениях, которые сделаны в предыдущем примере, формула для энтропии, принимает вид:

$$\boldsymbol{H}_\pi = -\boldsymbol{MN'}\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{MN'A}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{B}}\ln\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{MN'A}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{B}}.$$

Полагая снова $B = mA$, после упрощений находим:

$$\boldsymbol{H}_\pi = \ln\left(\boldsymbol{MN'}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{m}\right)-\frac{(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{MN'}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{m}}\ln\boldsymbol{m}. \quad (4.211)$$

Из (4.210) видно, что при $N - N' = 1$ (одна корпоративная проблема) и $m = M$ (консолидированные ресурсы больше индивидуальных в M раз, где M — численность группы)

$$\boldsymbol{H}_\pi = \ln\boldsymbol{N}+\left(1-\frac{1}{\boldsymbol{N}}\right)\ln\boldsymbol{M}.$$

Если к тому же $M = 1$, (группа включает одного субъекта), получаем $H_\pi = \ln N$, то есть обычное значение для энтропии предпочтений N равноценных альтернатив.

На рис.4.28 показаны результаты расчета по формуле (4.211) при условии, что $M = 3$ (группа состоит из трех субъектов), $N = 2$, ($N' = 1$); $m = 2; 3; 4$.

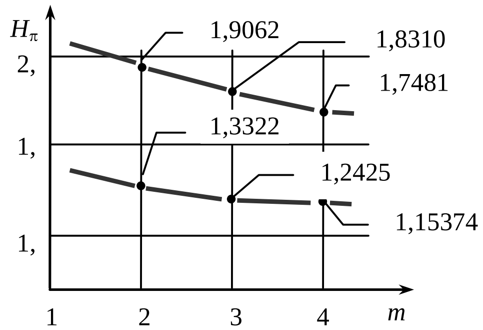


Рис.4.28

В формуле (4.211) имеется зависимость энтропии от численности группы, имеем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_\pi}{\partial \boldsymbol{M}} = \frac{\boldsymbol{N'}}{\boldsymbol{MN'}_-(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{m}}+\frac{(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{N'm}\ln\boldsymbol{m}}{\left(\boldsymbol{MN'}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N'})\boldsymbol{m}\right)^2}.$$

Поскольку $N - N' \geq 0$, то полагая $m \geq 1$, находим, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_\pi}{\partial \boldsymbol{M}} > 0,$$

откуда следует, что энтропия H_π растет с ростом численности группы.

Определим, как зависит H_π (при прочих равных условиях) от коэффициента m, показывающего во сколько раз отличаются располагаемые ресурсы «виртуального субъекта» от индивидуальных ресурсов реальных членов группы (Если $m > 1$, то имеет место «консолидация» ресурсов).

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_\pi}{\partial \boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}'}{\boldsymbol{MN}' + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m}} -$$

$$-\frac{(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')(\ln \boldsymbol{m} + 1)\left(\boldsymbol{MN}' + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m}\right) - (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')^2 \boldsymbol{m} \ln \boldsymbol{m}}{\left(\boldsymbol{MN}' + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m}\right)^2}.$$

Производная $\frac{\partial H_\pi}{\partial m} = 0,$ (1) когда $N = N'$ и (2) когда

$$1 - \frac{(\ln \boldsymbol{m} + 1)\left(\boldsymbol{MN}' + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m}\right) - (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m} \ln \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{MN}' + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}')\boldsymbol{m}} = 0.$$

Последнее равенство преобразуется к равенству $\ln m = 0$. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{H}_\pi(\boldsymbol{m} > 1) < \boldsymbol{H}_\pi(\boldsymbol{m} = 1).$$

Не исключаются другие модели «виртуального субъекта». Все предыдущее содержание 4 главы имеет непосредственное отношение к этой проблеме. Различные, приведенные выше, варианты канонических распределение предпочтений, в том числе, агрегированных. можно использовать для построения моделей «виртуального субъекта». Чрезвычайно важным является учет влияния этических императивов, а также учет рейтинговых распределений. Наконец, настоятельной необходимостью является изучение динамики групповых предпочтений. В 5 главе приведен количественный пример.

Представляется, что анализ динамики позволит смоделировать кумулятивные эффекты в группах, выдвижение и утверждение лидеров, проследить процессы структуризации групп, в том числе, возникновение и распад иерархических структур. Многообещающей является задача построения моделей информационных потоков внутри группы, перераспределения ресурсов, динамики индивидуальных и групповых активных и пассивных ресурсов. В частности, требует ответа вопрос: обладает ли «виртуальный субъект» активными ресурсами, и, если да, то какими?

Располагаемые ресурсы каждого субъекта R_j^{disp} состоят из двух частей: R_{jj}^{disp} — неконсолидируемая индивидуальная часть и R_{jM}^{disp} — часть ресурсов передаваемых субъектами в консолидированный фонд. Суммарные консолидированные ресурсы

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{disp}} = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{jM}}^{\boldsymbol{disp}}.$$

Этот фонд не может быть использован индивидуальным субъектом j для решения его частных проблем на множестве $S_{aj} \backslash S'_a$. Изъятие части ресурсов в консолидированный фонд может привести к тому, что часть проблем субъекта j на $S_{aj} \backslash S'_a$ окажется нереализуемыми и будут удалены из этого подмножества. С другой стороны, появле-

ние большого объема консолидированных ресурсов позволит включить в число альтернатив множества S'_a более «дорогие» альтернативы.

Как уже говорилось, передача ресурсов от субъекта к субъекту касается только пассивных ресурсов.

Напомним, что мы предполагали, что а) реализация активных ресурсов требует затрат определенного количества пассивных ресурсов и, наоборот б) реализация пассивных ресурсов требует каждый раз расходования активных ресурсов. Существуют предельные пропорции, когда и та и другая процедуры становятся не реализуемыми. Активные ресурсы не передаются от субъекта к субъекту, но могут ли они превратиться в пассивные ресурсы?

Ответ, по-видимому, сводится к следующему: активные ресурсы могут превратиться в пассивные одновременно с изменением статуса их владельца. Субъект-обладатель активных ресурсов должен изменить свой статус и перестать быть субъектом в данной группе и по отношению к данному множеству альтернатив. Таким образом, передача активных ресурсов возможна одновременно с их трансформацией, превращением в пассивные ресурсы уже другого субъекта, который может их использовать для разрешения своих проблем. Человек, обладающий, но не распоряжающийся своими активными ресурсами, условно говоря, — «раб», а его активные ресурсы являются пассивными ресурсами его хозяина. Можно сказать, что момент обращения в нуль пассивных ресурсов субъекта ($R_{pj}^{disp} \to 0$) совпадает с моментом изме-нения его статуса: он перестает быть субъектом, так как исчезает «объект» приложения активных ресурсов. Его индивидуальное множество альтернатив обращается в пустое множества ($S_{aj} \to \varnothing$).

Строго говоря, всегда существует две дополнительные «штатные» альтернативы: полное прекращение деятельности в данном сообществе (группе, σ_m — выход из группы) или приобретение статуса «раба» — (σ_s). Распределение предпочтений по этим альтернативам может быть только сингулярным и следовательно, «финальная» энтропия $H'_\pi = 0$. Эти крайние экстремальные возможности присутствуют всегда, но в нормальной ситуации их предпочтения ничтожно малы.

Существенный недостаток приведенных выше моделей распределения предпочтений (4.205), (4.206), (4.208), (4.209) состоит в том, что влияние «коллективного разума» в них осуществляется исключительно через нормировки. Представляется, что должно иметь место также более непосредственное взаимное влияние предпочтений различных субъектов в группе. Оставаясь в пределах гипотезы об экстремальном принципе формирования всех предпочтений как I так и II рода, мы должны предположить, что взаимное влияние предпочтений в группе следует реализовать через формирование соответствующих функционалов.

Рассмотрим, например, следующую модельную задачу. Пусть агрегированное предпочтение альтернативы σ_k есть

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j)\pi_j(\sigma_k),$$

где $\xi(j)$ — интегральный рейтинг, а $\pi_j(\sigma_k)$ — предпочтения субъекта j.

И пусть «виртуальный субъект» решает две экстремальные задачи:

1) определяет интегральные рейтинги $\xi(j)$, используя функционал:

$$\Phi_{\xi}^{\Sigma} = -\sum_{j=1}^{M} \xi(j) \ln \xi(j) + \beta_1 \sum_{j=1}^{M} \xi(j) R_{cj}^{disp} + \gamma_1 \sum_{j=1}^{M} \xi(j), \tag{4.212}$$

где R_{cj}^{disp} — часть располагаемых ресурсов, которую субъект j передает в общий фонд, отнесенная к суммарным консолидированным ресурсам $R^{\Sigma disp}$, и

2) выбирает распределение предметных предпочтений на S_a используя функционал:

$$\Phi_{\pi}^{\Sigma} = -\sum_{k=1}^{T} \pi^{\Sigma}(\sigma_k) \ln \pi^{\Sigma}(\sigma_k) + \beta \sum_{k=1}^{N} \pi^{\Sigma}(\sigma_k) \bar{r}^{d}(\sigma_k) + \gamma \sum_{k=1}^{N} \pi^{\Sigma}(\sigma_k), \tag{4.213}$$

где $\bar{r}^{d}(\sigma_k) = \dfrac{R^{\Sigma disp} - R^{req}(\sigma_k)}{R^{\Sigma disp}} = 1 - \bar{r}^{r}$, $R^{\Sigma disp}$ — суммарные консолидированные ресурсы.

Решение первой вариационной задачи имеет вид:

$$\xi(j) = \frac{e^{\beta_1 R_{cj}^{disp}}}{\sum_{q=1}^{M} e^{\beta_1 R_{cq}^{disp}}}. \tag{4.214}$$

Для $\pi^{\Sigma}(\sigma_k)$ получаем

$$\pi^{\Sigma}(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{M} \xi(j) \pi_j(\sigma_k) = \frac{e^{\beta \bar{r}^{d}(\sigma_k)}}{\sum_{s=1}^{N} e^{\beta \bar{r}^{d}(\sigma_s)}}. \tag{4.215}$$

Здесь $\pi_j(\sigma_k)$ — индивидуальные предпочтения. Соотношение (4.215) можно рассматривать как ограничение, накладываемое на выбор $\pi_j(\sigma_k)$. Этих ограничений N. Кроме того, для $\forall j$ выполняются M условий нормировки $\sum_{k=1}^{N} \pi_j(\sigma_k) = 1$, таким образом, на NM величин $\pi_j(\sigma_k)$ наложено $N + M$ связей. Следовательно, не все индивидуальные предпочтения могут быть выбраны независимо в соответствии с решением индивидуальной экстремальной задачи.

Число $NM - (N + M)$ можно условно назвать «числом степеней субъективной свободы» субъектов в группе. Число степеней свободы равно нулю, если $NM - (N + M) = 0$. Решение в целых числах есть $N = 2$, $M = 2$.

Формируя специальным образом функционал, мы можем получить, например, следующее распределение индивидуальных предпочтений в группе:

$$\pi_j(\sigma_k) = \frac{e^{\beta \sum_{q=1}^{M} U_{jq}(\sigma_k) \pi_q(\sigma_k)}}{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \sum_{s=1}^{N} e^{\beta \sum_{q=1}^{M} U_{pq}(\sigma_s) \pi_q(\sigma_s)}}, \tag{4.216}$$

где $U_{jq}(\sigma_k)$ — взаимные полезности, введенные выше.

Здесь мы имеем существенно нелинейную зависимость между предметными предпочтениями. Задачу определения $\pi_j(\sigma_k)$ можно, линеаризовать, если ввести процесс, развивающийся во времени и рассматривать функции времени $\pi_j(\sigma_k, t)$. Тогда (4.216) можно превратить в нелинейные дифференциальные уравнения с дискретным временем.

Еще один вариант возникает, если в качестве группового функционала (принадлежащего «виртуальному субъекту») взят функционал:

$$\Phi_\pi^\Sigma = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i)\pi_q(\sigma_i)\right)\ln\left(\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i)\pi_q(\sigma_i)\right)+ \tag{4.217}$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i)\pi_q(\sigma_i)\right)U_j(\sigma_i)+\gamma\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i)\pi_q(\sigma_i)\right),$$

где $\bar{U}_{jq}(\sigma_i)$ — нормированные взаимные полезности в группе такие, что для $\forall q \in \overline{1,M}$

$$\sum_{j=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i) = 1, \tag{4.218}$$

$U_j(\sigma_i)$ — полезность субъекта j для группы, выраженная например, через его вклад в консолидированные ресурсы.

Соответствующее каноническое распределение можно представить в виде:

$$\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\bar{U}_{jq}(\sigma_i)\pi_q(\sigma_i) = \frac{e^{\beta U_j(\sigma_i)}}{\sum_{s=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}e^{\beta U_s(\sigma_k)}}. \tag{4.219}$$

Видим, что здесь условия нормировки для $\pi_q(\sigma_i)$ выполнены, если выполняется условие (4.218). Число соотношений (4.219) равно NM, то есть совпадает с числом индивидуальных предпочтений. Следовательно, число степеней субъективной свободы индивидуальных членов группы равно нулю. Они полностью подчиняются общим задачам.

Наряду с энтропией групповых предпочтений, характеристикой, свидетельствующей о существовании «виртуального субъекта» может служить, например, «коэффициент субъективной множественной корреляции»

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det \mathbf{M}}{\det \mathbf{S}}},$$

где S — матрица парных коэффициентов корреляции распределений предпочтений реальных субъектов r_{jq}, а M — окаймленная матрица:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & R_m^{\mathrm{T}} \\ \hline R_m & \mathbf{S} \end{array}\right],$$

где R_m — вектор-столбец коэффициентов r_{jm} корреляции распределений π_j с распределением π_m. В качестве r_{jq} и r_{jm} могут быть взяты коэффициенты Пирсона или соответствующие коэффициенты ранговой корреляции, если рассматриваются ординальные распределения.

4.12. Законы спроса и предложения как результат действия энтропийного принципа оптимальности

Пример, рассматриваемый в этом параграфе, предполагает наличие группового эффекта, однако с существенным предположением. Считается, что как предметные предпочтения π, так и вероятности являются осредненными по группе либо являются «среднестатистическим» распределением по группе.

Предположим, что спрос на определенный товар σ_i связан с предпочтением (потребителя) $\pi_c(\sigma_i)$. Пусть имеется N различных товаров $\sigma_i(i \in \overline{1,N})$ и на множестве S_a заданы цены p_i. Закупки осуществляют M субъектов: $j \in \overline{1,M}$. Обозначим через D_j индивидуальный бюджет субъекта j. Предпочтения $\pi_j(\sigma_i)$ субъекта j распределены на множестве S_a (одинаковом для всех субъектов). Сделаем предположение, что бюджет D_j делится пропорционально предпочтениям:

$$D_j(\sigma_i) = D_j\pi_j(\sigma_i), \tag{4.220}$$

а спрос на товар σ_i равен

$$\boldsymbol{X_j\left(\sigma_i\right) = \frac{D_j\left(\sigma_i\right)}{p_i} = D_j\frac{\pi_{cj}\left(\sigma_i\right)}{p_i}}. \tag{4.221}$$

Таким образом, D_j есть бюджет, который субъект использует полностью. Можно определить среднюю цену, которую платит субъект j

$$\boldsymbol{\bar{p}_j = \frac{D_j}{X_j}},$$

где $X_j = \sum\limits_{i=1}^{N} X_j\left(\sigma_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{D_j\pi_{cj}\left(\sigma_i\right)}{p_i}$.

Находим, что

$$\boldsymbol{\bar{p}_j = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_{cj}\left(\sigma_i\right)p_j^{-1}}}. \tag{4.222}$$

Таким образом, в этой модели средняя цена, которую платит субъект, определяется как среднее гармоническое частных цен p_i с весами равными предпочтениям $\pi_j(\sigma_i)$. Спрос на товар σ_i для всей группы

$$\boldsymbol{X\left(\sigma_i\right) = \frac{1}{p_i}D\left(\sigma_i\right)},$$

где $D(\sigma_i)$ — парциальный бюджет группы, отнесенный к альтернативе σ_i.

Рассмотрим следующий случай: для всех товаров, кроме одного цены сохраняются. Пусть для товаров $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{N-1}$ цены постоянны и равны $p_1, p_2, \ldots, p_{N-1}$. Приведенная цена для этих товаров может быть найдена по формуле:

$$\boldsymbol{p^* = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N-1}\frac{\pi_c\left(\sigma_i\right)}{p_i}}}. \tag{4.223}$$

Цена товара $\sigma_N - p_N$ изменяется. Индекс «*j*» мы опустим, тем самым имеется один субъект или множество идентичных субъектов, общее бюджетное ограничение для которых имеет вид:

$$\boldsymbol{X^* p^* + X_N p_N = \bar{P}D}, \tag{4.224}$$

где $X^* = D\dfrac{\pi^*}{p^*}$; $X_N = D\dfrac{\pi_N}{p_N}$.

Очевидно, что $\pi^* + \pi_N = 1$.

Пусть предпочтения π^* и π_N определяются формулами:

$$\boldsymbol{\pi_c^* = \pi_c(\sigma^*) = \frac{e^{-\beta_c p^*}}{e^{-\beta_c p^*} + e^{-\beta_c p_N}};\ \ \pi_{cN}^* = \pi_{cN}(\sigma_N) = \frac{e^{-\beta_c p_N}}{e^{-\beta_c p^*} + e^{-\beta_c p_N}}}. \tag{4.225}$$

Для того, чтобы получить из энтропийного принципа оптимальности распределение (4.225) достаточно, как было неоднократно показано ранее, взять функцию эффективности потребителя в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon_c = -\beta_c \sum_{i=1}^{N} \pi_{ci} p_i}.$$

Бюджет делится в пропорции:

$$D^* = D\pi^*;\quad D_N = D\pi_N. \tag{4.226}$$

Суммарный спрос (в сопоставимых единицах товара) $\bar{X} = X + X_N$.

На рис. 4.29 приведен результат расчета, выполненного для следующих исходных данных: $\beta_c = 1$, $p^* = 1$, p_N: 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 (у.е).

Кривая 1: $X_N(p_N)$ — зависимость объема спроса товара σ_N от цены, кривая 2: $\bar{X}$ — объем общего спроса, кривая 3: $\bar{p}$ — зависимость средней цены от цены p_N товара σ_N.

Кривая 1: $X_N(p_N)$ имеет вид типичный для кривой спроса. Мы видим, что происходит перераспределение спроса. С ростом цены σ_N спрос X_N резко падает, в то время как спрос на весь остальной товар (остальная часть «корзины») повышается. Общий спрос сначала падает, затем начинает увеличиваться и стремится ассимптотически к максимально возможному спросу «продукта» с неизменной ценой. В данном случае распределение предпочтений определяет разделение полного бюджета на части D^* и D_N. Средняя цена $\bar{p}$ сначала возрастает, затем снижается и имеет максимум в той точке, где суммарный спрос имеет минимум.

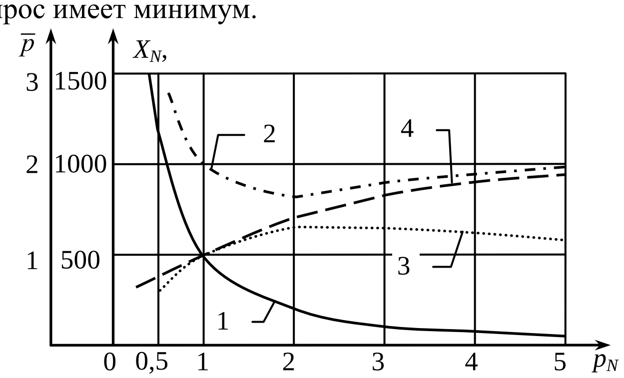


Рис. 4.29

Распределение, использованное в первом случае, относится к распределениям первого типа, имеющим монотонный характер. В данном случае оно отражает установку: чем дороже товар, тем он менее желателен, хотя дешевый товар, обладая некоторой полезность, может быть куплен. Это распределение соответствует такому психологическому типу, для которого соображения престижа не играют роли.

Проведем аналогичные расчеты для распределения второго типа:

$$\pi_c(\sigma_i) = \frac{p_i^{\alpha_c} e^{-\beta_c p_i}}{\sum_{j=1}^{N} p_j^{\alpha_c} e^{-\beta_c p_j}}; \ (\alpha_c > 0,\ \beta_c > 0). \qquad (4.227)$$

Распределение (4.227) имеет максимум при $p_i = \dfrac{\alpha_c}{\beta_c}$ и при $\alpha_c = 0$ переходит в распределение первого типа. Это распределение соответствует психологическому типу субъекта, который не стремится покупать (при прочих равных условиях) как дешевые товары, так и очень дорогие товары, но выбирает товары, цена которых соответствует его богатству и общественному положению. Для такого субъекта вопрос престижа играет существенную роль.

На рис. (4.30) приведены результаты расчета с использованием распределений

$$\pi_c(\sigma^*) = \frac{p^{*\alpha} e^{-\beta_c p^*}}{p^{*\alpha} e^{-\beta_c p^*} + p_N^{\alpha_c} e^{-\beta_c p_N}}; \qquad (4.228)$$

$$\pi_c(\sigma_N) = \frac{p_N^{\alpha_c} e^{-\beta_c p_N}}{p^{*\alpha_c} e^{-\beta_c p^*} + p_N^{\alpha_c} e^{-\beta_c p_N}}.$$

Принято, что $\alpha_c = \beta_c = 1$, $p^* = \text{const} = 1$, $p_N = 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 3{,}0;\ 5{,}0$.

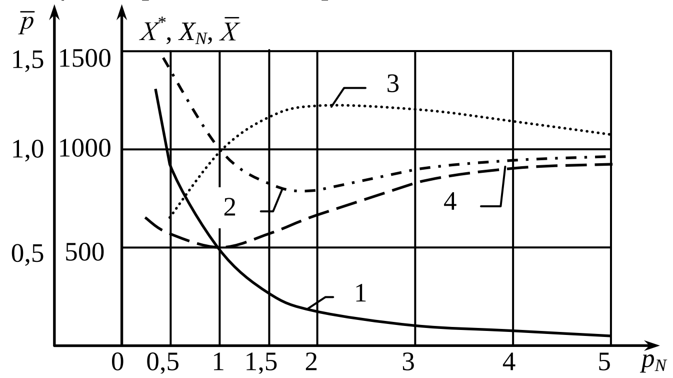


Рис. 4.30. Зависимости X_N (кривая 1), $\bar{X}$ (кривая 2), $\bar{p}$ (кривая 3), X^* (кривая 4) от цены p_N товара σ_N

В целом характер зависимости такой же как и на рис.4.29 за исключением кривой $X^* = X^*(p_N)$.

В данном случае в отличие от рис.4.29 совокупный спрос на товары неизменной цены имеет минимум. Характер зависимости спроса на товар, цена которого изменяется имеет традиционный вид.

Говоря об одном субъекте мы, видимо, можем иметь в виду группу субъектов, с одним и тем же множеством альтернатив и весьма близкими распределениями предпочтений. При этом величина D представляет собой совокупный бюджет.

Пусть имеется группа непритязательных субъектов, которых больше всего заботит экономия средств и для которых, следовательно, характерно распределение предпочтений первого типа (4. и группа субъектов, для которых небезразличны соображения престижа, формирующих свои предпочтения в соответствие с распределением (отношение α/β играет роль показателя психологического типа в обсуждаемом смысле). Предположим, что эти группы имеют одинаковые совокупные бюджеты D. Численность первых M_1 может быть большой («бедные»), численность вторых $M_2 < M_1$ (их можно назвать «богатыми»). На рис.4.31 показаны совокупные величины $\bar{X}^* = X_1^* + X_2^*$; $\bar{X}_N = X_{N1} + X_{N2}$; $\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$. Кривые построены на основании данных, приведенных в таблице.

p_N	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0
X^*_1	377,6	500	622,5	731,1	880,8	7902,1
X_{N1}	1244,8	500	251,7	134,5	36,7	3,6
$\bar{X}_1$	1622	1000	874,2	865,6	920,5	985,7
X^*_2	548,1	500	523,6	576,1	711,2	916,1
X_{N2}	903,8	500	317,6	211,9	96,3	16,8
$\bar{X}_2$	1451,9	1000	841,2	787,0	807,5	933,0
$\bar{X}^* = X_1^* + X_2^*$	1451,9	1000	1146	1363,1	1518,7	1898,2
$\bar{X}_N = X_{N1} + X_{N2}$	2118,6	1000	569,3	346,4	136,0	28,4
$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$	3074,3	2000	1706,8	1662,6	1728	1919

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что как в однородных относительно типа распределения предпочтений группах, так и в смешанных группах, в которых имеются субъекты с различными типами распределения предпочтений, характер зависимости опроса от цены оказывается одинаковыми. При этом он соответствует известным макроэкономическим зависимостям.

Покажем теперь, что типичная зависимость предложения от цены может быть также получена как следствие энтропийного принципа оптимальности. Компетенция формирования предложения принадлежит производителю. Его предпочтения формируются на основе функции эффективности отличной от функции эффективности потребителя. Подберем функцию эффективности, порождающую такое распределение предпочтений производителя, из которого будет следовать зависимость предложения от цены, качественно совпадающая с соответствующими макроэкономическими зависимостями.

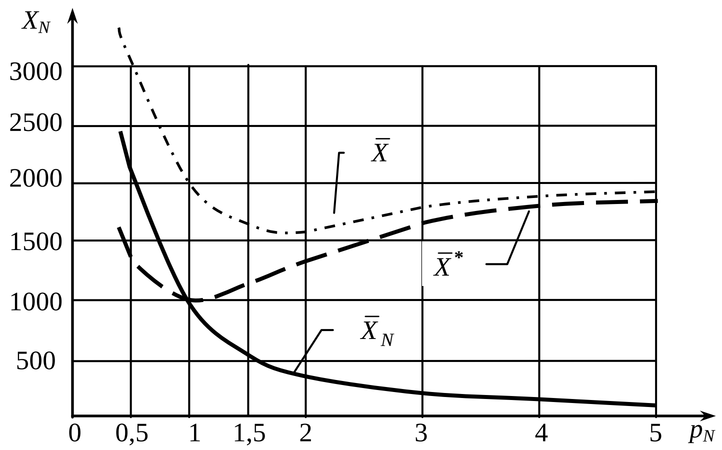


Рис. 4.31

Пусть p_i цена, а q_i — затраты на производство единицы товара σ_i. Тогда прибыль от реализации единицы товара $\Delta_i = p_i - q_i$. Выберем функцию эффективности производителя в виде

$$\varepsilon_{pr} = -\beta_{pr}\sum_{i=1}^{N}\pi_{pr}\left(\sigma_i\right)\frac{1}{\Delta_i}.$$

Здесь величина $\frac{1}{\Delta_i} = \frac{1}{p_i - q_i} = \lambda\left(\sigma_i\right)$ играет формально роль «функции вреда» («harm function»): чем больше цена p_i при фиксированных затратах q_i тем меньший «вред» наносится производителю. Энтропийный принцип оптимальности ставит в соответствие этой функции эффективности каноническое распределение:

$$\pi_{pr}\left(\sigma_i\right) = \frac{e^{-\beta_{pr}\frac{1}{\Delta_i}}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta_{pr}\frac{1}{\Delta_j}}}. \tag{4.229}$$

Как и в случае расчета спроса, предположим, что имеется группа товаров σ_1, σ_2, …, σ_{N-1} цены которых не меняются. Заменим эту группу одним приведенным товаром σ^*, приведенная цена которого есть p^*. Цена товара $\sigma_N - p_N$ изменяется. Проследим. как будет при этом изменяться выпуск этого товара. Предположим, как и выше, что свой бюджет B производитель делит на две части пропорционально предпочтениям

$$B^* = B\pi^*_{pr}; \quad B_N = B\pi_{pr}N, \tag{4.230}$$

причем $\pi^*_{pr} + \pi_{prN} = 1$.

В модельном примере было принято $q^* = qN = 0{,}8$ (у.е.); $\beta_{pr} = 1$. Очевидно, что производство товаров σ_N и σ^* имеет место только при условии $p^* > q^*$; $p_N > q_N$.

Результат расчетов показан на рис.4.32. Полученная кривая предложения имеет характерный вид, практически совпадающий с видом эмпирических кривых предложения.

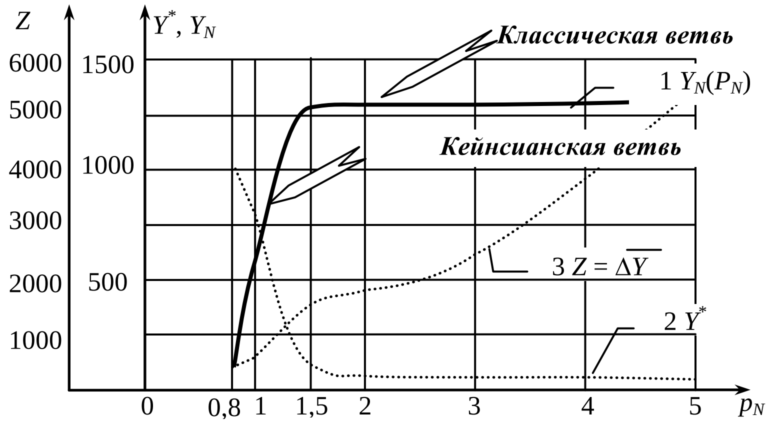


Рис.4.32. Зависимость предложения от цены товара p_N, товара σ_N

График предложения (1) $Y_N(p_N)$ имеет два характерных участка: восходящий участок, называемый обычно «кейнсианской ветвью» соответст-вует наличию свободных ресурсов и почти горизонтальный участок, — «классический», характеризующийся исчерпанием ресурсов, когда увеличение цены не приводит к увеличению выпуска.

Заметим, что как в первой, так и во второй задаче альтернатива σ^* не обязательно означает некоторый товар, имеющий потребительский спрос.

Это может быть отложенный спрос в виде накоплений, направление средств на увеличение капитала и т.д.

Выполненные расчеты носят условный характер, поскольку опираются на гипотетические численные данные. Безусловным является установленный факт возможности получения зависимостей спроса и предложения, качественно весьма близких к реальным, из априорных теоретических соображений. Дальнейший анализ в этом направлении представляется как улица с двусторонним движением. С одной стороны — теоретическое осмысление эмпирических фактов, с другой стороны уточнение и выяснение прикладного смысла теоретических моделей, следующих из энтропийного принципа оптимальности, в котором, по мнению автора, стабильными составляющими являются субъективная энтропия и член, определяющий условие нормировки. Функция эффективности допускает варьирование в широких пределах. Её структура и смысл зависят от ситуации, в которой находится субъект.

Таким образом, многообразие и широта спектра возможных распределений определяются в первую очередь возможностями выбора функций эффективности. В настоящем параграфе тестированию подверглись две простейшие функции эффективности, это привело к успеху в виде макроэкономических зависимостей спроса и предложения, соответствующих эмпирическим данным.

В заключение заметим, что дальнейший анализ может быть связан с учетом рейтингов субъектов, например, интегральных рейтингов $\xi(j)$.

Если воспользоваться групповой функций предпочтений

$$\bar{\pi}_c^{\Sigma}(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{M} \pi_{cj}(\sigma_i)\xi(j), \tag{4.231}$$

где $\xi(j)$ — интегральные рейтинги субъектов, то фракционирование суммарного бюджета D может осуществляться в соответствии с формулой

$$D(\sigma_i) = D\bar{\pi}_c^{\Sigma}(\sigma_i), \tag{4.232}$$

а спрос на товар σ_i будет определен как

$$X_c(\sigma_i) \triangleq D\frac{\sum_{j=1}^{M_c}\pi_{cj}(\sigma_i)\xi(j)}{p_i}. \tag{4.233}$$

Если предположить, что каждый из M_c членов группы приобретет только одну единицу товара (например, автомобиль данного типа), то спрос можно определить по формуле

$$X_c(\sigma_i) \triangleq M_c\bar{\pi}_c^{\Sigma}(\sigma_i). \tag{4.234}$$

Средняя цена для совокупного спроса

$$X_c = \sum_{i=1}^{N} X_c(\sigma_i)$$

определяется как среднее гармоническое вида:

$$\bar{p}_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum_{j=1}^{M}\pi_{cj}(\sigma_i)\xi(j)}{p_i}}.$$

В формулах (4.231)—(4.234) индекс «c» означает отнесение к потребителю (consumer).

4.13. Цена субъективной информации

В теории информации вопрос о ценности информации в известном смысле является традиционным. Соответствующие определения можно найти, например, у Неймана [155, 156], и у Стратоновича [174, 175]. Существует множество подходов к определению этого понятия. Все хорошо понимают, что информация в сегодняшнем мире представляет едва не наибольшую ценность. Поэтому продолжаются интенсивные поиски способа определения цены информации. В этой связи не будет излишним подход, который прямо следует из развиваемой теории. В книге [174], как и в других работах ценность информации определяется путем сравнения функций эффективности до и после получения определенной порции информации.

В настоящем исследовании оказывается возможным непосредственное определение цены *субъективной информации*, выраженной в единицах тех или иных ресурсов, изменение (трансляция) которых приводит к изменению распределения предпочтений субъекта.

В отличие от других подходов здесь речь идет о *субъективной информации*, выраженной через предпочтения субъекта, и на прямую не связанной с каким-либо распределением вероятностей. Цена информации в данном случае является сугубо индивидуальным показателем, поскольку как и другие величины и понятия субъективного анализа всегда имеет отношение к определенному индивидуальному носителю.

Можно говорить о цене информации, связанной с изменение предметных предпочтений и цене информации, обусловленной модификацией рейтинговых предпочтений. Последнюю удобно назвать «ценой социальной информации».

В задачах социальной динамики [212, 213] эта величина может играть существенную роль, особенно когда изучается конкуренция идей или производится оценка эффективности политехнологии. Грубо говоря, желательно иметь какой-либо способ подсчитать «*сколько нужно платить политтехнологам и за что*».

Вопросы рассматриваемые здесь и в ряде других разделов книги имеют отношение к проблематике, представленной, например работами [286, 287, 288, 290].

Выше, в главах 2, 3. 4 было рассмотрено большое число различных вариантов канонических распределений предпочтений. С каждым из них можно связать соответствующую цену. Здесь мы ограничимся только небольшим числом вариантов и с помощью моделирования продемонстрируем зависимость цены от эндогенных и экзогенных параметров распределений.

Перестройка распределений предпочтений происходит в результате экзогенных событий и эндогенных изменений. И то и другое можно связать с затратами определенных ресурсов. Не конкретизируя вид ресурсов, определим цену информации формулой

$$\boldsymbol{C_{subj}} = \frac{\delta \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{J}\left(|\,\delta \boldsymbol{R}\right)}, \tag{4.235}$$

где δR — затраты в принятых единицах; $J(|\delta R)$ — субъективная информация, обусловленная затратами δR. Субъективная информация в случае предметных предпочтений определена формулами (3.35), (3.36), либо формулами (3.40), (3.41).

В случае, описываемом формулой (3.43), под δR будем подразумевать ресурсы, затрачиваемые на перевод системы из состояния σ_s в состояние σ_r. Определение (4.235) можно без труда распространить на случаи более сложных распределений, например, — композиций и путей.

Формула (4.235) с учетом (3.43) дает:

$$\boldsymbol{C_{i\pi}}\left(\sigma_s \to \sigma_r\right) = \frac{\delta \boldsymbol{R}\left(\sigma_s \to \sigma_r\right)}{-\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_i \,|\, \sigma_s\right)\ln\pi\left(\sigma_i \,|\, \sigma_s\right) - \pi\left(\sigma_i \,|\, \sigma_r\right)\ln\pi\left(\sigma_i \,|\, \sigma_r\right)\right)}. \tag{4.236}$$

Применительно к рейтинговым предпочтениям, цена информации отвечает на вопрос: какова удельная средняя стоимость информации, обеспечивающей заданное или желаемое изменение распределения рейтингов субъектов в группе. В зависимости от вида рейтингового распределения определяется субъективная информация. Для абсолютных или интегральных рейтингов $\xi(j)$ определим информацию, связанную с событием A (в частности, с трансляцией ресурсов δR) формулой:

$$\boldsymbol{J_{subj\xi}}\left(\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{H}\left(\xi\left(\boldsymbol{j}\right)\right) - \boldsymbol{H}\left(\xi\left(\boldsymbol{i} \,|\, \boldsymbol{A}\right)\right). \tag{4.237}$$

«Носителем» этой информации является «коллективный разум», либо «виртуальный субъект», либо оператор внутри или вне группы.

Если изучаются распределения $\xi(j|\,i)$, где $i \in \overline{1, M}$, то

$$J_{subj\xi_i}(A) = H(\xi(j\,|\,i)) - H(\xi(j\,|\,i\,|\,A)), \tag{4.238}$$

и можно говорить об «информационном векторе» содержащем M количеств информации. В случае дифференциального распределения $\xi(j\,|\,i,\sigma_k)$, отнесенного к предметной альтернативе σ_k, появляется матрица информационных количеств $J_{subjik}(A)$ размером $M\times N$.

В условиях, когда политические процессы в обществе имеют своей целью изменение распределения рейтингов отдельных персонажей или политических партий и для этой цели затрачиваются значительные ресурсы, рассматриваемый подход предлагает способ количественной оценки удельной стоимости получаемой информации и сравнения эффективности производимых затрат.

Выше мы уже постулировали существование энтропийных порогов H_π^*, H_ξ^*, которые отделяют область дискуссии (или «царство свободы») от «царства необходимости», вблизи верхней границы которого принимаются решения, подготовляемые в области дискуссии.

Если, например, $H(\pi_0) > H^*(\pi)$, то есть субъект находится а «царстве свободы», то достижение границы $H^*(\pi)$ связано с получением им информации

$$J_{subj}(\pi_0 \to \pi^*) = H(\pi_0) - H^*(\pi). \tag{4.239}$$

В частности, если $\pi_0(\sigma_i) = \frac{1}{N}$, что соответствует максимальной неопределенности, то

$$J^*_{subj} = \left(\frac{1}{N} \to \pi^*\right) = \ln N - H^*(\pi). \tag{4.240}$$

Аналогичные формулы можно записать, например, для рейтингового распределения $\xi(j)$:

$$J_{subj}(\xi_0 \to \xi^*) = H(\xi_0) - H^*(\xi); \tag{4.241}$$

$$J_{subj}\left(\frac{1}{M} \to \xi^*\right) = \ln M - H^*(\xi). \tag{4.242}$$

На рис. 4.33 условно показано разбиение энтропийной шкалы на области, соответствующие различным состояниям группы.

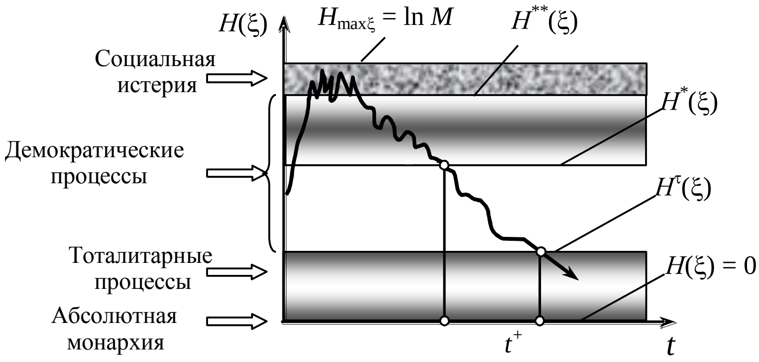


Рис. 4.33

Кривая на рис. 4.33 отражает характер зависимости, приведенной в учебном курсе ICAO (Международная организация гражданской авиации) стр. 123 / Air Live/ Section A “Flight deck crew”.

Выделяются четыре области. Верхняя область, когда $H_{\max\xi} \leq H(\xi) \leq H^{**}(\xi)$ характеризуется как зона «социальной истерии»: эмоции захлестывают рассудок, имеет место «эмоциональный перегрев». Выбор в этой области невозможен, социум не способен само сориентироваться в политических, в данном случае — рейтинговых, предпочтениях. Состояние «истерики» не может продолжаться долго, поскольку накал страстей требует значительного расхода физиологической энергии. Через сравнительно короткое время субъект попадает в область рассудочной дискуссии. Здесь эмоции играют меньшую роль. Поступление дополнительной информации приводит субъекта на границу $H^{*}(\xi)$, ниже которой может быть принято решение.

Предположительно существует еще один энтропийный рейтинговый порог. Около этого порога распределение рейтингов стремится к сингулярному, когда в социуме выделяется небольшая группа субъектов (или даже один субъект) с максимально высокими рейтингами, а режим управления стремится к «тоталитарному».

Как было отмечено, субъективная энтропия стремится к нулю, если при прочих равных условиях эндогенный параметр β стремится к бесконечности.

Имеет место своего рода «эмоциональное переохлаждение».

Область $H^{**}(\xi) \leq H(\xi) \leq H^{т}(\xi)$ — условно говоря, «область демократии», которая, содержит две подобласти: «царство свободы» и «царство необходимости».

Удержание энтропии $H(\xi)$ в этой области обеспечивает сохранение «демократии», сопровождающейся периодическими переходами через порог $H^{*}(\xi)$.

«Тоталитарная область»:

$$\boldsymbol{H^{т}(\xi) > H_{\xi} \geq 0}$$

как правило, область «без выхода». Выход возможен только путем качественного изменения, «слома системы». Такие «сломы» носят скачкообразный катастрофический характер.

Если говорить о внешнем управлении социальными процессами, то самой подходящей областью для вливания средств в интересах психологической войны является область «социальной истерии». В этой области легче всего повернуть массовое сознание в «нужном» направлении.

Можно говорить об «информационной емкости области демократии»:

$$J_{subj}(D) = H^{**}(\xi) - H^{т}(\xi). \qquad (4.243)$$

Тогда «информационная емкость области тоталитаризма»

$$J_{subj}(T) = H^{т}(\xi). \qquad (4.244)$$

Приведенные определения и терминология весьма условны.

Нужно сделать два дополнительных замечания.

1. Границы (пороги) $H^{**}(\xi)$, $H^{*}(\xi)$, $H^{т}(\xi)$ скорее всего изменяются с течением времени, не говоря уже о том, что они являются субъективными, то есть могут существенно отличаться у разных субъектов. Таким образом, мы имеем пестрый ковер энтропийного пространства субъектов социума, раскраска которого изменяется с течением времени.

Распределение *рейтинговых предпочтений* наверняка зависит от индивидуальных *предметных предпочтений*. Это делает картину и ее временную структур еще более сложной. Применение подхода, основанного на использовании субъективной энтропии и канонических распределений предпочтений, позволяет производить количественный анализ, в том числе, моделировать динамику предпочтений, изучать зависимость основных характеристик от экзогенных и эндогенных параметров.

В данном случае мы говорим о цене субъективной информации, как об одной из существенных характеристик процессов происходящих на субъективном уровне.

В качестве численного примера рассмотрим случай, когда S_a содержит лишь две альтернативы, а предметные предпочтения имеют вид:

$$\pi_0(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta x_i}}{e^{-\beta x_1} + e^{-\beta x_2}}.$$

Здесь $x_i = R_i^{req}$ — потребные ресурсы для реализации альтернативы σ_i. Снижение потребных ресурсов, например, путем снижения цен товаров можно трактовать как затраты «оператора». Предположим, что снижение потребных ресурсов пропорционально исходной цене, то есть

$$\delta R_i^{req} = r\frac{x_i}{x_1 + x_2}.$$

В этом случае $\delta R_1^{req} + \delta R_2^{req} = r$ — суммарное изменение потребных ресурсов.

Распределение предпочтений после снижения цен принимает вид:

$$\pi\left(\sigma_i \mid \delta R_i^{req}\right) = \frac{e^{-\beta x_i\left(1-\frac{r}{x_1+x_2}\right)}}{e^{-\beta x_1\left(1-\frac{r}{x_1+x_2}\right)} + e^{-\beta x_2\left(1-\frac{r}{x_1+x_2}\right)}}. \qquad (4.245)$$

Информация вычисляется по формуле

$$J_{subj}(\pi) = H(\pi_0) - H(\pi|\, \delta R^{req}) = H(\pi_0) - H(\pi|r), \qquad (4.246)$$

удельная цена информации — по формуле:

$$C_{subj}(\pi) = \frac{r}{H(\pi_0) + H(\pi \mid r)}. \qquad (4.247)$$

Результаты расчетов предпочтений, энтропии, информации и цены информации в зависимости от экзогенного параметра r_0 и экзогенного параметра β показаны на рис. 4.34.

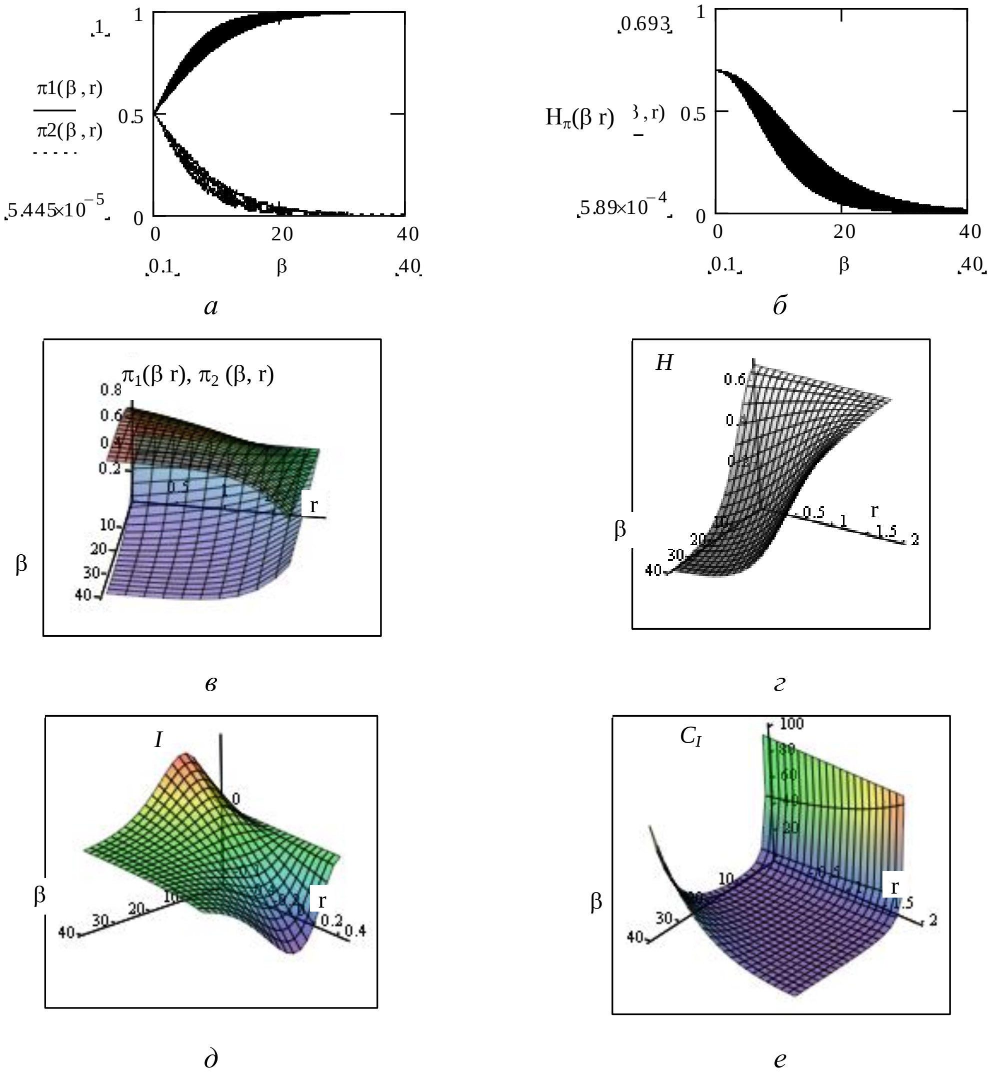


Рис. 4.34

Из формулы (4.245) видно, что, если априорные «цены» равны: $x_1 = x_2$, то при любом r предпочтения сохраняют свою величину и, следовательно, субъективная информация равна нулю. При этом начальная энтропия максимальна, а цена информации бесконечно велика. Другими словами при большой априорной неопределенности и синхронном изменении цен обоих «товаров» цена информации велика и тем выше, чем ближе априорное распределение предпочтений к равномерному. Если однако $x_1 = x_2$, то синхронное изменение цен изменит распределение.

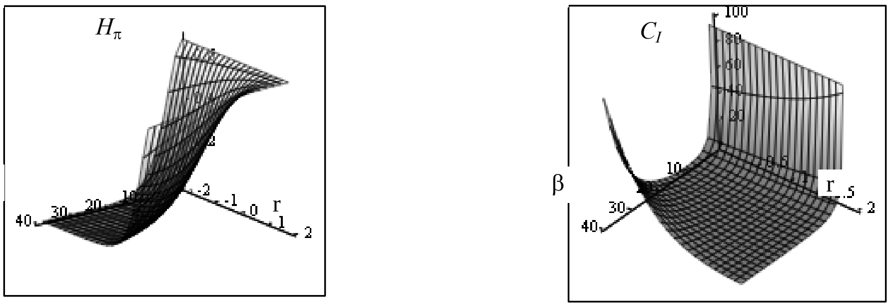
Параметр r_0 изменялся в пределах [–0,5; 0,5]. Эндогенный параметр β варьировался в широких пределах: β [0,1; 40]. Параметры x_1 и x_2 постоянны и различны $x_1 = 1{,}0$, $x_2 = 1{,}2$. На рис. 4.34, *а—г* показаны пучки кривых, соответствующие различным значениям r, в функции от β. Видим, что для всех значений r увеличение β приводит к уменьшению энтропии. Цена информации имеет минимум. При стремлении β к нулю она быстро растет. При больших β цена также возрастает. Рис. 4.34, *д—е* иллюстрируют те же зависимости в виде трехмерных графиков в осях β, r.

В предположении, что изменяется цена только одного «товара»: $x_1' = x_1 + r$, новые предпочтения определяются по формулам

$$\pi_1(|\,r) = \frac{e^{-\beta(x_1+r)}}{e^{-\beta(x_1+r)} + e^{-\beta x_2}}.$$

$$\pi_2(|\,r) = \frac{e^{-\beta x_2}}{e^{-\beta(x_1+r)} + e^{-\beta x_2}}.$$

На рис. 4.35 показана зависимость энтропии и стоимости субъективной информации от экзогенного параметра r и эндогенного параметра β ($x_1 = 1{,}0$; $x_2 = 1{,}1$; $r \in [0;\, 1{,}0]$, $\beta \in [0{,}1,\, 70]$.



а *б*

Рис. 4.35

Вычисление, энтропии и стоимости информации представлены на рис. 4.36. Здесь также выясняется зависимость от экзогенного параметра x и эндогенного параметра β, что «эмоциональности» температуры $T = \beta^{-1}$.

Аналогия величины $\beta^{-1} = T$ температуре в термодинамических задачах основана на формальном сходстве канонического распределения $\pi(\sigma_i)$ с распределением Гиббса. При условии , что $\beta \to 0$ или $T \to \infty$, распределение $\pi(\sigma_i)$ стремиться к равномерному, а субъективная энтропия H_π к своему максимальному значению $\ln N$.

В предыдущих задачах определялась средняя цена при изменении ресурсов на определенную конечную величину. Очевидно, что, если ресурсы изменяются на малую (бесконечно малую) величину, то и соответствующая информация будет бесконечно малой. Рассмотрим распределение:

$$\pi(\sigma_i)=\frac{e^{-\beta\frac{R^{req}(\sigma_i)}{R^{disp}}}}{e^{-\beta\frac{R^{req}(\sigma_1)}{R^{disp}}}+e^{-\beta\frac{R^{req}(\sigma_2)}{R^{disp}}}}. \tag{4.248}$$

Величина потребных ресурсов зависит от номера альтернативы, а располагаемые ресурсы универсальны.

Обозначим: $R^{req}(\sigma_i) = r_i$, а $R^{disp} = x$.

Тогда:

$$\pi(\sigma_i)=\frac{e^{-\beta\frac{r_i}{x}}}{e^{-\beta\frac{r_1}{x}}+e^{-\beta\frac{r_2}{x}}}. \tag{4.249}$$

Определим «скорость» изменения предпочтений при изменении располагаемых ресурсов. Имеем

$$\frac{d\pi(\sigma_1)}{dx}=\frac{\beta}{x^2}(r_1-r_2)\pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2); \tag{4.250}$$

$$\frac{d\pi(\sigma_2)}{dx}=\frac{\beta}{x^2}(r_2-r_1)\pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2);$$

Тогда производная от энтропии определяется формулой

$$\frac{dH_\pi}{dx}=-\frac{\beta}{x^2}(r_1-r_2)\pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2)\ln\frac{\pi(\sigma_1)}{\pi(\sigma_2)}. \tag{4.251}$$

Определим **мгновенную цену информации**:

$$C_{subj}^{inst}=\frac{dx}{dH_\pi}=\frac{1}{\frac{dH_\pi}{dx}}. \tag{4.252}$$

Можно заменить, что цена C_{subj}^{inst}, всегда положительна.

Действительно, пусть $r_1 > r_2$, тогда $\pi(\sigma_1) < \pi(\sigma_2)$ и $\ln\frac{\pi(\sigma_1)}{\pi(\sigma_2)}<0$, $\frac{dH_\pi}{dx}>0$ и, следовательно $C_{subj}^{inst}>0$. Если же $r_2 > r_1$, то $\pi(\sigma_1) > \pi(\sigma_2)$, а $\ln\frac{\pi(\sigma_1)}{\pi(\sigma_2)}>0$ и $\frac{dH_\pi}{dx}>0$. Следовательно, снова $C_{subj}^{inst}>0$.

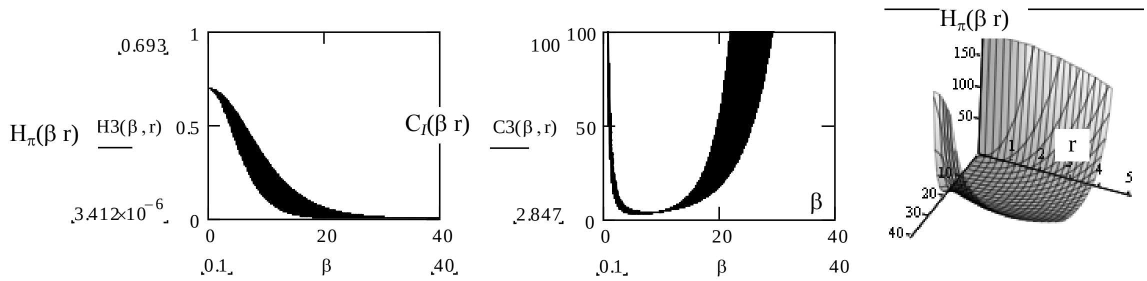
На рис. 4.36 представлены зависимости от β и x «мгновенной цены информации» в случае, если распределение предпочтений задано формулой (4.249). При этом вместо x в показателях степени экспонент фигурирует величина $R^{disp} + x = R + x$. Предполагается, что имеются определенные начальные располагаемые ресурсы, которые

затем увеличиваются на величину x. Параметр β изменяется в пределах $0{,}1 \le \beta\ 40$, а x — в пределах: 0,1…20. Естественно r_1 и r_2 должны быть меньше R.

Принято, что $r_1 = 1{,}0$, $r_2 = 1{,}2$, начальные располагаемые ресурсы R = 1,2.

Видим, как и в предыдущих случаях, что цена при очень малых β (высокой «температуре эмоционального нагрева»), оказывается очень большой.

Из рис. 4.36 *а*, *б* видно, что мгновенная цена также имеет минимум при определенном значении параметра β, а энтропия с ростом β уменьшается и стремится к нулю. На рис. 4.36, *в* представлена зависимость мгновенной цены от параметров β и x в виде трехмерного графика.



а *б* *в*

Рис. 4.36

Рассмотрим задачу в которой имеется два субъекта, две альтернативы и происходит передача определенной части располагаемых ресурсов от одного субъекта к другому (без потери их «по дороге») таким образом, чтобы после передачи располагаемые ресурсы у отдаляющего были не меньше наибольших потребных ресурсов.

Предпочтения определяются по формулам:

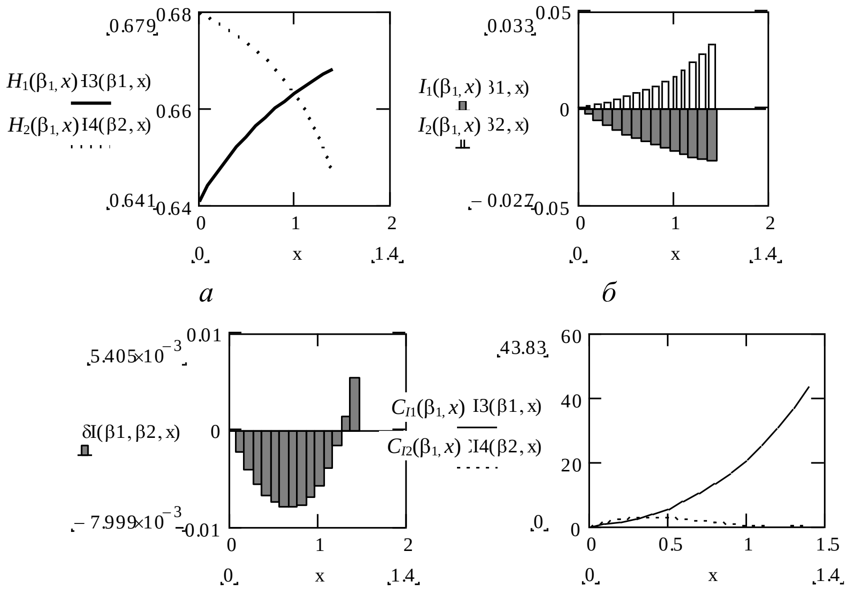
$$\pi_1(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta_1 \frac{r_1(\sigma_i)}{x+R_1}}}{e^{-\beta_1 \frac{r_1(\sigma_1)}{x+R_1}} + e^{-\beta_1 \frac{r_1(\sigma_2)}{x+R_1}}};$$

$$\pi_2(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta_2 \frac{r_2(\sigma_i)}{-x+R_2}}}{e^{-\beta_2 \frac{r_2(\sigma_1)}{-x+R_2}} + e^{-\beta_2 \frac{r_2(\sigma_2)}{-x+R_2}}}.$$

Принято, что: начальные располагаемые ресурсы одинаковы $R_1 = R_2 = 3{,}0$; потребные ресурсы неизменны и одинаковы для обоих субъектов и равны $r_1(\sigma_1) = 0{,}5$; $r_2(\sigma_2) = 1{,}5$, передаваемая часть x изменяется в пределах [0; 1,49], эндогенные параметры $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 1$ («температуры» различны). На рис.4.37, *а* показаны, соответственно, зависимость $H_1(\beta_1 x)$ и $H_2(\beta_2 x)$, конечная информация, соответствующая переданному количеству x

$$\boldsymbol{I_1(\beta_1 x) = H_1(\beta_1, 0) - H_1(\beta_1, x)};$$

$$\boldsymbol{I_2(\beta_2 x) = H_2(\beta_{12}, 0) - H_2(\beta_2, x)};$$



а *б*

в *г*

Рис. 4.37

Результаты расчетов, приведенные на рис. 4.37, а—г, в частности, показан «дефицит» субъективной информации

$$\delta I = I_2(\beta_2, x) - I_1(\beta_1, x)$$

— рис. 4.37, *в*. Видно, в частности, что дефицит не равен нулю, другими словами, информация в результате трансляции ресурсов не сохраняется. На рис. 4.37, *г* приведены цены информации C_1 и C_2 для обоих участвующих в трансляции субъектов. Мы видим, что энтропия отдающего увеличивается с увеличением объема отдаваемых ресурсов. Энтропия первого субъекта получающего дополнительные ресурсы уменьшается. Информация, определенная через энтропии отдающего отрицательна, информация получающего положительна. Из рис. 4.37, *г* видно, что цена информации для отдающего много меньше цены информации для получающего.

4.14. Агрегирование предпочтений пилотов в двухчленном экипаже

В качестве приложения схем агрегирования кардинальных предпочтений рассмотрим агрегирование предпочтений пилотов двухчленного экипажа самолета.

Из практики летной эксплуатации известен на первый взгляд удивительный факт: при возникновении в полете особых ситуаций и наличии ряда альтернатив вероятность принятия первым пилотом ошибочного решения оказывается выше в том случае, когда рейтинги обоих пилотов одинаковы (или близки), например, если на месте второго пилота находится проверяющий — как правило, имеющий более высокий официальный ранг, чем первый пилот и, соответственно, в глазах первого пилота — более высокий рейтинг.

Этот факт носит эмпирический характер. Попробуем дать его обоснование, опираясь на предположения и теоретические представления, развиваемые в настоящей работе.

Предположим, что группа состоит из двух субъектов (пилотов) один из которых — первый пилот принимает решения, однако при этом в определенной мере учитывает мнение второго пилота.

Рассматривается ситуация, когда оба субъекта анализируют одно и то же множество альтернатив, включающее в простейшем случае две альтернативы σ_1 и σ_2. Пусть π_{11} и π_{12} — априорные предпочтения первого пилота, соответственно альтернатив σ_1 и σ_2, π_{21} и π_{22} — априорные предпочтения второго пилота. Роль пилотов в составе экипажа состоит не только в разделении функций в процессе управления воздушным судном, но также в обмене информацией при возникновении особых ситуаций. Второй пилот, таким образом, может оказывать влияние на принятие решения командиром корабля. Можно предположить, что такое влияние пропорционально рейтингу второго пилота «в глазах» первого пилота. Примем следующую модель агрегированных предпочтений, образующихся в результате «дискуссии».

Агрегированные предпочтения первого пилота определим формулой

$$\pi_1^{\Sigma}(\sigma_i) = \pi_1(\sigma_i)\xi(1|1) + \pi_2(\sigma_i)\xi(2|1), \; (i \in \overline{1,2}). \quad (4.253)$$

Для второго пилота соответственно:

$$\pi_2^{\Sigma}(\sigma_i) = \pi_1(\sigma_i)\xi(1|2) + \pi_2(\sigma_i)\xi(2|2), \; (i \in \overline{1,2}). \quad (4.254)$$

Здесь $\xi(j|\,k)$ — рейтинг субъекта j «глазами» субъекта k.

Входящие в эти формулы предпочтения подчинены условиям нормировки:

$$\pi_j(\sigma_1) + \pi_j(\sigma_2) = 1 \text{ для } \forall j \in \overline{1,2};$$

$$\xi(1|k) + \xi(2|k) = 1 \text{ для } \forall k \in \overline{1,2};$$

Каждый из пилотов определяет рейтинг коллеги, сравнивая со своим рейтингом.

Согласно с моделью (4.246), (4.247), агрегированное предпочтение складывается из априорных предпочтений, учитываемых с весами равными условным рейтингам носителей соответствующих априорных предпочтений. Для сокращения числа переменных, обозначим:

$$\mu_1 = \frac{\pi_1(\sigma_1)}{\pi_1(\sigma_2)}; \quad \mu_2 = \frac{\pi_2(\sigma_1)}{\pi_2(\sigma_2)};$$

$$\eta_1 = \frac{\xi(1|1)}{\xi(2|1)}; \quad \eta_2 = \frac{\xi(1|2)}{\xi(2|2)}.$$

В этих формулах $\xi(1|\,1)$ и $\xi(2|\,2)$ — рейтинги «назначаемые» субъектом самому себе. В новых переменных формула (4.253) дает

$$\left.\begin{aligned}\pi_1^{\Sigma}(\sigma_1)&=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\frac{\eta_1}{1+\eta_1}+\frac{\mu_2}{1+\mu_2}\frac{1}{1+\eta_1};\\ \pi_1^{\Sigma}(\sigma_2)&=\frac{1}{1+\mu_1}\frac{\eta_1}{1+\eta_1}+\frac{1}{1+\mu_2}\frac{1}{1+\eta_1};\end{aligned}\right\} \qquad (4.255)$$

Из формулы (4.255) получаем:

$$\left.\begin{aligned}\pi_2^{\Sigma}(\sigma_1)&=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\frac{\eta_2}{1+\eta_2}+\frac{\mu_2}{1+\mu_2}\frac{1}{1+\eta_2};\\ \pi_2^{\Sigma}(\sigma_2)&=\frac{1}{1+\mu_1}\frac{\eta_2}{1+\eta_2}+\frac{1}{1+\mu_2}\frac{1}{1+\eta_2};\end{aligned}\right\} \qquad (4.256)$$

Легко проверить, что выполняются условия

$$\pi_j^{\Sigma}(\sigma_1)+\pi_j^{\Sigma}(\sigma_2)=1, \ (j\in\overline{1,2}).$$

На рис. 4.38 показаны результаты рейтинговой энтропии агрегированных предпочтений первого пилота $\boldsymbol{H}_{\pi_1}^{\Sigma}$ в зависимости от переменных μ_1, μ_2, η_1.

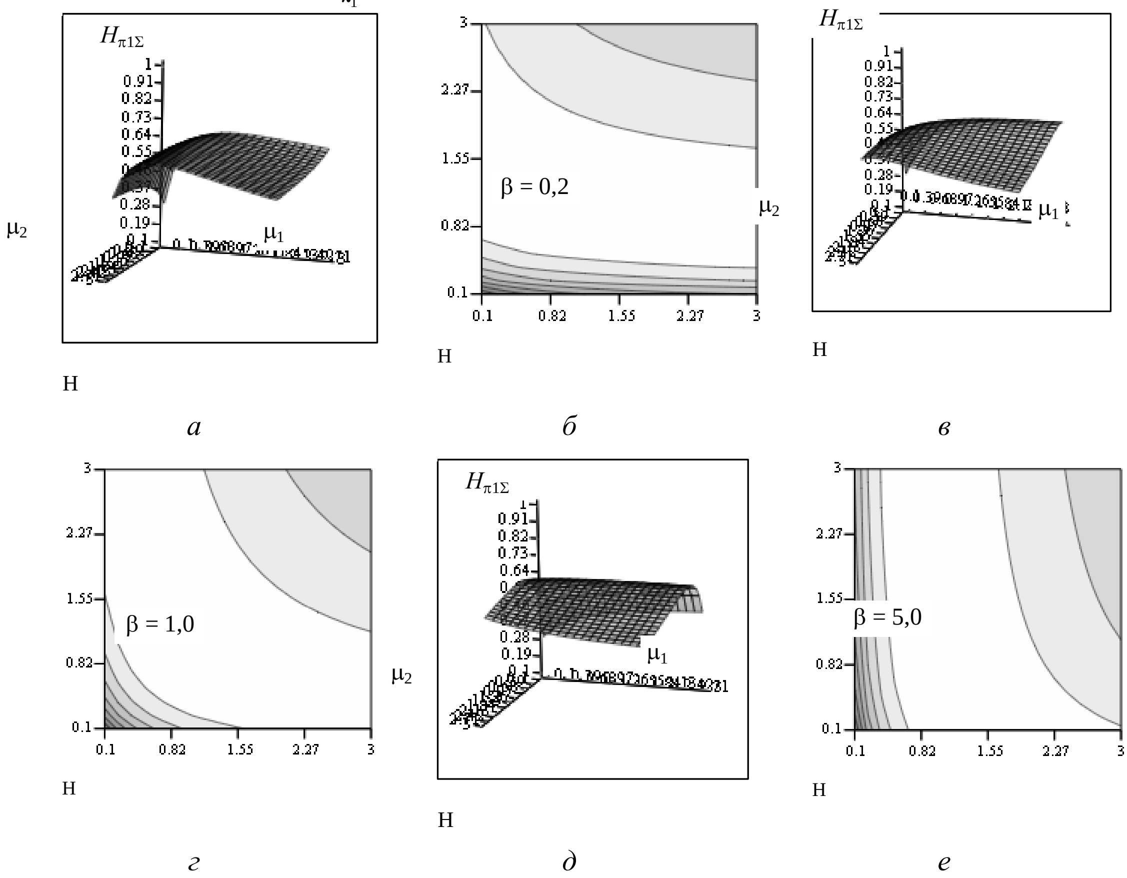


Рис. 4.38

Высокий уровень энтропии, как говорилось ранее, затрудняет принятие решения. Максимальная энтропия H_{max} = ln 2 ≅ 0,693. На рис. 5.36, *б, г, е* светлая (для области значений η_1 = 0,2; 1,0; 5,0) соответствует случаям, когда $\boldsymbol{H}_{\pi_1}^{\Sigma} \in [0,6;0,693]$, степень неопределенности высока и принятие решения крайне затруднено. В соседних областях по мере уменьшения энтропии степень неопределенности уменьшается, принятие решения упрощается и, соответственно уменьшается потребное для этого время.

Построить диаграммы представляется возможным, когда определены априорные предпочтения обоих субъектов и известны их условные рейтинги, которые также являются априорными.

Подобные оценочные расчеты могут оказаться полезными при разработке методик подбора экипажей, при расследовании авиационных происшествий.

Расчет зависимости априорных предметных предпочтений и рейтинговых предпочтений от экзогенных и эндогенных факторов основывается на моделях канонических распределений, в том числе и для агрегированных предпочтений.

В каждом случае необходимо выбрать вид канонического распределения из арсенала распределений, рассмотренных ранее, сообразуясь с содержанием конкретной задачи. В частных случаях это будет сделано в гл. 6, посвященной безопасности активных систем, в том числе, безопасности полета, где показано, что использование развиваемой здесь версии субъективного анализа дает альтернативную возможность учета «человеческого фактора» в задачах безопасности полетов.

Моделирование полетной ситуации Ту-154, который потерпел крушение 10.04. 2010 при заходе на посадку на аэродром Смоленск «Северный»

Была сделана попытка моделирования полетной ситуации Ту-154. На момент посадки погодные условия были сложные. Экипаж польского самолета Як-40 (заходившей ранее на посадку) предупредил, что, по его оценке, видимость на аэродроме - около 200 метров при минимально установленной для данного аэродрома дальности видимости - 1000 метров. Тем не менее, экипажем было принято решение садиться. Как было выяснено в результате расследования, причиной этому было присутствие «третьего лица» в кабине пилотов. При моделировании основной акцент был сделан на психологическую составляющую, так как технически самолет был исправен.
Ниже представлена информация по переговорам в кабине пилотов.

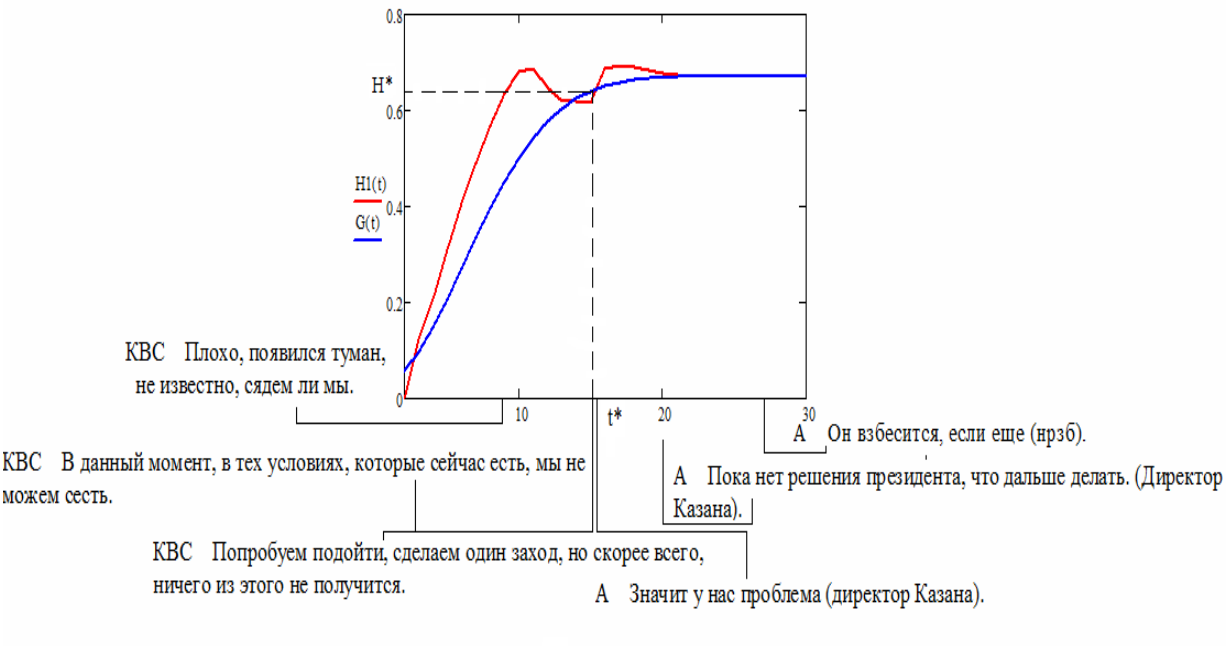


Рис.4.39. Расчет предположительных значений энтропии 1-го пилота.

На рисунке 4.39 $G(t)$- подвижный энтропийный порог; $H1(t)$- энтропия 1-го пилота; H^*- энтропия принятия решения; t^*- момент принятия решения.
Формула подвижного энтропийного порога (предположительно - логистическая зависимость)

$$H_{\pi}{}^{*} = f(\ln N) + \left(H_0 - f(\ln N)\right)\cdot e^{-h\cdot\tau^{-2}}$$

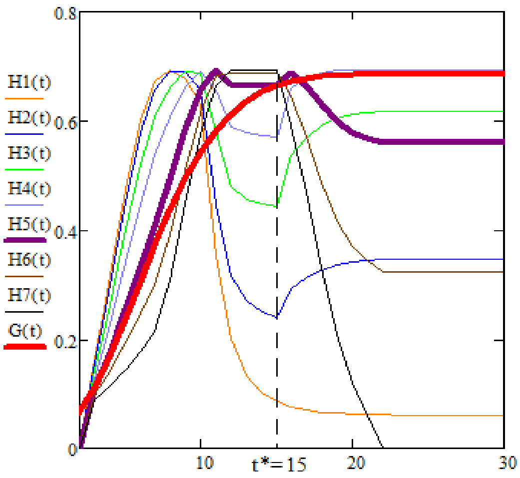


Рис. 4.40. Предположительная зависимость энтропии от отношения рейтингов (1-го и 2-го пилотов).

1 – отношение рейтингов 1:0 1;
2 – отношение рейтингов 0.9:0.1;
3 - отношение рейтингов 0.7:0.3;
4 - отношение рейтингов 0.5:0.5;
5 - отношение рейтингов 0.25:0.75; 6 - отношение рейтингов 0.1:0.9;
7 - отношение рейтингов 0:1.

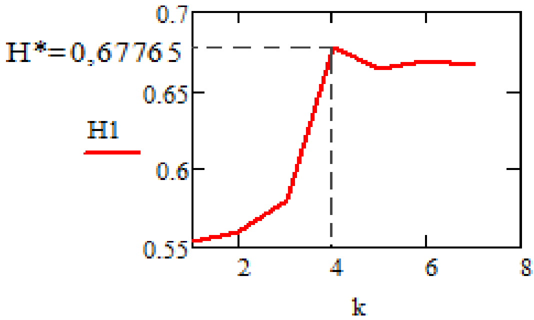


Рис. 4.41. Предположительная зависимость энтропийного порога от отношения рейтингов (1-го и 2-го пилотов).

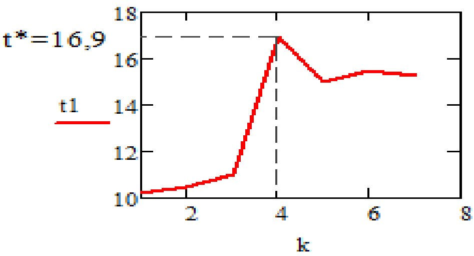


Рис. 4.42. Зависимость момента принятия решения от отношения рейтингов

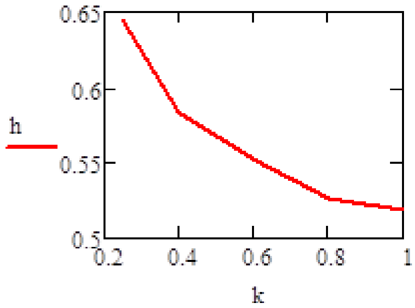


Рис. 4.43. Зависимость энтропии от 1-го пилота его рейтинга

Как видим, наихудшая ситуация возникает при соотношении рейтингов 0,5:0,5 (п.4)

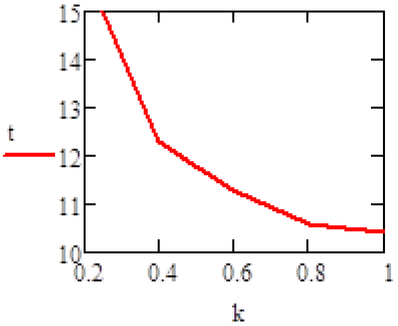


Рис. 4.44. Зависимость момента принятия решения от рейтинга 1-го пилота

Просмотрев разговоры в кабине пилотов можно предположить о том, каковы были предпочтения участников события. Капитан воздушного судна и второй пилот предпочитали уйти на запасной аэродром, но представитель президента настаивал на посадке. Результаты моделирования представлены на рис.1. Так же была промоделирована ситуация при разных отношениях рейтингов. Это дало возможность сравнить моменты принятия решений и значения энтропийных порогов. На рис.3. и рис.4 следует отметить, что при равных соотношениях рейтингов затрачивается максимальное время на принятие решений и решение принимается при макс. значении энтропии. а это в свою очередь увеличивает вероятность принятие неверного решения. На рис. 5 и рис.6 представлены зависимости энтропии и момента принятия решения от рейтинга капитана. Отслеживается такая зависимость: чем выше рейтинг пилота, тем быстрее принимается реше-

ние и энтропия принятия решения минимальна. Следовательно, кроме технической подготовки летного состава, имеет большое значение психологическая составляющая, особенно при перевозке высокопоставленных пассажиров.

4.15. Эластичность и жесткость предпочтений – эластичность и жесткость психики.

В настоящем разделе вводятся эластичности предпочтений I и II рода. Они являются инструментом субъективного анализа, свойство, которое они характеризуют можно назвать «*эластичностью психики*» (flexibility), соответственно «жесткостью психики» (rigidity). Наличие количественных моделей канонических распределений предпочтений делает анализ с использованием этих понятий содержательным. С помощью эластичности и жесткости можно охарактеризовать определенные типы психики. Их использование является важным и продуктивным в теории обучения, применительно к проблеме безопасности активных систем, в экономике, в теории рекламной деятельности, в политологии, в социологии и в ряде других предметных областей.

Вычисления, проведенные ниже, могут быть без труда распространены на другие различные распределения предпочтений, встречающиеся в этой книге.

Как известно, эластичность функции $y(x)$ по параметру x определяется формулой

$$\varepsilon_y^x = \frac{y'}{y}x\,.$$

Эластичность является пределом отношения относительных приращений функции и независимой переменной

$$\varepsilon_y^x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}}. \tag{4.257}$$

Для эластичностей справедливы соотношения

$$\varepsilon_{yz}^x = \varepsilon_y^x + \varepsilon_z^x\,; \tag{4.258}$$

$$\varepsilon_{y/z}^x = \varepsilon_y^x - \varepsilon_z^x\,. \tag{4.259}$$

Эластичность сложной функции $y(z(x))$

$$\varepsilon_{y(z)}^x = \varepsilon_y^z \cdot \varepsilon_z^x\,. \tag{4.260}$$

Эластичности предпочтений $\pi(\sigma_k)$ или $\xi(\sigma_k)$ и их различных обобщений по отношению к количественным показателям, содержащимся в канонических распределениях, назовем *каноническими субъективными эластичностями*.

Если σ_k понимается как количественный показатель, то эластичность предметных предпочтений — предпочтений I рода есть

$$\varepsilon_\pi^\sigma = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \sigma}}{\pi}\sigma. \tag{4.261}$$

В частных ситуациях в качестве такого показателя выступает полезность $U(\sigma_k)$, либо определенный вид ресурсов: $R^{disp}(\sigma_k) = R^d(\sigma_k)$; $R^{req}(\sigma_k) = R^r(\sigma_k)$; $R_p{}^{disp}(\sigma_k)$; $R_p{}^{req}(\sigma_k)$; $R_a{}^{disp}(\sigma_k)$; $R_a{}^{req}(\sigma_k)$; …, где индексы d, r, p, a обозначают «располагаемые», «потребные», «пассивные», «активные», … ресурсы. Например,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\pi}^{U} = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{U}}}{\pi}\boldsymbol{U}.$$

есть «эластичность предпочтения по полезности». Эластичность π по располагаемым и потребным ресурсам определяется по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\pi}^{d} = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{R}^{d}}}{\pi}\boldsymbol{R}^{d};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\pi}^{U} = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{R}^{r}}}{\pi}\boldsymbol{R}^{r}.$$

Эластичность рейтингов определяется аналогичными формулами:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}^{\sigma} = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial \sigma}}{\xi}\sigma; \tag{4.262}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}^{U} = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{U}}}{\xi}\boldsymbol{U};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}^{d} = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{R}^{d}}}{\xi}\boldsymbol{R}^{d};$$

$$\varepsilon_{\xi}^{r} = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial R^{r}}}{\xi}R^{r}.$$

Для группы субъектов появляется еще один вид эластичностей. характеризующий «силу» взаимного влияния субъектов в группе. Эластичность предпочтений I рода субъекта i по отношению к предпочтениям субъекта j:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\pi_j}^{\pi_i} = \frac{\dfrac{\partial \pi_j}{\partial \pi_i}}{\pi_j}\pi_i = \frac{\partial \pi_j}{\partial \pi_i}\frac{\pi_i}{\pi_j}, \tag{4.263}$$

где π_i и π_j — «одноименные» предпочтения субъектов i и j (то есть предпочтения одной и той же альтернативы σ_k).

Взаимная эластичность рейтингов ξ_j, ξ_i

$$\varepsilon_{\xi_j}^{\xi_i} = \frac{\dfrac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i}}{\xi_j} \xi_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i} \frac{\xi_i}{\xi_j}. \tag{4.264}$$

Как было показано выше, предпочтения I рода субъекта в составе группы являются функциями рейтингов и наоборот, рейтинги могут быть функциями «предметных» предпочтений. В связи с этим вводятся перекрестные эластичности:

$$\varepsilon_{\pi}^{\xi} = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial \xi}}{\pi} \xi = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \frac{\xi}{\pi}; \tag{4.265}$$

$$\varepsilon_{\xi}^{\pi} = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial \pi}}{\xi} \pi = \frac{\partial \xi}{\partial \pi} \frac{\pi}{\xi}. \tag{4.266}$$

Наконец, можем говорить о взаимной эластичности индивидуальных (предметных) предпочтений I рода

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\pi(\sigma_i)} = \frac{\dfrac{\partial \pi(\sigma_k)}{\partial \pi(\sigma_i)}}{\pi(\sigma_k)} \pi(\sigma_i). \tag{4.267}$$

Легко заметить, что для нормированных канонических предпочтений, которые имеют структуру, выражаемую формулой

$$\pi(\sigma_k) = \frac{f(k)}{\sum_{j=1}^{N} f(j)}, \tag{4.268}$$

выполняется условие

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\pi(\sigma_i)} = \frac{\pi(\sigma_i)}{\pi(\sigma_k)}$$

Из условий нормировки вытекают также определенные общие свойства эластичности. Поскольку $\sum_{k=1}^{N} \pi(\sigma_k) = 1$, то

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \pi(\sigma_k)}{\partial \sigma_i} = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\sigma_i} \pi(\sigma_k) = 0, \ (i \in 1, N). \tag{4.269}$$

Это означает, что *вектор эластичностей по отношению к любой альтернативе ортогонален к вектору предпочтений*.

В частности для S_a, содержащего только две альтернативы σ_1 и σ_2, получаем

$$\frac{\varepsilon_{\pi_1}^{\sigma_1}}{\varepsilon_{\pi_2}^{\sigma_1}} = -\frac{\pi_2}{\pi_1}.$$

Поскольку соотношение (4.269) справедливо для любой альтернативы σ_i ($i \in \overline{1,N}$), то обозначая через ε матрицу эластичностей $\left\|\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_i}\right\|$ и через $\pi^{\mathrm{T}} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ — вектор предпочтений I рода (нижний индекс — номер альтернативы), можем записать условие

$$\boldsymbol{\varepsilon\pi} = 0. \tag{4.270}$$

Имея в виду функциональный вид предпочтения (4.269), получаем следующую полезную формулу

$$\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_k} = \left(1 - \pi(\sigma_k)\right)\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k}, \tag{4.271}$$

где $\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k}$ есть эластичность числителя в (4.268) по параметру σ_k:

$$\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k} = \frac{\dfrac{\partial f(\sigma_k)}{\partial \sigma_k}}{f(\sigma_k)}\sigma_k.$$

Эластичность $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_j}$ при $j \neq k$ определяется по формуле

$$\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_j} = -\pi(\sigma_j)\varepsilon_{f_j}^{\sigma_j}. \tag{4.272}$$

Имеет место следующая формула:

$$\varepsilon_{\varepsilon_\pi^\sigma}^{t} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon_\pi^\sigma\right)}{\varepsilon_\pi^\sigma} t = \varepsilon_{\pi'_\sigma}^{t} - \varepsilon_\pi^t + \varepsilon_\sigma^t. \tag{4.273}$$

где $\varepsilon_{\varepsilon_\pi^\sigma}^{t}$ — эластичность по времени эластичности по альтернативе ε_π^σ.

Вычислим в явном виде эластичности по основному параметру σ_k для двух наиболее характерных функций предпочтения:

$$\pi(\sigma_k) = \frac{e^{-\beta\sigma_k}}{\sum\limits_{j=1}^{N} e^{-\beta\sigma_j}}; \quad \pi(\sigma_k) = \frac{\sigma_k^\alpha e^{-\beta\sigma_k}}{\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j^\alpha e^{-\beta\sigma_j}}.$$

Здесь через σ_k обозначен показатель, определяющий предпочтения (полезность U, располагаемые ресурсы R^d, потребные ресурсы R^r, ..). Непосредственное вычисление дает для первой функции

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\sigma_k} = \frac{-\beta e^{-\beta\sigma_k}\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta\sigma_k} + \beta e^{-2\beta\sigma_k}}{\left(\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta\sigma_j}\right)^2}\frac{\sigma_k}{\pi(\sigma_k)}.$$

После преобразований найдем

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\sigma_k} = -\beta\left(1-\pi(\sigma_k)\right)\sigma_k. \tag{4.274}$$

Для второй функции

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{\sigma_k} = \left(\alpha - \beta\sigma_k\right)\left(1-\pi(\sigma_k)\right), \tag{4.275}$$

сравнивая с формулами (4.271) и (4.272), видим, что в первом случае $\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k} = -\beta\sigma_k$, во втором $\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k} = \alpha - \beta\sigma_k$.

Из (4.271) следует, что для функции $\pi(\sigma_k)$ первого типа эластичность $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_k}$ отрицательна, если $\beta > 0$, $\sigma_k > 0$ и растет по абсолютной величине с ростом σ_k $(1 - \pi(\sigma_k)) > 0$, наоборот, эластичность $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_j}$ положительна по σ_k и растет с ростом σ_k. В случае функции $\pi(\sigma_k)$ второго типа эластичности $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_k}$ и $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_j}$ обращаются в нуль в точке $\sigma_k = \frac{\alpha}{\beta}$, $(\sigma_j = \frac{\alpha}{\beta})$ и в этой точке меняют знак, причем, если $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_k} > 0$, то $\varepsilon_{\pi_k}^{\sigma_j} < 0$ и наоборот.

Воспользуемся полученными формулами, чтобы записать дифференциальное уравнение, описывающее изменение эластичности во времени.

Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\pi(\sigma_k)}{dt} = \pi(\sigma_k)\left[\varepsilon_{f_k}^{\sigma_k}\frac{\dot{\sigma}_k}{\sigma_k} - \sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)\varepsilon_{f_j}^{\sigma_j}\frac{\dot{\sigma}_j}{\sigma_j}\right]. \tag{4.276}$$

Если обозначить через $\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{t}$ эластичность $\pi(\sigma_k)$ относительно времени, а $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma_k}^{t}$ — эластичность параметра σ_k по времени, то из (5.159) получаем:

$$\varepsilon_{\pi(\sigma_k)}^{t} = \varepsilon_{f_k}^{\sigma_k}\varepsilon_{\sigma_k}^{t} - \sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)\varepsilon_{f_j}^{\sigma_j}\varepsilon_{\sigma_j}^{t}. \tag{4.277}$$

Это уравнение для эластичностей содержит также предпочтения $\pi(\sigma_j)$ и, следовательно, должно рассматриваться одновременно с уравнением, определяющим динамику предпочтений. Уравнение (4.277) не является дифференциальным уравнением. Оно лишь указывает связь между различными эластичностями. Подобные соотношения имеют место для рейтинговых предпочтений.

Исследование субъективных эластичностей и субъективных чувствительностей представляет одну из возможностей анализа психических процессов, связанных с принятием решений на множестве альтернатив.

Эластичности предпочтений типа по отношению к эндогенным параметрам α и β определяются формулами:

$$\varepsilon_{\pi_i}^{\beta} = \beta\left(\sigma_i - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \pi_j\right); \tag{4.278}$$

$$\varepsilon_{\pi_i}^{\alpha} = \alpha^2\left(\sigma_i^{-1} - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^{-1} \pi_j\right). \tag{4.279}$$

Здесь, как и выше, σ_i понимается как количественная характеристика (непрерывная) данной альтернативы. Если имеется только две альтернативы σ_1 и σ_2, то из (4.278) и (4.279) находим, что

$$\varepsilon_{\pi_1}^{\beta} = \beta(\sigma_1 - \sigma_2)\pi_2;\ \varepsilon_{\pi_2}^{\beta} = \beta(\sigma_2 - \sigma_1)\pi_1;$$

$$\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha} = \alpha^2\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1\sigma_2}\right)\pi_2;\ \varepsilon_{\pi_2}^{\alpha} = \alpha^2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right)\pi_1.$$

Отсюда находим, что в обоих случаях

$$\frac{\varepsilon_{\pi_1}^{\beta}}{\varepsilon_{\pi_2}^{\beta}} = \frac{\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha}}{\varepsilon_{\pi_2}^{\alpha}} = -\frac{\pi_2}{\pi_1}. \tag{4.280}$$

Этот результат с точки зрения «здравого смысла» выглядит весьма реалистично: чем больше я чего-либо хочу (больше $\pi_1 > 0$), тем меньше эластичность моей психики по отношению к данной альтернативе. При этом, поскольку $\pi_1 > 0$ и $\pi_2 > 0$, эластичности имеют разные знаки.

Легко найдем, что сумма эластичностей

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\pi_1}^{\beta} + \varepsilon_{\pi_2}^{\beta} &= \beta(\sigma_1 - \sigma_2)(\pi_2 - \pi_1); \\ \varepsilon_{\pi_1}^{\alpha} + \varepsilon_{\pi_2}^{\alpha} &= \alpha^2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right)(\pi_2 - \pi_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.281}$$

отсюда следует, что при равенстве предпочтений ($\pi_1 = \pi_2$) сумма эластичностей должна быть равна нулю:

$$\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha(\beta)} + \varepsilon_{\pi_2}^{\alpha(\beta)} = 0$$

или $\varepsilon_{\pi_2}^{\alpha(\beta)} = -\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha(\beta)}$.

Пусть в качестве σ_i выступают соответствующие полезности U_i. Предыдущее соотношение следует понимать так: если полезность первой альтернативы больше полезности второй альтернативы: $U_1 > U_2$ то $\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha(\beta)} > 0$, а $\varepsilon_{\pi_2}^{\alpha(\beta)} < 0$ и наоборот, $U_1 < U_2$, $\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha(\beta)} < 0$ и $\varepsilon_{\pi_2}^{\alpha(\beta)} > 0$, наконец, если полезности одинаковы, эластичности для первой и второй альтернативы одновременно равны нулю. При этом из (4.280) следует, что

$$\lim_{U_1 \to U_2} \frac{\varepsilon_{\pi_1}^{\alpha(\beta)}}{\varepsilon_{\pi_2}^{\alpha(\beta)}} = -1, \text{ а } \boldsymbol{\pi_1 \to \pi_2}.$$

Сумма эластичностей, как видно из (4.281) равна нулю, если $\pi_1 = \pi_2$. Это условие выполняется одновременно с условием $\sigma_1 = \sigma_2$ (или $U_1 = U_2$). Можно утверждать, следовательно, что если энтропия

$$\boldsymbol{H_\pi = H_{\pi\max} = \ln 2},$$

то сумма субъективных эластичностей равна нулю, а их отношение равно –1.

Соответствие «здравому смыслу» этих выводов можно рассматривать также как косвенное подтверждение реалистичности основного предположения теории о существовании субъективного принципа оптимальности.

Чувствительности и эластичности предпочтений разделим на два типа в зависимости от того, по отношению к чему они вычисляются. Величины, содержащиеся в канонических распределениях, делятся на две существенно различных группы: *эндогенные* характеристики и *экзогенные* характеристики. В достаточно общем виде каноническое распределение предпочтений можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i) = \pi(\alpha, \beta, I_q, e_i, \ldots, U_i(R_i^r, R_i^d, R_i^e, \ldots))}. \tag{4.282}$$

Здесь α, β, I_q, e, … — *эндогенные* характеристики (α, β — структурные параметры распределения, I_q — этические императивы, e_i — характеристики, относящиеся к процессу обучения, …); R_i^r, R_i^d, R_i^e, … — *экзогенные* характеристики (ресурсы потребные, располагаемые, ожидаемые, …

Соответственно, можно говорить об экзогенной эластичности, то есть эластичности по отношению к изменению *экзогенных* («внешних») характеристик, и эндогенной эластичности по отношению к *эндогенным* («внутренним») характеристикам. Последние являются более устойчивыми, возникающими в результате длительного процесса обучения, воспитания, а также отражающими физиологические потребности, врожденные свойства психики, существующие на генетическом уровне.

Так, например, экзогенную эластичность можно связать с восприимчивостью учебной информации, а эндогенную эластичность с восприимчивостью к воспитательным процессам в широком смысле этого слова.

Разделение характеристик, содержащихся в моделях функций предпочтения, на два типа в этом смысле оказывается весьма полезным.

Возникает возможность говорить о двух направлениях обучения: формирование эндогенных и экзогенных характеристик и через них воздействие на распределение предпочтений обучаемого.

Рассмотрим некоторые частные случаи расчета эластичностей. Простейшая модель канонического распределения предпочтений в зависимости от потребных ресурсов R_i^r имеет вид:

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_i) = \pi_i = \frac{e^{-\beta R_i^r}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta R_j^r}}}. \tag{4.283}$$

Эластичность $\pi(\sigma_i)$ по R_i^r определяется формулой

$$\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r} = -\beta\left(1-\pi_i\right)R_i^r. \tag{4.284}$$

Поскольку $\pi_i < 1$, $R_i^r > 0$, $\beta > 0$, то $\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r} < 0$.

При увеличении предпочтения π_i эластичность по абсолютной величине уменьшается и для $\pi_i = 1$ обращается в нуль. Эластичность по абсолютной величине тем больше, чем больше потребные ресурсы R_i^r при условии, что $\pi_i \neq 1$.

Одна из моделей распределения предпочтений имеет вид:

$$\pi\left(\sigma_i\right) = \frac{x_i^{\alpha} e^{-\beta x_i^{\mu}}}{\sum\limits_{j=1}^{N} x_j^{\alpha} e^{-\beta x_j^{\mu}}}, \tag{4.285}$$

где x_i — приведенные относительные ресурсы, определяемые формулами

$$x_i = \frac{\bar{r}_i}{1-\bar{r}_i};\ \bar{r}_i = \frac{R_i^r}{R_i^d}.$$

Когда $R_i^r \to R_i^d$, $x_i \to \infty$, при $R_i^r = 0$, $R_i^d \neq 0$, $x_i = 0$. Определим для распределения эластичность по отношению к потребным ресурсам и эластичность по отношению к располагаемым ресурсам. Имеем:

$$\frac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^r} = \left(\alpha x_i^{-1} - \beta\mu x_i^{\mu-1}\right)\pi\left(\sigma_i\right)\left(1-\pi\left(\sigma_i\right)\right)x_i^2\frac{1}{\bar{r}_i^2}\frac{1}{R_i^d};$$

$$\frac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^d} = -\left(\alpha x_i^{-1} - \beta\mu x_i^{\mu-1}\right)\pi\left(\sigma_i\right)\left(1-\pi\left(\sigma_i\right)\right)x_i^2\frac{1}{\bar{r}_i}\frac{1}{R_i^d}.$$

Видим, что $\dfrac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^d} = -\dfrac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^r}\bar{r}_i$.

Найдем эластичности:

$$\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r} = \frac{\dfrac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^r}}{\pi\left(\sigma_i\right)}R_i^r = \left(\alpha x_i^{-1} - \beta\mu x_i^{\mu-1}\right)\left(1-\pi\left(\sigma_i\right)\right)x_i^2\frac{1}{\bar{r}_i}; \tag{4.286}$$

$$\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^d} = \frac{\dfrac{\partial\pi\left(\sigma_i\right)}{\partial R_i^d}}{\pi\left(\sigma_i\right)}R_i^d = \left(\alpha x_i^{-1} - \beta\mu x_i^{\mu-1}\right)\left(1-\pi\left(\sigma_i\right)\right)x_i^2. \tag{4.287}$$

Отсюда, подобно предыдущему, найдем связь

$$\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r} = -\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^d}\frac{1}{\bar{r}_i} = -\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^d}\frac{R_i^d}{R_i^r}. \tag{4.288}$$

Следовательно

$$\frac{\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r}}{\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^d}} = -\frac{R_i^d}{R_i^r},$$

то есть эластичности $\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^r}$ и $\varepsilon_{\pi_i}^{R_i^d}$ относятся обратно-пропорционально величинам ресурсов и имеют всегда различные знаки.

Еще один вариант вычисления эластичности относится к тому случаю, когда в качестве ресурсов выступает вероятность определенного события P_i. Это может быть вероятность успешного разрешения проблемы P: $\sigma_0 \to \sigma_i$. Пусть

$$\pi(\sigma_i) = \frac{e^{\beta P_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta P_j}}. \tag{4.289}$$

Здесь $\pi(\sigma_i)$ зависит от вероятностей ($\pi_i = \pi(P_i)$): $p_1, p_2, \ldots, p_N$ и является поэтому случайной величиной. Эластичность $\varepsilon_{\pi_i}^{P_i}$ выражается формулой

$$\varepsilon_{\pi_i}^{P_i} = \beta\left(1 - \pi\left(P_i\right)\right) P_i. \tag{4.290}$$

Наряду с эластичностью предпочтений, которую мы выше отождествляем с эластичностью психики и которая отражает податливость, изменяемость, приспособляемость субъекта, естественно ввести в определенном смысле противоположную характеристику, которая, наоборот отражает твердость, устойчивость, стабильность желаний и которую можно назвать *жесткостью предпочтений* или «*жесткостью психики*» (rigidity).

Определим жесткость предпочтений как величину

$$\Re_\pi^U = \left(\varepsilon_\pi^U\right)^{-1}. \tag{4.291}$$

При этом максимальной эластичности соответствует минимальная жесткость, а минимальной эластичности — максимальная жесткость. Если $\varepsilon_\pi^U = 0$, то жесткость равна бесконечности.

Поскольку эластичность ε_π^U предпочтений по отношению к полезности (как и другие варианты эластичностей, рассмотренные выше) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то и жесткость может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Если для $y = f(x)$ определена обратная функция $x = \varphi(y)$, то

$$\varepsilon_y^x = \frac{\frac{df}{dx}}{y} x; \;\; \varepsilon_x^y = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{x} y. \tag{4.292}$$

и следовательно $\varepsilon_y^x = \left(\varepsilon_x^y\right)^{-1}$. Тогда видим, что жесткость представляет собой обратную эластичность. Когда $y = f(x, t)$ — функция двух переменных, то легко заметить, что в случае существования обратных функций

$$\boldsymbol{x = \varphi(y, t);\ t = \psi(y, x)}$$

имеют место соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}};\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^y = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{x}y = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial x}x} = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_y^x} = \mathfrak{R}_y^x; \tag{4.293}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^y = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{t}y = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial t}t} = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_y^t} = \mathfrak{R}_y^t. \tag{4.294}$$

Следовательно, частные жесткости также обратно-пропорциональны соответствующим частным эластичностям. Представляет интерес детальное исследование *эластичностей* и *жесткостей* психики, построение соответствующих изоквант, динамики эластичностей и жесткостей. Из приведенных выше формул видим, что эластичность для альтернативы σ_i обращается в нуль, а жесткость в бесконечность, если предпочтение $\pi(\sigma_i) = 1$, то есть, если $H_\pi = 0$.

Остановимся кратко на понятии *эластичности по отношению к этическим нормам*. Этот тип эластичности является исключительно важным, если речь идет о процессах воспитания в широком смысле. Модельное представление такого рода эластичности зависит от того, каким образом построена модель предпочтений. Если I_q — этический императив и имеется модель предпочтений $\pi(\sigma_i, I_q, \ldots)$, соответствующая эластичность могла бы быть выражена формулой

$$\varepsilon_\pi^{I_q}(\pi) = \frac{\mathbf{var}_I\,\pi\left(\sigma_i, I_q, \ldots\right)}{\pi\left(\sigma_i, I_q\right)}\theta\left(I_q\right). \tag{4.295}$$

Здесь $\mathrm{var}_I\pi$ — абсолютное изменение предпочтений при введении или элиминации данного императива, а $\theta(I_q)$ — функция Хависайда, реагирующая на факт учета императива I_q.

Приводимый ниже пример иллюстрирует, как изменяются эластичности и жесткости при изменении экзогенного параметра. Моделировалась следующая ситуация: модель функции распределения предпочтений I рода имеет вид:

$$\pi(\sigma_i) = \frac{x_i^{\alpha} e^{-\beta x_i^{\mu}}}{\sum_{j=1}^{N} x_i^{\alpha} e^{-\beta x_i^{\mu}}},$$

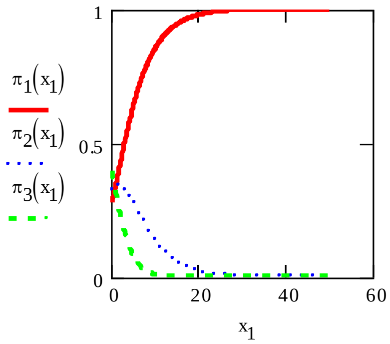
множество S_a содержит три альтернативы σ_1, σ_2, σ_3. Экзогенные параметры x_i представляют собой относительные приведенные ресурсы: $x_i = \bar{r}_i (1-\bar{r}_i)^{-1}$; $\bar{r}_i = \frac{R_i^{req}}{R_i^{disp}}$,

Предположим, что $\alpha = \beta = \mu = 1$, а параметры x_1, x_2, x_3 связаны соотношениями $x_2 = cx_1$; $x_3 = dx_1$ и пусть x_1 изменяется в пределах 0,1…50. Эти условия можно интерпретировать так: субъект имеет определенные располагаемые ресурсы R^{disp}, после появления на рынке трех различных товаров, представляющих интерес для субъекта, его предпочтения определяются только соотношением между потребными (в данном случае — ценой) и располагаемыми ресурсами. По мере приближения потребных ресурсов к располагаемым «слева» параметры x_i возрастают и при $R_i^{req} \to R^{disp}$, $x_i \to \infty$. Принимаем, что $c > 1$, $d > c$, следовательно, альтернатива σ_2 дороже, чем σ_1, а σ_3 дороже, чем σ_2. Мы хотим проследить как будут изменяться предпочтения $\pi(\sigma_1)$, $\pi(\sigma_2)$, $\pi(\sigma_3)$ при одновременном пропорциональном возрастании цен альтернатив (товаров). Далее обозначим

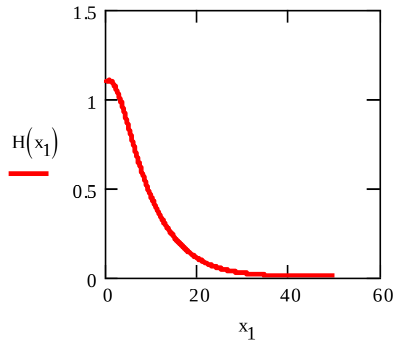
$$\pi(\sigma_1) = \pi_1(x_1),\ \pi(\sigma_2) = \pi_2(x_1),\ \pi(\sigma_3) = \pi_3(x_1).$$

Из рис.4.45, *а* видим, что при достаточно большом возрастании цен предпочтения «расходятся», причем предпочтения σ_2 и σ_3 убывают с разной скоростью, и стремятся к нулю, а предпочтительность наиболее «дешевой» альтернативы σ_1 возрастает и стремится к единице. При этом (как и в примерах, рассмотренных ранее) одновременный рост цен ведет к снижению энтропии. Как видно, однако, в определенной точке $\tilde{x}_1$ энтропия достигает максимума, то есть в начальный период роста цен энтропия может увеличиваться, но затем происходит ее падение. Если существует критическое значение энтропии H^*_π такое, что при наступлении неравенства $H_\pi \le H^*_\pi$ субъект делает выбор, то существует и соответствующее критическое значение x^*_1 (цены первой альтернативы). На рис.4.45, *б* показана зависимость субъективной энтропии от x_1:

$$H_\pi(x_1) = -(\pi_1(x_1)\ln\pi_1(x_1) + (\pi_2(x_1)\ln\pi_2(x_1) + (\pi_3(x_1)\ln\pi_3(x_1)).$$



а



б

Рис.4.45

Изменение энтропии связано с притоком или оттоком информации. На рис.4.46 видно, что абсолютный приток информации, вычисляемый по формуле

$$I(x_1) = H_\pi(x_1) - H_\pi(x_1 + 0{,}1)$$

имеет максимальную интенсивность там, где энтропия убывает с максимальной быстротой и далее стремится к нулю, когда изменение энтропии прекращается.

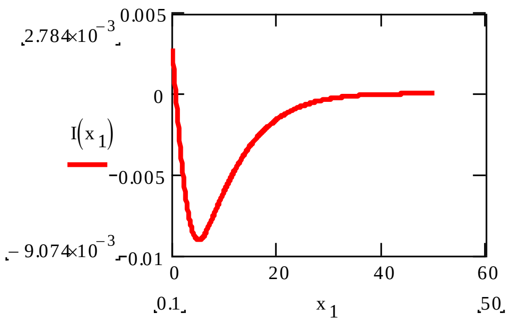
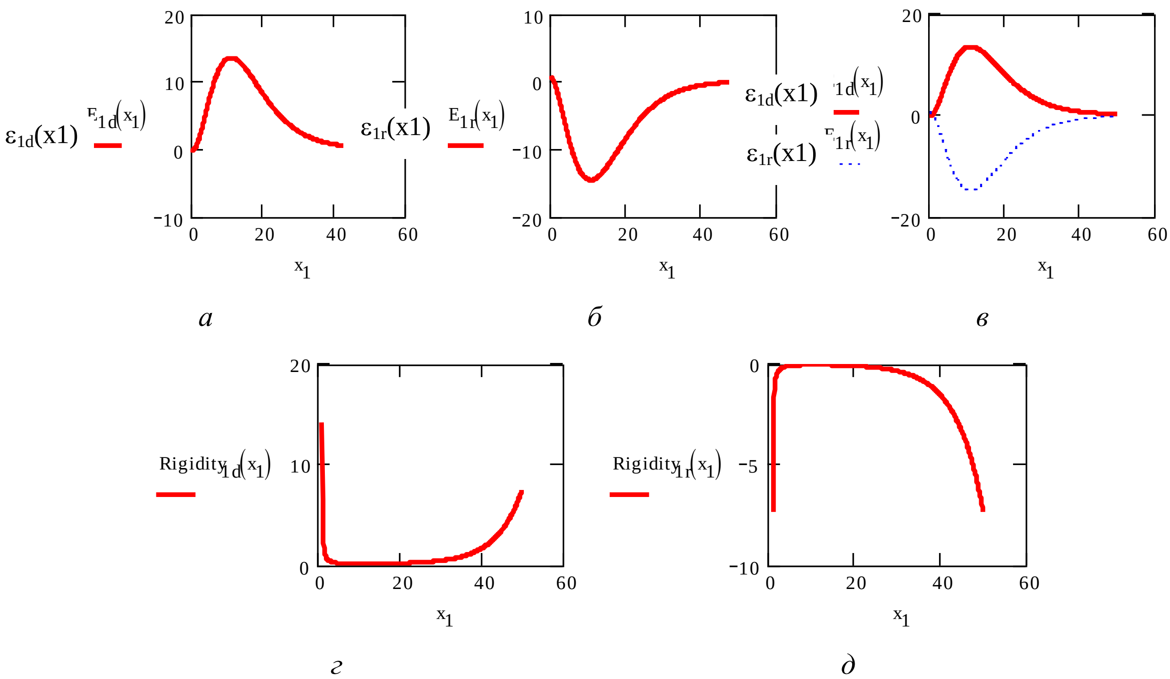


Рис. 4.46

На нижеследующих графиках (рис.4.47, *а*—*л*) показано, как изменяются эластичности и жесткости субъективных предпочтений. Введены обозначения для эластичностей относительно потребных ресурсов $\varepsilon_{ir}(x_i)$, относительно располагаемых ресурсов $\varepsilon_{id}(x_i)$, жесткости предпочтений обозначены $Rigidity_{ir}(x_i)$ и $Rigidity_{id}(x_i)$ соответственно (в последнем случае результат приведен только для первой альтернативы).



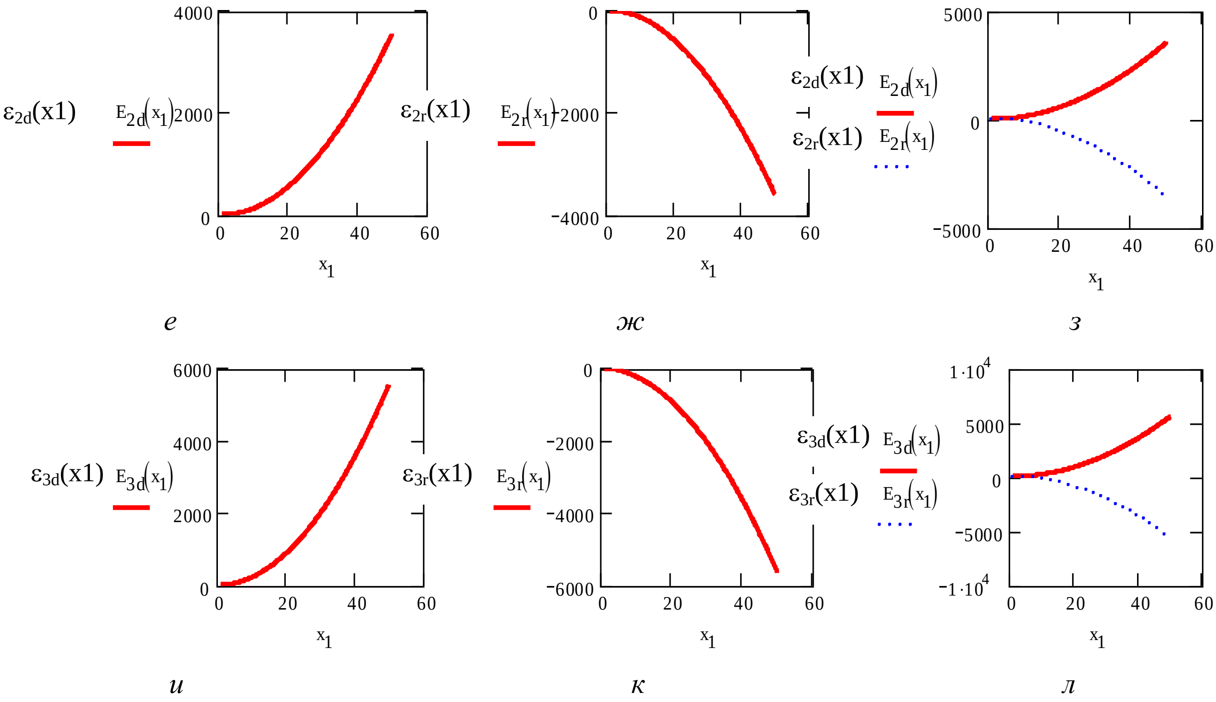


Рис.4.47

Видим, что эластичность $\pi(\sigma_1)$ относительно потребных ресурсов отрицательна и имеет отрицательный экстремум, в то время, как жесткость по отношению к располагаемым ресурсам положительна и имеет максимум. По мере затухания процесса обе эластичности стремятся к нулю. Это вполне очевидно, так, как в этом случае предпочтения полностью «разошлись» и возникли условия полной определенности ($H_\pi \cong 0$). Соответствующие эластичности для $\pi(\sigma_2)$ и $\pi(\sigma_3)$ ведут себя (в обследованном диапазоне x_1) иначе. Они не имеют экстремумов и по абсолютной величине возрастают. Видим, что жесткости $Rigidity_{1r}(x_1)$ и $Rigidity_{1d}(x_1)$ стремятся к бесконечности и близки к нулю, когда предпочтения быстро изменяются, очевидно, что для $\pi(\sigma_2)$ и $\pi(\sigma_3)$ (то есть — для отвергаемых альтернатив) жесткости будут по абсолютной величине стремиться к нулю при росте x_1 (росте цен).

В настоящем разделе мы только упомянули о жесткости предпочтений второго рода — рейтингов, а также вовсе не затрагивали вопрос об эластичности групповых предпочтений π^Σ.

4.16. Динамика системы «банк-депозитарий-заниматель»

Рассматривается упрощенная модель динамики системы: «банк-депозитарий – заниматель (держатель кредита)».

Предполагается, что паника среди депозитариев может возникнуть при определенном критическом состоянии банковского баланса, вызванного невозвратом кредитов. Целью данного параграфа является демонстрация того, как явление паники на

финансовом рынке и момент ее возникновения может быть объяснено в рамках энтропийной парадигмы и факта существования энтропийных барьеров (порогов).

Результатом невозврата кредитов является массовый преждевременный отзыв депозитов.

Предполагается, что в определенный момент времени депозитарий осуществляет выбор одной из двух альтернатив:

σ_1 – снять (отозвать) депозит,

σ_2 – оставить депозит в распоряжении банка в надежде получить полный процент на депозит и полностью вернуть депозит. Соответственно существуют вероятности: p – потерять депозит, $q = 1 - p$ – вернуть депозит и получить проценты, с другой стороны p – это вероятность разорения банка, которая зависит от интенсивности «паники», то есть от скорости, с которой будет происходить «бегство» депозитов.

Мы сможем рассматривать предпочтение $\pi(\sigma_1)$ и $\pi(\sigma_2)$ такие, что $\pi(\sigma_1)+\pi(\sigma_2)=1$ и субъективную энтропию H_π. Модель будет состоять из двух частей: балансного уравнения банка (упрощенного, нестохастического, в предположении непрерывности во времени всех процессов). Предполагается, что «приход» банка складывается из

– вкладов депозитов,

– возврата процентов («тела кредита»),

– процентов по кредитам.

«Расходная часть» состоит из:

– выдачи кредитов,

– возврата депозитов,

– выдачи процентов по депозитам.

Другие виды деятельности банка не принимаются во внимание (налоги, комиссионные,…,). Ухудшение финансовой ситуации банка может возникнуть в результате невозврата или несвоевременного возврата кредитов и процентов по кредитам, преждевременного бегства депозитариев.

Построим балансное уравнение. Пусть

C – текущий объем выданных кредитов,

$Д$ – текущий объем депозитов, соответственно,

V_C – скорость изменения объема кредитов,

$V_Д$ – скорость изменения объема депозитов.

Если $K(t)$ – располагаемые в данный момент средства банка, то

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{dD(t)}{dt} - \frac{dC(t)}{dt} - r_D D(t) + r_C C(t) \tag{4.296}$$

Это уравнение баланса «сейфа».

Величина $A = - r_D D(t) + r_C C(t)$ – мгновенное изменение баланса за счет процентов по депозитам и кредитам, где r_D – процент ставки по депозитам, r_C – процент ставки по кредитам.

Не вдаваясь в детали построения балансового уравнения – основного уравнения модели развития кризиса, приведем это уравнение в более действенной форме:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\bar{d}\,\frac{dN^-}{dt}(1 - r_D\rho_D) - \frac{dC}{dt}(1 + r_C\rho_C) - r_D\rho_0\bar{d}N^+ + r_C\rho_C C \qquad (4.297)$$

Здесь $\bar{d}$ - средняя величина вклада депозита, ρ_D – вероятность невозврата по депозиту, ρ_C – вероятность невозврата по кредиту, если $\rho_C = 0$, процент по кредиту вовсе не возвращается.

N^+ - количество депозитариев принимаемых в данный момент решение сохранить свой вклад, N^- - количество депозитариев, принявших решение отозвать вклад.

Предполагается, что для определения изменения во времени величины $C(t)$ используется дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{dt} = -at(C - C\min); a > 0 \qquad (4.298)$$

что соответствует линейному снижению скорости кредитования, что естественно в условиях надвигающегося кризиса.

Предполагается, что

$$C(t) = C\min + \frac{C_0 - C\min}{e^{at2}} \qquad (4.299)$$

где C min – минимальный объем кредитов, которые банк может выдать.

Кроме предметных предпочтений π_1 и π_2 рассматриваются рейтинговые предпочтения, (признаваемые всеми клиентами данного банка) ξ_1 и ξ_2, причем ξ_1 - осредненный (абсолютный) рейтинг тех, у которых $\pi_1 > \pi_2$, ξ_2 - осредненный рейтинг тех, у которых $\pi_1 < \pi_2$. Предполагается, что количество тех, у кого в точности $\pi_1 = \pi_2$ мало, по сравнению с $N_0 << N$.

В этих условиях может быть немного моделей, описывающих изменение численностей N^+ и N^-. Все такие модели близки по структуре к модели Ферхлюста– Перла и похожи на уравнения, которые были использованы в задаче о «конкуренции идей». Рассмотрим следующую модель:

$$\frac{dN^+}{dt} = \left[\mu\left(\frac{\pi_1}{\pi_2} - \frac{\pi_2}{\pi_1}\right)\varphi_\pi + v\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\psi_\xi\right] \times N^+(N - N^+) \qquad (4.300)$$

$$\frac{dN^-}{dt} = \left[\mu\left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - \frac{\pi_1}{\pi_2}\right)\varphi_\pi + v\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - \frac{\xi_1}{\xi_2}\right)\psi_\xi\right] \times N^-(N - N^-) \qquad (4.301)$$

Правые части отражают предполагаемый результат информационной «встречи» (столкновения) субъекта с данным распределением предпочтений (например, N^+ при $\pi_1 > \pi_2$) со всеми остальными субъектами данной группы: (например, $N - N^+$).

Первые слагаемые в квадратных скобках отражают влияние различия, предметных предпочтений на принятие решения данным субъектом, вторые слагаемые отра-

жают влияние различия рейтингов взаимодействующих субъектов, μ и υ - коэффициенты эффективности «информационного столкновения». Множители φ_π и ψ_ξ «гасят» соответствующий эффект, если энтропия H_π для первого начального и энтропия H_ξ для второго слагаемого становятся выше уровней энтропийных порогов H_π^* и H_ξ^*.

Предпочтения π_1, π_2, ξ_1, ξ_2 формируются как канонические распределения, которые получаются решением вариационной задачи и определяются по формулам:

$$\pi_1^{opt} = \frac{(c+k)e^{\beta r_0 \bar{d}}}{(c+k)e^{\beta r_0 \bar{d}} + \bar{d}N^+ e^{-\beta(1+r_0)\bar{d}}} \tag{4.302}$$

$$\pi_2^{opt} = \frac{\bar{d}N^+ e^{-\beta(1+r_0)\bar{d}}}{(c+k)e^{\beta r_0 \bar{d}} + \bar{d}N^+ e^{-\beta(1+r_0)\bar{d}}} \tag{4.303}$$

$$\xi_1^{opt} = \frac{e^{\gamma N^+ (N^+ + N^-)^{-1}}}{e^{\gamma N^+ (N^+ + N^-)^{-1}} + e^{\gamma N^- (N^+ + N^-)^{-1}}} \tag{4.304}$$

$$\xi_2^{opt} = \frac{e^{\gamma N^- (N^+ + N^-)^{-1}}}{e^{\gamma N^+ (N^+ + N^-)^{-1}} + e^{\gamma N^- (N^+ + N^-)^{-1}}} \tag{4.305}$$

В соответствие с ранее введенными понятиями параметры β и γ можно трактовать как обратные психологические температуры τ_π^{-1} и τ_ξ^{-1}.

Поскольку π_i^{opt} и ξ_j^{opt} получены как решение «статической» вариационной задачи, в уравнениях динамической модели должны использоваться мгновенные значения этих функций, найденных с учетом процесса адаптации, описываемого уравнениями:

$$\frac{d\pi_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}(\pi_1 - \pi_1^{opt}) \tag{4.306}$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}(\pi_2 - \pi_2^{opt}) \tag{4.307}$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}(\xi_1 - \xi_1^{opt}) \tag{4.308}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}(\xi_2 - \xi_{21}^{opt}) \tag{4.309}$$

При формировании мгновенных значений функций φ_π и ψ_ξ также учитывается адаптация. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\frac{d\varphi_\pi}{dt} = -\frac{1}{\tau_3}\varphi_\pi + \frac{1}{\tau_3}\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\pi_1 \ln \pi_1 + \pi_2 \ln \pi_2 + H_\pi^*}{(+\pi_1 \ln \pi_1 + \pi_2 \ln \pi_2 + H_\pi^*}\right] \tag{4.310}$$

$$\frac{d\psi_\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau_4}\psi_\xi + \frac{1}{\tau_4}\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\xi_1 \ln \xi_1 + \xi_2 \ln \xi_2 + H_\xi^*}{(\xi_1 \ln \xi_1 + \xi_2 \ln \xi_2 + H_\xi^*}\right] \tag{4.311}$$

Представленная модель является весьма грубой. Основная задача состоит в том, чтобы с ее помощью продемонстрировать связь причин возникновения кризиса, момента его начала и темпа развития с действием психических факторов и возможное их объяснение в рамках энтропийного подхода.

Поскольку основные параметры происходящих процессов фиксируются в каждом банке, в частности, легко фиксируется момент начала кризиса, в сочетании с возможностями модели может быть поставлена задача идентификации некоторых конструктивных параметров, включенных в модель.

Ниже приведены результаты расчетов с помощью модели определенного набора задаваемых параметров и определенных начальных условий.

С целью удобства выполнено переобозначение переменных:

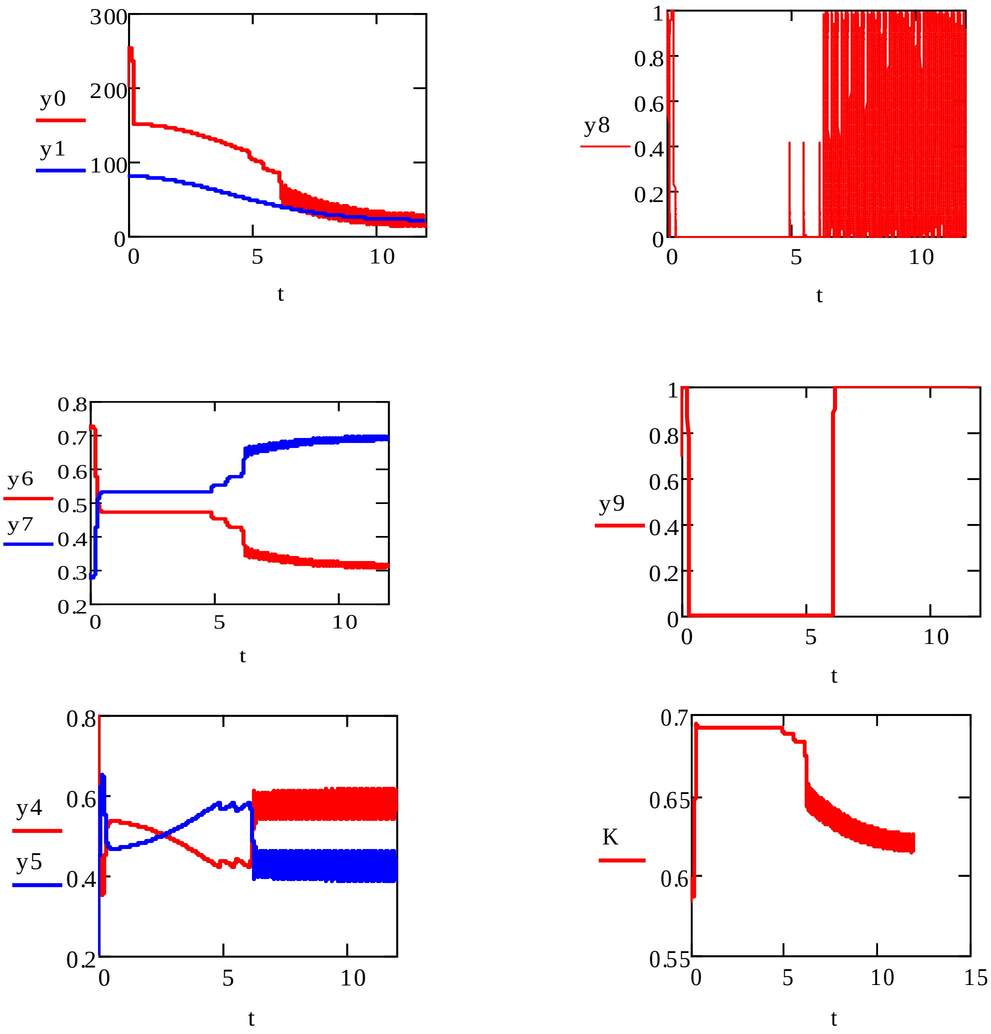


Рис.4.48

$$K(t)=y_0;C(t)=y_1;N^{+}=y_2;N^{-}=y_3;\pi_1=y_4;$$
$$\pi_2=y_5;\xi_1=y_6;\xi_2=y_7;\varphi_\pi=y_8;\psi_\xi=y_9$$

На рис. 4.48 представлены результаты расчета для следующих исходных данных:

$$\bar{d}=2{,}0;r_D=0{,}1;r_C=0{,}11;\rho_D=0{,}90;\rho_C=0{,}95;\gamma=1;\beta=0{,}1;$$
$$\mu=0{,}3;\upsilon=0{,}1;\tau_1=\tau_2=\tau_3=0{,}05;a=0{,}03;C\min=20;H_\pi^*=H_\xi^*=0{,}680$$

Начальные условия в представленном случае:

$$K_0=200\,у.е.;C_0=80\,у.е.;N_0^{+}=70;N_0^{-}=30;\pi_{10}=0{,}8;\pi_{20}=0{,}2.$$
$$\xi_{10}=\frac{e}{e+1};\xi_{20}\frac{1}{e+1}$$

Из рисунков 4.48 видим, что модельно уменьшается суммарный объем кредитов C. Этот эффект сопровождается достаточно быстрым уменьшением «мгновенного» капитала $K(t)$. Резкие изменения происходят в моменты достижения энтропиями H_π и H_ξ своих порогов (сверху вниз) в эти моменты быстро изменяются численности групп N^+ и N^-.

Модель позволяет качественно оформить влияние на эти процессы величины порогов H_π^* и H_ξ^*, процентных ставках по кредитам и по депозитам r_C и r_D психологического воздействия отношения предметных предпочтений π_1 и π_2 и рейтинговых предпочтений ξ_1 и ξ_2.

Развитие описанной модели может состоять во введении в нее модели поведения заемщика (кредит держателя), моделей других видов деятельности банка, модели развития внешней (экзогенной) экономической ситуации, которая влияет на поведение всех участвующих игроков.

Часть 2

5 ДИНАМИКА ПРЕДПОЧТЕНИЙ. ЭМОЦИИ И ПРЕДПОЧТЕНИЯ. ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ. ПРИНЦИП «INFOMAX» ЛИНСКЕРА

5.1. Динамика предпочтений

5.1.1. Задачи анализа динамики и взаимовлияния предпочтений

Проблемно ресурсная ситуация, связана ли она с одним субъектом, или с группой субъектов, представляет собой динамический объект. В общем случае со временем изменяются все элементы, ее характеризующее: проблемные множества S_{aj}, располагаемые, потребные, и ожидаемые ресурсы, в более общей формулировке — полезности, предпочтения I и II рода, наконец, — состав группы S_ξ.

Причинами временной эволюции является как изменения внешних условий: изменение конъюнктуры рынка, цен (и, следовательно, потребных ресурсов), политической ситуации, законов («правил игры»), природных и общественных явлений (в том числе — катастроф, революций) и т.д., так и спонтанные изменения, стимулируемые «изнутри» активной системы. Последнее является определяющей особенностью активной системы: способность порождать «свои собственные» проблемы, самостоятельно формируя проблемные множества, определяя стратегию взаимодействия с внешним миром, претерпевать возрастные изменения.

Можно с уверенностью сказать, что существуют устойчивые (медленно меняющиеся) императивы поведения на основе освоения и обобщения, исторического опыта, а также следующие из естества системы и существующие на «генетическом» уровне — априорные предпочтения.

Общественный характер каждого индивидуума свидетельствует о том, что существует взаимовлияние индивидуальных предпочтений в группе.

Априорные предпочтения являются следствием воспитания, культурного «круга», обучения на опыте разрешения предыдущих проблем, религиозных представлений и политических убеждений.

Значительную часть этих обстоятельств можно объединить термином «этические нормы» или «этические императивы».

Важным является вопрос об эволюции, связанной с конечностью «жизненного цикла» любой активной системы и соответствующим изменением состава множеств S_{aj}, S_ξ распределения предпочтений.

То, что исследование динамики проблемно-ресурсных ситуаций, в частности — распределений предпочтений, является актуальным, следует из определяющей роли энтропии, в данном случае, — субъективной энтропии H_π или H_ξ и ее изменения.

Эта роль энтропии состоит, в частности, в том, что принятие решений — выбор на множестве альтернатив предположительно связан с величиной субъективной энтропии. Это предположение представляется весьма правдоподобным. Существуют пороговые значения энтропий — $H_\pi^{*\pm}$ и $H_\xi^{*\pm}$, которые определяют моменты возникновения необходимых условий «принятия решений». Скорее всего, пороги $H_\pi^{*\pm}$ и $H_\xi^{*\pm}$ индивидуализированы и, следовательно, также могут служить характеристиками индивидуальной психики.

Коллективная компонента («коллективный разум») реализуется через «общие предпочтения» или «общий императив» — единый для всех членов группы (сообщества). Таких императивов может быть несколько. Они являются связующим материалом. Выше мы уже показали, что не зависимо от того, что является предметом интереса субъекта: позитивные или негативные результаты его выбора на S_{aj} и его последующей активности, субъективная энтропия H_π принимает максимальное значение (на соответствующем многообразии, определенном ограничениями).

Например, как уже говорилось, если альтернативами является множество лекарственных препаратов, применяемых при данном заболевании, то в описаниях мы изучаем, во-первых, показания и ожидаемую эффективность каждого из них, информацию о противопоказаниях и побочных эффектах, то есть, об ожидающих нас опасностях. Первый этап анализа носит позитивный характер и можно говорить о «полезностях» $U(\sigma_k)$, второй носит негативный характер и должен быть формализован (в нашем контексте) как «вредности» $L(\sigma_k)$. На первом этапе субъект действует в условиях относительного *психологического комфорта*. Во втором случае имеет место относительный *психологический дискомфорт*.

То, что в открытых активных системах энтропия может как возрастать, так и уменьшаться, следует из общетеоретических воззрений. Сошлемся на монографию Эбелинга В., Энгель А., Файстель Р. [294]: «Энтропия является ключевой физической величиной при описании самоорганизации. Она служит мерой ценности содержащейся в системе энергии и мерой беспорядка… Энтропия системы может уменьшаться если система экспортирует энтропию и если экспорт в единицу времени превосходит соответствующее производство энтропии внутри системы…» и далее «экспорт энтропии … возникает не спонтанно, а требуется «Энтропийный насос», …, «Мы различаем активные и пассивные структурообразующие системы… активные системы …*содержат энтропийные насосы внутри себя*…».

В нашем случае «энергия» ассоциируется с произведением полезности на предпочтения, причем можно говорить о располагаемой субъективной энергии и потребной субъективной энергии, а энтропия — с субъективной энтропией. По-видимому, по аналогии, можно говорить о «производстве» и «экспорте» субъективной энтропии.

Если обозначить через $\frac{d_e H}{dt}$ — скорость экспорта энтропии, а через $\frac{d_i H}{dt}$ — скорость ее производства, то согласно с Эбелингом в успешно развивающейся активной системе экспорт превосходит производство

$$\left|-\frac{d_e H}{dt}\right| > \frac{d_i H}{dt} > 0 \qquad (5.1.1)$$

причем наиболее явно это обстоятельство проявляется «*…при эмбриогенезе, в детстве при залечивании ран и регенерации организмов…*».

В интересующем нас случае мы могли бы сказать, что неравенство (5.1.1) должно иметь место, если обучение в вузе является успешным. В работе [79] мы уже частично затрагивали этот вопрос. В частности, отмечалось что если реализуется так называемое проблемное обучение, то изменение энтропии имеет периодический характер: при создании проблемной ситуации суммарная энтропия $H = H_e + H_i$ возрастает, а на этапе разрешения этой ситуации — уменьшается за счет превалирующего экспорта.

Мы уже приводили численный пример, когда при «отдаче» ресурсов субъективная энтропия уменьшается. Далее мы рассмотрим случай самопроизвольного изменения энтропии квазиизолированной системы.

Из сказанного выше видно, что ключевым вопросом при изучении активных систем является динамика предпочтений. Это обстоятельство носит фундаментальный характер.

Второе обстоятельство, которое также обуславливает изучение динамики активной системы, является в значительной мере технологическим.

Целый ряд вопросов не удается удовлетворительно разрешить, оставаясь в рамках стационарной теории. К таким вопросам относятся, например, учет взаимного влияния предпочтений в группе. Как будет показано, в стационарном варианте взаимовлияние субъектов, почти всегда сводится к решению существенно нелинейной алгебраической системы уравнений.

При переходе к динамическому варианту, который к тому же более адекватно отображает существо дела — реальный характер изучаемых процессов, — эти математические трудности удается обойти. Происходит, условно говоря «линеаризация».

В настоящей книге мы неоднократно обращаемся к таким категориям как «социальная справедливость» и «свобода». Невозможно дать удовлетворительное определение этих категорий в рамках «статической» теории, как характеристик состояния системы или субъекта в данный момент. Эти категории являются динамическими. Другими словами: *«социальная справедливость» — это процесс, «свобода» — это процесс*.

Изучается влияние на распределение индивидуальных предпочтений (предпочтений I рода) предыстории — априорных предпочтений, вкусов, верований, привычек, …, влияние тех же факторов на индивидуальные предпочтения II рода (рейтинги). В качестве одной из важных задач выступает задача учета «этических императивов», имеющая отношение к условиям формирования и регулирования рыночных отношений.

Поскольку одним из заданий образования является утверждение в сознании обучаемого определенных «этических императивов» (задача воспитания), очевидно, что результат решения указанной задачи может быть полезным при разработке эффективных систем и программ обучения.

Вообще приложение субъективного анализа и, в частности, энтропийного подхода к проблемам обучения позволяет построить более простую логическую схему и последовательность проектирования систем обучения.

Важным инструментом субъективного анализа являются эластичности и жесткости предпочтений, в том числе их изменчивость, поэтому в настоящую главу введен раздел, касающийся этих характеристик.

Учет явным образом динамики предпочтений в задаче экономической динамики существенным образом влияет на зависимость экономических параметров от времени. Это обстоятельство иллюстрируется в рамках динамической модели Вальраса-Леонтьева совместно с моделью динамики предпочтений.

Многие вопросы субъективного анализа не могут быть разрешены в стационарной теории. Очевидно, что любое распределение предпочтений в данный момент времени является результатом определенного процесса и, в то же время — исходным для последующих изменений.

К вопросам, которые по существу требуют подхода с позиции динамики — временной эволюции, относятся:

1. Формирование проблемных множеств — множеств альтернатив S_{aj}, формирование группы субъектов S_ξ, корпоративных проблем, иерархических структур.

2. Влияние на существующие в данный момент предпочтения всех видов предыстории априорных предпочтений, вкусов, верований, привычек,…

3. Взаимное влияние предпочтений субъектов в пределах данной группы при различных условиях взаимной информированности.

4. Учет «этической составляющей» — весьма стабильной, слабо зависящей от времени, как в «статической» постановке так и в динамике.

5. Разработка моделей изменения предпочтений в течение «жизненного» цикла активной системы или субъекта.

Кроме перечисленных вопросов существует ряд задач исследования качественных свойств активных систем и их субъективных характеристик: устойчивости Ляпунова и устойчивости Адамара, образование аттракторов на распределениях предпочтений, управление предпочтениями, в том числе, оптимальное и т.д. Не все эти вопросы нашли отражение в настоящей книге.

Естественным образом возникают вопросы об обратимости и необратимости субъективных процессов, об энтропийной устойчивости, бифуркационных явлениях, обусловленных нелинейностью математических моделей, либо в результате умышленного («силового») включения в модели аттракторов.

Отдельной является задача построения и изучения динамики канонических распределений предпочтений I и II рода со специализированными ресурсами: активными и пассивными, с учетом их взаимозависимости и взаимообусловленности.

Теория «*пассионарных толчков*» Гумилева [53] на взгляд автора может быть интерпретирована в терминах развиваемого формализма. Во всяком случае, представляется реальным построение «рамочной модели», основанной на использовании канонических распределений I и II рода и энтропийно-информационного анализа, если удастся смоделировать кумулятивные эффекты на множествах S_a и S_ξ.

Условием возникновения «пассионарного толчка» может быть резкое уменьшение рейтинговой энтропии одновременно с уменьшением энтропии пред-

метных предпочтений и возрастанием межсубъектной корреляции; как следствие — иерархизация социума, неформальный переход большого объема властных полномочий в руки небольшой группы пассионариев, корпоратизация нескольких альтернатив, с выделением лидера или лидирующей группы.

Для части перечисленных проблем, предлагаются количественные модели. В других случаях мы ограничимся только обсуждением.

Задача, которая решается в данном разделе состоит в построении ряда моделей, обеспечивающих учет объявленных выше особенностей. Таких моделей может быть в каждом случае несколько. Их эффективность и приемлемость для описания соответствующего эффекта должна быть установлена в дальнейшем с учетом экспериментальных данных. Здесь как и выше может быть два пути: во-первых, качественная оценка получаемых выводов, их соответствие «здравому смыслу» и опыту и, во-вторых, идентификация на основе статистического исследования и включение, таким образом, в модель эмпирической компоненты.

5.1.2. Основные типы задач динамики предпочтений

Имеется, по меньшей мере, два подхода к изучению динамики предпочтений. Первый из них связан с предположением, что альтернативы σ_k не изменяются (отсутствует «дрейф» альтернатив). В этом случае изменение («дрейф») предпочтений может быть обусловлено факторами, о которых уже было сказано: влияние «предыстории», то есть прошлых предпочтений, естественное («спонтанное») изменение в виду, например, возрастного изменения потребностей, вкусов, влияния стабильных и изменяющихся «этических императивов» и других подобных факторов, носящих внутренний (эндогенный) характер.

Динамика предпочтений, обусловленная этими факторами, может быть названа «*эндогенной динамикой*». Она имеет большое разнообразие проявлений в виду разнообразия влияющих факторов.

Естественно различать «*эндогенную динамику*» предпочтений *«изолированного индивидуума»* и индивидуальную «*эндогенную динамику*» субъекта в составе группы, динамику групповых («взвешенных») предпочтений, а так же эндогенную динамику рейтингов. Применительно к группе в число эндогенных факторов включается взаимное влияние предпочтений, поскольку для группы этот фактор является внутренним.

Другой класс динамических задач субъективного анализа связан с изучением изменения распределения предпочтений, обусловленного «*внешними*» факторами — экзогенным «*дрейфом*» альтернатив. Имеется ввиду, что альтернативы характеризуются качественными и количественными признаками, которые изменяются в результате действия «*внешних*» «*экзогенных*» факторов, например, экономической конъюнктурой — цен, инфляции, банковского процента; изменения климатических условий и т.д.

Существенной особенностью активных систем является их способность не только приспосабливаться, но и, в определенных условиях, воздействовать на внешние обстоятельства, в том числе, на «экзогенные факторы». Одним из примеров является воздействие на «цены» и «выпуски» в экономической модели Вальра-

са-Леонтьева через влияния предпочтений I рода на величину конечного спроса [138].

Динамику предпочтений, обусловленную экзогенными факторами, назовем «*экзогенной динамикой*». В обоих случаях предполагается наличие модели динамики, как канонических распределений предпочтения, так и феноменологических уравнений, описывающих изменения эндогенных, либо экзогенных факторов. Эта дополнительная система уравнений может быть детерменированой либо стохастической.

5.1.3. Экзогенная динамика предпочтений I рода

Рассмотрим абсолютные предпочтения I рода $\pi(\sigma_k)$ на множестве S_a. Все нормированные канонические функции предпочтений имеют следующую структуру

$$\pi(\sigma_k) = \frac{f(\sigma_k)}{\sum_{j=1}^{N} f(\sigma_j)}. \tag{5.1.2}$$

Припишем символу σ_k количественный смысл. Это может быть полезность, ресурсы определенного вида, цена …, и, в связи с этим предположим, что σ_k есть непрерывная переменная. В действительности, как это было принято ранее, σ_k означает индивидуализированную альтернативу (вид товара, географический пункт). Альтернатива σ_k характеризуется набором количественных параметров (размеры, стоимость, расстояние …) — $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{k3})$. Для того чтобы не вводить дополнительных обозначений, мы отождествляем σ_k с соответствующими параметрами.

Из (5.1.2) видим, что $\pi(\sigma_k)$ зависит от всех σ_j ($j \in \overline{1,N}$) вследствие условия нормировки. Определим маргинальные (предельные) предпочтения $\frac{\partial \pi(\sigma_k)}{\partial \sigma_j}$, найдем

$$\frac{\partial \pi(\sigma_k)}{\partial \sigma_k} = \pi(\sigma_k)\big(1 - \pi(\sigma_k)\big)\big(\ln f(\sigma_k)\big)'_{\sigma_k}.$$

Для $j \neq k$:

$$\frac{\partial \pi(\sigma_k)}{\partial \sigma_j} = -\pi(\sigma_k)\pi(\sigma_j)\big(\ln f(\sigma_j)\big)'_{\sigma_j}.$$

Полная производная по времени $\pi(\sigma_k)$ есть

$$\frac{d\pi(\sigma_k)}{dt} = \pi(\sigma_k)\left[\frac{f'(\sigma_k)}{f(\sigma_k)}\dot{\sigma}_k - \sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)\frac{f'(\sigma_j)}{f(\sigma_j)}\dot{\sigma}_j\right]. \tag{5.1.3}$$

Действительно, это видно из следующего:

$$\frac{d\pi(\sigma_k)}{dt}=\frac{\partial\pi(\sigma_k)}{\partial(\sigma_1)}\dot{\sigma}_1+\ldots+\frac{\partial\pi(\sigma_k)}{\partial(\sigma_k)}\dot{\sigma}_k+\ldots+\frac{\partial\pi(\sigma_N)}{\partial(\sigma_N)}\dot{\sigma}_N;$$

$$\frac{\partial\pi(\sigma_k)}{\partial\sigma_k}=\frac{f_k'(\sum\ldots)-f_k f_k'}{(\sum\ldots)^2}=\frac{f_k'}{f_k}\pi(\sigma_k)-\frac{f_k'}{f_k}\pi^2(\sigma_k)=\pi(\sigma_k)\big(1-\pi(\sigma_k)\big)\frac{f_k'}{f_k}.$$

Умножая частные производные на $\dot{\sigma}_k$, $\dot{\sigma}_j$ и складывая получим уравнение (5.1.3).

Из условия нормировки $\sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)=1$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{d\pi(\sigma_j)}{dt}=0. \tag{5.1.4}$$

Можно проверить, что при использовании формулы (5.1.3) условие (5.1.4) выполняется тождественно.

Действительно, пусть имеется только две альтернативы σ_1 и σ_2. Тогда должно выполняться условие:

$$\frac{d\pi(\sigma_1)}{dt}+\frac{d\pi(\sigma_2)}{dt}=0.$$

Обозначая $\pi(\sigma_1)=\pi_1$, $\pi(\sigma_2)=\pi_2$, найдем согласно (5.1.3):

$$\pi_1(1-\pi_1)\frac{f_1'}{f_1}\dot{\sigma}_1-\pi_1\pi_2\frac{f_2'}{f_2}\dot{\sigma}_2+\left(-\pi_1\pi_2\frac{f_1'}{f_1}\dot{\sigma}_1+\pi_2(1-\pi_2)\frac{f_2'}{f_2}\dot{\sigma}_2\right)=$$

$$=\frac{f_1'}{f_1}\dot{\sigma}_1\left(\pi_1-\pi_1^2-\pi_1\pi_2\right)+\frac{f_2'}{f_2}\dot{\sigma}_2\left(\pi_2-\pi_2^2-\pi_1\pi_2\right)=0.$$

Выражения в скобках равны нулю в силу условия нормировки: $\pi_1+\pi_2=1$.

Используя формулу (5.1.3), найдем производную по времени от энтропии:

$$\frac{dH_\pi}{dt}=-\sum_{k=1}^{N}\big(\ln\pi(\sigma_k)+1\big)\pi(\sigma_k)\left(\frac{f'(\sigma_k)}{f(\sigma_k)}\dot{\sigma}_k-\sum_{j=1}^{N}\pi(\sigma_j)\frac{f'(\sigma_j)}{f(\sigma_j)}\dot{\sigma}_j\right). \tag{5.1.5}$$

Поток информации

$$q(I)=-\frac{dH_\pi}{dt}.$$

Знак «–» означает, что «положительная», входящая информация уменьшает энтропию, а «негативная» — исходящая информация увеличивает ее.

Функции $\sigma_k=\sigma_k(t)$ либо заданы в конечном виде, либо являются решениями некоторой системы уравнений, которая в этом случае считается заданной. В частности, это может быть система дифференциальных уравнений, вида:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = g_k\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N, b, t\right), \qquad (5.1.6)$$

где b — вектор структурных параметров системы, динамика которой описывается системой уравнений (5.1.6). Конечно, разнообразие моделей динамических систем столь же велико, как велико и разнообразие реальных систем, которые функционируют совместно с субъектом активной системы: технические системы, экономические, системы вооружения и т.д. Система (5.1.6) — весьма частный случай. В простейшем случае — это система детерминированных дифференциальных уравнений, с фиксированными параметрами b, которая «управляется» только начальными условиями. Если реальная система функционирует в случайных условиях и (или) содержит «внутри себя» источники стохастичности, то система уравнений типа (5.1.6) является системой стохастических дифференциальных уравнений, правые части которых содержат как случайные параметры, так и случайные функции времени.

В других случаях, если экзогенная составляющая активной системы имеет «память», экзогенные уравнения оказываются интегро-дифференциальными либо в рекурсивной форме, их аналогами.

Экзогенная модель (типа (5.1.6.)) может описывать динамику других активных систем, взаимодействующих с данной системы, но являющихся «внешними» по отношению к ней. В этом случае модель может содержать интегро-дифференциальные уравнения, которые позволяют включить в рассмотрение эффект «памяти», влияния «следа», как это делается, например, в некоторых задачах нестационарной аэродинамики [80].

Случай, когда «экзогенная система» является управляемой, некоторые параметры b могут представлять собой управления и быть функциями времени.

В этой ситуации сразу возникает вопрос: кто является управляющим, кто формирует «внешние» управления? Возможны также и позиционные схемы управления или самоуправления, когда b зависит от состояния системы.

Может существовать самостоятельный критерий оптимальности *экзогенной системы*, отличный от Φ_π. Этот критерий может интересовать субъекта данной системы, но это не означает, что задача в целом является двухкритериальной. Подчеркнем еще раз, что принцип оптимальности, который порождает канонические функции субъективных предпочтений состоит в том, что *оптимальность проявления психики в виде субъективных предпочтений является (согласно принятой гипотезе) фактом объективным*. В *этом смысле* и только в этом психика субъекта неманипулируема извне. Она, однако, вполне манипулируема экзогенными воздействиями. Пусть система (5.1.6) имеет вид:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = g_k\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N, u, b, t\right), \qquad (5.1.7)$$

где через u обозначены параметры, играющие роль управляющих переменных. В задачах программного управления $u = u(t)$, в задаче позиционного управления $u = u(\sigma, \pi)$. В последнем случае дифференциальные уравнения модели можно представить в виде:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = g_k\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_N, b, t\right), \tag{5.1.8}$$

где *b* сохраняет смысл структурных параметров. Модель остается экзогенной по отношению к формированию предпочтений, но предпочтения, в свою очередь влияют на поведение экзогенной компоненты, через зависимость правых частей от предпочтений. Наконец, если существует внешний — экзогенный «управляющий», который может формировать программные управления $u(t)$, то тем самым он может управлять предпочтениями данного субъекта.

В этом случае, если принимается модель (5.1.8), полная модель динамики активной системы с «*экзогенной оболочкой*» складывается из двух групп дифференциальных уравнений: уравнений, описывающих эволюцию предпочтений и уравнений, описывающих эволюцию «*экзогенной оболочки*»:

$$\frac{d\pi_k}{dt} = \pi_k\left(\frac{f'_k}{f_k}g_k - \sum_{j=1}^{N}\pi_j\frac{f'_j}{f_j}g_j\right), \tag{5.1.9}$$

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = g_k\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N, \pi_1, ..., \pi_N, b, t\right), \tag{5.1.10}$$

Если под σ_k подразумевать полезность альтернативы $U_k(x_{k1}, \ldots, x_{ks})$, которая зависит от нескольких параметров $x_{k1}, \ldots, x_{ks}$, то

$$\frac{d\sigma_k}{dt} \sim \sum_{q=1}^{s}\frac{\partial U_k}{\partial x_q}g_{kq}\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ks}, \pi_1, ..., \pi_N, b, t\right), \tag{5.1.11}$$

где

$$\frac{dx_{kq}}{dt} = g_{kq}\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ks}, \pi_1, ..., \pi_N, b, t\right). \tag{5.1.12}$$

В частном случае полезности являются функциями ресурсов разных типов, а x_{qs} могут быть этими ресурсами, либо ценами, либо другими существенными параметрами.

Посмотрим, каким образом на структуре модели (5.1.9), (5.1.10) отражается конкретный вид функции предпочтений $\pi(\sigma_k)$. Ранее было показано, что в зависимости от постулируемого функционала можно получить разные структуры функций предпочтения. Наиболее простые модели имели вид:

$$\pi^-\left(\sigma_k\right) = \frac{e^{-\beta x_k}}{\sum_{j=1}^{N}e^{-\beta x_j}}; \quad \pi^+\left(\sigma_k\right) = \frac{e^{\beta x_k}}{\sum_{j=1}^{N}e^{\beta x_j}} \tag{5.1.13}$$

и

$$\pi^{-}\left(\sigma_k\right)=\frac{x_k^{\alpha}e^{-\beta x_k}}{\sum\limits_{j=1}^{N}x_j^{\alpha}e^{-\beta x_j}};\quad \pi^{+}\left(\sigma_k\right)=\frac{x_k^{\alpha}e^{\beta x_k}}{\sum\limits_{j=1}^{N}x_j^{\alpha}e^{\beta x_j}}. \qquad (5.1.14)$$

Для случая (5.1.13) $\frac{f_k'}{f_k}=-\beta$ либо $\frac{f_k'}{f_k}=\beta.$ Для случая (5.1.14)

$$\frac{f_k'}{f_k}=\alpha\frac{1}{x_k}-\beta, \qquad (5.1.15)$$

либо

$$\frac{f_k'}{f_k}=\alpha\frac{1}{x_k}+\beta. \qquad (5.1.16)$$

Заметим, что

1. Уравнения для предпочтений нелинейны и даже, если модель «экзогенной оболочки» линейна, полная модель динамики активной системы нелинейна.

2. В [64] и в главе 2 настоящей работы приведены варианты других распределений предпочтений I рода, обобщающие «абсолютное» распределение $\pi(\sigma_k)$, например, распределение предпочтений одно шаговых путей $\pi(\sigma_i, \sigma_j)$ (переходов $i \to j$), распределение условных предпочтений $\pi(j|\ i)$ и других. Для этих функций также могут быть построены модели динамики.

3. Изложенный выше подход легко распространяется на функции предпочтения π^+, π^-, υ^+, υ^-, …, $\pi^+(j|\ i)$, …, $\upsilon^+(\sigma_j|\ \sigma_i)$,…, а также различные структуры функций $f(\sigma_i$, …).

4. Модель динамики существенно расширяется, если одновременно рассматриваются функции предпочтения I и II рода и предметом анализа является активная система, включающая группу субъектов.

Рассмотрим наиболее простой вариант, когда изучаются абсолютные предпочтения I рода $\pi_j(\sigma_k)$ и абсолютные рейтинги $\xi_j(\sigma_k)$ (функции предпочтения II рода), дифференцированные по альтернативам, а множество альтернатив S_a считается общим для всех субъектов группы. В этом случае естественно предположить, что «экзогенная оболочка» одного субъекта отличается от таковой у другого субъекта. Приходится перейти от формального отождествления альтернативы σ_k к характеризующим ее показателям полезности, ресурсам определенного вида…

Полезность $U_{jk}(x^k{}_1, x^k{}_2, \ldots, x^k{}_s)$ считается индивидуализированной, где j — номер субъекта, k — номер альтернативы. Уравнения динамики оболочки для j имеют вид

$$\frac{dx_j^k}{dt}x\Big|_j= g_j^k(x_1^k, x_s^k, \pi_{11}, \pi_{12}, ..., \pi_{MN}, \xi_{11}, \xi_{12}, ..., \xi_{MN}, b, t) \qquad (5.1.17)$$

Из последней записи видно, что допускается зависимость скорости изменения показателя (фактора) x_i^k от всех предпочтений I и II рода в группе. Модель ди-

намики активной системы, включающей группу субъектов, выглядит в рассматриваемом случае следующим образом:

$$\frac{d\pi_j(\sigma_k)}{dt} = \pi_j(\sigma_k)\times\left(\frac{f'_{jk}}{f_{jk}}\sum_{q=1}^{S_j^k}\frac{\partial U_j(\sigma_k)}{\partial x_q^k}g_{jq}^k - \sum_{p=1}^{N}\pi_j(\sigma_p)\frac{f'_{jp}}{f_{jp}}\sum_{q=1}^{S_j^k}\frac{\partial U_j(\sigma_p)}{\partial x_p^k}g_{jq}^p\right); \quad (5.1.18)$$

$$\left.\frac{dx_q^k}{dt}\right|_j = g_{jq}^k\left(x_1^k, x_s^k, \pi_{11}, \pi_{12}, ..., \pi_{MN}, \xi_{11}, \xi_{12}, ..., \xi_{MN}, b_j^k, t\right), \quad (5.1.19)$$

$(j \in \overline{1, M},\ \ k \in \overline{1, N});$

$$\frac{d\xi_j(\sigma_k)}{dt} = \xi_j(\sigma_k)\cdot\left(\frac{h'_{jk}}{h_{jk}}\sum_{m=1}^{L}\frac{\partial \bar{U}_j(\sigma_k)}{\partial y_m^k}d_{jm}^k - \sum_{r=1}^{N}\xi_j(\sigma_r)\frac{h'_{jr}}{h_{jr}}\sum_{n=1}^{S_j^r}\frac{\partial \bar{U}_j(\sigma_r)}{\partial y_n^r}d_{jn}^r\right); \quad (5.1.20)$$

$$\left.\frac{dy_m^k}{dt}\right|_j = d_{jm}^k\left(y_1^k, y_s^k, \pi_{11}, \pi_{12}, ..., \pi_{MN}, \xi_{11}, \xi_{12}, ..., \xi_{MN}, b_j^m, t\right). \quad (5.1.21)$$

В этой системе уравнений величины U и $\bar{U}$ — полезности, — функции, имеющие различный смысл в выражениях для $\pi_j(\sigma_k)$ и $\xi_j(\sigma_k)$, что отмечается во втором случае чертой сверху, h_j^k — аналог функции f в формуле (5.1.2). Показатели x^k_q и y^r_m совпадают, либо отличаются как по смыслу, так и по их количеству. Соответственно, учтено, что правые части в уравнениях (5.1.19) и (5.1.21) в общем случае отличаются друг от друга. Эти группы уравнений представляют собой вариант модели «экзогенной оболочки» системы. Необходимость индивидуализировать правые части в системе (5.1.19) связана еще и с тем, что различаются, в общем случае, начальные условия, в которых находятся члены группы.

Различны, в общем случае, ограничения, накладываемые на показатели x_j^k и y_j^k. Примером таких ограничений может служить естественное требование неотрицательности «выпусков» и цен в динамической модели Вальраса-Леонтьева в экономике; ограничения, накладываемые на параметры движения летательного аппарата и так далее.

Заметим, что если не изменяются показатели x_j^r, y_j^k, σ_k, …, то есть

$$\frac{dx_j^k}{dt} = \frac{dy_j^k}{dt} = 0; \ \ \frac{d\sigma_k}{dt} = 0, \ ..,$$

то не изменяются и предпочтения: $\pi_j(\sigma_k) = \text{const}$, $\xi_j(\sigma_k) = \text{const}$. Таким образом в данном классе модели, в экзогенной динамике единственной причиной эволюции предпочтений являются изменения, происходящие в экзогенной оболочке, что проявляется через изменение показателей x, y (либо σ). В свою очередь, как мы уже говорили, изменение предпочтений может воздействовать на экзогенную «оболочку». Это, конечно, частная модель. В более общем случае причиной изменения предпочтений могут являться воспоминания о предпочтениях в прошлом.

Активность системы проявляется в том, что она, опираясь на экстремальный характер предпочтений, формирует структуру их моделей независимо от «оболочки».

Везде выше мы предполагаем, что субъекту достоверно известны значения параметров (показателей), характеризующие проблемно-ресурсную ситуацию. В действительности ему могут быть известны лишь некоторые оценки этих параметров $\hat{x}$, $\hat{R}$, … В этой ситуации, приведенные выше модели экзогенной динамики активной системы следовало бы дополнить моделью «наблюдателя», которая позволила бы формировать эти оценки. В настоящее время автор не может предложить такие модели сколько-нибудь правдоподобные и обоснованные. Известны некоторые примеры. Так в работах Барана принимается в качестве «субъективного наблюдателя» фильтр Кальмана. Этот вариант, однако, не содержит каких-либо специфических особенностей, отражающих субъективный характер восприятия информации.

В случае, если в качестве модели функции предпочтения (при $N = 2$) принимается функция (5.1.14), вместо уравнений (5.1.3) и (5.1.4) мы должны воспользоваться следующими уравнениями:

$$\frac{d\pi(\sigma_1)}{dt} = \pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2)\left[\left(\alpha p_1^{-1} - \beta\right)g_1 - \left(\alpha p_2^{-1} - \beta\right)g_2\right]; \qquad (5.1.22)$$

$$\frac{d\pi(\sigma_2)}{dt} = \pi(\sigma_1)\pi(\sigma_2)\left[-\left(\alpha p_1^{-1} - \beta\right)g_1 + \left(\alpha p_2^{-1} - \beta\right)g_2\right], \qquad (5.1.23)$$

где, например,

$$g_1 = \frac{1}{n_1}\left(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + c_1(\pi_1) - p_1\right); \quad g_2 = \frac{1}{n_2}\left(a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + c_2(\pi_2) - p_2\right).$$

Здесь g_1 и g_2 представляют собой правые части варианта модели экономической динамики Вальраса-Леонтьева, где p_1 и p_2 — цены товаров (см. далее в этой главе), $c_1(\pi_1)$, $c_2(\pi_2)$ — функции конечного спроса, в данном случае зависящего только от цены.

Видим, что, конечно, $\dfrac{d\pi(\sigma_1)}{dt} = -\dfrac{d\pi(\sigma_2)}{dt}$.

Одна из возможностей представлений конечного спроса состоит в том. чтобы выразить его как произведение «естественного» предпочтения π^*_{i} и некоторой функции $\varphi(p_i)$ цены p_i, отвечающей следующим требованиям: если p_i превышает некоторую «среднюю» цену p^*, то $\varphi(p_i)<1$ и при $p_i\to\infty$, $\varphi(p_{\mathrm{i}})\to 0$.

Если $p_i < p^*$, то $\varphi(p_i) > 1$ и при $p_i \to 0$ $\varphi(p_i) \to \infty$. Таким условиям удовлетворяет функция

$$\varphi(p_i) = \frac{p^*}{p_i}.$$

Если исключить из рассмотрения предельные случаи, то в качестве $\varphi(p_i)$ можно взять функцию

$$\varphi(p_i) = 1 + k\frac{p^* - p_i}{p_i}; \ \mathbf{k} < 1. \qquad (5.1.24)$$

Если допустить, что эмпирическая функция предпочтения может быть представлена произведением:

$$\pi_i = \pi_i^* \left(1 + k\frac{p^* - p_i}{p_i}\right) \tag{5.1.25}$$

и выполняется условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1,$$

то средняя цена представляет собой гармоническое среднее вида

$$p^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\pi_i^*}{p_i}}.$$

Таким образом, можно положить

$$c_i(\pi_i) = c_i \pi_i^* \left(1 - k\frac{p^* - p_i}{p_i}\right).$$

Функция (5.1.25) рассматривалась в работе [65].

5.1.4. Взаимовлияние индивидуальных предпочтений в группе

Рассмотрим вначале модели, учитывающие взаимное влияние предпочтений в группе субъектов в стационарной постановке. Мы видим много реальных примеров такого влияния от очень слабого до максимально сильного, когда речь идет, например, о группе, являющейся армейским подразделением, где предпочтения командира (одного субъекта) абсолютно превалируют, либо «эффект толпы», где такое влияние также является превалирующим.

Необходимо сделать некоторые предположения, которые постепенно будут учитываться в предлагаемых моделях:

1. Учет взаимного влияния предпочтений можно реализовать с помощью обсуждаемой в данной работе энтропийно-информационной технологии, путем постулирования определенных вариационных постановок. При этом мы будем получать каждый раз модель функции распределения предпочтений, которую будем называть «канонической». Другой путь состоит в формировании определенных зависимостей без использования вариационного принципа, в значительной степени умозрительно или по аналогии с уже известными теориями. Примером могут быть некоторые демографические модели (типа Лотки-Вольтера и др. [294]).

Соответствующие модели являются феноменологическими. Наконец, имеет смысл комбинация первого и второго путей и соответствующий класс моделей — полуфеноменологических.

2. В рассматриваемых ниже задачах предполагается, что все члены группы «играют на оном и том же поле», то есть имеют одинаковые множества альтернатив: $S_{ai} = S_{aj}$ $\forall i, j \in \overline{1, M}$. Если в действительности это не так, то путем расширения каждого множества S_{aj} до суммы $\bigcup_{j=1}^{N} S_{aj}$ и доопределения распределений предпо-

чтений нулями на разностях $S_{aj} \setminus S_{ai}$ можно обеспечить выполнение сделанного предположения.

3. Если $\pi_i(\sigma_k)$ — предпочтение для субъекта i альтернативы σ_k, то допускается, что на него могут влиять только «одноименные» предпочтения $\pi_j(\sigma_k)$ субъекта *j*, но не $\pi_j(\sigma_q)$, где $q \neq k$. Это допущение несколько уменьшает общность постановки.

4. Допускается полная и мгновенная информированность субъекта i о предпочтениях всех остальных субъектов $j \in \overline{1,M}$. Это допущение можно будет в дальнейшем модифицировать, сняв, например, требование мгновенности. Не исключается, что субъект j сам каким-либо образом информирует i о своих предпочтениях (результат будет зависеть от степени «правдивости» субъекта *j*). Будем предполагать, что взаимное влияние описывается нечетной функцией «расхождения во мнениях» $\Delta_{ij} = \pi_i - \pi_j$, либо логарифмического «расхождения» (tender influence) $S_{ij} = \ln \pi_i - \ln \pi_j = \ln \dfrac{\pi_i}{\pi_j}$.

5. Предположим, что влияние «мнения» *j* на «мнение» *i* зависит от рейтинга «*j* в глазах *i*»: $\xi(j|\,i) = \xi_{ji}$ таким образом, что, чем больше ξ_{ji}, тем больше влияние *j* на *i*. При этом учитывается, что ξ_{ji} определены как нормированные величины

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j \,|\, i) = 1.$$

В число ξ_{ji} входит «саморейтинг» ξ_{ii}.

Рассмотрим некоторые варианты моделей индивидуальных предпочтений субъектов в группе.

Припишем каждому субъекту $i \in \overline{1,M}$ «встроенный» критерий оптимальности. В этом критерии должны быть учтены индивидуальные рейтинги субъектов в группе, причем это могут быть рейтинги различных типов: ξ_j — интегральные рейтинги безотносительно к проблеме и «точке зрения», с которой рассматривается субъект *j*; $\xi(j|\,i) = \xi_{ji}$ — интегральные условные рейтинги, зависящие от «точки зрения»

$$i \overset{\xi(j|i)}{\Rightarrow} j$$

$\xi(j,\, i|\,\sigma_k)$ — дифференциальные условные рейтинги (отнесенные к определенной альтернативе).

Во всех случаях рейтинги нормированы:

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j) = 1; \;\; \sum_{j=1}^{M} \xi(j \,|\, i) = 1; \;\; \sum_{j=1}^{M} \xi(i, j \,|\, \sigma_k) = 1.$$

Предполагается, что все члены группы находятся в информационном контакте. Информирование «tet-a-tet», информирование через посредника, модели типа моделей рекламной компании и т.д.

Пусть субъект i является «носителем» множества альтернатив S_{ai}, распределения предпочтений $\pi_i(\sigma_k)$ на S_{ai}: $\sigma_k \in S_{ai}$ и критерия оптимальности $\Phi_{\pi i}$. При этом, поскольку i является членом группы, то $\Phi_{\pi i}$ состоит из двух частей $\Phi^{(A)}{}_{\pi i}$ и $\Phi^{(B)}{}_{\pi i}$, где $\Phi^{(A)}{}_{\pi i}$ отражает индивидуальные факторы, а $\Phi^{(B)}{}_{\pi i}$ отражает взаимодействие с остальными членами группы:

$$\Phi_{\pi i} = \Phi^{(A)}{}_{\pi i} + \Phi^{(B)}{}_{\pi i}.$$

Можно сказать, что $\Phi^{(B)}{}_{\pi i}$ обусловлен участием i в группе и, следовательно, отражает коллективистическую компоненту психики, тогда как $\Phi^{(A)}{}_{\pi i}$ является отражением индивидуалистической компоненты.

Должна ли это быть всегда сумма, когда полный критерий аддитивным образом учитывает оба обстоятельств? Ответ на этот вопрос неочевиден.

Пусть

$$\Phi_{\pi_i}^{(A)} = -\sum_{k=1}^{N}\xi_{ii}\pi_i(\sigma_k)\ln\pi(\sigma_k) + \beta_i\sum_{k=1}^{N}\xi_{ii}\pi_i(\sigma_i)U_i(\sigma_k) + \gamma_i\sum_{k=1}^{N}\xi_{ii}\pi_i(\sigma_k) \quad (5.1.26)$$

и

$$\Phi_{\pi_i}^{(B)} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\xi_{ji}\pi_i(\sigma_k)\ln\frac{\pi_i(\sigma_k)}{\pi_j(\sigma_k)} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\xi_{ji}\pi_i(\sigma_k)\big(\ln\pi_i(\sigma_k) - \ln\pi_j(\sigma_k)\big). \quad (5.1.27)$$

Если $i = j$, соответствующий член в $\Phi^{(B)}{}_{\pi i}$ обращается в нуль, можно записать

$$\Phi_{\pi_i}^{(B)} = +\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}{}'\xi_{ji}\pi_i(\sigma_k)\ln\frac{\pi_i(\sigma_k)}{\pi_j(\sigma_k)}, \quad (5.1.28)$$

где «штрих» означает, что в сумме по j отсутствует член при $j = i$.

Полный критерий имеет вид:

$$\Phi_{\pi i} = \sum_{k=1}^{N}\pi_i(\sigma_k)\Big[-\xi_{ii}\ln\pi_i(\sigma_k) + \beta_i\xi_{ii}U_i(\sigma_k) + \quad (5.1.29)$$
$$+\sum_{j=1}^{M}{}'\xi_{ji}\big(\ln\pi_i(\sigma_k) - \ln\pi_j(\sigma_k)\big) + \gamma_i\Big].$$

Наличие множителя ξ_{ii} в слагаемом, содержащем полезность $U_i(\sigma_k)$ означает, что должно выполняться условие: при $\xi_{ii} = 1$ все ξ_{ji} $(j \neq i)$ обращаются в нуль и субъект i не испытывает влияния со стороны остальных членов группы, а критерий приобретает вид:

$$\Phi_{\pi i} = \sum_{k=1}^{N}\pi_i(\sigma_k)\big[-\ln\pi_i(\sigma_k) + \beta_i U_i(\sigma_k) + \gamma_i\big]..$$

С другой стороны, если $\xi_{ii} \neq 1$, уменьшается роль индивидуальной полезности $U_i(\sigma_k)$ в структуре функция предпочтения $\pi_i(\sigma_k)$. Если множитель ξ_{ii} исключить из слагаемого с $U_i(\sigma_k)$, то это соответствует тому факту, что роль индивидуальной полезности $U_i(\sigma_k)$ учитывается субъектом i без «оглядки» на распределение рейтингов внутри группы.

Если в структуре функционала $\Phi_{\pi i}$ используются интегральные абсолютные рейтинги ξ_j, то можно говорить о полноте конформизма всех субъектов группы в отношении признания таких рейтингов и, следовательно, более высокому уровню коллективистской компоненты психики:

$$\Phi_{\pi i} = \sum_{k=1}^{N}\pi_i(\sigma_k)\Big[-\xi_i\ln\pi_i(\sigma_k) + \beta_i\xi_i U_i(\sigma_k) + \sum_{j=1}^{M}\xi_i\big(\ln\pi_i(\sigma_k) - \ln\pi_j(\sigma_k)\big) + \gamma_i\Big].$$
(5.1.30)

Критерий (5.1.29) приводит к модели функции предпочтения вида

$$\pi_i(\sigma_k) = \frac{\exp\left\{\beta_i U_i(\sigma_k) + \sum_{j=1}^{M}{}' \xi_{ji} \ln \pi_j(\sigma_k)\right\}}{\sum_{q=1}^{N} \exp\left\{\beta_i U_i(\sigma_q) + \sum_{j=1}^{M}{}' \xi_{ji} \ln \pi_j(\sigma_q)\right\}}, \quad (5.1.31)$$

которую перепишем в виде

$$\pi_i(\sigma_k) = \frac{\prod_{j=1}^{M}{}' \pi_j(\sigma_k)^{\xi_{ji}} e^{\beta_i U_i(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} \prod_{j=1}^{M}{}' \pi_j(\sigma_q)^{\xi_{ji}} e^{\beta_i U_i(\sigma_q)}}. \quad (5.1.32)$$

Эта функция соответствует принципу «единогласия» или права «вето» каждого субъекта в группе: если хотя бы один из субъектов имеет нулевое предпочтение σ_k (один из множителей $\pi_j(\sigma_k) = 0$ в числителе), то предпочтение σ_k субъекта i также обращается в нуль (все члены в знаменателе не могут быть нулями вследствие условий нормировки).

Видим что, если все полезности равны нулю: $U_i(\sigma_k) = 0$, то это предпочтение определяется только предпочтениями других членов группы. Пусть в частности $\xi_{ji} = \frac{1}{M}$; $\pi_j(\sigma_k) = \frac{1}{N}$ для $\forall k \in \overline{1,N}$ и $\forall j \in \overline{1,M}$, тогда

$$\pi_i(\sigma_k) = \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{M-1}{M}}}{N\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{M-1}{M}}} = \frac{1}{N}.$$

То же имеет место, если $\prod_{j=1}^{M}{}' \pi_j(\sigma_k)^{\xi_{ji}} = f_i$ произвольное число (< 1), так как при этом

$$\pi_i(\sigma_k) = \frac{f_i}{N f_i} = \frac{1}{N}.$$

Но тогда очевидно, что все $\pi_i(\sigma_k) = \frac{1}{N}$ и $f_i = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{M-1}{M}}$.

Другой вариант возникает, если выбрать критерий $\Phi_{\pi i}$ в виде:

$$\Phi_{\pi i} = -\sum_{k=1}^{N} \pi_i(\sigma_k) \ln \pi_i(\sigma_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \xi_{ji} \left(\pi_i(\sigma_k) - \pi_j(\sigma_k)\right)^2 + \quad (5.1.33)$$

$$+\beta_i \xi_{ii} \sum_{k=1}^{N} \pi_i(\sigma_k) U_i(\sigma_k) + \gamma_i \sum_{k=1}^{N} \pi_i(\sigma_k).$$

Соответствующая каноническая функция предпочтения имеет вид:

$$\pi_i(\sigma_k)=\frac{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{M}\xi_{ji}\left(\pi_i(\sigma_k)-\pi_j(\sigma_k)\right)+\beta_i\xi_{ii}U_i(\sigma_k)\right\}}{\sum_{q=1}^{N}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{M}\xi_{ji}\left(\pi_i(\sigma_k)-\pi_j(\sigma_k)\right)+\beta_i\xi_{ii}U_i(\sigma_q)\right\}}. \qquad (5.1.34)$$

Здесь мы по существу получили систему нелинейных уравнений относительно предпочтений $\pi_j(\sigma_k)$. Решение этой системы относительно $\pi_j(\sigma_k)$ представляет сложную задачу. Его можно искать итерационным методом, либо предположить, что процесс реализуется во времени, тогда в левой части будут величины предпочтений в момент $t + 1$: $\pi_j(\sigma_k, t + 1)$, а в правой предпочтения будут соответствовать моменту t и задача, условно говоря, линеаризуется. При этом используется рекурсия.

Функция (5.1.31) обладает следующими свойствами:

1. При $\xi_{ji} = 0$ для $\forall j \neq i$ она приобретает вид

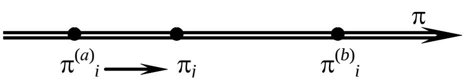
$$\pi_i(\sigma_k)=\frac{e^{\beta_i U_i(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N}e^{\beta_i U_i(\sigma_q)}},$$

то есть определяется только полезностью. Здесь учтено, что из условия нормировки следует $\xi_{ii} = 1$.

2. При выполнении условия одинаковости предпочтений: $\pi_i(\sigma_k) = \pi_j(\sigma_k)$ для $\forall j \neq i$ имеет место тот же результат, что и в случае 1.

3. Если $\xi_{ii} = 0$ (субъект сам себя ни во что не ставит) и дополнительно $\pi_i(\sigma_k) = \pi_j(\sigma_k)$ для всех $\forall j \neq i$, то $\pi_i = \dfrac{1}{N}$, а энтропия распределения максимальна.

Знак «—» перед суммой в числителе и знаменателе определяется из следующих условий:



при $\pi_i^{(a)} < \pi_j$ обеспечивается подтягивание $\pi_i^{(a)}$ к π_j слева,

при $\pi_i^{(b)} > \pi_j$ обеспечивается подтягивание $\pi_i^{(b)}$ к π_j справа,

при $\pi_i = \pi_j$ для $\forall j \neq i$, как уже говорилось, π_i зависит только от рациональной полезности.

Как видим, в результате условий нормировки предпочтение $\pi_i(\sigma_k)$ зависит от всего спектра предпочтений всех членов группы. Важным является то, что в распределениях предпочтений первого рода в этой модели замешаны предпочтения второго рода — рейтинговые коэффициенты ξ_j либо $\xi(j|\, i)$ либо $\xi(i, j|\, \sigma_k)$. Этот путь

должен привести к формированию более общего критерия, который позволял бы получать в единой схеме как предпочтения I рода, так и предпочтения II рода.

Здесь, однако, возникает вопрос: кто персонально является носителем такого консолидированного критерия?

Рассмотрим частный, но весьма важный случай, когда в группе имеется лидер, обладающий непререкаемым авторитетом $j = r$ и каждый субъект делит свои предпочтения таким образом, что

$\xi_{ii} \neq 0$; $\xi_{ri} = 1 - \xi_{ii}$; $\xi_{ji} = 0$ при $\boldsymbol{j \neq i, j \neq r}$.

Тогда из формулы (5.1.32) получаем

$$\pi_i(k) = \frac{\pi_r(k)^{1-\xi_{ii}}\, e^{\beta_i \xi_{ii} U_i(\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N} \pi_r(\sigma_q)^{1-\xi_{ii}}\, e^{\beta \xi_{ii} U_i(\sigma_q)}}. \qquad (5.1.35)$$

Как уже говорилось, в действительности приведенные соотношения для предпочтений представляют из себя уравнения, или точнее, системы уравнений в общем случае нелинейных, аналитическое решение которых чаще всего невозможно. Так, в формуле (5.1.34) предпочтение $\pi_i(\sigma_k)$ содержится, как в левой, так и в правой частях.

Рассмотрим в качестве примера группу из двух субъектов M = 2, когда общее множество S_a состоит их двух альтернатив (N = 2): σ_1 и σ_2.

Рейтинговая матрица

$$\boldsymbol{Z} = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{Vmatrix}.$$

Обозначим $y_i(k) = \ln\pi_i(\sigma_k)$, тогда уравнения, из которых разыскиваются функции $\pi_i(\sigma_j)$ можно записать в виде

$$\mathbf{y}_1(1) - \xi_{21}\mathbf{y}_2(1) = \beta_1\xi_{11}\mathbf{U}_1(1) + \gamma_1 - 1;$$

$$\mathbf{y}_1(2) - \xi_{21}\mathbf{y}_2(2) = \beta_1\xi_{11}\mathbf{U}_1(2) + \gamma_1 - 1;$$

$$-\xi_{12}\mathbf{y}_1(1) + \mathbf{y}_2(1) = \beta_2\xi_{12}\mathbf{U}_2(1) + \gamma_2 - 1;$$

$$-\xi_{12}\mathbf{y}_1(1) + \mathbf{y}_2(2) = \beta_2\xi_{22}\mathbf{U}_2(2) + \gamma_2 - 1.$$

Неизвестные $y_1(1)$, $y_1(2)$ и $y_2(1)$, $y_2(2)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\xi_{21} \\ -\xi_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix}, \qquad (5.1.36)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\xi_{21} \\ -\xi_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}, \qquad (5.1.37)$$

где $f_{ik} = \beta_i\xi_{ii}U_i(k) + \gamma_i - 1$.

Решение систем (5.1.36) и (5.1.37) есть

$$y_1(1) = \ln \pi_1(\sigma_1) = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & -\xi_{21} \\ f_{21} & 1 \end{vmatrix}}{1-\xi_{12}\xi_{21}};$$

$$y_1(2) = \ln \pi_1(\sigma_2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_{11} \\ -\xi_{21} & f_{21} \end{vmatrix}}{1-\xi_{12}\xi_{21}}.$$

Отсюда

$$\pi_1(\sigma_1) = \exp\left(\frac{f_{11}+\xi_{21}f_{21}}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\right) = \tag{5.1.38}$$

$$= \exp\frac{\beta_1\xi_{11}U_1(1)+\xi_{21}\beta_2\xi_{22}U_2(1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\exp\frac{\gamma_1-1+\xi_{21}(\gamma_2-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}};$$

$$\pi_2(\sigma_1) = \exp\left(\frac{f_{21}+\xi_{12}f_{11}}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\right) =$$

$$= \exp\frac{\beta_2\xi_{22}U_2(1)+\xi_{12}\beta_1\xi_{11}U_1(1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\exp\frac{\gamma_2-1+\xi_{12}(\gamma_1-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}.$$

Аналогично найдем $\pi_1(\sigma_2)$ и $\pi_2(\sigma_2)$:

$$\pi_1(\sigma_2) = \exp\frac{\beta_1\xi_{11}U_1(2)+\xi_{21}\beta_2\xi_{22}U_2(2)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\exp\frac{\gamma_1-1+\xi_{21}(\gamma_2-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}; \tag{5.1.39}$$

$$\pi_2(\sigma_2) = \exp\frac{\beta_2\xi_{22}U_2(2)+\xi_{12}\beta_1\xi_{11}U_1(2)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}\exp\frac{\gamma_2-1+\xi_{12}(\gamma_1-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}.$$

Если обозначить

$$c_1 = \exp\frac{\gamma_1-1+\xi_{21}(\gamma_2-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}};$$

$$c_2 = \exp\frac{\gamma_2-1+\xi_{12}(\gamma_1-1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}},$$

то (5.1.38) и (5.1.39) принимают вид:

$$\pi_i(k) = \pi_i'(k)c_i,$$

где $\pi_i'(k)$ — множители, зависящие от полезностей. Из условий нормировки:

$$\pi_1(1) + \pi_1(2) = 1; \ \pi_2(1) + \pi_2(2) = 1$$

найдем

$$\tilde{n}_1 = \left(\pi_1'(1) + \pi_1'(2)\right)^{-1}; \quad c_2 = \left(\pi_2'(1) + \pi_2'(2)\right)^{-1},$$

формула дает

$$\pi_j(k) = \frac{\pi_i'(k)}{\pi_i(1) + \pi_i(2)}; \; (i \in \overline{1,2}). \tag{5.1.40}$$

В подробной записи, например, $\pi_1(1)$ имеет вид:

$$\pi_1(1) = \frac{\exp\dfrac{\beta_1\xi_{11}U_1(1) + \xi_{21}\xi_{22}\beta_2 U_2(1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}}{\exp\dfrac{\beta_1\xi_{11}U_1(1) + \xi_{21}\xi_{22}\beta_2 U_2(1)}{1-\xi_{12}\xi_{21}} + \exp\dfrac{\beta_1\xi_{11}U_1(2) + \xi_{21}\xi_{22}\beta_2 U_2(2)}{1-\xi_{12}\xi_{21}}}.$$

Видим, что, в конечном счете, предпочтения определяется только полезностями. Это означает, что в данной модели предпочтения носят исключительно рациональный характер. Этот результат понятен и объясняется тем, что в рассмотренной схеме нигде не присутствуют факторы «этического» характера, или какие-либо другие, не основанные на полезности. Заметим, что условие $U_1(1) = 0$ недостаточно, чтобы $\pi_1(1)$ обратилось в нуль. Дополнительно следует потребовать, чтобы $\xi_{21} = 0$, то есть, чтобы рейтинг второго субъекта «в глазах первого» был равен нулю. Если же $\xi_{21} \neq 0$, то даже в случае если индивидуальная полезность $i = 1$ $U_1(1) = 0$, $\pi_1(1) \neq 0$, если данная альтернатива обладает ненулевой полезностью для второго субъекта. Можно интерпретировать этот факт как проявления коллективистской компоненты психики.

Не трудно найти в явном виде коэффициенты γ_1 и γ_2:

$$\gamma_1 = \frac{c_1' - c_2'\xi_{21}}{1-\xi_{12}\xi_{21}}; \; \gamma_1 = \frac{c_2' - c_1'\xi_{12}}{1-\xi_{12}\xi_{21}}.$$

5.1.5. Априорные и апостериорные предпочтения I рода. «Цепи распределений». Учет влияния априорных предпочтений

Рассматривая предпочтения субъекта в данный момент времени t, мы должны считаться с тем, что они могут зависеть

1) от «априорных» предпочтений сложившихся в предыдущий период ($t-1$, $t-2$, …), которые в большинстве случаев отражают этические нормы;

2) от некоторой «спонтанной» компоненты, связанной с недетерминированностью человеческой психики, спонтанного изменения предпочтений вообще, что может зависеть от изменения вкусов, физиологических потребностей обусловленных, в частности, возрастными изменениями, изменениями социального положения субъекта, этических императивов и т. д.;

3) от распределения предпочтений других субъектов, каким-либо образом взаимодействующих (связанных) с данным субъектом (через общие ресурсы, корпоративные проблемы, …).

Вопросы, относящиеся к третьему замечанию, изучаются в 4 главе, посвященной *агрегированным* предпочтениям I рода и предпочтениям II рода.

В настоящем параграфе рассматриваются задачи построения моделей изменения распределения предпочтений во времени (п. 1). Мы ограничимся распределениями типа π^+, π^- имея в виду, что теория для υ^+ и υ^- в значительной мере аналогична. Будем опускать значки «+» и «–». Начнем рассмотрение с простейших задач.

Обозначим через $\pi(\sigma_k, t)$ распределение абсолютных предпочтений на S_a в момент времени t и предположим, что в момент времени $t + 1$: $\pi(\sigma_k, t+1)$ субъект формирует предпочтения $\pi(\sigma_k, t)$ и таким образом, что некий функционал достигает экстремального значения. Пусть этот функционал имеет следующий вид:

$$\Phi_\pi(t+1,t) = -\sum_{k=1}^{N} \pi(\sigma_k, t+1)\ln\pi(\sigma_k, t+1) \pm$$

$$\pm\beta\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k, t+1)\ln\pi(\sigma_k, t) + \gamma\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k, t+1) \qquad (5.1.41)$$

Еще одно допущение, принятое здесь состоит в том, что от шага к шагу множество альтернатив S_a не изменяется. В этом случае мы не конкретизируем, в чем состоит «шаг», то есть содержательную сторону перехода $t \to t + 1$. Заметим, что если выше мы занимались переходом $\sigma_k \to \sigma_j$, то в рассматриваемой частной задаче имеет место временной переход при сохранении номера альтернативы.

Второй член в функционале $\Phi_\pi(t + 1, t)$ записан как взвешенная сумма «старых» частных энтропий по «новым» предпочтениям. Причина временных изменений предпочтений «скрыта» в коэффициенте β.

Записывая, как и ранее необходимое условие экстремума (предполагая тем самым экстремальность нового выбора предпочтений):

$$\frac{\partial\Phi_\pi}{\partial\pi(\sigma_k, t+1)} = 0,$$

найдем соотношение связывающее $\pi(\sigma_k, t + 1)$ с $\pi(\sigma_k, t)$ (для знака «+» перед вторым членом):

$$\pi(\sigma_k, t + 1) = c_t(\pi(\sigma_k, t))^\beta,$$

c_k — находится из условия нормировки для $\pi(\sigma_i, k + 1)$:

$$c_t = \left(\sum_{k=1}^{N}\left(\pi(\sigma_k, t)\right)^\beta\right)^{-1}.$$

Видим в частности, что если $\beta = 1$ и для каждого t выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k, t) = 1,$$

то $c_t = 1$ для $\forall t \in \overline{t_0, \infty}$. Это означает, что при этих условиях распределение предпочтений на S_a не изменяется

$$\pi(\sigma_k, t+1) = \pi(\sigma_k, t), \quad \forall t \in \overline{t_0, \infty}.$$

Когда $\beta \neq 1$, то решение различно для случаев $\beta < 1$ и $\beta > 1$.

Рассмотрим пример, когда $\beta = 2$ и S_a содержит только две альтернативы σ_1 и σ_2 и пусть в момент k = 1 $\pi_1(t = 1) = 0{,}3$, $\pi_2(t = 1) = 0{,}7$ значения $\pi(\sigma_k, t)$ при t = 1, 2, 3 представлены в таблице

k	$\pi(\sigma_1, k)$	$\pi(\sigma_2, k)$
1	0,3	0,7
2	0,15517	0,84482
3	0,03263	0,967395

Видим, что меньшее предпочтение с течением времени уменьшается, а большее — увеличивается, то есть возрастает неоднородность распределения предпочтений.

Если $\beta = 0{,}5 < 1$, то аналогичная таблица

k	$\pi(\sigma_1$, k)	$\pi(\sigma_2$, k)
1	0,3	0,7
2	0,39563	0,60436
3	0,44723	0,55276

говорит о том, что начальная неоднородность распределения уменьшается и распределение стремится к равномерному при $t \to \infty$.

В первом случае при $\beta = 2$ (> 1) энтропия H_π(t) убывает со временем, что вполне отвечает возрастанию неоднородности распределения предпочтений (см. рис.5.1.1).

Если рассматривать изменение энтропии как информацию, то в первом случае, когда имеет место уменьшение энтропии (уменьшение неопределенности), субъект получает информацию, которая позволяет ему увеличить определенность выбора.

Наоборот, во втором случае ($\beta = 0{,}5$) неопределенность (энтропия) возрастает. Будем условно считать, что субъект «теряет» информацию.

На рис. 5.1.2 для рассматриваемого примера показаны величины информации.

В формуле (5.1.41) может быть принят только знак «+», так как $\pi(\sigma_i, t) \geq 0$. По существу первые два члена в критерии Φ_π представляют собой «информацию» Кульбака [187, 190].

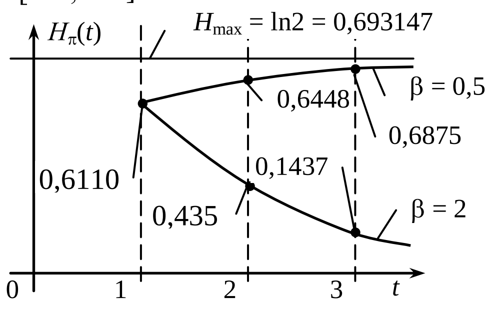


Рис.5.1.1

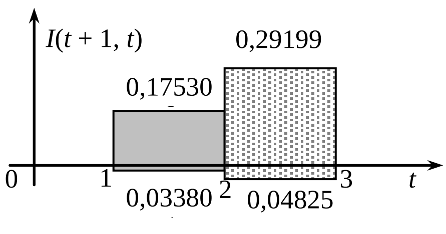


Рис.5.1.2

Рассмотрим следующий функционал:

$$\boldsymbol{\Phi}_\pi\left(t+1,t\right)=\sum_{k=1}^{N}\Big[-\pi\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi\left(\sigma_k,t+1\right)+\alpha\pi\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi\left(\sigma_k,t\right)-$$
$$-\beta\pi\left(\sigma_k,t+1\right)\pi\left(\sigma_k,t\right)+\gamma\pi\left(\sigma_k,t+1\right)\Big]=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\pi\left(\sigma_k,t+1\right)\Big[-\ln\pi\left(\sigma_k,t+1\right)+\alpha\ln\pi\left(\sigma_k,t\right)-\beta\pi\left(\sigma_k,t\right)+\gamma\Big].$$

Отсюда находим оптимальные значения $\pi(\sigma_i, t + 1)$

$$\pi\left(\sigma_k,t+1\right)=c_t\pi\left(\sigma_k,t\right)^{\alpha}e^{-\beta\pi\left(\sigma_k,t\right)}. \tag{5.1.42}$$

где $c_t=\sum_{j=1}^{N}\pi\left(\sigma_k,t\right)^{\alpha}e^{-\beta\pi\left(\sigma_k,t\right)}$.

Ранее было показано, что экстремум распределения (5.1.42) достигается в точке $\sigma_k^*=\dfrac{\alpha}{\beta}$. Приведем вычисления, показывающие, как изменяются предпочтения с течением времени в зависимости от численных значений параметров α и β. В качестве примера, как и выше, возьмем случай, когда имеется две альтернативы (N = 2). Обозначим $\pi(\sigma_i, t) = \pi_{it}$. Имеем:

$$\pi_{1,t+1}=\frac{\pi_{1,t}^{\alpha}e^{-\beta\pi_{1,t}}}{\pi_{1,t}^{\alpha}e^{-\beta\pi_{1,t}}+\pi_{2,t}^{\alpha}e^{-\beta\pi_{2,t}}}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\pi_{2,t}}{\pi_{1,t}}\right)^{\alpha}e^{-\beta\left(\pi_{2,t}-\pi_{1,t}\right)}}.$$

Видим, что независимо от значений α и β начальное равномерное распределение $\pi_{1,0} = \pi_{2,0} = 0{,}5$ сохраняется при $t > 0$. Сингулярное распределение $\pi_{1,0} = 1$, $\pi_{2,0} = 0$ также сохраняется, как и распределение $\pi_{1,0} = 0$, $\pi_{2,0} = 1$.

Пусть $\pi_{1,0} = 0{,}7$, $\pi_{2,0} = 0{,}3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, тогда $\pi_{1,1} = 0{,}609997$, $\pi_{2,1} = 0{,}390001$ и энтропия соответственно

$$\left.\begin{aligned}H_{\pi,0}&=0{,}61087\\H_{\pi,1}&=0{,}66875\end{aligned}\right\}\Rightarrow H_{\pi,1}>H_{\pi,0}.$$

При выбранных значениях α и β происходит выравнивание распределения и рост энтропии.

Предположим, что при тех же начальных значениях $\pi_{1,0}$ и $\pi_{2,0}$ $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}5$. Находим, что $\pi_{1,1} = 0{,}816767$, $\pi_{2,1} = 1 - \pi_{1,1} = 0183235$ и $H_{\pi,1} = 0{,}476264$. В этом случае распределение стремится к сингулярному, а энтропия уменьшается. Если принять, что $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 2$, то

$$\pi_{1,1}=\frac{1}{1\left(\dfrac{0{,}3}{0{,}7}\right)^{0,5}e^{-2\left(0,3-0,7\right)}}=0{,}255499;$$

$\pi_{2,1} = 1 - \pi_{1,1} = 0,744500.$

Изменение предпочтений и энтропии показано в табл. (при α = 0,5, β = 2):

t	$\pi_{1,\,t}$	$\pi_{2,\,t}$	$H_{\pi,t}$
0	0,7	0,3	0,61087
1	0,255499	0,744500	0,568299
2	0,60901	0,390988	0,669188
3	0,64873	0,341267	0,641873
4	0,72387	0,276128	0,589260

Как видим, в этом случае энтропия изменяется немонотонно (рис.5.1.3).

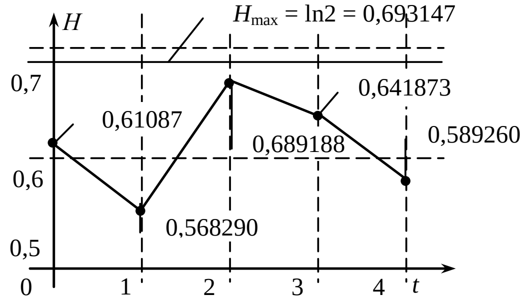


Рис.5.1.3

Можно говорить об устойчивости или неустойчивости распределений предпочтений. Так из рис.5.1.1 видно, что при β = 0,5 устойчивым является равномерное распределение с максимальной энтропией, тогда, как при β = 2 устойчиво сингулярное распределение с нулевой энтропией.

Соотношение (5.1.42) можно рассматривать как «дифференциальное уравнение» для распределения предпочтений на S_a, выражающее апосте-риорные предпочтения через априорные, формирующее «наследственность» предпочтений.

Рассмотренные вариационные задачи и канонические распределения не учитывают влияния экзогенных факторов и отражают лишь характер эволюции во времен распределения предпочтений, в зависимости от эндогенных параметров: β — в первом случае и α и β — во втором. Важным моментом здесь является замечание об устойчивости в смысле Ляпунова распределений предпочтений в зависимости от эндогенных параметров α, β, …, которую можно условно называть «эндогенной устойчивостью». По-видимому, это может найти отражение в теории психической устойчивости субъектов.

Продолжим изучение временных последовательностей предпочтений на этот раз, однако, с учетом экзогенных факторов: функций полезности $U(\sigma_i)$, функций вредности $L(\sigma_i)$, их частных представлений через ресурсы, либо через вероятности достижения результата.

Выберем функционал в виде:

$$\Phi_{\pi}^{+}(t+1,t) = -\sum_{i=1}^{N} \pi^{+}(\sigma_k, t+1) \ln \pi^{+}(\sigma_k, t+1) + \qquad (5.1.43)$$

$$+\beta^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)\pi^+\left(\sigma_k,t\right)+\delta^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi^+\left(\sigma_k,t\right)+$$

$$+\gamma^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+(\sigma_k,t+1)U(\sigma_k,t+1)+\eta^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+(\sigma_k,t+1)$$

Здесь, как видим, использованы функции абсолютных предпочтений $\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)$ и $\pi^+\left(\sigma_k,t\right)$, причем распределение предпочтений в наступающий момент $t + 1$ зависит от распределения предпочтений в предыдущий момент t и не зависит от распределений во все предыдущие моменты $t - 1$, $t - 2$, … Таким образом, в этом смысле имеет место «марковость». Кроме «наследственности» предпочтений функционал отражает зависимость от «абсолютной» полезности $U(\sigma_i, t + 1)$. Каноническое распределение предпочтений, соответствующее критерию (5.1.43) имеет вид:

$$\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)=C^+_{t,t+1}\pi^+\left(\sigma_k,t\right)^{\beta^+}e^{\delta^+\pi^+(\sigma_k,t)}e^{\gamma^+U(\sigma_k,t+1)},\qquad(5.1.44)$$

где

$$C^+_{t,t+1}=\left(\sum_{j=1}^{N}\pi^+\left(\sigma_k,t\right)^{\beta^+}e^{\delta^+\pi^+(\sigma_k,t)+\gamma^+U(\sigma_k,t+1)}\right)^{-1}.\qquad(5.1.45)$$

Недостатком распределения (5.1.44) является то обстоятельство, что, если в некоторый момент времени t предпочтение $\pi(\sigma_k, t) = 0$, то в последующем $t + 1$, $t + 2$,… предпочтение этой альтернативы остается равным нулю.

С другой стороны, если $\pi(\sigma_k, t) \neq 0$, то оно в дальнейшем никогда не может обратиться в нуль (e^x – конечно, если $x \neq -\infty$).

Нормирующая константа на каждом шаге имеет свое значение. Аналогичным образом можно получить канонические распределения для π^-, υ^+, υ^- абсолютных предпочтений, зависящее как от $U(\sigma_k, t + 1)$, так и от $L(\sigma_k, t + 1)$.

Естественно допустить, что будущее распределение типа $\pi^+(\sigma_k, t + 1)$ зависит не только от предшествующего распределения того же типа, то есть от $\pi^+(\sigma_k, t)$, но и от предшествующих распределений другого типа, например, от $\pi^-(\sigma_k, t)$ или $\upsilon^-(\sigma_i, t)$. При этом необходимо параллельно отслеживать историю формирования этих предпочтений во времени и, следовательно, если выбирается в качестве влияющего на π^+ фактора распределение π^-, то рассматривается функционал:

$$\Phi^-_\pi\left(t+1,t\right)=-\sum_{k=1}^{N}\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)+\qquad(5.1.46)$$

$$+\beta^-\sum_{k=1}^{N}\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi^-\left(\sigma_k,t\right)+\delta^-\sum_{k=1}^{N}\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)\pi^-\left(\sigma_k,t\right)+$$

$$+\mu^+\sum_{k=1}^{N}\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)\ln\pi^+\left(\sigma_k,t\right)+\upsilon^+\sum_{k=1}^{N}\pi^-\left(\sigma_k,t+1\right)\pi^+\left(\sigma_k,t\right)-$$

$$-\gamma^{-}\sum_{k=1}^{N}\pi^{-}\left(\sigma_k,t+1\right)L\left(\sigma_k,t+1\right)+\eta^{-}\sum_{k=1}^{N}\pi^{-}\left(\sigma_k,t+1\right).$$

Соответствующее каноническое распределение имеет вид:

$$\pi^{-}\left(\sigma_k,t+1\right)=C_{t,t+1}^{-}\left(\pi^{-}\left(\sigma_k,t\right)\right)^{\beta^{-}}\left(\pi^{+}\left(\sigma_k,t\right)\right)^{\mu^{+}}\times e^{\delta^{-}\pi^{-}(\sigma_k,t)+\upsilon^{+}\pi^{+}(\sigma_k,t)}e^{-\gamma^{-}L(\sigma_k,t+1)} \quad (5.1.47)$$

с нормировочной константой

$$\bar{C}_{t,t+1}=\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\pi^{-}\left(\sigma_j,t\right)\right)^{\beta^{-}}\left(\pi^{+}\left(\sigma_j,t\right)\right)^{\mu^{+}}e^{\delta^{-}\pi(\sigma_j,t)+\upsilon^{+}\pi(\sigma_j,t)}e^{-\bar{\gamma}L(\sigma_j,t+1)}\right]^{-1}.$$

Дополнительные слагаемые, содержащие $\pi^{-}(\sigma_k, t)$ должны быть включены в функционал (5.1.43), а распределение (5.1.44) будет зависеть от $\pi^{-}(\sigma_k, t)$. В этом случае уравнения (5.1.44) и (5.1.47) образуют систему двух распределений $\pi^{+}(\sigma_k, t)$ и $\pi^{+}(\sigma_k, t)$. Таким образом, на каждом шаге формируется два новых распределения π^{+} и π^{-}. При этом учитывается информация, как о полезности, так и о вредности альтернатив. Этот процесс, как представляется, может оказаться полезной моделью при исследовании развития когнитивного диссонанса. Он более подробно рассматривается в п.5.6.

Другой вариант возникает, когда при генерации «истории» распределения предпочтений «принять» ту или иную альтернативу $\pi^{+}(\sigma_i, t)$, принимается во внимание, существующее на предыдущем шаге распределение предпочтений «отвергнуть»: $\upsilon^{-}(L_i)$. Мы не будем здесь записывать соответствующие функционалы, отметим только, что оба получаемые канонические распределения π^{+} и υ^{-} максимизируют «свои» соответствующие энтропии.

Обилие и громоздкость формул не должны, на наш взгляд, смущать читателя. Реальные проявления психики субъекта чрезвычайно сложны и многообразны. Автор убежден, что приводимые схемы получения и анализа предпочтений являются лишь весьма упрощенными моделями действительности.

В первую очередь они дают «путеводную нить», позволяющую спланировать, осмысленно осуществить психометрический эксперимент и затем выполнить количественную обработку полученных данных.

Предыдущие формулировки вариационных задач относились к распределениям абсолютных предпочтений на S_a, то есть таких предпочтений, которые не зависят (или зависят весьма слабо) от исходного состояния системы σ_i в котором она находится в момент t.

Теперь мы отбросим это упрощающее допущение.

Предположим, что в момент t известно распределение абсолютных предпочтений на S_a и все альтернативы попарно несовместны.

Рассмотрим функционал

$$\Phi_{\pi_i}^{+}=-\sum_{j=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1\,|\,\sigma_i,t\right)\ln\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1\,|\,\sigma_i,t\right)+ \quad (5.1.48)$$

$$+\beta\sum_{j=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1|\sigma_i,t\right)\ln\pi^{+}\left(\sigma_j,t\right)+\delta\sum_{j=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1|\sigma_i,t\right)U\left(\sigma_j\,|\,\sigma_i\right)+$$

$$+\gamma\sum_{j=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1|\sigma_i,t\right).$$

Здесь $U(\sigma_j|\ \sigma_i)$ – условная полезность альтернативы σ_j при условии, что система находится в состояния x_i.

Критерию $\Phi^{+}_{\pi_i}$ соответствует функция распределения условных предпочтений

$$\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1|\sigma_i,t\right)=C^{+}_{t,t+1,i}\pi^{+}\left(\sigma_j,t\right)^{\beta}e^{\delta U\left(\sigma_j|\sigma_i\right)}, \quad (5.1.49)$$

с нормирующей константой

$$C^{+}_{t,t+1,i}=\left(\sum_{q=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_q,t\right)^{\beta}e^{\delta U\left(\sigma_q|\sigma_i\right)}\right)^{-1}.$$

Эта константа зависит от индекса i. Распределение $\pi^{+}(\sigma_j|\ t)$, как уже сказано, считается известным.

Для того, чтобы определить апостериорное абсолютное распределение $\pi^{+}(\sigma_j|\ t+1)$, можно использовать формулу подобную формуле полной вероятности. Эта формула строго справедлива, если альтернативы попарно несовместны. В субъективном анализе ее аналог носит, скорее всего, приближенный характер, поскольку редко удается выделить полную группу взаимно-несовместных альтернатив и построить множество S_a как множество элементарных альтернатив. Примем, тем не менее, что

$$\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1\right)=\sum_{i=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_i,t\right)\pi^{+}\left(\sigma_j,t+1|\sigma_i,t\right)=\sum_{i=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_i,t\right)\frac{\pi^{+}\left(\sigma_j,t\right)^{\beta}e^{\delta U\left(\sigma_j|\sigma_i\right)}}{\sum_{q=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_q,t\right)^{\beta}e^{\delta U\left(\sigma_q|\sigma_i\right)}}. \quad (5.1.50)$$

Видим, что если в момент t $\pi^{+}(\sigma_j,t)=0$ то впоследствии для $t+1$ также $\pi^{+}(\sigma_j,t+1)=0$ и т. д. — для всех последующих моментов времени.

Несколько иной смысл приобретает задача получения канонического распределения предпочтений одношаговых путей $\pi^{+}(\sigma_i,\sigma_j)$, которая в предположении о возможности факторизации представляется в виде:

$$\pi^{+}(\sigma_i,\sigma_j)=\pi^{+}(\sigma_i)\pi^{+}(\sigma_j|\ \sigma_i). \quad (5.1.51)$$

Энтропия в этом случае дается формулой:

$$H^{+}_{\pi}=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi^{+}\left(\sigma_i,\sigma_j\right)\ln\pi^{+}\left(\sigma_i,\sigma_j\right). \quad (5.1.52)$$

Обозначим для сокращения $\pi^{+}(\sigma_i)=\pi^{+}_{i}$; $\pi^{+}(\sigma_i,\sigma_j)=\pi^{+}_{i,j}$; $\pi^{+}(\sigma_j|\ \sigma_i)=\pi^{+}_{j|i}$. Легко найти формулу:

$$H^{+}_{\pi}=H^{+}\left(\pi^{+}_{i}\right)+H^{+}\left(\pi^{+}_{j|i}\right). \quad (5.1.53)$$

Если состояние σ_i имеет место в момент t, а предполагаемое состояние σ_j в момент $t + 1$, следующий критерий должен привести к выбору наилучшего пути $\sigma_i \to \sigma_j$ с оптимальным выбором как «пункта отправления» σ_i, так и «пункта назначения» σ_j.

$$\Phi_\pi^+ = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}^+ \ln \pi_{i,j}^+ + \beta\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}^+ U_{i,j}^+ + \gamma\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}^+. \tag{5.1.54}$$

Здесь $U(i, j)$ — полезность пути $\sigma_i \to \sigma_j$, включающая полезности пребывания в состояниях σ_i и σ_j и перехода $\sigma_i \to \sigma_j$.

Очевидно, существует большое разнообразие функционалов и канонических распределений, связанных с ресурсами различных типов. Исследование других возможных постановок — дело будущего. Здесь мы только обозначили путь, по которому можно продолжать движение.

Следующий вопрос связан с представлением функций полезности и вредности через «скорости» преобразования ресурсов.

5.1.6. Модели эндогенной динамики активных систем

В соответствии с принятой в работе терминологией, эндогенная динамика активных систем, в более узком смысле, — эндогенная динамика предпочтений, обусловлена внутренними факторами: наличием этических императивов, влиянием предыдущих предпочтений (ретроспективы), изменением предпочтений, обусловленных возрастом субъекта, взаимным влиянием субъектов («эффектом толпы» — например), изменением эндогенных параметров (α, β…).

Отдельной проблемой является учет взаимосвязи распределений предпочтений различных типов, в том числе введенных выше распределений типа π^+, π^-, υ^+, υ^-, выявление соответствующих энтропий и потоков информации.

В рамках эндогенной динамики целесообразно рассмотреть также результаты, которые следуют из гипотезы о наличии (объективном существовании) так называемого «коллективного разума» (или «коллективной психики»). Эта гипотеза созвучна с теориями, рассматривающими сообщества не как сумму индивидуумов, но как некий «живой организм» (или «информационную сущность»), который существует и развивается по законам отличным от законов развития индивидуума.

Здесь мы изложим элементы эндогенной динамики предпочтений в максимально упрощенном виде, не вдаваясь там, где это возможно, в такие подробности, которые не влияют на ясное представление основной концепции.

В пункте 5.1.5 мы предложили схемы учета «ретроспективы» на один шаг «назад» для предпочтений I рода. Можно конечно представить себе, что ретроспектива учитывается на более глубоком удалении в прошлое, когда на распределения в данный момент $\pi(t + 1)$ влияют распределения в моменты времени t, $t - 1$, $t - 2$, …, $t - k$, причем это влияние может учитываться с разными весами. В 3.6 и 3.7 не шла речь о взаимовлиянии распределений различных типов π^+, π^-, υ^+, υ^-. Начнем здесь рассмотрение с этого вопроса.

Предположим, что в момент $t + 1$ позитивные предпочтения $\pi^+(\sigma_k, t + 1)$ зависят не только от полезностей $U(\sigma_k, t + 1)$, но и от некоторой функции F агрегирующей позитивные π^+ и негативные π^- предпочтения, имевшие место на предыдущем шаге, то есть в

момент t. Одна из возможностей учета негативных предпочтений состоит в следующем: предпочтения $\pi^{-}(\sigma_k, t)$ сравниваются с величиной предпочтений безразличия $\pi^{\sim}\left(\sigma_k, t\right)=\dfrac{1}{N}$. Тогда функция F представляется как функция от $\pi^{-}(\sigma_k, t)$ и $\pi^{\sim}\left(\sigma_k, t\right)=\pi^{\sim}=\dfrac{1}{N}$:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, \boldsymbol{t}\right), \boldsymbol{\pi}^{\sim}\right).$$

Здесь использовано обозначение $F(.)$, поскольку в данном случае эту функцию не всегда можно отождествить с эффективностью.

Она должна обладать достаточной чувствительностью по отношению к разности $\pi^{-}-\pi^{\sim}=\pi^{-}-\dfrac{1}{N}$. При этом, если $\pi_k^{-}>\dfrac{1}{N}$ учет предпочтения π^{-}_{k} должен приводить к уменьшению соответствующего позитивного предпочтения π^{+}_{k}, если $\pi_k^{-}<\dfrac{1}{N}$, то учет π^{-}_{k} либо ведет к увеличению π^{+}_{k}, либо π^{-}_{k} не учитывается вообще.

Заметим, что «порог» для негативных предпочтений не обязательно равен $\pi^{\sim}=\dfrac{1}{N}$. Он может колебаться для разных субъектов в пределах от 0 до 1. Обозначим «порог» через $\pi^{\square *}$ и будем рассматривать функцию

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\pi}^{-}(\boldsymbol{\sigma}_{k}, \boldsymbol{t}), \pi^{\square *}).$$

В частном случае $\pi^{\square *}=\dfrac{1}{\boldsymbol{N}}$. Если $\pi^{\square *}=0$, то учитываются любые негативные оценки. Вообще

$$0 \leq \pi^{\square *} \leq 1.$$

Процесс субъективного анализа представляется в виде цепочки

$$\ldots \rightarrow \boldsymbol{\pi}^{-}_{\mathbf{t}} \rightarrow \boldsymbol{\pi}^{+}_{\mathbf{t}+1} \rightarrow \boldsymbol{\pi}^{-}_{\mathbf{t}+2} \rightarrow \ldots \tag{5.1.55}$$

С какой оценки: негативной или позитивной начинается этот процесс, зависит от свойств индивидуальной психики. Субъект осторожный склонный к основательному учету рисков, негативных последствий, опасностей, начнет анализ с оценки негативных предпочтений и установит более низкий порог $\pi^{*-}<\dfrac{1}{N}$.

Если первым шагом в цепочке (5.1.55) является оценка негативных предпочтений, последние могут быть сформированы, согласно общей концепции, как результат экстремизации функционала

$$\boldsymbol{\Phi}_{\pi^{-}, \boldsymbol{t}=1}=-\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right) \ln \boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right)- \tag{5.1.56}$$

$$-\beta^{-} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right) \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\pi}_{k}^{*-}, \boldsymbol{\pi}^{*-}\right)-\gamma^{-} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right) \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right)+\delta^{-} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\pi}^{-}\left(\boldsymbol{\sigma}_{k}, 1\right).$$

Второй член в этой формуле включен формально, так как функция $F\left(\pi_k^-,\pi^{*-}\right)$ обладает тем свойством, что $F\left(\pi^{*-},\pi^{*-}\right)=0.$ Тогда начальное распределение

$$\pi^-\left(\sigma_k,1\right)=\frac{e^{\gamma^- L(\sigma_k,1)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\gamma^- L(\sigma_k,1)}} \tag{5.1.57}$$

и определяется только через «рациональную» функцию вредности такую, какой она представляется субъекту в момент $t = 1$.

Следующим шагом является оценка позитивных предпочтений $\pi^+(\sigma_k,\ t = 2)$ (здесь t понимается скорее не как астрономическое время, а как время «операционное», связанное с этапами анализа. Его можно отождествить с номером этапа. Переход к «физическому» времени требует дополнительных предположений). Для определения $\pi^+(\sigma_k, 2)$ сформируем функционал:

$$\Phi_{\pi^+,t=2}=-\sum_{k=1}^{N}\pi^+(\sigma_k,2)\ln\pi^+(\sigma_k,2)-\beta^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+(\sigma_k,2)F\left(\pi^-(\sigma_k,1)\tilde{\pi}^{*}\right) \tag{5.1.58}$$

$$+\gamma^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+\left(\sigma_k,2\right)U\left(\sigma_k,2\right)+\delta^+\sum_{k=1}^{N}\pi^+\left(\sigma_k,2\right).$$

Для функции F используем представление

$$F = \varphi(\pi^{\pm}) - \varphi(\pi^{*\pm}), \tag{5.1.59}$$

где $\varphi(\pi) \geq 0$. В частности может быть $\varphi(\pi) = \ln \pi$ либо $\varphi = a\,\pi^{\alpha}$ ($a > 0$, $\alpha \in$ R) либо $\varphi = \mathrm{a}e^{\lambda\pi}$…

Пусть $\varphi(\pi) = \ln\pi$, тогда каноническое распределение для $\pi^+(\sigma_k, 2)$ имеет вид (t = 2):

$$\pi^+\left(\sigma_k,2\right)=\frac{\left(\pi_k^-\right)^{-\beta}e^{\gamma U(\sigma_k,2)}}{\sum_{j=1}^{N}\left(\pi_j^-\right)^{-\beta}e^{\gamma U(\sigma_j,2)}}. \tag{5.1.60}$$

Чтобы выяснить смысл этого результата, рассмотрим пример. Пусть имеется только две альтернативы и

$U(\sigma_1, 2) = U_1 \quad U(\sigma_2, 2) = U_2$.

Обозначим $\pi^+(\sigma_k, 2) = \pi^+_k$, тогда для $\beta = 1$ и $k = 1$ имеем:

$$\pi_1^+=\frac{\frac{1}{\pi_1^-}e^{\gamma U_1}}{\frac{1}{\pi_1^-}e^{\gamma U_1}+\frac{1}{\pi_2^-}e^{\gamma U_2}}=\frac{e^{\gamma U_1}}{e^{\gamma U_1}+\frac{\pi_1^-}{\pi_2^-}e^{\gamma U_2}}. \tag{5.1.61}$$

Видим, что, если $\pi_1^- < \pi_2^-$, то $\pi_1^+ > \pi^+_{10}$, где π^+_{10} — позитивное предпочтение альтернативы без учета негативных предпочтений.

Пусть теперь $\varphi(\pi) = \mathrm{a}\pi$. Тогда

$$F = a\left(\pi - \frac{1}{N}\right) \tag{5.1.62}$$

и каноническая функция предпочтений $\pi^+(\sigma_k, 2)$ имеет вид:

$$\pi^+(\sigma_k, 2) = \frac{e^{-\beta a\left(\pi_k^- - \frac{1}{N}\right) + \gamma U(\sigma_k, 2)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta a\left(\pi_j^- - \frac{1}{N}\right) + \gamma U(\sigma_j, 2)}} = \frac{e^{-\beta a \pi_k^- + \gamma U(\sigma_k, 2)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta a \pi_j^- + \gamma U(\sigma_j, 2)}}. \tag{5.1.63}$$

Мы видим, что если все $\pi_k^- = \dfrac{1}{N}$, то $\pi^+(\sigma_k, 2)$ зависит только от располагаемых полезностей ($e^{-\beta a\left(\pi_j^- - \frac{1}{N}\right)} = 1,\ \ \forall j \in \overline{1, N}$), если $\pi_k^- > \dfrac{1}{N}$ то $\pi_k^+ < \pi_{k0}^+$.

Рассмотрим упоминавшийся выше случай, когда негативные предпочтения учитываются только тогда, когда $\pi_k^- > \dfrac{1}{N}$. Это обстоятельство можно выразить формально приняв для функции F выражение

$$F = \theta\left(\pi_k^- - \frac{1}{N}\right)\left(\varphi\left(\pi_k^-\right) - \varphi\left(\frac{1}{N}\right)\right), \tag{5.1.64}$$

где $\theta(.)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0; \\ 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Из условия нормировки в этом случае найдем:

$$\pi^+(\sigma_k, 2) = \frac{e^{-\beta\theta\left(\pi_k^- - \pi^{*-}\right)\left[\varphi\left(\pi_k^-\right) - \varphi\left(\pi^{*-}\right)\right] + \gamma U(\sigma_k, 2)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta\theta\left(\pi_j^- - \pi^{*-}\right)\left[\varphi\left(\pi_j^-\right) - \varphi\left(\pi^{*-}\right)\right] + \gamma U(\sigma_j, 2)}}. \tag{5.1.65}$$

На третьем шаге цепочки аналогичным образом учитывается влияние предыдущих позитивных предпочтений на величину новых негативных предпочтений $\pi^-(\sigma_k, 3)$ ($t = 3$) и т. д.

В действительности можно допустить, что дело ограничивается 2-3 шагами, вдоль цепи (если за это время энтропии H^+_π и H^-_π удается понизить до значений меньших пороговых значений H_π^{*+}, H_π^{*-}, гарантирующих возможность принятия решения). Можно показать, что в этом случае конечный результат зависит от того, какие оценки (предпочтения) явились результатом первого шага: позитивные или негативные.

Еще одна возможность «организации» цепочки состоит в том, что на каждом шаге сравниваются предпочтения $\pi^+(\sigma_k, t)$ и $\pi^-(\sigma_k, t)$ и функция F имеет вид:

$$F = \varphi(\pi^-) - \varphi(\pi^+). \tag{5.1.66}$$

Каноническое распределение представляется в форме

$$\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)=\frac{e^{-\beta\left[\varphi\left(\pi_k^-\right)-\varphi\left(\pi_k^+\right)\right]+\gamma U\left(\sigma_k,t+1\right)}}{\sum\limits_{j=1}^{N}e^{-\beta\left[\varphi\left(\pi_j^-\right)-\varphi\left(\pi_j^+\right)\right]+\gamma U\left(\sigma_j,t+1\right)}}. \qquad (5.1.67)$$

Если, например, $\varphi(\pi) = \ln\pi$, тогда

$$\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)=\frac{\left(\pi^+\left(\sigma_k,t\right)\right)^{\beta}\left(\pi^-\left(\sigma_k,t\right)\right)^{-\beta}e^{\gamma U\left(\sigma_k,t+1\right)}}{\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\pi^+\left(\sigma_j,t\right)\right)^{\beta}\left(\pi^-\left(\sigma_j,t\right)\right)^{-\beta}e^{\gamma U\left(\sigma_j,t+1\right)}}. \qquad (5.1.68)$$

Это распределение обладает следующими свойствами: если $\pi^+(\sigma_j, t) = \pi^-(\sigma_j, t)$, ($\forall j\in\overline{1,N}$), то $\pi^+(\sigma_k, t)$ определяется только полезностями, существующими на данный момент ($t + 1$). Если к тому же все полезности одинаковы, то все $\pi^+\left(\sigma_k,t+1\right)=\dfrac{1}{N}$, ($\forall k\in\overline{1,N}$). Если $\pi^+(\sigma_j, t) > \pi^-(\sigma_j, t)$, то учет негативных предпочтений «усиливает» $\pi^+(\sigma_j, t + 1)$, и наоборот, когда $\pi^+(\sigma_j, t) < \pi^-(\sigma_j, t)$, учет $\pi^-(\sigma_j, t)$ «ослабляет» (уменьшает) предпочтение $\pi^+(\sigma_j, t + 1)$ для $\forall\beta$. Кроме того, очевидно, что учет предыдущих π^+ и π^- приводит к тому, что через них учитывается распределение полезностей в ретроспекции.

Подобная схема может быть реализована для предпочтений «отвергнуть» альтернативу υ^+ и υ^-. В частном случае предпочтение υ^+ либо υ^- можно получить пересчетом через предпочтения π_k, полагая например, для υ_k^+

$$\upsilon_k^+=\frac{1}{N-1}\left(1-\pi_k^+\right). \qquad (5.1.69)$$

При таком задании υ_k для них выполняется условие нормировки $\sum\limits_{k=1}^{N}\upsilon_k=1$, Однако, функция распределения υ^+ (или υ^-) в субъективном смысле существует самостоятельно и необязательно жестко связана с π^+ (или π^-), например, соотношением (5.1.69). Тогда следует допустить, что существует критерий Φ_υ, результатом экстремизации которого является распределение υ^+ (или υ^-), и, соответственно, энтропия элиминации альтернатив $H_{\upsilon+}$ или $H_{\upsilon-}$.

Не вдаваясь в подробности формирования и последовательного учета распределений υ^+ и υ^-:

$$\ldots\to\upsilon_t^-\to\upsilon^+_{t+1}\to\upsilon^-_{t+2}\to\ldots \qquad (5.1.70)$$

заметим, что возможность реализации смешанной цепочки

$$\ldots\to\pi_t^-\to\upsilon^+_{t+1}\to\pi^-_{t+2}\to\ldots \qquad (5.1.71)$$

либо подобных смешанных цепочек представляется проблематичной.

Более реалистичным выглядит предположение, что цепочки, составленные из π^+, π^- и υ^+, υ^- формируются параллельно (не пересекаясь), например:

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \to \pi_t^- \to \pi_{t+1}^+ \to \pi_{t+2}^- \to \ldots \\ \ldots \to \upsilon_t^- \to \upsilon_{t+1}^+ \to \upsilon_{t+2}^- \to \ldots \end{array}\right\} \qquad (5.1.72)$$

а взаимодействие осуществляется через пороговые значения соответствующих энтропий и пороговые значения предпочтений.

Будем следить, как с течением времени изменяются энтропии $H^+_\pi(t)$, $H^-_\pi(t)$, $H^+_\upsilon(t)$, $H^-_\upsilon(t)$. Пусть для заданного субъекта существуют пороговые значения энтропий H_π^{+*}, H_π^{-*}, H_υ^{+*}, H_υ^{-*}.

Предполагается, что, если текущая энтропия в определенный момент становится меньше соответствующего порогового значения, происходит скачкообразное изменение проблемно-ресурсной ситуации: скачкообразное изменение распределения предпочтений, перераспределение ресурсов; событие, которое мы выше называли «выбором цели», то есть одной или нескольких альтернатив и, соответственно, проблем, на разрешение которых направляются ресурсы, передача полезностей, если субъект является членом группы и т. д. Для каждого из перечисленных событий, скорее всего, имеются свои пороговые значения энтропий. Так, например, условие

$$\mathbf{H^+_\pi(t) < H_\pi^{+*}}, \qquad (5.1.73)$$

соответствует принятию альтернативы в качестве «цепи», на основе позитивного анализа, тогда как условие

$$\mathbf{H^-_\pi(t) < H_\pi^{-*}}, \qquad (5.1.74)$$

соответствует решению о принятии некоторой альтернативы на основе негативного анализа. Условия

$$\mathbf{H^+_\upsilon(t) < H_\upsilon^{+*}} \text{ и } \mathbf{H^-_\upsilon(t) < H_\upsilon^{-*}} \qquad (5.1.75)$$

являются «сигналами» о принятии решения «отвергнуть» определенные альтернативы. Заметим, что, если мы работаем на основе допущения о расширенном множестве альтернатив, то последнее означает, что предпочтения отвергаемой альтернативы обращается в нуль скачкообразно.

Заметим также, что как в случае совместного рассмотрения условий (5.1.73) и (5.1.74) так и условий (5.1.75) наиболее предпочтительные (принимаемые в качестве цепи) альтернативы не обязательно совпадают. Более того, в общем случае они, наверняка, не совпадают.

Возникает необходимость найти компромисс.

Условия (5.1.73), (5.1.74) и (5.1.75) не решают проблему выбора на множестве S_a, они лишь определяют момент, когда этот выбор может происходить. Эти условия следует рассматривать лишь как «необходимые» условия принятия решения. Выполнение неравенств, приведенных выше, наступает не одновременно. Можно предположить, что выбор альтернативы в качестве цели или отбрасывание альтернативы происходит на основе того распределения предпочтений, для которого соответствующее неравенство выполняется раньше. Во всяком случае, анализ и обоснованность выбора не полны, если он осуществляется с учетом только позитивных или только негативных оценок.

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис.5.1.4.

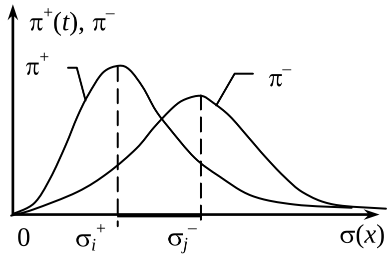


Рис.5.1.4

В этом случае σ_i^+ наилучшая альтернатива на основе позитивного анализа, σ_j^- наилучшая альтернатива с точки зрения негативного анализа.

Пусть при этом условия (5.1.73) и (5.1.75) выполнены. Каким образом в этом случае выбрать компромиссное решение σ^*: $\sigma_i^+ < \sigma^* < \sigma_j^-$.

Одна из возможных схем компромисса использует тот же прием, который мы применили при агрегировании предпочтений в группе. Пусть $\xi_1 = \alpha$ — «рейтинг» для данного субъекта результатов позитивного анализа, а $\xi_2 = 1 - \alpha$ — «рейтинг» результатов негативного анализа.

Тогда агрегированное предпочтение примем в виде

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_k, t) = \alpha\pi^+(\sigma_k, t) + (1 - \alpha)\pi^-(\sigma_k, t)}. \qquad (5.1.76)$$

Приведенные ранее схемы постепенной адаптации предпочтений π^+ и π^- в результате последовательного анализа отличаются от варианта (5.1.76).

Кроме энтропийного критерия в виде приведенных неравенств следует предположить, что в каждом случае предпочтения наилучшей альтернативы должны также преодолевать определенные барьеры, то есть должны соответственно, быть выполнены условия:

$$\boldsymbol{\pi^+(\sigma_k, t)} > \pi^{+*};$$

$$\boldsymbol{\pi^-(\sigma_k, t)} > \pi^{-*};$$

$$\boldsymbol{\upsilon^+(\sigma_k, t)} > \upsilon^{+*};$$

$$\boldsymbol{\upsilon^-(\sigma_k, t)} > \upsilon^{-*},$$

где π^*, υ^* близки к единице. Ввиду условий нормировки это означает, что предпочтения других альтернатив будут близки к нулю. Упомянутые пороги для предпочтений, как и пороги для энтропий можно рассматривать как характеристики индивидуальной психики субъекта.

Рассмотрим некоторые модели эндогенной динамики на примере предпочтений I рода. Если, как и ранее, отождествлять σ_k с количественными экзогенными характеристиками альтернатив, то уравнения экзогенной динамики (5.1.10), или, уравнения типа (5.1.17), в правых частях содержат предпочтения $\pi(\sigma_k, \alpha, \beta, \ldots)$.

Последние, в свою очередь, зависят от эндогенных параметров α, β, … Под *моделью эндогенной динамики* мы понимаем определенную систему уравнений, определяющую изменение с течением времени этих параметров. «Здравый смысл» подсказывает, что эндогенные параметры в большинстве случаев меняются мед-

ленно, что можно связать, например, с возрастным изменением приоритетов, эволюционным изменением политических убеждений, этических принципов. Исключение составляют случаи форс-мажорных ситуаций, когда принимаются радикальные решения самим субъектом, случаи, связанные со спонтанной неустойчивостью психики. Надо полагать, что эндогенные структурные параметры не зависят на прямую от предпочтений. Однако, они наверняка зависят от экзогенных факторов, которые в силу уравнений типа (5.1.10), (5.1.17), в свою очередь, зависят от предпочтений. Учитывая сказанное, удобно придать модели эндогенной динамики вид системы дифференциальных уравнений. Это дает возможность легко варьировать структуру правых частей уравнений, начальные условия, прослеживать влияние на ход решений численных значений структурных параметров.

Для канонического распределения, зависящего от одного эндогенного параметра β:

$$\pi_i = \pi(\sigma_i) = \frac{e^{\pm\beta x_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\pm\beta x_i}}$$

имеем

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\beta\left(\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{N}\dot{x}_j\pi_j\right)\pi_i \mp \dot{\beta}\left(x_i - \sum_{j=1}^{N}x_j\pi_j\right)\pi_i \tag{5.1.77}$$

Экзогенные переменные описываются такими же уравнениями как в модели (5.1.17).

Предположим, что параметр β изменяется с течением времени в соответствии с уравнением

$$\frac{d\beta}{dt} = h(\beta, x_1, \ldots, x_N, t). \tag{5.1.78}$$

Уравнения (5.1.77) обеспечивают выполнение условия нормировки и, в частности, условия $\sum_{i=1}^{N}\dot{\pi}_i = 0$ тождественно.

Систему уравнений динамики активной системы в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\pi_i\left[\left(x_i - \sum_{j=1}^{N}x_j\pi_j\right)h(\beta, x_1, \ldots, x_N, t) + \right. \tag{5.1.79}$$

$$\left. +\beta\left(f_i(x_1, \ldots, x_N, \ldots, \pi_1, \ldots, \pi_N, t) - \sum_{j=1}^{N}\pi_j f_j(x_1, \ldots, x_N, \ldots, \pi_1, \ldots, \pi_N, t)\right)\right];$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_N, \ldots, \pi_1, \ldots, \pi_N, t); \tag{5.1.80}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = h(\beta, x_1, \ldots, x_N, t). \tag{5.1.81}$$

Для канонического распределения, зависящего от двух эндогенных параметров α и β:

$$\pi_i = \pi(\sigma_i) = \frac{x_i^{\alpha} e^{\pm\beta x_i}}{\sum_{j=1}^{N} x_i^{\alpha} e^{\pm\beta x_i}}$$

находим следующее уравнение:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pi_i \left[\left(\ln x_i - \sum_{j=1}^{N} \ln x_j \pi_j \right) \dot{\alpha} + \left(\dot{x}_i x_i^{-1} - \sum_{j=1}^{N} \dot{x}_j x_j^{-1} \pi_j \right) \alpha - \right.$$

$$\left. \pm \left(x_i - \sum_{j=1}^{N} x_j \pi_j \right) \dot{\beta} \pm \left(\dot{x}_i - \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_j \pi_j \right) \beta \right], \quad (x_i \geq 0)$$

Систему уравнений динамики активной системы с учетом зависимости от времени эндогенных параметров (в данном случае α и β) запишем в виде:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pi_i \left[\left(\ln x_i - \sum_{j=1}^{N} \ln x_j \pi_j \right) g(\alpha, \beta, x_1, ..., x_N, t) \pm \right.$$

$$\pm \left(x_i - \sum_{j=1}^{N} x_j \pi_j \right) h(\alpha, \beta, x_1, ..., x_N, t) + \left(x_i^{-1} \alpha \pm \beta \right) f_j (x_1, ..., x_N, ..., \pi_1, ..., \pi_N, t) -$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N} \left(x_j^{-1} \alpha \pm \beta \right) \pi_j f_j (x_1, ..., x_N, ..., \pi_1, ..., \pi_N, t) \right]; \qquad (5.1.82)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i (x_1, ..., x_N, ..., \pi_1, ..., \pi_N, t); \qquad (5.1.83)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = g(\alpha, \beta, x_1, ..., x_N, t); \qquad (5.1.84)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = h(\alpha, \beta, x_1, ..., x_N, t). \qquad (5.1.85)$$

В частном случае $N = 2$: $S_a \to (\sigma_1, \sigma_2)$ эта система уравнений принимает вид:

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pi_1 \pi_2 \left[(\ln x_2 - \ln x_1) g + (x_1 - x_2) h - \left(x_2^{-1} \alpha \pm \beta \right) f_2 + \left(x_1^{-1} \alpha \pm \beta \right) f_1 \right];$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2, t); \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2, t);$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = g(\alpha, \beta, x_1, x_2, t); \quad \frac{d\beta}{dt} = h(\alpha, \beta, x_1, x_2, t).$$

Как для экзогенных параметров x_i так и для эндогенных параметров могут использоваться другие модели. Например, α и β могут быть координатами аттракторов, в частности, аттракторов Лоренца, что позволило бы моделировать возбужденные состояния психики.

Не исключается возможность того, что динамика эндогенных параметров может зависеть от индивидуальных характеристик, субъективной энтропии, коэффициентов корреляции предпочтений.

Изменение α и β в пределах $[0, +\infty)$ может приводить к равномерному распределению с максимальной энтропией, либо к сингулярному распределению, когда только одно из предпочтений равно 1, все остальные — нулю.

Если $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, то распределение $\pi(\sigma_i)$ стремится к равномерному, то есть к состоянию полного безразличия — множество S_a обращается в один класс эквивалентности, если $\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$ или $\alpha \to \infty$, $\beta \to 0$, то распределение $\pi(\sigma_i)$ при условии, что не все x_i равны между собой, стремится к сингулярному, когда все предпочтения кроме одного равны нулю, а это единственное равно единице. Если все x_i в точности одинаковы, распределение равномерно, однако неустойчиво по отношению к любому малому нарушению равенства x_i друг другу.

Структурные параметры α, β, …, в соответствии с принятой гипотезой о генезисе канонических предпочтений из вариационного принципа, мы вправе рассматривать как характеристики психики. Как уже было сказано, эти параметры в спокойных условиях испытывают медленный временной дрейф, который обусловлен возрастными изменениями, либо спонтанными изменениями в результате действия таких факторов как «усталость», «привыкание», «забывание» и других.

В иных обстоятельствах возможны «взрывные» изменения структурных параметров, приводящие к явлениям биффуркационного типа.

Если внешняя (экзогенная) обстановка стабильна, что можно выразить в виде условий $x_i = \text{const}$, то из выше приведенных уравнений (5.1.82)—(5.1.85) следуют уравнения собственно эндогенной динамики, то есть динамики предпочтений, обусловленной изменением исключительно эндогенных факторов. Дополнительно к тому, что уже было сказано, включим в число аргументов функции $\pi(\sigma_i)$, количественные меры этических императивов $\pi(I_s)$.

Пусть $\pi(\sigma_i) = \pi(x_i, \alpha, \beta, \ldots, \pi(I_s), \ldots)$; $I_s \in S_I^L$. Экзогенная мера может реализоваться как функция ресурсов, полезности, …, например

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{\bar{\boldsymbol{r}}_i}{1-\bar{\boldsymbol{r}}_i};\quad \bar{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i)}{\boldsymbol{R}^{disp}(\sigma_i)};$$

В рассмотренных моделях предпочтений нет непосредственной зависимости от уровня неопределенности, напряженности конфликта и других общих характеристик ситуации, однако их опосредствованное влияние через зависимость от них эндогенных параметров не исключается.

Пусть экзогенные параметры x_i фиксированы, тогда

$$\frac{d\pi(\sigma_i)}{dt} = \frac{\partial\pi(\sigma_i)}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\pi(\sigma_i)}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + \frac{\partial\pi(\sigma_i)}{\partial\pi(I_s)}\frac{d\pi(I_s)}{dt} + \ldots \qquad (5.1.86)$$

Если субъект имеет «твердые убеждения», то следует считать, что $\pi(I_s)$ = const. В условиях интенсивного манипулирования сознанием, «целью» являются именно «стабильные» императивы (этические, политические, культурные). Оставляя эту тему для дальнейшего, положим сначала, что

$$\frac{d\pi\left(I_s\right)}{dt} = 0.$$

Из (5.1.82)—(5.1.86) получим вариант модели эндогенной динамики, не учитывающую эффекты, связанные с изменением «стабильных императивов»:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pi_i\left[\left(\ln x_i - \sum_{j=1}^{N} \ln x_j \pi_j\right) g\left(\alpha, \beta, x_1, \ldots, x_N, t\right) \pm \right. \tag{5.1.87}$$

$$\left. \pm \left(x_i - \sum_{j=1}^{N} x_j \pi_j\right) h\left(\alpha, \beta, x_1, \ldots, x_N, t\right)\right];$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = g\left(\alpha, \beta, x_1, \ldots, x_N, t\right); \tag{5.1.88}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = h\left(\alpha, \beta, x_1, \ldots, x_N, t\right). \tag{5.1.89}$$

Уравнения (5.1.88), (5.1.89), как и аналогичные уравнения, в предыдущих моделях носят феноменологический характер. В настоящее время нет возможности предложить какой-либо достаточно общий принцип, который позволил бы установить обоснованную структуру этих уравнений. Однако на качественном уровне можно дать определенную интерпретацию для структурных параметров.

Так, если перед β в выражении для $\pi(\sigma_i)$ принимается знак «–», то параметр β «отвечает» за убывающий характер предпочтения с ростом «стоимости» x_i и, следовательно, преобладание «осторожности» над соображениями престижа. Параметр α, наоборот, определяет возрастающую зависимость π_i от x_i и престижных соображений. Компромисс двух противоборствующих тенденций, выражается в том, что функция $\pi_i(\alpha, \beta)$ имеет максимум при $x_i^* = \dfrac{\alpha}{\beta}$. В том случае, если в содержательном смысле альтернативы $\sigma_i \in S_a$ связаны с безопасностью субъекта и соответствующими затратами, то параметры α и β отражают конкуренцию требований безопасности и экономии.

Если необходимо учесть влияние изменения этических императивов (точнее – их значимостей $\pi(I_s)$), то вместо уравнения (5.1.87) следует использовать уравнение:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pi_i\left[\left(\ln x_i - \sum_{j=1}^{N} \ln x_j \pi_j\right) g \pm \left(x_i - \sum_{j=1}^{N} x_j \pi_j\right) h + \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi\left(I_s\right)} \frac{d\pi\left(I_s\right)}{dt}\right]. \tag{5.1.90}$$

Рассмотрим некоторые возможные модели, определяющие изменение эндогенных переменных α, β, …Простейшей является линейная модель:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + v\left(x_1,\dots,x_N,t\right), \\ \frac{d\beta}{dt} &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + w\left(x_1,\dots,x_N,t\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.1.91)$$

Решение соответствующей однородной системы может быть колебательным, либо апериодическим в зависимости от собственных значений матрицы

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Влияние внешних условий здесь сосредоточено в возмущающих функциях v и w. Если v и w рассматривать как «возмущающие силы», то по аналогии с физикой можно ожидать появления режимов «биения» или «резонанса».

Максимально простая модель (5.1.91), используемая совместно с уравнениями для предпочтений, позволяет на качественном уровне смоделировать ряд ситуаций. Так, можно представить себе, что увеличение престижности более дорогих автомобилей или жилья в качестве отклика в индивидуальной психике повлечет рост отношения $\frac{\alpha}{\beta}$. Если решение $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$ ассимптотически устойчиво, то при затухающих v и w, распределение предпочтений стремится к равномерному (но не к безразличию), которое характеризуется повышенным психическим напряжением.

Однако возможности линейной модели ограничены. Проявления психики имеют явно нелинейный характер, поэтому представляется естественным в качестве инструмента моделирования обратиться к нелинейным математическим объектам. Такими объектами, в частности, являются аттракторы, например, хорошо известные «Аттрактор Лоренца» и «брюселятор».

5.1.7. Моделирование динамики предпочтений первого рода и экзогенных процессов

5.1.7.1. Динамика предпочтений потребителя с экзогенной моделью Вальраса-Леонтьева

Рассмотрим примеры совместного моделирования динамики предпочтений первого рода и экзогенной динамики при наличии взаимного влияния. В качестве первого примера возьмем активную систему, включающую в качестве субъекта потребителя.

В качестве «экзогенной оболочки» выступает экономическая система, описываемая динамической моделью Вальраса-Леонтьева, в которой переменными являются выпуски товаров x_i и факторов r_j, а также цены p_i и v_j — соответственно. Пусть x_i — общий выпуск товара i, c_i — конечный спрос на этот товар, r_j — суммарное предложение фактора j, p_i — цена единицы товара x_i, v_j — цена единичного количества фактора. Динамическая система Вальраса-Леонтьева имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p},1)-\boldsymbol{x};\\&\boldsymbol{K}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{Bx}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},1);\\&\boldsymbol{M}\frac{d\boldsymbol{x}^T}{dt}=\boldsymbol{p}^T-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Bv}^T-\boldsymbol{b}_{m+1},\end{aligned}\right\}\tag{5.1.92}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, n — вектор-столбец выпусков, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, n — вектор-столбец цен товаров, $r = (r_1, \ldots, r_m)$ — производственные факторы, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ — сектор-столбец цен факторов, существует еще один фактор r_{m+1} и его цена $v_{m+1} = 1$, которая называется ценой — измерителем денег. Она считается постоянной и равной единице.

В связи с моделью Вальраса-Леонтьева в [139] делается ряд предположений, конкретизирующих элементы модели и поясняющие ее смысл. В частности матрица A удельных затрат товаров на воспроизводство является неотрицательной, неразложимой и удовлетворяющей условиям теоремы Хоукинса-Саймона [139]: все главные миноры детерминанта $\det(I - A)$, где I — единичная матрица, положительны. Если к тому же конечный спрос $c \geq 0$, то это необходимое и достаточное условие, чтобы решение x было строго положительным в статике.

В динамике этого недостаточно для положительности решения системы x, p,..

В рассматриваемой ниже задаче мы максимально упростим ситуацию. Откажемся от разделения продукции на товары и факторы. Будем говорить о «выпусках» x_i и ценах p_i, измеритель денег в этом случае можно опустить. Предположим, что в поле внимания субъекта (покупателя) попало два товара. Таким образом, есть две альтернативы: σ_1 и σ_2 и предпочтения определяются только ценами товаров (это соответствует налагаемому предположению, что полезности обеих товаров одинаковы). Обозначим цену единичного количества товара k через p_k, и рассмотрим две модели функции предпочтений потребителя (consumer):

$$\pi_{con}(\sigma_k)=\frac{e^{-\beta p_k}}{e^{-\beta p1}+e^{-\beta p2}}\quad\text{и}\quad\pi_{con}(\sigma_k)=\frac{p_k^{\alpha}e^{-\beta p_k}}{p_1^{\alpha}e^{-\beta p1}+p_2^{\alpha}e^{-\beta p2}}.$$

В первом случае $\dfrac{f'(\sigma_k)}{f(\sigma_k)}=-\beta$, во втором $\dfrac{f'(\sigma_k)}{f(\sigma_k)}=\alpha p_k^{-1}-\beta$ (см. главу 3).

Во втором случае в точке $p_k = 0$ имеется особенность. Поскольку функции $\pi(\sigma_k)$ ограничены и, если ограничены правые части уравнений экзогенной оболочки, то в точке $p_k = 0$ скорость изменения предпочтений становится бесконечной.

Второй случай интересен тем, что, как уже отмечалось ранее, он соответствует определенному типу психики, когда «дешевое» благо менее предпочтительно, чем благо, имеющее более высокую стоимость, соответствующую возможностям субъекта, привлекательность очень «дорогих» благ при этом снижается по мере роста цены.

Существует «оптимальная» цена, которую выбирает субъект даже при слабой зависимости цены от объективной полезности. Так, например, если вы приобретае-

те лекарство для близкого вам человека, то из двух лекарств, примерно одинаковой эффективности при наличии возможности вы купите более дорогое. Известна история, когда в одном из советских магазинов в Америке была выставлена очень хорошая, детская игрушка — кукла по очень низкой для американцев цене — 5 долларов. Она практически не продавалась. Администрация пригласила местного эксперта, и он посоветовал поставить цену 50 долларов. Кукла был раскуплена в короткий срок. На выбор более дорогого блага влияют соображения престижа, моды и т. д.

Запишем модель активной системы в рассматриваемом частном случае. Уравнения для предпочтений, в предположении, что реализуется каноническое распределение второго типа как более общее, принимают вид:

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pi_1\pi_2\left[\left(\alpha\frac{1}{p_1} - \beta\right)\dot{p}_1 - \left(\alpha\frac{1}{p_2} - \beta\right)\dot{p}_2\right]; \tag{5.1.93}$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = \pi_1\pi_2\left[\left(\alpha\frac{1}{p_2} - \beta\right)\dot{p}_2 - \left(\alpha\frac{1}{p_1} - \beta\right)\dot{p}_1\right]. \tag{5.1.94}$$

В случае когда имеется только два товара x_1 и x_2 и из условия нормировки следует, что

$$\frac{d\pi(\sigma_2)}{dt} = -\frac{d\pi(\sigma_1)}{dt}.$$

и $\pi(\sigma_2) = 1 - \pi(\sigma_1)$, значение $\pi(\sigma_2)$ можно определить по этой формуле не интегрируя уравнение (5.1.94).

Мы делаем предположение, что конечный спрос линейно зависит от предпочтения:

$$c_1(\pi(\sigma_1)) = c_1\pi(\sigma_1);$$

$$c_2(\pi(\sigma_2)) = c_2\pi(\sigma_2),$$

где c_1 и c_2 — структурные параметры, «выравнивающие» размерности.

В качестве уравнений «экзогенной оболочки» принимаются уравнения адаптированной модели Вальраса-Леонтьева:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{1}{h_1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1\pi(\sigma_1) - x_1\right); \tag{5.1.95}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{h_2}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2\pi(\sigma_2) - x_2\right); \tag{5.1.96}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{m_1}\left(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 - p_1 + a_1w_1 + q_1\right); \tag{5.1.97}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{m_2}\left(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 - p_2 + a_2w_2 + q_2\right). \tag{5.1.98}$$

Здесь a_{ij} — элементы матрицы A; h_1, h_2 — элементы матрицы H; m_1, m_2 — элементы матрицы M; w_1, w_2 — заработная плата производителя на единицу произведенного товара, q_1, q_2 — закладываемая прибыль от реализации единицы произведенного товара. Смысл уравнений (5.1.95), (5.1.96) состоит в том, что, если производство товара x_i превосходит его потребление в единицу времени, то есть имеется избыточный товар, цена на него падает. Уравнения (5.1.97), (5.1.98) отражают тот факт, что в условиях, когда затраты на производство превышают цену единицы товара, количество производимого товара должно уменьшаться.

В статике условий теоремы Хоукинса-Саймона достаточно, чтобы все x_i и p_i были неотрицательными величинами. В динамическом варианте, несмотря на выполнение этих условий, при определенных комбинациях структурных параметров, в некоторые моменты времени и x_i и p_i могут становиться отрицательными, что противоречит «физическому» смыслу этих величин.

Для того чтобы откорректировать это несовершенство модели Вальраса-Леонтьева, которое в [139] компенсируется введением, дополнительного предположения 9 (стр.49), предлагается «внесистемная» поправка: если выпуск товара обращается в нуль и при этом его цена меньше издержек, то выпуск полагается нулевым и далее.

Это обстоятельство можно реализовать в вычислительном алгоритме в виде дополнительных логических условий. Подобный метод, однако, является слишком «силовым». Было бы более естественным каким-либо образом модифицировать саму систему уравнений так, чтобы выход x_i и p_i в область отрицательных значений не допускается. Этого можно добиться, вводя в уравнение Вальраса-Леонтьева «барьерные функции», создающие непроницаемую границу для переменных. Такая функция «обнуляет» производную (скорость изменения переменной) в непосредственной близости от заданной границы. Имеется множество вариантов барьерных функций.

Выбор конкретной функции связан с условием, чтобы ее влияние на поведение решения вдали от границы было несущественным. Этого не всегда удается достигнуть. Строго говоря, барьерная функция должна отражать особенности поведения субъекта в тонком «слое», соответствующем очень низким ценам, либо очень малым выпускам.

Исследования экономической динамики в упомянутом тонком «пограничном слое» по-видимому, представляет самостоятельную задачу, которая не является предметом настоящей работы. Наша задача состоит в том, чтобы продемонстрировать влияние предпочтений.

Приведем некоторые результаты моделирования, процесса с уравнениями Вальраса-Леонтьева (5.1.95)—(5.1.98) в качестве экзогенной модели и уравнениями (5.1.93), (5.1.94) описывающими динамику предпочтений. Переобозначим переменные $\pi(\sigma_1) = Y_0$, $\pi(\sigma_2) = Y_1$, цена первого товара Y_2, цена второго товара Y_3, количество первого товара Y_4, количество второго товара Y_5. В новых переменных система уравнений имеет вид:

$$D(t,Y)=\begin{bmatrix} Y_0Y_1\left[\frac{1}{h_1}\left(\alpha\frac{1}{Y_2}-\beta\right)\left(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4\right)-\frac{1}{h_2}\left(\alpha\frac{1}{Y_3}-\beta\right)\left(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_1Y_0-Y_5\right)\right] \\ Y_0Y_1\left[\frac{1}{h_2}\left(\alpha\frac{1}{Y_3}-\beta\right)\left(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_2Y_1-Y_5\right)-\frac{1}{h_1}\left(\alpha\frac{1}{Y_2}-\beta\right)\left(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4\right)\right] \\ \frac{1}{h_1}\left(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4\right)\left(\frac{4}{\pi}atan\left(e^{4Y_2}\right)\right) \\ \frac{1}{h_2}\left(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_2Y_1-Y_5\right)\left(\frac{4}{\pi}atan\left(e^{4Y_3}\right)\right) \\ -\frac{1}{m_1}\left(a_{11}Y_2+a_{21}Y_3-Y_2+a_1w_1+q_1\right)\left(\frac{4}{\pi}atan\left(e^{4Y_4}\right)\right) \\ -\frac{1}{m_2}\left(a_{12}Y_2+a_{22}Y_3-Y_3+a_2w_2+q_2\right)\left(\frac{4}{\pi}atan\left(e^{4Y_5}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (5.1.99)$$

где $D(t, Y)$ — вектор производных от вектора $Y = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$. Предположим что параметры, содержащиеся в правых частях уравнений, принимают значения:

$a_{11} = 0{,}7$; $a_{22} = 0{,}3$; $a_{12} = 0{,}3$; $a_{21} = 0{,}1$; $m_1 = 100$; $m_2 = 100$; $h_1 = 10$; $h_2 = 10$;

$c_1 = 3$; $c_2 = 3$, $w_1 = 4$; $w_2 = 4$; $\beta = 0{,}03$; $q_1 = 1$; $q_2 = 2$; $a_1 = 1$; $a_2 = 1$.

Положим $\alpha = 0{,}01$.

Выберем следующие начальные условия: при $t = 0$ $Y_0 = 0{,}5$; $Y_1 = 0{,}5$ (предпочтения в начальный момент равны); $Y_2 = 60$; $Y_3 = 60$; $Y_4 = 30$; $Y_5 = 30$. В начальный момент цены одинаковы, выпуски товаров также одинаковы. В уравнениях для цен и выпусков в правых частях введены барьерные функции, которые удерживают соответствующие переменные в области положительных значений: $(\frac{4}{\pi}atg\left(e^{4Y_i}\right))$. В соответствии с условием нормировки предпочтений $\pi(\sigma_1) = Y_0$ и $\pi(\sigma_2) = Y_1$, являются зеркальными отображениями друг друга, что видно из рис.5.1.5.

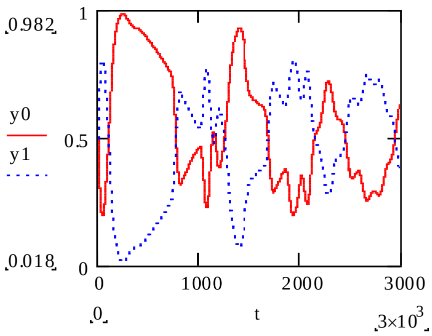


Рис. 5.1.5

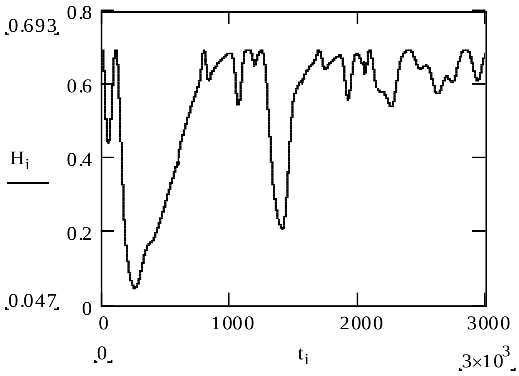


Рис. 5.1.6

Зависимость цен и выпусков от времени показана на рис.5.1.7. На этих же рисунках приведены соответствующие предпочтения потребителя. Видим, что и цены и выпуски удерживаются в положительной области. На некоторых участках и выпуски и цены становятся близкими к нулю. Практически это значит, что произ-

водство почти прекращается. Через некоторое время дефицит приводит к быстрому росту цен, за чем следует увеличение (или возобновление) производства, причем выпуски отстают от цен «по фазе», что вполне отвечает общим представлениям. Заметим, что существенную роль в распределении цен и выпусков играют предпочтения, которые учитываются в уравнениях Вальраса-Леонтьева через конечный спрос.

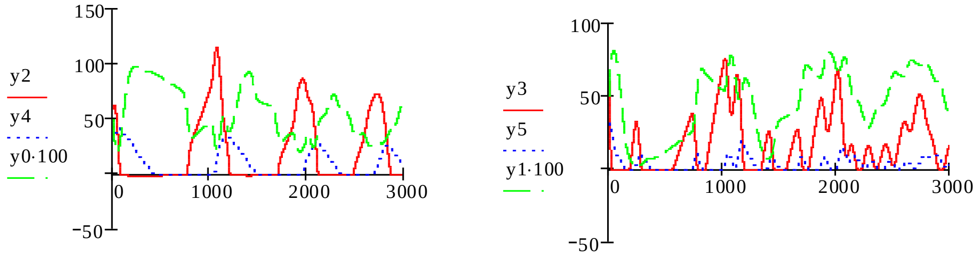


Рис.5.1.7

На рис.5.1.8 показаны траектории в фазовых пространствах.

Следующая серия графиков показывает, что введение барьерной функции не является формально-математической операцией. Незначительное изменение структуры барьерной функции может повлечь изменение решения.

В данном случае изменение барьерной функции (см. правые части уравнений) таково, что «непроницаемая» граница как бы сдвигается вверх от оси — в область положительных значений, чтобы исключить любую возможность появления отрицательных значений и, кроме того, исключить «полную приостановку» производства товаров. Значение эндогенного параметра α сохранено (α = 0,01).

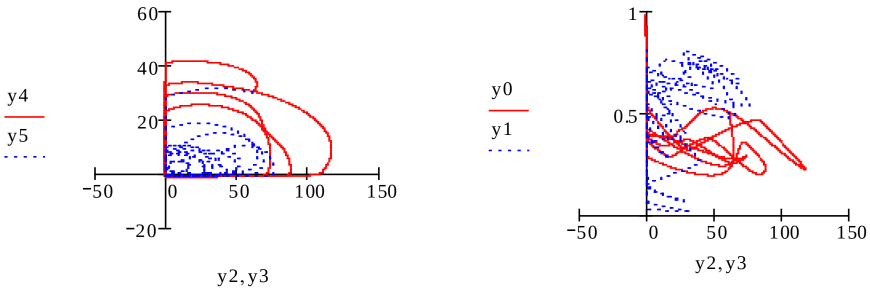


Рис. 5.1.8

Система уравнений с модифицированной барьерной функцией имеет вид:

$$D(t,Y)=\begin{bmatrix} Y_0Y_1\left[\dfrac{1}{h_1}\left(\alpha\dfrac{1}{Y_2}-\beta\right)(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4)-\dfrac{1}{h_2}\left(\alpha\dfrac{1}{Y_3}-\beta\right)(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_1Y_0-Y_5)\right] \\ Y_0Y_1\left[\dfrac{1}{h_2}\left(\alpha\dfrac{1}{Y_3}-\beta\right)(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_2Y_1-Y_5)-\dfrac{1}{h_1}\left(\alpha\dfrac{1}{Y_2}-\beta\right)(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4)\right] \\ \dfrac{1}{h_1}(a_{11}Y_4+a_{12}Y_5+c_1Y_0-Y_4)\left(\dfrac{2}{\pi}atan\left(e^{4Y_2-5}\right)\right) \\ \dfrac{1}{h_2}(a_{21}Y_4+a_{22}Y_5+c_2Y_1-Y_5)\left(\dfrac{2}{\pi}atan\left(e^{4Y_3-5}\right)\right) \\ -\dfrac{1}{m_1}(a_{11}Y_2+a_{21}Y_3-Y_2+a_1w_1+q_1)\left(\dfrac{2}{\pi}atan\left(e^{4Y_4-5}\right)\right) \\ -\dfrac{1}{m_2}(a_{12}Y_2+a_{22}Y_3-Y_3+a_2w_2+q_2)\left(\dfrac{2}{\pi}atan\left(e^{4Y_5-5}\right)\right) \end{bmatrix}$$

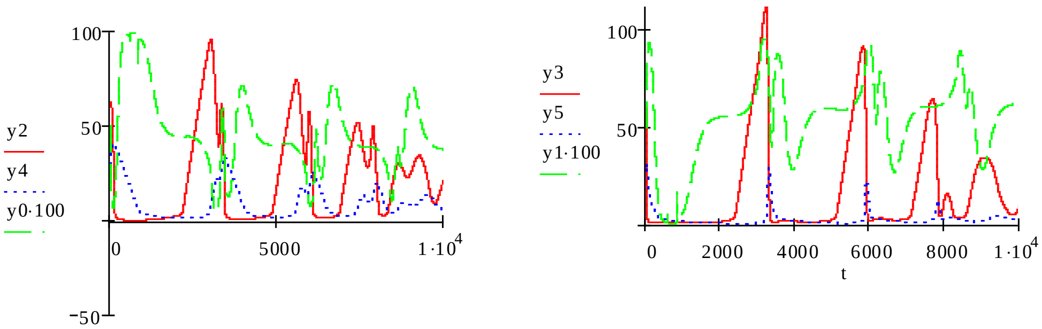


Рис.5.1.9

Фазовые портреты, предпочтения и энтропия показаны на рис.5.1.10.

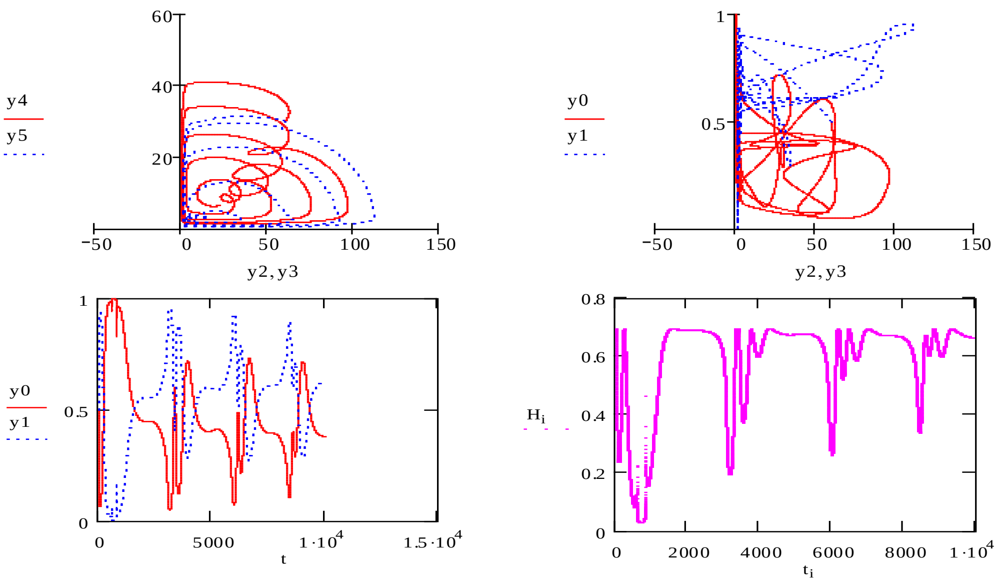


Рис. 5.1.10

На рис.5.1.11 и рис.5.1.12 показано поведение цен и выпусков, полученное в результате интегрирования уравнений Вальраса-Леонтьева без учета влияния динамики предпочтений.

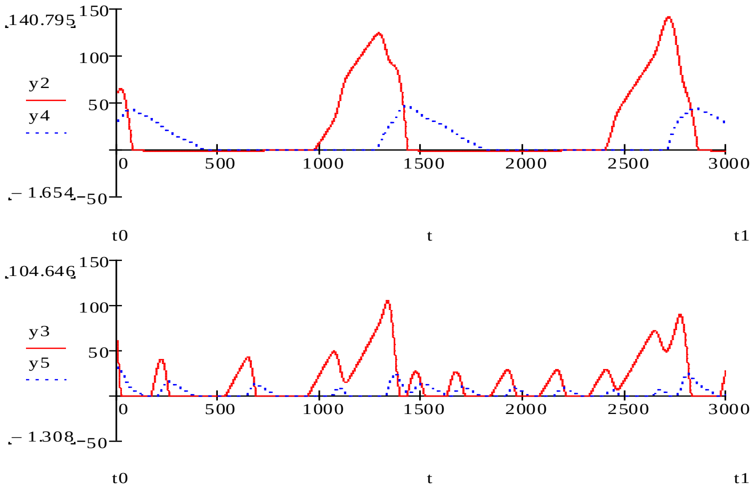


Рис. 5.1.11

Легко заметить существенные отличия от предыдущих результатов. Это говорит о том, что, если верны предположения о формировании предпочтений и канонические распределения в основном правильно отражают свойства психики, то их учет в экономической динамике необходим и экономические прогнозы, основанные на такой технологии, могут существенно отличаться от прогнозов, которые получены на основе «чисто экономических моделей», подобных модели Вальраса-Леонтьева. Этот вывод имеет выборочный характер. Во многих экономических моделях психология потребителя и производителя учитывается опосредованно. Так, в той же модели Вальраса-Леонтьева психологический фактор учитывается через предположение о зависимости скорости изменения цен и выпусков от «разбаланса» спроса и предложения. Тем не менее, учет динамики канонических предпочтений представляется перспективным направлением развития исследований экономической динамики.

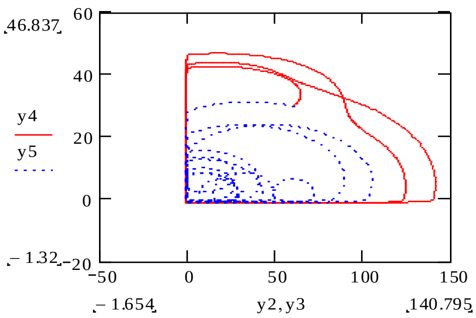


Рис. 5.1.12

5.2. Модель формирования предпочтений, включающая эмоциональную компоненту

5.2.1. Некоторые сведения об эмоциях

Модели предпочтений, предложенные в [83], получены в результате использования принципа максимума энтропии Джейнса-Гиббса [282, 283]. В [83] принцип

Джейнса-Гиббса был интерпретирован в терминах субъективного анализа. В частности была введена субъективная информация и субъективная энтропия. В применении к задаче построения моделей предпочтений энтропийный принцип рассматривается как исходный постулат, и хотя имеется целый ряд эвристических соображений, свидетельствующий в пользу его применимости, остается неудовлетворенность, обусловленная отсутствием достаточных «экспериментальных обоснований» и некоторой прямолинейности подхода. В данном случае автор стремится развить энтропийную теорию, вводя в нее факторы, которые оставались в тени на первом этапе разработки субъективного анализа и, возможно, открывающие дополнительный путь к получению экспериментальных данных. При этом желательно было бы сохранить цельность и единство этого нового раздела субъективного анализа имея ввиду использование субъективной энтропии в качестве главного элемента построения вариационного принципа оптимальности.

В частности, таким фактором следует считать «эмоции», которые очевидным образом принимают участие в формировании «выходного продукта» – предпочтений, но пока не нашли отражения в использованных ранее теоретических схемах.

Предпринимается попытка восполнить этот пробел. Предлагается логически непротиворечивая схема включения эмоций в процесс формирования предпочтений. Эта схема находится в соответствии с принятыми трактовками эмоций в психологии [171, 172, 319]. Существует также аналогия с моделями процессов, происходящих в искусственных нейронных сетях. [190] – Сеймом Хайкин «Нейронные сети» 2008 г.

Эмоции в отличие от предпочтений допускают, хотя и косвенное, но объективные количественные измерения, то есть измерения изменений, происходящих на физиологическом уровне. Предпочтения не могут быть такими методами измерены. Известно, что развивается технология фиксации эмоций по изменению гримасы лица человека, причем сканирование лица может осуществляться на расстоянии, т.е. сохраняется пассивность эксперимента.

Установим, что обозначается термином «эмоция» в психологии. Каково взаимоотношение и взаимозависимость между «эмоциями», «желаниями» и «предпочтениями»? Очевидно, что эти проявления психики и, соответственно, категории психологии тесно между собой связаны. Какова эта связь: причинная, временная, смысловая?

В «Психологическом словаре» [171] эмоция определяется следующим образом:

– это «психическое отражение в форме непосредственного пристрастного переживания жизненного смысла явлений и ситуаций, обусловленного отношением их объективных свойств к потребностям субъекта», и даже «…эмоциональный тон ощущений – непосредственные переживания… форма видового опыта…важные для преображения индивидуального опыта…». И далее, «в этом случае эмоции вызываются ситуациями и сигналами, предшествующими прямым стимулирующим воздействиям… Уровень энергетической мобилизации (активации) организма, необходимый для осуществления эмоций, обеспечивается вегетативной нервной системой… в ее зависимости со структурами головного мозга, составляющими центральный нервный субстрат эмоций».

При возникновении эмоций происходят изменения в деятельности органов дыхания, пищеварения, сердечно - сосудистой системы, органов внутренней секреции, скелетной и глазной мускулатуры и др. Эти проявления в принципе допускают количественное измерение, и, следовательно, «эмоции» более измеримы, хотя и косвенно, по сравнению с предпочтениями.

«Эмоции являются продуктом общественно – исторического развития. …Относятся к процессам внутренней регуляции поведения…» «Являясь субъективной формой выражения потребностей, эмоции предшествуют деятельности по их удовлетворению, побуждая и направляя ее»…

К качественным характеристикам эмоций относят: «*знак*» (положительные, отрицательные), «*модальность*» (удовольствие, радость, отвращение, негодование, тревога, печаль, …) «*динамические характеристики*» (интенсивность, длительность…).

К характеристикам, которые могут быть измерены, в принципе относятся «*внешние проявления*» (мимика, речь…), «*физиологические проявления*» (давление крови, частота пульса, температура, соответствующие химические процессы,…).

Эмоции – это явление, существующее объективно, качественное описание которого чрезвычайно затрудняет перевести непосредственно в количественную плоскость.

Однако попытки в этом направлении представляются полезными и перспективными. Стоит напомнить максимы относительно математизации науки. Галилей считая, что цель науки – «измерить все, что измеримо и сделать измеримым все, что неизмеримо». А Пуанкаре – «окончательная, идеальная фаза развития любой научной концепции – это ее математизация. Наиболее радикальным в этом смысле был Э. Кант: «Каждая область знания настолько наука, насколько в ней содержится математика». И еще: «То, что нельзя измерить, невозможно улучшить».

Конечно, эти утверждения слишком радикальны и, поэтому неверны. Верно то, что точные науки стремятся проникнуть в неформализованные качественные области знания в поисках для себя новых задач. В свою очередь неформализованные или трудно формализуемые науки стремятся использовать математические инструменты для объективизации информации, наведения порядка в формулировках, терминологии и, вообще, в логике рассуждений.

О точных науках можно сказать, что они как хищный зверь рыщут в зарослях неформализованных, качественных областях знания и пожирают целые участки, оставляя после себя расчищенный и культивированный лес. Все же, однако, этот сложный и питательный материал для математики выращивают другие.

В последнее время возникли синтетические науки: «эконофизика, «психофизика», «эконопсихика» [307-312].

Все сказанное в полной мере относится к поставленной проблеме: как учесть в схеме «субъективного анализа» наличие эмоций.

Информационная теория эмоций впервые предложенная в 1964 г. П.В. Смирновым и в дальнейшем была развита Д. Прайсом и Д. Дарреллом.

В основе концепции лежит утверждение, что «Эмоция определяется какой-либо актуальной потребностью (Прайсом) и возможностью (вероятностью) ее удовлетворения». Оценку вероятности субъект производит на основе врожденного и

ранее приобретенного опыта, непроизвольного сопоставления, а также добавим, на основе, имеющейся в данный момент информации о проблемно-ресурсной ситуации. Поэтому такую вероятность называют субъективной. Такая вероятность в теории полезности называется ожидаемой или субъективной вероятностью. Прогнозирование вероятности осуществляется, как осознано, так и на интуитивном уровне.

«Эмоции можно рассматривать как защитное оружие человека и как инструменты, позволяющие ему выбирать решение в каждой ситуации». «Эмоции» – отражение филогенетической памяти. Это утверждение напрямую связывается с концепцией субъективного анализа и далее «– это инструмент, работающий оптимально». Итак, здесь автор усматривает существование определенного принципа оптимальности. В книге С.П. Расторгуева «Философия информационной войны» [172] можно найти такие определения:

«Эмоции – это выражение искренности, которое используется порой для выживания системы выше формы и содержания»;

«Эмоции – это способность …, минуя механизмы логического контроля, изменить внутреннее состояние себе подобных».

Согласно [171] (Психологический словарь) определяют три группы индивидуальных потребностей:

– витальные (жизненные потребности: пища, …);

– социальные (слава, признание, власть, …);

– идеальные (когнитивные) (познание, творчество…).

Вспомогательные (производные) потребности:

– потребность в компетентности (знания, умения, …);

– потребность в преодолении препятствий на пути к цели (воля, …)

Очевидно, что перечисленные потребности не являются независимыми.

С другой стороны, очевидно, что «эмоция» как научная категория не обрела завершенной формы, количество концепций в этой области примерно равно количеству авторов соответствующих работ.

Приведенный краткий обзор приводит к убеждению, что представления психологии относительно эмоций на качественном уровне не противоречит основным подходам субъективного анализа. Тем самым, они оправдывают попытку формализовать «эмоции» как психическое явление и, в качестве фундаментального принципа использовать определенный вариационный принцип. Это скорее всего должен быть *энтропийный вариационный принцип*, поскольку эмоции, как и предпочтения возникают на фоне существенной неопределенности в отношении факторов определяющих проблемно-ресурсную ситуацию и факторов, характеризующих психическое состояние субъекта.

Имеются примеры попыток ввести количественные меры «напряженности» эмоционального состояния. Так, в упомянутой книге Расторгуева [172] вводится мера

$$e = \frac{F_{\text{ф}} - F_n}{\Delta t},$$

где $F_n = N\upsilon$ – энергия потребная для поддержания возбуждения сети из N нейронов, а $F_{ф}$ – фактическая энергия в нейронной сети. То есть – это «скорость» изменения

разности $F_ф - F_п$. Заметим, что здесь величина или напряженность эмоций оказывается связанной со скоростью изменения разности потребной и располагаемой энергий.

В книге Симонова П.В. [318] записана такая структурная формула

$$e=\varphi\left(\ddot{I}\ ,(\grave{E}_{í}-\grave{E}_{ñ})...\right),$$

где $П$ – сила и качество актуальной потребности, $И_н$ – потребные средства (ресурсы), $И_с$ – располагаемые средства.

Изучение литературы по теории эмоций приводит, прежде всего, к заключению о том, что какой-либо единой общепринятой теории не существует. Мы имеем некое «лоскутное одеяло» из значительного числа идей и теорий. Изложение теории эмоций похоже на изложение истории философских концепций. Сам термин «эмоции» определяется неоднозначно: нет четкой грани между *эмоциями* и *чувствами*, между *эмоциями* и *инстинктами*. Наконец, нет удовлетворительного способа измерения эмоций, хотя в принципе, возможность косвенных измерений существует. Это могут быть измерения физиологических параметров и их изменений, соответствующих эмоциям «измерения» гримасы лица человека, как видимого проявления эмоций. Достаточно полное представление о состоянии и достижениях теории эмоций можно почерпнуть из книги [313] (Керола Э. Изард «Психология эмоций»).

В книге в частности обсуждается связь эмоций с когнитивным процессом, роль эмоций как основной мотивационной системы.

Обсуждается также место эмоций в причинной и временной цепи психических и вегетативных процессов, взаимодействие данной эмоции с другими эмоциями и драйвами. Это означает, что эмоции признаются взаимозависимыми. Принятие этого факта приводит к резкому усложнению возможных математических моделей и проблемам, связанных с эмпирической оценкой этого взаимовлияния. Под «драйвами» понимаются естественные потребности, включая их временную динамику.

В дальнейшем мы будем предполагать, что существует некоторый набор независимых или слабо зависимых – «элементарных» эмоций, которые могут составлять сложные эмоции. Для таких элементарных эмоций применим термин, использованный Б. Спинозой – «аффекты», материальные носители аффектов – «аффекторы».

Вообще, известно, что гнев, страх, презрение и др. эмоции, могут угнетать другие эмоции и драйвы (голод, жажду,…); наоборот одни эмоции могут оказывать каталитическое воздействие на другие. Рассматриваются две теории о причинно-следственной структуре психики, а именно следующие последовательности:

– «когнитивные процессы → эмоции» и

– «эмоции → когнитивные процессы».

Эмоции определяются «направленностью» и «интенсивностью». В этом смысле удобно различать «позитивные», «негативные» и «нейтральные» эмоции. К нейтральным относятся, например, «интерес», «безразличие», «любопытство», «удивление», «озабоченность».

Не будем перечислять позитивные и негативные эмоции, заметим только, что можно выделить эмоции, которые могут быть связаны исключительно с матери-

альными объектами и явлениями и эмоции, которые возникают как результат взаимодействия между людьми.

Коснемся предварительно еще вопроса о возможности измерения эмоций. Измерения на основе субъективных оценок не являются достаточно надежными. Попытки такого рода «измерений» имели место.

Вундтовские измерения, основанные на дихотомической шкале: «расслабление – напряженность» (Даффи 1962 г.), когнитивные карты Томлена (1932), сигнальные функции Хебба (1955), 6-и ступенчатая шкала Вудвордтта (1938) и др.

Существует возможность объективных, однако, косвенных измерений, поскольку известно, что эмоции сопровождаются изменениями электрической активности мозга, которую можно регистрировать энцефанографическим методом, изменением работы кровеносно-сосудистой, эндокринной и нерво-гуморальной системы, изменением гормонального состояния. Все эти эффекты принципиально могут быть оценены и изучены химическими и физическими методами.

Откуда можно узнать, что существует та или иная эмоция? Как увязать их с определенными эмоциями?

Неприятностью является то обстоятельство, что такой эксперимент будет «не чистым». Вмешательство экспериментатора исказит эмоциональное состояние реципиента. Сделать эксперимент «незаметным» вряд ли возможно.

Проблемам воздействия эмоций на физиологию посвящена, например, работа Томпсона (1988).

Упомянем лишь некоторые работы, имеющие отношение к теории эмоций. Одной из ранних является работа Ч. Дарвина «Зарождение эмоций у человека и животных» (1872), «Когнитивная теория эмоций» Шехтера и Зингера, «Эмоции как средство адаптации» Плутника (1962, 1980), работы Е.П. Ильина «Эмоции и чувства» [314], «Различение эмоций и чувств» [318], Винтонеса В. «Психология эмоций», «Психология влияния» Ч. Роберта– одна из лучших книг о влиянии людей друг на друга. Материалы этой книги должны учитываться при работе над групповыми предпочтениями. Работу Д.Д. Майерса «Социальная психология» [148] нужно учесть при работе над количественной теорией эмоций, П.И. Додонов «В мире эмоций» [315] – в этой работе, в частности, анализируются различные теории эмоций – теория Джеймса-Ланге. «Атрибутивная теория эмоций» Кеннона-Барса.

С точки зрения субъективного анализа интересным является замечание К.Э. Ирарда о том, что «… было бы правильнее считать, что существуют такие эмоции, которые способствуют повышению психологической энтропии». Понятие такой энтропии, как количественной характеристики, было введено в [83] – так называемая «субъективная энтропия». Там же было показано, что при определенных условиях «субъективная энтропия» может и уменьшаться и это является главной отличительной чертой «активных систем», способных к самоорганизации.

Существуют природные системы, склонные к самоорганизации, в которых протекают процессы, такие как реакция Белоусова-Жаботинского, различные каталитические реакции [191] – Хакен.

5.2.2. Построение двухслойной модели генерации предпочтений

5.2.2.1. Принцип Infomax Линскера. Применение к генезису предпочтений

В главе 3 описана модель генерации предпочтений, основанная на постулате о применимости принципа Джейнса [83] для описания психических процессов. В настоящем параграфе предлагается модель, в которой эмоции играют существенную роль при формировании предпочтений и выделены формальным образом в качестве важного «посредника» между потребностями, возможностями и предпочтениями.

При этом возникает как минимум двухслойная модель. Используется аналогия с искусственными нейронными сетями. В данном случае будем опираться на монографию Хайкина [190]. Приведем вначале теоретическую схему. Пусть на вход нейтронной сети поступает случайный вектор X, на выходе сети наблюдается вектор Y.

Предположим, что нормировки всех распределений случайных величин единичны. Условная энтропия определяется соотношением:

$$\boldsymbol{H(X|Y)=H(X,Y)-H(X)} \tag{5.2.1}$$

где $H(X,Y)$ – совместная энтропия векторов X и Y.

$$\boldsymbol{H(X,Y)=-\sum_X\sum_Y p(x,y)\ln p(x,y)} \tag{5.2.2}$$

$H(Y)$ энтропия вектора Y. Так как $H(X,Y)\geq 0$ и $H(Y)\geq 0$, то для условной энтропии выполняется неравенство:

$$0\leq \boldsymbol{H(X|Y)\leq H(X,Y)}$$

В формуле (5.2.2) $p(x,y)$ – совместная плотность распределения вероятности векторов X и Y.

Взаимная информация определяется следующей формулой:

$$\boldsymbol{I(X,Y)=H(X)-H(X|Y)=H(X)-H(Y)-H(X,Y)=}$$
$$\boldsymbol{=-\sum_X p(x)\ln p(x)-\sum_Y p(y)\ln p(y)+\sum_X\sum_Y p(x,y)\ln p(x,y)}$$

Если $p(x)=\sum_Y p(x,y)$ и $p(y)=\sum_X p(x,y)$, то

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I(X,Y)}&\boldsymbol{=\sum_X\sum_Y\left[p(x,y)\ln p(x,y)-p(x,y)\ln p(x)-p(x,y)\ln p(y)\right]=}\\&\boldsymbol{=\sum_X\sum_Y p(x,y)\ln\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}}\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$I(X,Y)$ – здесь симметричная функция переменных X и Y. Легко заметить, что если $p(x,y) = p(x)\cdot p(y)$, то есть y не зависит от x, то $I(X,Y) = 0$.

Относительная энтропия или дивергенция Кульбака-Лейблера определяются формулой:

$$\boldsymbol{D\big(p(x),q(x)\big)=\sum_x p(x)\ln\frac{p(x)}{q(x)}\leq H\big(p(x)\big)} \tag{5.2.4}$$

В информационной теории искусственных нейронных сетей применяется *принцип максимума взаимной информации Линскера* (*принцип «Infomax»*), который формулируется следующим образом:

Преобразование случайного вектора X на входном слое в случайный вектор Y на выходном слое должно быть таким, чтобы совместная работа нейронов выходного слоя максимизировала информацию о функционировании входного слоя.

$$X \to [HC] \to Y$$

Мы будем предполагать, что психика использует структуры подобные искусственным многослойным нейронным сетям для выработки на выходе распределения предпочтений. Существует несколько возможностей построения таких моделей. В данном случае распределения вероятностей заменяются распределениями предпочтений и распределениями интенсивностей эмоций.

В отличие от вероятностного варианта постулируются некоторые дополнительные свойства распределений, вносящие существенные отличия в формулировку вариационного принципа.

Происходит как бы «ответный ход». Теория искусственных нейронных систем, созданная в интересах компьютерных технологий и развития вычислительных процедур, как попытка в упрощенном виде отобразить на формально-математическом уровне то, что происходит в недрах психики, «возвращает долг» предлагая основу для разработки определенных модельных представлений о реальном функционировании психики.

Генезис предпочтений можно было бы представить так:

1. Мозг воспринимает и обрабатывает экзогенную информацию, а также существующую в данный момент эндогенную информацию о потребностях («драйвах»,…), анализирует и сопоставляет их, то есть осуществляет когнитивный процесс, что можно отобразить в виде «когнитивной функции».
2. Результатом когнитивного процесса должен являться образ проблемной ситуации, включая этико-моральную компоненту, составными частями которой является множество альтернатив S_a – (множество субъектов S_ξ – если субъект действует в составе группы) и множество бинарных отношений $\rho_{ij} \cdot (\sigma_i \to \sigma_j)$, пока еще не оснащенное распределением предпочтений.
3. «Просыпается» этика и устанавливается соответствие $S_a \to S_I$, где S_I – множество этических императивов, причем реализуется какой-либо из возможных 4-х канонических типов соответствий (всюду – определенное, функциональное, инективное, сюръективное) либо их комбинаций, включая биекцию.
4. В результате «когнитивного» процесса «вспыхивают» аффекты, или элементарные эмоции, происходит композиция сложных эмоций. Они эволюционируют и в определенные моменты достигают достаточной интенсивности.
5. Эмоции продуцируют предпочтения на множестве альтернатив. Энтропии предпочтений H_π являются показателями, которые определяет возможность и моменты принятия решения.

Таким образом, в модели, о которой идет речь, существует, по крайней мере, два слоя – «слой эмоций» и «слой предпочтений», связанные между собой «синапсами». Распределение информационной нагрузки между «синапсами» определяет упомянутый принцип Линскера.

Как будет видно из дальнейшего, принцип Линскера содержит в себе как частный случай принцип Джейнса, если искомым считается условное распределение.

Можно предполагать, что формирование первичного множества альтернатив и первичного множества аффектов – эмоций в условиях применения динамической модели происходит так, чтобы они были приближенно независимы и совместны.

Сложные эмоции не являются независимыми, что при теоретической интерпретации добавляет неопределенности.

Перейдем к формулировке вариационного принципа для двухслойной модели генерации предпочтений в терминах субъективного анализа.

Предстоит перейти от вероятностной модели к формулировке в терминах распределений предпочтений и распределений интенсивности эмоций.

Попытаемся объединить сведения из психологии с теорией информации [174] (Стратонович) и теорией искусственных нейронных систем [190] Хайкин. Происходит модификация соответствующих вариационных принципов: принципа Джейнса и принципа Линскера. Будем фиксировать, где будет необходимо, отличия и дополнительные допущения.

5.2.2.2. Построение двухслойной модели

Рассматривается вариант модели, представленный структурной схемой на рис.5.2.1.

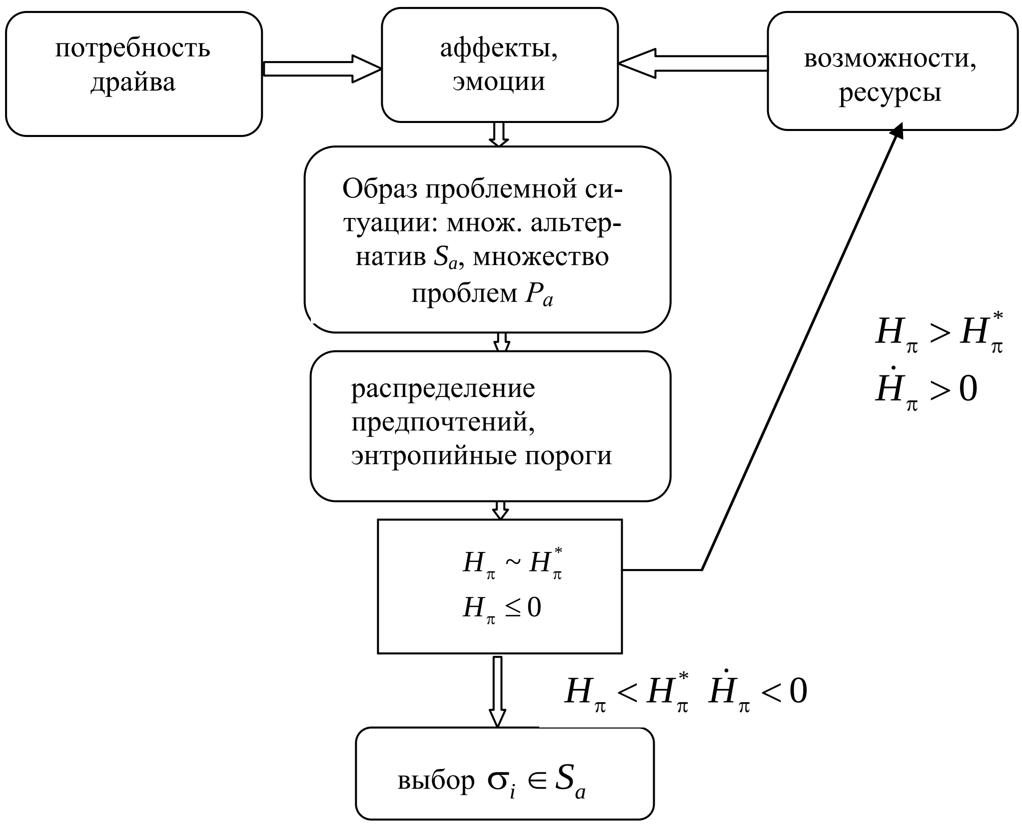


Рис. 5.2.1

Принципиальная схема обмена информацией о предпочтениях
и «оптимальный» выбор альтернативы.

На схеме изображен развивающийся во времени процесс генерации предпочтений, завершающийся «решением» – выбором наиболее желательной альтернативы. Процесс носит рекурсивный характер. Если на завершающей стадии очередного цикла не выполняются условия выбора, возникает рекурсия: сложившееся к данному моменту распределение предпочтение корректирует эмоции, после чего снова корректируются предпочтения вплоть до момента, когда возникают необходимые и достаточные условия для осуществления выбора на S_a.

Условия выбора связаны с величиной энтропии предпочтений и знаком ее производной по времени, в некоторых случаях, когда речь идет о развитии конфликтных ситуаций – с критериями, отражающими корреляцию различных распределений.

На «верхнем ярусе» расположен слой, в котором происходит формирование эмоций-аффектов как результат столкновения внутренних (эндогенных) потребностей-драйвов и внешних (экзогенных) возможностей-ресурсов. Эмоции стимулируют процессы в «слое», где формируется образ проблемной ситуации: множество альтернатив S_a, множество проблем P_a и, наконец, распределение предпочтений $\pi^+(\sigma_i); \pi^-(\sigma_i); \vartheta^+(\sigma_i); \vartheta^-(\sigma_i)$. Описание смысла этих предпочтений приведено ранее, а также в гл. I, II, III. Работа каждого цикла завершается либо не завершается принятием решения. Как уже говорилось, предполагается, что имеет место рекурсия.

Ниже предлагается одна из моделей, реализующих описанный процесс. В этой модели вводится два вида распределений предпочтений: $\pi(\sigma_i)$ – предпочтение принять гипотезу σ_i и $\vartheta(\sigma_i)$ – предпочтение отбросить σ_i. По отношению к эмоциям-аффектам используется следующая градация:

– определяются позитивные эмоции η_j^+ и негативные эмоции η_j^-, которым соответствуют интенсивности ε_j^+ и ε_j^-,

– в содержательном плане позитивные эмоции и негативные эмоции подразделяются на:

а) витальные; в) социальные; с) когнитивные («идеальные»), что формально отражается с помощью индекса «*j*».

Кроме того, в модель вводятся условные распределения $\pi(\sigma_i|\eta_j)$; $\vartheta(\sigma_i|\eta_j)$; $\varepsilon^+(\eta_j|\sigma_i)$; $\varepsilon^-(\eta_j|\sigma_i)$, которые играют ключевую роль, так как с помощью них организуется рекурсия генерации предпочтений.

В модели сразу учитывается два обстоятельства: неединичные нормировки всех распределений ($\pi(\sigma_i); \vartheta(\sigma_i); \varepsilon^+(\eta_j); \varepsilon^-(\eta_j)$), а также зависимость распределений от времени. Модель реализуется в дискретном времени: t; t+1; t+2,..., причем время является не астрономическим, а «операционным», отражающим последовательность этапов психических процессов.

Разделение предпочтений на позитивные и негативные (π^+, π^- и ϑ^+, ϑ^-) в данной модели игнорируются.

Чем оправдывается введение нееденичных нормировок? В теории вероятности выбор условия нормировки в значительной мере произволен и является предметом соглашения и удобства, не заключает в себе какого-либо принципиального смысла.

Что касается субъективного анализа, то здесь нормировке придается определенный смысл. Пусть, например, размерность S_a равна $N = 2$. При единичной нормировке $\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2) = 1$. Это означает, что чем большее предпочтение отдается одной альтернативе (σ_1), тем меньшим является предпочтение другой (σ_2). Использование во всех случаях и во все моменты времени единичных и постоянных нормировок означает, что предпочтения $\pi(\sigma_i)$ отражают лишь относительный, сравнительный «вес» - значимость альтернатив, но не позволяют учесть абсолютную «силу» предпочтения. Если мы хотим наряду с относительным взвешиванием, сравнением альтернатив отобразить с помощью функций $\pi(\sigma_i)$ также «силу» предпочтения, то есть «силу» желания, мы можем частично решить эту задачу, использовав нееденичные и зависящие от времени нормирующие параметры.

То же рассуждение в еще более утвердительной форме можно высказать относительно нормировок распределений интенсивности эмоций. Эти нормирующие условия должны быть устроены так, чтобы абсолютная суммарная сила эмоционального напряжения могла принимать различные значения, например, при определенных условиях обращалась бы в нуль. Это означало бы, что «эмоции сняты».

Выше мы упомянули только позитивные и негативные эмоции. Очевидно, однако, что существуют нейтральные эмоции: «сдержанность», «любопытство», «безразличие», «заинтересованность»,…

Эти эмоции также могут быть слабыми и сильными, однако, в данной модели мы сознательно исключаем из рассмотрения этот тип эмоций, полагая, что такие эмоции могут считаться начальной стадией любой не нейтральной эмоции.

В дальнейшем предполагается построить модели, в которых *нейтральные* эмоции будут выделены в отдельный класс. Такие эмоции также могут стимулировать деятельность субъекта, например, исследовательскую работу и, соответственно, влиять на состав альтернатив в множестве S_a, реализация которых требует затрат ресурсов.

Введем следующие условия нормировки безусловных распределений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it}) = \varphi_t^+; \sum_{i=1}^{N}\vartheta(\sigma_{it}) = \varphi_t^-; \\ \sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{jt}^+) = \psi_t^+; \sum_{k=1}^{M^-}\varepsilon^-(\eta_{kt}^-) = \psi_t^-\end{gathered} \tag{5.2.5}$$

В модели используются также условные распределения $\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.);$. $\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta_{kt-1}^-\right.);$ $\varepsilon^+(\eta_{jt}^+\left|\sigma_{it-1}\right.);$ $\varepsilon^-(\eta_{kt}^-\left|\sigma_{it-1}\right.)$. Для этих распределений принимаются следующие нормировочные равенства:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it}\left|\eta^{+}_{jt-1}\right.)=\xi^{+}_{it,t-1};\sum_{i=1}^{N}\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta^{-}_{kt}\right.)=\xi^{-}_{jt,t-1};$$
$$\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt}\left|\sigma_{it-1}\right.)=\mu^{+}_{it,t-1};\sum_{k=1}^{M^-}\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt}\left|\sigma_{it-1}\right.)=\mu^{-}_{it,t-1} \tag{5.2.6}$$

В формулах (5.2.5) и (5.2.6) $\pi(\sigma_{it})$ предпочтение «принять» σ_i сложившееся к моменту t, $\vartheta(\sigma_{it})$ - предпочтение «отбросить» альтернативу σ_i в момент t, φ_t^+ и φ_t^- - нормирующие коэффициенты, в общем случае являющиеся функциями времени; $\pi(\sigma_{it}\left|\eta^{+}_{jt-1}\right.)$ - условное предпочтение «принять» σ_i в момент t, если в предшествующий момент t-1 имела место позитивная эмоция-аффект η^{+}_{jt-1} соответственно $\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta^{-}_{jt-1}\right.)$ - условное предпочтение «отбросить» σ_i в момент t, если в предыдущий момент t-1 имела место негативная эмоция-аффект η^{-}_{kt-1}. $\varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt}\left|\sigma_{it-1}\right.)$ - условная напряженность эмоции-аффекта η^{+}_{jt} в момент t «при взгляде» на уже сложившееся в момент t-1 предпочтение альтернативы σ_i, аналогично определяется условное напряжение $\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt}\left|\sigma_{it-1}\right.)$. Нормирующие коэффициенты $\xi^{+}_{t,t-1}$, $\xi^{-}_{t,t-1}$, $\mu^{+}_{t,t-1}$, $\mu^{-}_{t,t-1}$ в общем случае зависят от «текущего» момента t и предшествующего момента t-1. В дальнейшем с целью упрощения будет сделано допущение о том, что нормирующие коэффициенты зависят только от «текущего» момента t (либо от t-1).

В рассматриваемой модели на каждом временном шаге, как видно, имеет место своеобразная марковость: в условных распределениях фигурирует только текущий момент t и непосредственно предшествующий t-1. Они не учитывают предысторию, уходящую в более отдаленное прошлое.

Количество позитивных эмоций M^+ может не совпадать с количеством негативных эмоций M^-.

Введем совместные распределения двух типов: $\rho_1(\sigma_{it};\eta^{+}_{jt-1})$, связанное с «переходом» $\eta^{+}_{jt-1}\to\sigma_{it}$ и $\rho_2(\eta^{+}_{jt};\sigma_{it-1})$, связанное с «переходом» $\sigma_{it-1}\to\eta^{+}_{jt}$, а также совместные распределения: $\rho_3(\sigma_{it};\eta^{-}_{kt-1})$ и $\rho_4(\eta^{-}_{kt};\sigma_{it-1})$, имеющие аналогичный смысл.

Постулируются следующие соотношения (и тем самым «пошаговая марковость» процесса):

$$\rho_1(\sigma_{it};\eta^{+}_{jt-1})=\varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt-1})\pi(\sigma_{it}\left|\eta^{+}_{jt-1}\right.)\,; \tag{5.2.7}$$

$$\rho_2(\eta^{+}_{jt};\sigma_{it-1})=\pi(\sigma_{it-1})\varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt}\left|\sigma_{it-1}\right.) \tag{5.2.8}$$

$$\rho_3(\sigma_{it};\eta^{-}_{kt-1})=\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt-1})\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta^{-}_{kt-1}\right.) \tag{5.2.9}$$

$$\rho_4(\eta^{-}_{kt};\sigma_{it-1})=\vartheta(\sigma_{it-1})\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt}\left|\sigma_{it-1}\right.) \tag{5.2.10}$$

В отличие от теории вероятности, эти соотношения постулируются, причем в данной модели существует два параллельных процесса, которые «пересекаются только в моменты решения», то есть в моменты принятия или отбрасывания некоторой альтернативы. В этом состоит ограниченность модели.

$$\sum_{i=1}^{N}\rho_1(\sigma_{it};\eta^{+}_{jt-1})=\xi^{+}_{t,t-1}\varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt-1}) \tag{5.2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{M^+}\rho_2(\eta^{+}_{jt};\sigma_{it-1})=\mu^{+}_{t,t-1}\pi(\sigma_{it-1}) \tag{5.2.12}$$

Допустим, что имеет место правило «свертки» по множеству альтернатив S_a:

$$\varepsilon^+(\eta_{jt}^+) = \mathrm{A}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it-1})\varepsilon^+(\eta_{jt}^+\left|\sigma_{it-1}\right.) \quad (5.2.13)$$

Отсюда следует, что уравнение свертки нужно взять в виде:

$$\varepsilon^+(\eta_{jt}^+) = \frac{\psi_t^+}{\theta_{2t,t-1}^+}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it-1})\varepsilon^+(\eta_{jt}^+\left|\sigma_{it-1}\right.) \quad (5.2.14)$$

При этом согласование нормировок обеспечивается если

$$\frac{\psi_{t-1}^+\mu_{t,t-1}^+}{\theta_{2t,t-1}^+} = 1 \quad (5.2.15)$$

Условие «свертки» для $\pi(\sigma_{it})$ следует взять в виде:

$$\pi(\sigma_{it}) = \frac{\psi_t^+}{\theta_{1t,t-1}^+}\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.) \quad (5.2.16)$$

Суммируя, это соотношение слева и справа по i, находим, что для согласования нормировок должно выполняться условие:

$$\frac{\psi_{t-1}^+\xi_{t,t-1}^+}{\theta_{1t,t-1}^+} = 1 \quad (5.2.17)$$

Определим энтропию ρ_1, соответствующей переходу $\eta_{t-1} \to \sigma_t$:

$$\begin{gathered} H_{\rho 1} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\rho_1(\sigma_{it},\eta_{jt-1}^+)\ln\rho_2(\sigma_{it},\eta_{jt-1}^+) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.) \\ \left[\ln\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+) + \ln\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.)\right] = \xi_{t,t-1}^+ H_\varepsilon^+(\eta_{t-1}^+) + \sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\tilde{H}_{\pi j}(\sigma_t\left|\eta_{t-1}^+\right.) \end{gathered} \quad (5.2.18)$$

где $H_\varepsilon^+(\eta_{t-1}^+) = -\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\ln\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)$.

$$\tilde{H}_{\pi j} = -\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.)\ln\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.) \quad (5.2.19)$$

В частности, если предположить, что предпочтения σ_{it} в момент t не зависят от напряженностей эмоций в момент t - 1, то

$$\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^+\right.) = \pi(\sigma_{it})$$

и из формулы (5.2.18) следует, что

$$H_{\rho 1} = \xi_{t,t-1}^+ H_\varepsilon^+(\eta_{t-1}^+) + \psi_{t-1}^+ H_\pi(\sigma_t) \quad (5.2.20)$$

Проделаем аналогичный расчет для энтропии
$H_{\rho 2} : (\sigma_{t-1} \to \eta_t)$:

$$\begin{gathered} H_{\rho 2} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\rho_2(\eta_{jt}^+,\sigma_{it-1})\ln\rho_2(\eta_{jt}^+,\sigma_{it-1}) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\pi(\sigma_{it-1})\varepsilon^+(\eta_{jt}^+\left|\sigma_{it-1}\right.) \\ \left[\ln\pi(\sigma_{it-1}) + +\ln\varepsilon^+(\eta_{jt}^+\left|\sigma_{it-1}\right.)\right] = \mu_{t,t-1}^+ H_\pi(\sigma_{t-1}) + \sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it-1})\tilde{H}_{\varepsilon i}(\eta_t^+\left|\sigma_{t-1}\right.) \end{gathered} \quad (5.2.21)$$

Если $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+})$ не зависит от выбора σ_{it-1}, то $\tilde{H}_{\varepsilon i}(\eta_t^{+}|\sigma_{t-1}) = H_{\varepsilon}(\eta_t^{+})$ и предыдущая формула принимает вид:

$$\boldsymbol{H}_{\rho 2} = \mu_{t,t-1}^{+}\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) + \varphi_{t-1}^{+}\boldsymbol{H}_{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_t^{+}) . \tag{5.2.22}$$

По аналогии, как это делается для вероятностных распределений, введем информацию связи:

$$\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \to \boldsymbol{\pi}_t) = \mu_{t,t-1}^{+}\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) - \sum_{j=1}^{M^{+}} \varepsilon^{+}(\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+})\tilde{\boldsymbol{H}}_{\pi j}(\boldsymbol{\sigma}_t |\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+}) \quad . \tag{5.2. 23}$$

Видим, что если $\pi(\sigma_{it}|\eta_{jt-1}^{+}) = \pi(\sigma_{it})$, то

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_{\pi j}(\boldsymbol{\sigma}_t |\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+}) = \boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_t) . \tag{5.2.24}$$

Поэтому,

$$\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \to \boldsymbol{\pi}_t) = \mu_{t,t-1}^{+}\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) - \psi_{t-1}^{+}\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_t) \tag{5.2.25}$$

В формуле (5.2.24) ввиду исчезновения зависимости от η_{jt-1}^{+} исчезает в правой части и индекс *j*. Если предпочтения, сформировавшиеся в момент *t*-1, сохраняются в момент *t*, то есть

$$\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) = \boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_t) , \tag{5.2.26}$$

(точнее, если сохраняется энтропия на шаге *t*-1→*t*), то из (5.2.25) следует равенство нулю информации

$$I_1(\varepsilon_{t-1} \to \pi_t) = 0 ,$$

или

$$\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_t) = \frac{\mu_{t,t-1}^{+}}{\psi_{t-1}^{+}}\boldsymbol{H}_{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) . \tag{5.2.27}$$

И если выполняется (5.2.26), то на нормирующие функции должно быть наложено условие:

$$\mu_{t,t-1}^{+} = \psi_{t-1}^{+} \tag{5.2.28}$$

Это означает, что в этом случае нормировки условного и безусловного распределений $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+}|\sigma_{it-1})$ и $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+})$ совпадают.

В соответствие с принципом Линскера введем критерий:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi}_{\pi 1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \to \boldsymbol{\pi}_t) = \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \to \boldsymbol{\pi}_t) + \beta_{\pi t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^{+}} \varepsilon^{+}(\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+})\pi(\boldsymbol{\sigma}_{it} |\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+}) \times \\ \times \boldsymbol{F}_{\pi}^{+}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}-1) + \gamma_{\pi t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^{+}} \varepsilon^{+}(\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+})\pi(\boldsymbol{\sigma}_{it} |\boldsymbol{\eta}_{jt-1}^{+})\end{gathered} \quad . \tag{5.2.29}$$

Когнитивная функция $F_{\pi}^{+}(i, j, t, t-1)$ включает всю экзогенную и эндогенную информацию, о которой говорилось выше, а также информацию о предпочтениях и эмоциях на предшествующем этапе (t-1). В частности через эту функцию может быть реализовано перекрестное взаимодействие различных распределений.

Представим функционал $\Phi_{\pi 1}$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned}&\Phi_{\pi 1}(\varepsilon_{t-1}^{+}\to\pi_t)=-\mu_{t,t-1}^{+}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it-1})\ln\pi(\sigma_{it-1})\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta_{jt-1}^{+})\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)\times\\&\times\ln\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)\pm\beta_{\pi t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta_{jt-1}^{+})\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)\times\\&\times F_{\pi}^{+}(i,j,t,t-1)+\gamma_{\pi t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta_{jt-1}^{+})\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)\end{aligned}\qquad(5.2.30)$$

Найдем такое условное распределение $\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)$, которое доставляет экстремум этому функционалу из уравнения:

$$\frac{\partial\Phi_{\pi 1}\left(\varepsilon_{t-1}^{+}\to\pi(\sigma_t)\right)}{\partial\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)}=0\qquad(5.2.31)$$

С учетом нормировки находим каноническое распределение:

$$\pi_1(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)=\xi_{t,t-1}^{+}\frac{e^{\pm\beta_{\pi t}F_{\pi}^{+}(i,j,t,t-1)}}{\sum_{q=1}^{N}e^{\pm\beta_{\pi t}F_{\pi}^{+}(i,j,t,t-1)}}\qquad(5.2.32)$$

Последний член в этом функционале можно было бы записать в виде:

$$...+\sum_{i=1}^{N}\gamma_{\pi}(\eta_{jt-1}^{+})\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta_{jt-1}^{+})\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.).$$

При этом в результате подстановки канонического распределения в условие нормировки: $\sum_{j=1}^{M^+}\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)=\xi_{t,t-1}^{+}$ мы обнаруживаем, что нормировочный множитель окажется функцией $\eta_{jt-1}^{+}:c(\eta_{jt-1}^{+})$.

В результате, однако, это не исказит окончательного результата. Использование функционала вида (5.2.30) приводит к тому, что принцип Линскера по отношению к условному предпочтению $\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)$ совпадает по форме с принципом Джейнса.

Поскольку этот принцип дополняется постулированием соотношений свертки, то его можно считать самостоятельным принципом, дополняющим как принцип Джейнса, так и принцип Линскера.

Уравнение свертки (5.2.16) запишем в виде:

$$\pi(\sigma_{it})=\frac{\varphi_{t-1}^{+}}{\varphi_{t-1}^{+}\xi_{t,t-1}^{+}}\sum_{j=1}^{M^+}\varepsilon^{+}(\eta_{jt-1}^{+})\pi(\sigma_{it}\left|\eta_{jt-1}^{+}\right.)\qquad(5.2.33)$$

Аналогичные построения проведем для получения распределений $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+})$ и $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+}\left|\sigma_{it-1}\right.)$. Функционал $\Phi_{\varepsilon}(\pi_{t-1}\to\varepsilon_t^{+})$ имеет структуру аналогичную (5.2.30). Из условия

$$\frac{\partial\Phi_{\varepsilon}\left(\pi_{t-1}\to\varepsilon_t^{+}\right)}{\partial\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+}\left|\sigma_{it-1}\right.)}=0\qquad(5.2.34)$$

находим распределение:

$$\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+}\left|\sigma_{it-1}\right.)=\mu_{t,t-1}^{+}\frac{e^{\pm\beta_{\varepsilon t}G_{\varepsilon}^{+}(i,j,t,t-1)}}{\sum\limits_{q=1}^{N}e^{\pm\beta_{\varepsilon t}G_{\varepsilon}^{+}(i,j,t,t-1)}}. \tag{5.2.35}$$

Безусловное распределение $\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+})$ определяется с помощью уравнения свертки:

$$\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+})=\frac{\psi_{t-1}^{+}}{\varphi_{t-i}^{+}}\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_{it-1})\varepsilon^{+}(\eta_{jt}^{+}\left|\sigma_{it-1}\right.). \tag{5.2.36}$$

Подобная модель постулируется для генерации распределений $\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-})$; $\vartheta(\sigma_{i,t})$; $\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-}\left|\sigma_{it-1}\right.)$; $\vartheta(\sigma_{i,t}\left|\eta_{kt-1}^{-}\right.)$.

Введем распределения τ_1 и τ_2 подобные распределениям ρ_1 и ρ_2:

$$\begin{aligned}&\tau_1\left(\sigma_{it},\eta_{kt-1}^{-}\right)=\varepsilon^{-}(\eta_{kt-1}^{-})\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta_{kt-1}^{-}\right.),\\&\tau_2\left(\eta_{kt}^{-},\sigma_{it}\right)=\vartheta(\sigma_{it-1})\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-}\left|\sigma_{it-1}\right.)\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

и условия нормировки

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M^{-}}\tau_1(\sigma_{it},\eta_{kt-1}^{-})=\Omega_{1t,t-1}^{-},\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M^{-}}\tau_2(\eta_{kt}^{-},\sigma_{it-1})=\Omega_{2t,t-1}^{-}\end{aligned}. \tag{5.2.38}$$

Как и в первом случае (позитивной ветви) распределения τ_1 и τ_2 нетождественны, их структура (5.2.37) постулируется. Из (5.2.38) находим:

$$\Omega_{1t,t-1}^{-}=\sum_{k=1}^{M^{-}}\varepsilon^{-}(\eta_{kt-1}^{-})\sum_{i=1}^{N}\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta_{kt-1}^{-}\right.)=\xi_{t,t-1}^{-}\cdot\psi_{t-1}^{-}, \tag{5.2.39}$$

$$\Omega_{2t,t-1}^{-}=\sum_{i=1}^{N}\vartheta(\sigma_{it-1})\sum_{k=1}^{M^{-}}\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-})\left|\sigma_{it-1}\right.)=\mu_{t,t-1}^{-}\cdot\varphi_{t-1}^{-}. \tag{5.2.40}$$

Предполагается, что вторые суммы в соотношениях (5.2.39 и 5.2.40) не зависят от «родовых» индексов (в (5.2.39) – от k, в (5.2.40) – от i).

Итак, имеем:

$$\frac{\xi_{t,t-1}^{-}\cdot\psi_{t-1}^{-}}{\Omega_{1t,t-1}^{-}}=1;\quad\frac{\mu_{t,t-1}^{-}\cdot\varphi_{t-1}^{-}}{\Omega_{2t,t-1}^{-}}=1. \tag{5.2.41}$$

Распределение $\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-})\left|\sigma_{it-1}\right.)$ имеет вид:

$$\varepsilon^{-}(\eta_{kt}^{-})\left|\sigma_{it-1}\right.)=\mu_{t,t-1}^{-}\frac{e^{\pm\beta_{\varepsilon t}^{-}G^{-}(t,k,t,t-1)}}{\sum\limits_{p=1}^{M^{-}}e^{\pm\beta_{\varepsilon}G^{-}(i,j,t,t-1)}}. \tag{5.2.42}$$

Условное распределение $\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta_{kt-1}^{-}\right.)$ дается формулой:

$$\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta^{-}_{kt-1}\right.)=\xi^{-}_{t,t-1}\frac{e^{\pm\beta_{\vartheta t}F^{-}_{\vartheta}(i,k,t,t-1)}}{\sum\limits_{q=1}^{N}e^{\pm\beta_{\vartheta t}F^{-}_{\vartheta}(q,j,t,t-1)}}\,. \qquad (5.2.43)$$

Безусловные распределения $\vartheta(\sigma_{it})$ и $\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt-1})$ определяются из постулируемых соотношений свертки подобных формуле «полной вероятности».

$$\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt})=\frac{\psi^{-}_{t-1}}{\varphi^{-}_{t-1}\mu^{-}_{t,t-1}}\sum_{i=1}^{N}\vartheta(\sigma_{it-1})\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt}\left|\sigma_{it-1}\right.)\,, \qquad (5.2.44)$$

$$\vartheta(\sigma_{it})=\frac{\varphi^{-}_{t-1}}{\psi^{-}_{t-1}\mu^{-}_{t,t-1}}\sum_{k=1}^{M^{-}}\varepsilon^{-}(\eta^{-}_{kt-1})\vartheta(\sigma_{it}\left|\eta^{-}_{kt-1}\right.)\,. \qquad (5.2.45)$$

С целью дальнейшего упрощения, примем, что по отношению к распределению предпочтений π и υ действуют единичные нормировки, то есть смысловая «нагрузка» сводится только к сравнению желательности (или нежелательности) альтернатив друг с другом. Неединичные нормировки сохраним для распределений интенсивностей эмоций ε^{+} и ε^{-}.

Положим, следовательно:

$$\varphi^{+}_{t}=1;\;\; \varphi^{-}_{t}=1,$$

$$\xi^{+}_{t,t-1}=1;\;\; \xi^{-}_{t,t-1}=1\,.$$

Тогда вместо (5.2.15) и (5.2.17) будем иметь соотношения:

$$\mu^{+}_{t,t-1}=\theta^{+}_{2t,t-1};\;\; \xi^{+}_{t,t-1}=\theta^{+}_{1t,t-1}\,.$$

При допущении (5.2.27) должно выполняться условие (5.2.28). Если η^{+}_{t} не зависит от σ_{t-1}, то

$$I_1(\pi_{t-1}\to\varepsilon_t)=\xi_{t,t-1}H_{\varepsilon}(\eta^{+}_{t-1})-\varphi_{t-1}H_{\varepsilon}(\eta^{+}_{t})=0\,,$$

если к тому же $H_{\varepsilon}(\eta^{+}_{t-1})=H^{+}_{\varepsilon}(\eta_t)$, то есть энтропия позитивных эмоций не изменяется под действием других факторов, то должно выполняться условие $\xi_{t,t-1}=\varphi_{t-1}$. В случае единичных нормировок для распределения предпочтений это условие выполняется автоматически.

Что касается условий нормировки распределений интенсивностей эмоций ε^{+} и ε^{-}, то они, как уже было сказано остаются неединичными и нестационарными и поэтому необходимо иметь какие-либо правдоподобные модели их зависимости от времени и других факторов, образующих проблемную ситуацию.

5.2.2.3. Модели нормирующих функций. Размерность интенсивностей эмоций

Из общих соображений можно заключить, что как интенсивность (напряженность) каждой эмоции – аффекта, так и суммарная эмоциональная напряженность не могут оставаться постоянными. Их поддержание требует расхода психической и физиологической энергии, а также наличия внешних стимулирующих факторов. Будем исходить из того, что эмоциональная напряженность изменяется с течением времени.

Эту зависимость можно отразить выбором вида зависимости от времени нормировочного коэффициента. Обозначим нормировочный коэффициент через $\mu(t)$. Предположительно характер зависимости эмоциональной напряженности и, соответственно, коэффициента $\mu(t)$ от времени показан на рис. 5.2.2.

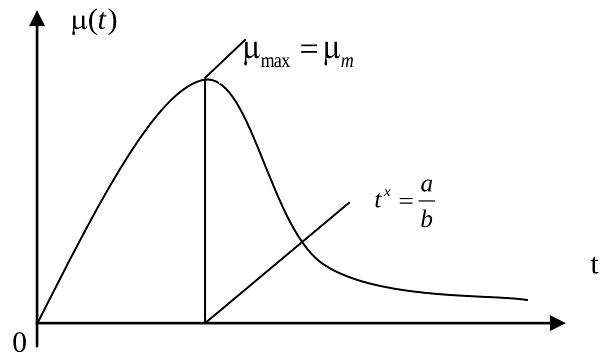


Рис. 5.2.2

При возникновении проблемной ситуации естественно считать, что интенсивность эмоции вначале нарастает, достигает максимального значения в некоторый момент $t = t^*$ и затем угасает. Естественно, что интенсивность эмоций зависит от развития проблемной ситуации, в частности, от хода разрешения выбранной проблемы. В описываемой модели эта зависимость интенсивности эмоций от времени отображается через нормирующий коэффициент (или нормирующую функцию).

Описанный характер зависимости хорошо моделируется функцией

$$\mu = ct^{\alpha} \cdot e^{-\beta t} \tag{5.2.46}$$

Легко найти, что экстремум имеет место при $t = t^* = \frac{\alpha}{\beta}$. Если μ_m - есть максимальное значение $\mu(t)$, то из формулы (5.2.46) находим

$$\mu(t) = \mu_m \cdot \tau^{\alpha} \cdot e^{\alpha(1-\tau)} \tag{5.2.47}$$

где $\tau = t(t^*)^{-1}$.

Функция (5.2.46) является решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} + \alpha \frac{t - t^*}{t \cdot t^*} \cdot \mu = 0 \tag{5.2.48}$$

Если имеет место внешнее возмущение $f(t)$, то рассматривается уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} + \alpha \frac{t - t^*}{t \cdot t^*} \cdot \psi = f(t), \tag{5.2.49}$$

которое можно считать простейшей моделью нормировочного коэффициента. Совершенно очевидно, что здесь нарушается «заповедь Эйлера» о том, что «все, что нас окружает, подчиняется некоторому принципу максимума или минимума». В данном случае эта модель навязывается «извне» и как бы дополняет принцип Линскера.

Поскольку описанная выше двухслойная модель построена для дискретного времени, то уравнение (5.2.49) также следует заменить его эквивалентом в дискретном времени.

Положим

$$\frac{d\mu}{dt} \sim \frac{\mu_t - \mu_{t-1}}{h_t},$$

тогда получим:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + h_t \cdot \frac{t - t^*}{t \cdot t^*} \cdot \mu(t) - f(t) \qquad (5.2.50)$$

Здесь h_t – шаг рекурсии играет важную роль. Он определяет «шкалу психологического времени», то есть темп смены шагов рекурсии. Он может быть переменным.

Модель содержит два структурных параметра: t^* - момент максимального напряжения, (если $f(t) \equiv 0$) и $\mu_{\max}$ - максимальное значение нормировочного коэффициента. Эти два параметра могут быть объектами экспериментального исследования.

В данном разделе все рассмотрение относится к одному индивиду и, следовательно, t^* и ψ_m также индивидуальны и должны меняться от субъекта к субъекту.

При изучении группы субъектов, возможно, удастся установить общие статистические закономерности для этих параметров.

Нормирующий коэффициент может быть размерным, но тогда необходимо договориться в каких единицах будет измеряться интенсивность эмоций. В работе [83] была введена «психическая температура», которая должна иметь размерность когнитивной функции, если последняя вводится как безразмерная величина, то и температура должна считаться безразмерной величиной.

Одна из возможностей обойти трудности, связанные с использованием размерных величин, состоит в следующем. Можно положить $\psi_{max} = 1$. В этом случае нормировочный коэффициент заключен в пределах

$0 \le \psi(t) \le 1$

И сохраняется возможность возникновения очень слабых и, даже, нулевых интенсивностей эмоций.

5.2.2.4. О моделях когнитивных функций

До настоящего момента использовалось понятие «когнитивная функция» без конкретизации ее смысла. Подчеркнем еще раз, что выбор когнитивной функции помимо постулированного вариационного принципа является центральным звеном при построении модели, поскольку роль вариационного принципа состоит только в том, что он устанавливает связь между когнитивной функцией и соответствующим распределением (предпочтений или интенсивностей эмоций – аффектов). Как следует из предыдущего, когнитивная функция в свою очередь входит в функцию эффективности, которая является аддитивной составляющей экстремизируемого функционала.

В формируемой модели рассматриваются абсолютные распределения $\pi(\sigma_i), \vartheta(\sigma_i), \varepsilon^+(\eta_j), \varepsilon^-(\eta_j)$, а также условные распределения $\pi(\sigma_i|\eta_j)$; $\vartheta(\sigma_i|\eta_j)$; $\varepsilon^+(\eta_j|\sigma_i)$; $\varepsilon^-(\eta_j|\sigma_i)$. В соответствие со сделанными предположениями эти распределения зависят от когнитивных функций, для которых используется общее обозначение Cog(.), применительно к частным случаям обозначим их, соответственно, через $F_\pi(...)$; $F_\upsilon(...)$; $G_\varepsilon^+(...)$; $G_\varepsilon^-(...)$.

Конкретизация этих функций сопряжена с необходимостью сделать ряд дополнительных предположений.

Прежде всего, условные распределения участвуют в процессе рекурсии и потому зависят от двух моментов времени, например, $F_\pi(...)$ в более подробной записи имеет вид $F_\pi(i,j,t,t\text{-}1)$, и мы должны предположить, что она зависит от распределения $\varepsilon^+(\eta^+_{jt}|\sigma_{it-1})$, либо от «свернутых» распределений $\varepsilon^+(\eta^+_{jt-1});\pi(\sigma_{it-1})$. Аналогично распределение $F_\upsilon(i,j,t,t\text{-}1)$ можно поставить в зависимость от распределения $\varepsilon^-(\eta^-_{jt}|\sigma_{it-1})$, либо свернутых распределений $\varepsilon^-(\eta^-_{jt-1})$; $\vartheta(\sigma_{it-1})$. В рамках принятого частного допущения о том, что распределения предпочтений определяются только интенсивностью эмоций, а также, может быть «одноименными» предпочтениями, имеющими место не предыдущем шаге, какие-либо эндогенные и экзогенные факторы в функции $F_\pi(...)$ и $F_\upsilon(...)$ не включаются.

Распределения интенсивности эмоций $\varepsilon^+(\eta^+_{jt}|\sigma_{it-1})$ и $\varepsilon^-(\eta^-_{jt}|\sigma_{it-1})$ определяются когнитивными функциями $G_\varepsilon^+(i,j,t,t\text{-}1)$ и $G_\varepsilon^-(i,j,t,t\text{-}1)$, которые отражают «столкновение» эндогенных и экзогенных факторов – столкновение между потребностями и возможностями их удовлетворения. Потребности, как было сказано выше, условно подразделяются на *витальные*, *социальные* и *идеальные* (*когнитивные*).

На нижеследующей схеме представлена эта точка зрения. «Суммарная» когнитивная функция представляет собой композицию частных когнитивных функций трех типов.

Позитивные когнитивные функции $Cog_\varepsilon^+(\cdot)$ → Витальные $Cog_\varepsilon^+(vital)$

→ Социальные $Cog_\varepsilon^+(social)$

→ Идеальные $Cog_\varepsilon^+(cogn)$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \text{Витальные } Cog_\varepsilon^-(vital) \\
\text{Негативные когнитивные функции} & Cog_\varepsilon^-(\cdot) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Социальные } Cog_\varepsilon^-(social) \\
 & & \text{Идеальные } Cog_\varepsilon^-(cogn)
\end{tikzcd}
$$

Каждый раз когнитивные функции $Cog_\varepsilon^+(\cdot)$ и $Cog_\varepsilon^-(\cdot)$ должны быть отнесены к определенной альтернативе. В свою очередь каждая альтернатива сопряжена с потребностями всех трех видов, а также с соответствующим образом специализированными возможностями.

Витальная составляющая когнитивной функции выражена через потребные и располагаемые ресурсы, которые проявляют себя в виде материальных и энергетических ресурсов, обеспечивающих существование субъекта на уровне, соответствующем его статусу и рангу.

Социальные потребности, скорее всего, связаны с рейтинговой и ранговой позицией субъекта и возможностью ее изменения. Социальная компонента имеет место только при наличии группы.

Что касается идеальной компоненты, то здесь наряду с прочими факторами должна учитываться дихотомия «знание – вера», а также связь каждой проблемной ситуации с определенной системой этики.

Превращение этого последнего рассуждения в количественный образ – задача до конца не разрешенная и неразрешимая. Так, например, невозможно дать какие-либо оценки, связанные с верой.

Очевидно, что последовательную теорию с учетом социальной составляющей невозможно построить без введения в рассмотрение рейтинговых предпочтений и разработки модели подобной той, которая приведена выше для предметных предпочтений [83, 231]. Однако, не будучи столь категоричными, можно предположить, например, что путь к формализации «веры» лежит через теорию субъективной вероятности [54] (М. де Гроот).

Очевидно также, что граница между тремя компонентами когнитивной функции весьма условна и использование, например, аддитивной модели может рассматриваться лишь как первое и очень грубое приближение.

С определенным упрощением можно считать, что аргументами когнитивной функции являются полезности, либо вредности, либо ожидаемые полезности и вредности. Еще одним допущением, которое уже нашло свою реализацию в приведенной выше двухслойной модели, - разделение позитивной и негативной ветвей генерации предпочтений. Вопрос о том, где, когда и на каком этапе работы алгоритма эти ветви «встречаются», требует дальнейшего анализа.

В данный момент мы полагаем, что позитивная когнитивная функция $G^+(...)$ и ее компоненты выражаются через соответствующие полезности $U_k (i \in \overline{1,3})$ или ве-

личины $\bar{U}_k \approx U_k P(U_k)$, где $P(U_k)$ – субъективная вероятность достижения уровня полезности U_k.

Аналогию для негативной когнитивной функции и ее компонент в качестве аргумента могут быть использованы вредности $L_k (k \in \overline{1,3})$ или величины $\bar{L}_k = L_k \cdot P(L_k)$, где $P(L_k)$ - субъективная вероятность условия $L \geq L_k$ (конечно, если U_k и L_k имеют дискретный спектр значений). В более общем смысле, если предположить существование распределений $P(U)$ и $P(L)$, в качестве аргументов когнитивных функций можно воспользоваться математическими ожиданиями полезностей и вредностей.

Все введенные величины являются действительными и положительными, «привязанными» каждый раз к определенной альтернативе σ_i. Обозначим через $\bar{U}(\sigma_i)$ результирующую полезность – функцию частных полезностей $\bar{U}_1(\sigma_i)$, $\bar{U}_2(\sigma_i)$, $\bar{U}_3(\sigma_i)$ (социальных, идеальных)

$$\bar{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\sigma}_i) = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{U}}_1(\boldsymbol{\sigma}_i), \bar{\boldsymbol{U}}_2(\boldsymbol{\sigma}_i), \bar{\boldsymbol{U}}_3(\boldsymbol{\sigma}_i))$$

В наиболее простом случае $\bar{U}_1(\sigma_i)$ может быть взвешенной суммой частных полезностей.

$$\bar{\boldsymbol{U}}_1(\boldsymbol{\sigma}_i) = \sum_{q=1}^{3} \boldsymbol{\lambda}_q \cdot \bar{\boldsymbol{U}}_q(\boldsymbol{\sigma}_i)$$

Аналогично введем функцию вреда

$$\bar{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{\sigma}_i) = \sum_{q=1}^{3} \boldsymbol{\mu}_q \bar{\boldsymbol{L}}_q(\boldsymbol{\sigma}_i).$$

Такая аддитивная форма не учитывает взаимной зависимости между $\bar{\boldsymbol{U}}_1, \bar{\boldsymbol{U}}_2, \bar{\boldsymbol{U}}_3$ (также между $\bar{\boldsymbol{L}}_1, \bar{\boldsymbol{L}}_2, \bar{\boldsymbol{L}}_3$), а также того обстоятельства, что вообще, затруднительно выделить в «чистом» виде эти частные полезности (вредности). Ситуация осложняется так же тем, что размерности частных полезностей в общем случае различны, а приведение всей модели к безразмерному виду (как это делается, например, в гидродинамике) весьма проблематично. Исключение может составить тот случай, когда удается использовать универсальную шкалу измерения потребностей и возможностей (например, деньги).

Заметим, что функции $\bar{\boldsymbol{L}}_1, \bar{\boldsymbol{L}}_2, \bar{\boldsymbol{L}}_3$ могут отражать опасности и угрозы, возникающие в процессе функционирования системы. Тогда соответствующая функция эффективности приобретает смысл функции риска [91].

Полезности и вредности берутся в момент *t*, то есть в тот момент, к которому относится вычисляемая условная напряженность. В дополнение, исходя из общих соображений, можно предположить, что эмоции – аффекты в данный момент *t* зависят от «свернутых» эмоций, имеющих место в предыдущий момент *t* – 1, а также «свернутых» предпочтений в момент *t* – 1:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\boldsymbol{\eta}^+_{jt-1}); \boldsymbol{\varepsilon}^-(\boldsymbol{\eta}^-_{jt-1}); \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_{it-1}); \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\sigma}_{it-1})$$

На слое эмоций – аффектов также должны играть роль этические императивы (или, говоря более точно – система этики), которые могут быть количественно

учтены с помощью весовых функций $\pi(I_k)$. Учет этических императивов в рамках однослойной модели обсуждался в [83, 231].

Наконец, возникает вопрос о взаимозависимости и взаимовлиянии различных эмоций и предпочтений друг на друга, в том числе, взаимовлияние позитивной и негативной ветвей процесса генерации предпочтений. Именно, при формировании когнитивных функций это взаимовлияние («скрещивание») может быть реализовано.

Естественно потребовать, чтобы выполнялись предельные условия для интенсивностей эмоций:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ï ðè}\,\bar{U}_j(\sigma_i)\to 0;\varepsilon_0^+(\eta_{jt}^+|\sigma_{it-1})\to 0;\\ \text{ï ðè}\,\bar{U}_j(\sigma_i)\to \infty;\varepsilon_0^+(\eta_{jt}^+|\sigma_{it-1})\to 1;\\ \text{ï ðè}\,\bar{L}_j(\sigma_i)\to 0;\varepsilon_0^-(\eta_{jt}^-|\sigma_{it-1})\to 0;\\ \text{ï ðè}\,\bar{L}_j(\sigma_i)\to \infty;\varepsilon_0^-(\eta_{jt}^-|\sigma_{it-1})\to 1; \end{array}\right\}. \tag{5.2.51}$$

Нетрудно показать, что эти условия удовлетворяются, если распределения интенсивности выбрать в виде:

$$\varepsilon_{0ij}^+ = \frac{\bar{U}_{ij}\cdot e^{\beta_\varepsilon^+\bar{U}_{ij}}}{\sum_{q=1}^{N^+}\bar{U}_{iq}\cdot e^{\beta_\varepsilon^+\bar{U}_{iq}}}; \tag{5.2.52}$$

либо

$$\varepsilon_{0ij}^+ = \frac{\bar{U}_{ij}\cdot e^{-\beta_\varepsilon^+(\bar{U}_{ij})^{-1}}}{\sum_{q=1}^{N^+}\bar{U}_{iq}\cdot e^{-\beta_\varepsilon^+(\bar{U}_{iq})^{-1}}}; \tag{5.2.53}$$

а также

$$\varepsilon_{0ij}^- = \frac{\bar{L}_{ij}\cdot e^{\beta_\varepsilon^-\bar{L}_{ij}}}{\sum_{q=1}^{N^-}\bar{L}_{iq}\cdot e^{\beta_\varepsilon^-\bar{L}_{iq}}}; \tag{5.2.54}$$

либо

$$\varepsilon_{0ij}^- = \frac{\bar{L}_{ij}\cdot e^{-\beta_\varepsilon^-(\bar{L}_{ij})^{-1}}}{\sum_{q=1}^{N^-}\bar{L}_{iq}\cdot e^{-\beta_\varepsilon^-(\bar{L}_{iq})^{-1}}} \tag{5.2.55}$$

Здесь индекс «0» означает, что эти распределения нормированы на единицу. Различие между (5.2.52) и (5.2.53) и, соответственно, между (5.2.54) и (5.2.55) заключается в поведении этих распределений в области начала координат (по $\bar{U}_{ij}$ либо $\bar{L}_{ij}$).

В сумме (5.2.52) и (5.2.54) эмоции «возникают» мгновенно (в момент появления стимула) и нарастают с конечным «ускорением»:

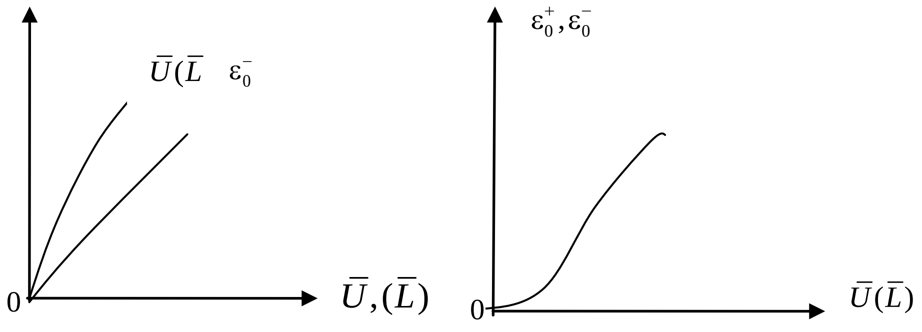
производные

$$\left.\frac{\partial \varepsilon^{+}_{0ij}}{\partial \bar{U}_{ij}}\right|_{\bar{U}_{ij}=0} > 0; \left.\frac{\partial \varepsilon^{-}_{0ij}}{\partial \bar{L}_{ij}}\right|_{\bar{L}_{ij}=0} > 0\,; \tag{5.2.56}$$

Более реалистичными представляются распределения (5.2.54) и (5.2.55), для которых темп роста вначале координат равен нулю:

$$\left.\frac{\partial \varepsilon^{+}_{0ij}}{\partial \bar{U}_{ij}}\right|_{\bar{U}_{ij}=0} = 0; \left.\frac{\partial \varepsilon^{-}_{0ij}}{\partial \bar{L}_{ij}}\right|_{\bar{L}_{ij}=0} = 0 \tag{5.2.57}$$

Поведение распределений ε_0^{+} и ε_0^{-} вблизи начала координат в случаях (5.2.56) и (5.2.57) показано на рис. 5.2.3 а и 5.2.3 в.



(а) Рис. 5.2.3 (в)

Таким образом, для того, чтобы удовлетворить условие (5.2.51), а также условие (5.2.57), как более приемлемое по сравнению с условием (5.2.56) когнитивная функция должна иметь вид:

$$G^{+}_{\varepsilon ij} = -\bar{U}_{ij}^{-1} + \frac{1}{\beta_{\varepsilon}^{+}} \cdot \ln \bar{U}_{ij} \tag{5.2.58}$$

Общая схема построения когнитивных функций G^{+} и G^{-} в зависимости от экзогенных факторов описана выше. Мы, однако, можем предположить, сто они определенным образом непосредственно зависят от «свернутых» распределений $\pi(\sigma_{it-1}); \vartheta(\sigma_{it-1}); \varepsilon^{+}(\eta^{+}_{jt-1}); \varepsilon^{-}(\eta^{-}_{jt-1})$, хотя такая зависимость уже реализуется с помощью уравнений «свертки».

Заметим, что распределения ε^{+}_{0ji} и ε^{-}_{0ji} скорее всего, зависят не только от стимулов, действующих в данный момент, но также «предыстории» эмоций, т.е. от эмоций, имевших место в предыдущие «моменты» времени и, конечно от эмоций «противоположного знака». Четкое разграничение эмоций по «качественному» признаку (витальный, социальный, идеальный) также затруднительно, если вообще возможно. Построение «смешанных» распределений – дело будущего. Частично этот вопрос решается путем использования рекурсивных моделей подобных тем, которая предлагается в настоящей работе.

Наконец, при построении когнитивных функций могут быть задействованы взаимные полезности, если речь идет о генерации распределения рейтингов [83, 231], а также построенные по аналогии взаимные «вредности».

Подобные рассуждения можно провести относительно когнитивных функций $F^{+}_{\pi ij}, F^{-}_{\vartheta ij}$.

Следующий вопрос является вполне законным и ответ на него может породить новую ветвь теории когнитивных функций.

Естественно предположить, что эмоции порождаются не самой проблемно-ресурсной ситуацией, точнее – не только ситуацией, имеющей место в данный момент времени, но ее изменением, – темпом изменения.

Рассмотрим примеры, в которых высказанная мысль находит подтверждение.

1. Пример из области безопасности полетов:

На борту самолета в полете возник пожар. Имеется ограниченное (располагаемое) время t^{disp}, и потребное время до посадки на ближайшем аэродроме t^{veq}. Изменение разности $t^{disp} - t^{veq}$ формирует динамику эмоций экипажа.

2. Из области парусного спорта:

Парусная регата «Америкен Кап». На последнем этапе соревнуются две яхты. Наибольшее эмоциональное напряжение возникает, когда нет существенного преимущества ни одной из яхт. По мере увеличения отрыва одной из яхт, нарастают позитивные эмоции экипажа этой яхты, соответственно, негативные эмоции другого экипажа. Если же преимущество одной из яхт становится большим и практически непреодолимым для другой яхты, накал эмоций экипажей обеих яхт снижается или, по крайней мере, стабилизируется до самого конца гонки.

3. «Альпинизм».

По мере продвижения к вершине возрастают положительные эмоции, причем их интенсивность зависит не только от текущего положения, но и от «скорости» приближения к вершине.

Если S – проблемно – ресурсная ситуация, а $\dot{S} = \dfrac{\partial S}{\partial t}$ - ее обобщенная производная («rate of change»), то следует считать, что $\dot{S}$ наряду с S может быть аргументом когнитивной функции.

Фактор, который влияет на формирование эмоций и предпочтений - система этики, или система этических императивов. В [83] отмечалось, что императивы можно поделить на два класса: «поощрительные» и «запретительные» с некоторыми оттенками, конечно. В [83] они обозначались через I_k^+ и I_k^-, а все их множество в данной системе этики S_I. В общем случае императивы этики не являются «категорическими». На практике все «категорические» императивы реализуются как гибкие («мягкие» – tender), допускающие взаимное сопоставление (например, с весами $\pi^+(I_k^+)$ и $\pi^-(I_k^-)$, заключенными в интервале [0, 1]). Некоторые модели предпочтений с учетом этических императивов содержатся в [83]. Теперь мы переносим их учет на уровень эмоций.

Веса $\pi^+(I_k^+)$ и $\pi^-(I_k^-)$ нормируются, например, в виде условия:

$$\sum_{k=1}^{L_1}\pi^+(I_k^+)+\sum_{k=1}^{L_2}\pi^-(I_k^-)=1$$

Этическая система является наиболее консервативной частью проблемно-ресурсной ситуации и в этом смысле веса π_k^+ и π_m^- в пределах времени разрешения проблемно-ресурсной ситуации считаются заданными и фиксированными.

Продолжим обсуждение структуры когнитивных функций с учетом приведенных рассуждений. Характер зависимости $G^+(i,j,t,t-1)$ от $\bar{U}_{ijt}$ и $G^-(i,j,t,t-1)$ от $\bar{U}_{ijt}$ мы уже выше установили. Заметим только, что в данной модели берется их значение в момент t. Далее предположим, что G^+ и G^- являются функциями от $\pi(\sigma_{it-1}),\vartheta(\sigma_{it-1})$; $\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+),\varepsilon^-(\eta_{jt-1}^-)$, взятых в момент t-1. Таким образом, G^+ и G^- зависят, скорее всего, от «свернутых» предпочтений и «свернутых» интенсивностей эмоций – аффектов. Наконец, они могут быть функциями от $\pi^+(I_k^+|\sigma_i)$ и $\pi^-(I_m^-|\sigma_i)$.

Например, в качестве условного распределения $\varepsilon^+(\eta_i|\sigma)$ может быть выбрана, например, функция

$$\varepsilon^+(\eta_{it}^+|\sigma_{it-1})=\mu_{t,t-1}^+\frac{\varepsilon^+(\eta_{it-1}^+)\bar{U}_{ijt}e^{-\beta_\varepsilon^+(\bar{U}_{ijt})^{-1}}}{\sum_{q=1}^{M^+}\varepsilon^+(\eta_{qt-1}^+)\bar{U}_{iqt}e^{-\beta_\varepsilon^+(\bar{U}_{iqt})^{-1}}} \qquad (5.2.59)$$

В этом случае, если $\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)=0$, то и $\varepsilon^+(\eta_{it}^+|\sigma_{it-1})=0$, то есть в этом случае распределение (5.1.158) консервативно. Однако, в виду условия нормировки все $\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)$ не могут быть одновременно равны нулю, за исключением случая, когда «вырождение» интенсивности эмоций происходит в результате «вырождения» нормировочных коэффициентов.

В аналогичном виде можно выбрать распределение $\varepsilon^-(\eta_{jt}^-|\sigma_{it-1})$.

В соответствие со сделанным ранее предположением, когнитивные функции в распределениях предпочтений не зависят непосредственно от полезностей $\bar{U}_{ijt}$ и вредностей $\bar{L}_{ijt}$, а также от $\pi^+(I_k^+|\sigma_i)$ и $\pi^-(I_m^-|\sigma_i)$. Однако они определяются в виде зависимостей от $\pi(\sigma_{it-1});\vartheta(\sigma_{it-1})$; $\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+),\varepsilon^-(\eta_{jt-1}^-)$.

Для условных распределений $\pi(\sigma_{it}|\eta_{jt-1}^+)$ и $\vartheta(\sigma_{it}|\eta_{jt-1}^-)$ также существует несколько возможностей.

Так, для $\pi(\sigma_{it}|\eta_{jt-1}^+)$ может быть, например, использовано следующее представление:

$$\pi(\sigma_{it}|\eta_{it-1}^+)=\xi_{t,t-1}^+\frac{\pi(\sigma_{it-1})e^{\beta_\pi^+\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\pi(\sigma_{it-1})}}{\sum_{q=1}^{N}\pi(\sigma_{qt-1})e^{\beta_\pi^+\varepsilon^+(\eta_{jt-1}^+)\pi(\sigma_{qt-1})}} \qquad (5.2.60)$$

В знаменателе используется одинарное суммирование. При этом в показателе не может иметь место аддитивная форма относительно ε^{+} и π, так как в этом случае множитель, содержащий ε^{+}, был бы сокращен.

Аналогичная структура может быть применена для распределения $\vartheta(\sigma_{it} \left| \eta^{-}_{jt-1} \right.)$:

$$\vartheta(\sigma_{it} \left| \eta^{-}_{jt-1} \right.) = \xi^{-}_{t,t-1} \frac{\vartheta(\sigma_{it-1}) e^{\beta^{-}_{\vartheta} \varepsilon^{-}(\eta^{-}_{jt-1}) \vartheta(\sigma_{it-1})}}{\sum_{q=1}^{N} \vartheta(\sigma_{q,t-1}) e^{\beta^{-}_{\vartheta} \varepsilon^{-}(\eta^{-}_{jt-1}) \vartheta(\sigma_{q,t-1})}} \qquad (5.2.61)$$

Один из выводов из предыдущих построений сводится к тому, что распределения условных предпочтений и условных интенсивностей аффектов – эмоций справа должны зависеть только от «свернутых» распределений на предыдущем временном шаге. Этот вывод является следствием рассмотренного синтеза распределений как временного процесса, и может быть принят как дополнительная гипотеза.

5.2.2.5. О взаимовлиянии позитивной и негативной ветвей

Как мы уже говорили выше, безусловно, существует взаимодействие и взаимовлияние позитивных и негативных эмоций – аффектов. В связи с предложенным вариантом модели генерации предпочтений возникает вопрос, каков гипотетический механизм этого взаимовлияния. В каком «месте» модели следует его учесть. «apriori» существует несколько возможностей:

1. Учет взаимовлияния на этапе формирования основного функционала (т.е. использование общего функционала для позитивных и негативных эмоций). В этом случае нужно исследовать возможность совместного нормирования интенсивностей эмоций обеих знаков.

2. Построение когнитивных функций, одновременно учитывающих как позитивные, так и негативные факторы (обстоятельства) и отражающих их «конкуренцию».

3. Испытание моделей, в которых взаимовлияние имеет место только на уровне эмоций, или только на уровне предпочтений, либо одновременно на уровне эмоций и на уровне предпочтений.

Заманчивой, но трудно реализуемой перспективой является задача формирования единого, общего критерия субъективной оптимальности. напомним, что в описанной выше модели используется несколько функционалов для каждого типа эмоций и каждого типа предпочтений (позитивных и негативных). Это очевидный недостаток модели. При этом разделение на позитивные и негативные эмоции, позитивные и негативные предпочтения следует сохранить, так как это разделение позволяет производить более детальный анализ и, кроме того, соответствует сложившимся в психологии представлениям.

Взаимовлияние, о котором идет речь, удобно называть «формальным», если оно осуществляется исключительно через совместные условия нормировки и «органическим», если оно определяется помимо нормировки через когнитивные функции в объединенных функционалах.

5.3. Специальные задачи динамики предпочтений

5.3.1. Конкуренция идей. Одна модель социодинамики

Конструируемая модель имеет много общего с моделями рекламной компании представленными в п.5.2.2. В качестве конкурирующих «товаров» выступают идеи, предлагаемые сообществу, в результате чего происходит его разделение на подгруппы – «популяции» нейтралов и последователей (политических учений политической партии или политического лидера, религиозной концепции…). Эта задача относится к области науки, которая оформилась как социодинамика […].

В отличие от моделей, рассмотренных ранее, здесь будут учтены дополнительные факторы и приняты дополнительные правдоподобные допущения.

При определении характеристик эффективности информационного воздействия на нейтралов учитывается соотношение предметных предпочтений $\pi(\sigma_i)$, отражающихся на прогнозируемую (обещанную) выгоду от вхождения в ту или иную коалицию, а также соотношение рейтингов членов подпопуляций, уже достигнутое к данному моменту. В свою очередь рейтинги определяются как интегральные $\xi(j)(j \in \overline{1,N})$, зависящее от численностей подпопуляций M_j. Чем больше численность последователей идеи σ_j, тем выше их рейтинг. Воздействие на каждого индивидуума осуществляется двояко: в виде прямой пропаганды и в результате информационного взаимодействия членов социума между собой.

При этом в модели учитываются только парные взаимодействия. Тройные и *n* - арные взаимодействия (например, эффект толпы) в данном случае исключены. В модель введены члены, которые описывают перевербовку, а также слагаемые, которые отражают «эффект тесноты», либо кумулятивный эффект.

Важным отличием модели является учет энтропийных порогов. Предполагается, что разделение на популяции происходит только после того, как в результате информационного воздействия будет преодолен тот или иной энтропийный порог, отделяющий «царство свободы» от «царства необходимости» для индивидуума.

Уравнения, описывающие изменение экзогенных и эндогенных переменных не следуют из какого-либо вариационного принципа. В этом смысле мы отступаем от позиции Эйлера о всеобъемлющей роли оптимизационных принципов.

Однако, в некоторых случаях уравнения динамики популяций могут быть получены на основе такого принципа. Рассмотрим пример, когда можно получить уравнения типа Лотки-Вольтерра, используя принцип Джейнса.

Пусть M_0 – численность всей популяции, а численность подпопуляций M_j, причем

$$\sum_{j=1}^{k} M_j = M_0$$

Обозначим $v_j = M_j \cdot M_0^{-1}$ - индекс-структуры так, что $\sum_{j=1}^{k} v_j = 1$; (k – количество классов эквивалентности).

Введем энтропию индексов:

$$H_v = \sum_{j=1}^{k} v_j \ln v_j$$

и предположим, что распределение индексов максимизирует критерий:

$$\Phi_v = -\sum_{j=1}^{k} v_j \ln v_j + \beta \sum_{j=1}^{k} v_j f_j + \gamma \sum_{j=1}^{k} v_j$$

Соответствующее каноническое распределение имеет вид: $v_j = \dfrac{e^{\beta f_j}}{\sum_{q=1}^{k} e^{\beta f_q}}$.

Из этой формулы следует уравнение

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \beta(\varepsilon_j - \sum_{q=1}^{k} \varepsilon_q \cdot v_q) v_j, \tag{5.3.1}$$

которое представляет собой специальный случай уравнения Лотки-Вольтерра.

Рассмотрим далее случай, когда имеется две альтернативных идеи σ_1 и σ_2 $:\left(S_a : (\sigma_1, \sigma_2)\right)$ и два «оператора». Каждый из них старается максимизировать численность группы последователей «своей» идеи σ_i. В каждый момент времени вся популяция состоит из «нейтралов»: $M_0 - M_1 - M_2$, последователей первой идеи $\sigma_1 : M_1$ и последователей второй идеи $\sigma_2 : M_2$ (рис…).

На «рынке» идей появляется две конкурирующие идеи, которые делят всю группу на подгруппы.

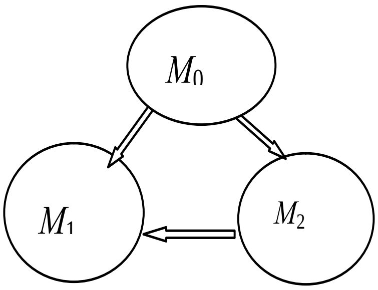


Рис.5.3.1

Стрелки на рис.5.3.1. показывают взаимодействия. Модель рассматривает прямую агитацию (медиа средства и любые другие) и непрямую агитацию, проводимую последователями одной из идей при контакте с нейтралами, а также «переевербовку», когда сталкиваются приверженцы различных идей.

Принимаются следующие допущения:

– эффективность прямой агитации зависит от соотношения предпочтений I рода;

– эффективность косвенной агитации зависит от авторитета представителей данной подгруппы, которые оцениваются через соотношение соответствующих рейтингов;

– эффективность перевербовки зависит от отношения рейтингов;

– только парное взаимодействие принимается во внимание;

– «эффект толпы» исключается.

Описываемый механизм начинает работать только тогда, когда энтропия соответствующего распределения предпочтений становится меньше ее порогового значения, которое является экзогенной характеристикой членов данной группы (субгруппы), более того, для упрощения предполагается, что энтропийные пороги одинаковы для всех членов группы.

Учет этого обстоятельства осуществляется с помощью введения в модель «барьерных функций»: $\varphi_1(H_\pi), \varphi_2(H_\pi), \psi(H_\xi)$. Используется релаксационная модель, чтобы описать асимптотическую сходность мгновенных величин предпочтений к каноническим распределениям.

Система уравнений, которая отражает введенные выше допущения, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{dM_1}{dt} = \left[\varphi_1(H_\pi)\cdot a_{10}\frac{\pi_1(\sigma_1)}{\pi_1(\sigma_2)} - \psi(H_\xi)\beta_{10}\frac{\xi_1}{\xi_2}\cdot M_1\right]\cdot \\ \cdot(M_0 - M_1 - M_2) + \delta_{10}\psi(H_\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\xi_0}\right)M_1, M_2 \pm \mu_1 M_1^2\end{gathered} \tag{5.3.2}$$

$$\begin{gathered}\frac{dM_2}{dt} = \left[\varphi_2(H_\pi)\cdot a_{20}\frac{\pi_2(\sigma_2)}{\pi_2(\sigma_1)} + \psi(H_\xi)\beta_{20}\frac{\xi_2}{\xi_1}\cdot M_2\right]\cdot \\ \cdot(M_0 - M_1 - M_2) + \delta_{10}\psi(H_\xi)\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - \frac{\xi_1}{\xi_2}\right)M_1, M_2 \pm \mu_2 M_2^2\end{gathered} \tag{5.3.3}$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\xi_j}}\cdot\xi_j + \frac{1}{\tau_\xi}\cdot\frac{e^{\varepsilon\frac{M_j}{M_0}}}{e^{\varepsilon\frac{M_1}{M_0}} + e^{\varepsilon\frac{M_2}{M_0}}}; (j\in\overline{1,2}) \tag{5.3.4}$$

$$\frac{d\pi_j(\sigma_i)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\pi_{ij}}}\pi_j(\sigma_i) + \frac{1}{\tau_\pi}\cdot\frac{e^{p\hat{V}_{ji}\xi_j}}{e^{pV_{j1}\xi_j} + e^{p\hat{V}_{j2}\xi_j}}; (j\in\overline{1,2}; i\in\overline{1,2}) \tag{5.3.5}$$

Уравнения (5.3.2) и (5.3.3) описывают динамику численностей субпопуляций M_1 и M_2. Функции $\varphi_1(H_\pi), \varphi_2(H_\pi), \psi(H_\xi)$ являются барьерными функциями, включающими или выключающими соответствующие эффекты в зависимости от факта выполнения необходимых условий, выраженных через соотношение текущих энтропий $H_{\pi 1}, H_{\pi 2}, H_\xi$:

$$H_{\pi i} = -\big(\pi_i(\sigma_1)\ln\pi_i(\sigma_1) + \pi_i(\sigma_2)\ln\pi_i(\sigma_2)\big); (i\in\overline{1,2}) \tag{5.3.6}$$

$$H_\xi = -(\xi_1\ln\xi_1 + \xi_2\ln\xi_2) \tag{5.3.7}$$

Первые слагаемые в квадратных скобках уравнений (5.3.2) и (5.3.3) характеризуют эффективность «агитации» (бигборды, телевидение, радио и т.д.). Коэффициенты a_{10} и a_{20} отражают эффективность этого вида информационного воздействия, которое также зависит от величины относительного ожидания, выражаемого через отношение предметных предпочтений.

Уравнения (5.3.4) и (5.3.5) описывают процесс быстрой адаптации текущих распределений предпочтений к мгновенным значениям канонических распределений. Скорость адаптации определяется величиной параметров $\tau_{\pi_{ij}}$ и τ_ξ.

Модели барьерных функций можно принять в виде:

$$\varphi_1(H_\pi)=\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\pi_1}-H_{\pi_1})\right)^{\frac{1}{p}}+1;$$

$$\varphi_2(H_\pi)=\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\pi_2}-H_{\pi_2})\right)^{\frac{1}{p}}+1; \qquad (5.3.8)$$

$$\varphi(H)=\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\xi}-H_{\xi})\right)^{\frac{1}{p}}+1.$$

Здесь $H^*_{\pi_1}$, H^*_{ξ} - пороговые значения энтропий. Параметр p принимается ~ 200-300. При этом функции $\varphi_i(H_\pi), \psi(H_\xi)$ весьма близки к функциям Хэвисайда.

Вместо уравнения (5.3.5) для пороговых функций в расчетах использована также адаптивная модель

$$\frac{d\varphi_1(H_\pi)}{dt}=-\frac{1}{\tau_\varphi}\varphi_1(H_\pi)+\frac{1}{\tau_\varphi}\left(\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\pi_1}-H_{\pi_1}\right)^{\frac{1}{p}}+1\right);$$

$$\frac{d\varphi_2(H_\pi)}{dt}=-\frac{1}{\tau_\varphi}\varphi_2(H_\pi)+\frac{1}{\tau_\varphi}\left(\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\pi_2}-H_{\pi_1}\right)^{\frac{1}{p}}+1\right);$$

$$\frac{d\psi(H_\xi)}{dt}=-\frac{1}{\tau_\psi}\psi(H_\xi)+\frac{1}{\tau_\xi}\left(\left(\frac{2}{\pi}arctg(H^*_{\xi}-H_{\xi}\right)^{\frac{1}{q}}+1\right).$$

Модель содержит структурные константы: α_{10}, β_{10}, δ_{10}.

В уравнениях (5.3.2) и (5.3.3) содержатся члены:

…+ $\delta_{10}\psi(H_\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi_k}-\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)M_1,M_2$ и …+ $\delta_{10}\psi(H_\xi)\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}-\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)M_1,M_2$, которые отвечают за «перевербовку», возможную при встрече сторонников разных идей. Здесь δ_{10} – вероятность такой встречи, количество «перевербованных» пропорционально произведению численности обеих «подпопуляций», а «направление» перевербовки определяется множителем $\left(\frac{\xi_k}{\xi_j}-\frac{\xi_j}{\xi_k}\right)$, где ξ_k и ξ_j - рейтинги и «встречающихся» субъектов. Как уже было сказано, учитываются только «парные столкновения». Барьерная функция такова, что эффективным может быть только «столкновение», когда $\psi(H_\xi)\cong 1$. Наконец, в уравнения (5.3.2) и (5.3.3) включены члены, которые описывают «кумулятивный» эффект либо эффект «тесноты»: $\mu_j M_j^2$.

Предполагается, что μ_j непостоянно и зависит от обстоятельств. В частности μ_j может менять знак, если соответствующая энтропия преодолевает некоторый барьер «снизу – вверх», то есть выполняется следующее правило:

$$\mu_j \le 0,\ \text{если}\ H_\pi \le \overline{H_\pi}\ \text{и}\ \mu_j > 0,\ \text{если}\ H_\pi > \overline{H_\pi},$$

где $\overline{H_\pi}$ - верхний энтропийный порог, выше которого проявляется «комулятивный» эффект и ниже которого – эффект «тесноты».

Пороговые значения энтропий остаются внешними параметрами и должны определяться экспериментально или на основе обработки ретроспективных данных.

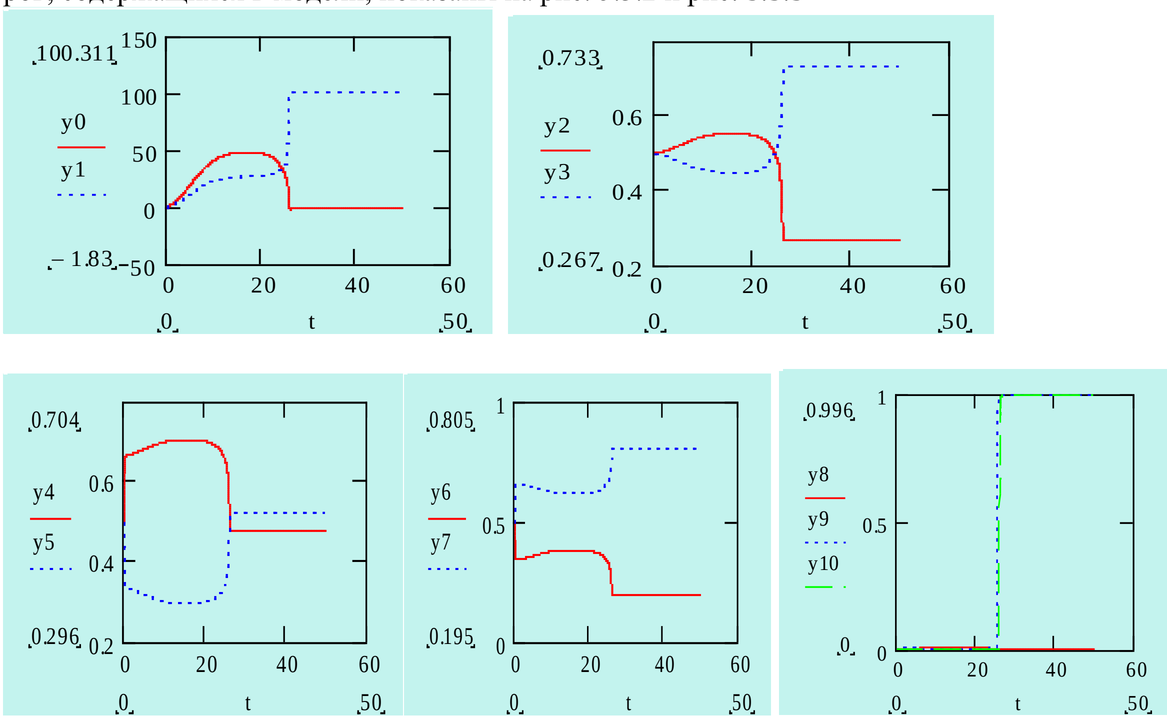
Модель содержит некоторое число структурных параметров. Смысл их ясен, меняя их, можно проводить параметрическое моделирование и оценивать влияние того или иного фактора и в целом изучать качественную картину.

Дальнейшее развитие этой задачи представляется следующим:

1. Изучение возникающих потоков информации по мере развития процесса.
2. Определение потребных затрат ресурсов для достижения прогресса.
3. Отработка оптимальных стратегий, в частности для достижения энтропийных порогов.
4. Учет тройных и *n*-арных «столкновений».
5. Расчет показателей острых возникающих конфликтов и, возможно, переходов «холодных» конфликтов в «горячие».

5.3.2. Результаты численного моделирования динамики конфликта идеологий

Результаты расчетов для частного случая задания конструктивных параметров, содержащихся в модели, показаны на рис. 5.3.2 и рис. 5.3.3



(a)

(c) (d) (e)

Рис. 5.3.2

Внешние конструктивные параметры модели и начальные условия выбраны следующим образом:

$\alpha_1 = 2; \beta_1 = 0,5; \delta_1 = 0,5; \mu_1 = 0,01; \mu_2 = 0,01$;

$\alpha_2 = 1,6; \beta_2 = 0,9002; \delta_2 = 0,5; \varepsilon = 2; \tau_{11} = 0,5$;

$\rho_j = 1; \tau_\xi = 0,1; M_0 = 100; p = 300$;

$H^*_{\pi_1} = 0,63; H^*_\xi = 0,65; \bar{U}_{11} = 2,38; \bar{U}_{12} = 1$;

$\bar{U}_{21} = 1; \bar{U}_{22} = 2,3; n = 1$

Использована модель жестких энтропийных порогов.

На графиках использованы следующие обозначения:

$$M_1 = y_0; M_2 = y_1; \xi_1 = y_2; \xi_2 = y_3;$$

$$\pi_1(\sigma_1) = y_4; \pi_1(\sigma_2) = y_5; \pi_2(\sigma_1) = y_6; \pi_2(\sigma_2) = y_7;$$

$$\varphi_1(H_\pi) = y_8; \varphi_2(H_\pi) = y_9; \psi(H_\xi) = y_{10}.$$

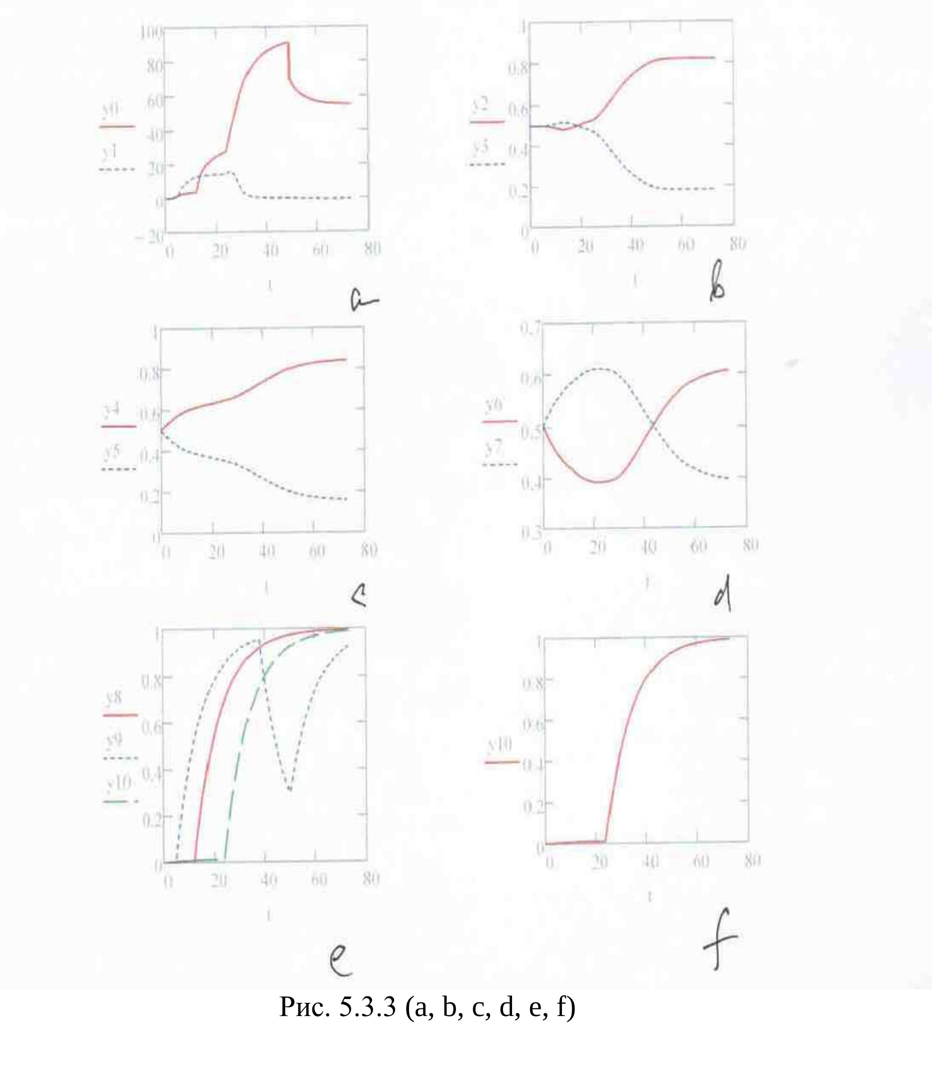


Рис. 5.3.3 (a, b, c, d, e, f)

На рис. 5.3.2 приведены результаты численного моделирования с помощью модели (5.3.2 – 5.3.8) расслоения социальной группы на «нейтралов» и сторонников «новой» «второй идеи». При этом имеет место, четко выраженное скачкообразное изменение всех переменных параметров в определенный момент времени, что связано с достижением «сверху» одного из энтропийных порогов.

Так, например, численность подгрупп M_1 и M_2 «скачкообразно» изменяются в момент, когда условное «время» равно примерно 25 единиц. В конкурентной борьбе выигрывает «вторая идея». Перед этим имела место конкуренция.

На рис. 5.3.3 представлены результаты, когда имеются как быстрые, резкие изменения численностей, так и «изломы» зависимости, которые также обязаны своим появлением наличию энтропийных порогов.

Графики на рис. 5.3.3 соответствуют следующим значениям структурных параметров и ___ условий: $\alpha_1 = 2{,}0$; $\alpha_2 = 1{,}0$; $\beta_1 = 0{,}5$; $\beta_2 = 0{,}5$; $\delta_1 = 0{,}5$; $\delta_2 = 0{,}5$; $\varepsilon = 2$; $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 10$; $\rho_1 = 1{,}0$; $\mu = 100$; $\rho = 300$; $H_0 = 0{,}670$; $H_1 = 0{,}689$; $H_2 = 0{,}692$; $\mu_1 = 0{,}5$; $\mu_2 = 0{,}4$; $V_{11} = 2{,}3$; $V_{12} = 1$; $V_{22} = 2{,}0$; $n = 1$; $y_0(0) = 0$; $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) = y_7(0) = 0{,}5$; $y_8(0) = y_9(0) = y_{10}(0) = 0$;

С помощью приведенной модели можно анализировать результат воздействия различных факторов на ход социального процесса.

В сочетании с расчетами затрат, направленных на изменение «параметров» модели, можно оценить эффективность мероприятий по достижению «победы» определенной «идеи».

6 МОДИФИКАЦИЯ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

6.1. Модификация вариационного принципа Эйлера – Лагранжа. Гибрид вариационного исчисления и принципа Джейнса

В вариационных задачах на условный экстремум используются неопределенные множители Лагранжа, которые после разрешения задачи в аналитическом виде вычисляются на основе изопериметрических условий, либо уравнений, описывающих алгебраические дифференциальные ограничения.

Предлагаемое развитие классического вариационного исчисления состоит в том, что коэффициенты Лагранжа заменяются на функции предпочтения $\pi(\sigma_i)$, где $\sigma_i \in S_a$ – альтернативы, принадлежащие множеству S_a. В данном случае изопериметрические условия с определенным значением интегрального критерия, заменяется понятием «альтернативы». В схему вводится «субъект», а система приобретает характер активной системы. Этот подход опубликован в монографиях [1]-[3], [103].

6.1.1. *Вывод основных соотношений в задаче с фиксированными концами экстремалей*

В качестве альтернатив выступают либо конечные состояния системы – «пункты назначения», когда система изначально находится в «позиции» σ_0, либо стратегии решения определенной проблемы. Далее будем обозначать функцию предпочтений $\pi_i(t)$, полагая, что распределение предпочтений изменяется со временем. Определим «мгновенную» субъективную энтропию, как и ранее формулой

$$H_\pi(t) = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \ln \pi_i(t). \tag{6.1}$$

Эта функция служит характеристикой степени неопределенности желаний субъекта активной системы в данный момент. Рассмотрим выражение

$$H_\pi = -\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) dt. \tag{6.2}$$

Можно показать, что энтропия H_π может быть записана также в виде:

$$\boldsymbol{H_\pi = -\lim_{\beta\to 1}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(\pi_i^\beta(t))}{\partial\beta}\right)}$$

Величину H_π можно трактовать как среднюю характеристику неопределенности, которая имеет место на отрезке $[t_1,\, t_2]$.

Пусть рассматривается задача вариационного исчисления с функционалом

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_1(x,\ \dot{x},\ t)dt \tag{6.3}$$

И изопериметрическим условием

$$J_2 = \int_{t_1}^{t_2} F_2(x,\ \dot{x},\ t)dt = K\,. \tag{6.4}$$

В вариационном исчислении необходимое условие экстремума получается путем приравнивания нулю первой вариации функционала

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1(x,\ \dot{x},\ t) + \lambda F_2(x,\ \dot{x},\ t)\right]dt \tag{6.5}$$

и имеет вид

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0\,, \tag{6.6}$$

где $F^* = F_1 + \lambda F_2$, а λ – неопределенный коэффициент Лагранжа, для определения которого служит изопериметрическое условие.

Учитывая, что имеет место двойственность в постановке изопериметрической задачи, функцию F^* можно записать в симметрическом виде:

$$F^* = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2\,. \tag{6.7}$$

Предлагаемая модификация вариационного принципа Эйлера-Лагранжа состоит в следующем:

1. В выражении расширенной функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i F_i \tag{6.8}$$

коэффициенты λ_i заменяются функциями предпочтения $\pi_i(t)$ (в общем случае зависящими от времени), либо вероятностями p_i, $\left(\sum_i p_i = 1\right)$.

2. Строится функционал

$$\Phi^* = (t_2 - t_1)H_\pi + \beta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)F_i dt + \gamma\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)dt\,. \tag{6.9}$$

С учетом (6.2) отсюда получаем

$$\Phi_\pi^* = \int_{t_1}^{t_2}\left(-\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)\ln\pi_i(t) + \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)F_i + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)\right)dt\,. \tag{6.10}$$

3. Параметр β рассматривается как эндогенная характеристика психики субъекта – носителя распределения предпочтений.Множителем Лагранжа является γ, поскольку условие $\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) = 1,\ (\forall t)$ используется как изопериметрическое ограничение.

4. Вариационный принцип, который объединяет классическую вариационную постановку, и вариационный принцип Джейнса выглядит следующим образом:

При выборе распределения $\pi_i(t)$ психика субъекта функционирует в соответствии с вариационным принципом:

$$\Phi_\pi^* = \int_{t_1}^{t_2} F_\pi^*(\pi,\ x,\ \dot{x},\ t)dt \to \max_{\pi_i \in \Pi,\ x \in X},$$

то есть

$$\pi_i = \arg\max_{\pi_i \in \Pi} \Phi_\pi^*, \tag{6.11}$$

где

$$F_\pi^* = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) F_i(x,\ \dot{x},\ t) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t). \tag{6.12}$$

В данном случае функции F_i отличаются структурой и величиной структурных параметров.

Отрезок $[t_1,\ t_2]$ отвечает условию, чтобы при $\forall t \in [t_1,\ t_2]$ сохранялась «проблемная» ситуация, структура функции F^*, эндогенные параметры.

Искомыми функциями в этой задаче являются $\pi_i(t)$ и $x(t)$. Необходимые условия экстремума записываются в обычной форме:

$$\frac{\partial F_\pi^*}{\partial \pi_i} = 0; \qquad \frac{\partial F_\pi^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\pi^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \tag{6.13}$$

или в форме:

$$\left.\begin{aligned} &-\ln \pi_i(t) - 1 + \beta F_i(x,\ \dot{x},\ t) + \gamma = 0 \\ &\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \frac{\partial F_i(x,\ \dot{x},\ t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \frac{\partial F_i(x,\ \dot{x},\ t)}{\partial \dot{x}} = 0 \end{aligned}\right\}; \tag{6.13'}$$

если $\beta \neq \beta(t)$ и:

$$\left.\begin{aligned} & -\ln \pi_i(t) - 1 + \beta F_i(x,\ \dot{x},\ t) + \gamma = 0 \\ & \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \frac{\partial F_i(x,\ \dot{x},\ t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \frac{\partial F_i(x,\ \dot{x},\ t)}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \end{aligned}\right\}; \quad (6.13'')$$

если $\beta = \beta(t)$.

Соотношения (6.7), либо (6.13'), (6.13") являются необходимыми условиями экстремума функционала (6.11) с подынтегральной функцией (6.12).

Последнее уравнение (6.13) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\ln \pi_i(t)\right] \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (6.14)$$

Поскольку $\dot{\pi}_i(t)$ определена уравнением

$$\dot{\pi}_i(t) = \beta \pi_i(t) \left(\dot{F}_i - \sum_{k=1}^{N} \pi_k(t) \dot{F}_k \right), \quad (6.15)$$

а $\dot{F}_i$ в свою очередь – соотношением

$$\dot{F}_i = \frac{\partial F_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad (6.16)$$

то видно, что (6.14) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной $x(t)$:

$$P\ddot{x} + Q\dot{x} + R = 0, \quad (6.17)$$

где коэффициенты P, Q, R должны быть заменены в виде (если $\beta \neq f(t)$)

$$P = \sum_{i=1}^{N} \left(-\beta \pi_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \right)^2 + \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \sum_{k=1}^{N} \pi_k \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}} - \pi_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}^2} \right), \quad (6.18)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \left(-\beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} + \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \sum_{k=1}^{N} \pi_k \frac{\partial F_k}{\partial x} - \pi_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial \dot{x}} \right), \quad (6.19)$$

$$R = \sum_{i=1}^{N} \left(\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial x} - \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial t} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} + \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \sum_{k=1}^{N} \pi_k \frac{\partial F_k}{\partial t} - \pi_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \dot{x}} \right). \quad (6.20)$$

Функции P, Q, R могут иметь в качестве аргумента $\dot{x}$. В случае, если они не зависят от $\dot{x}$, то уравнение (6.17) становится линейным относительно $\boldsymbol{x}$.

В связи с рассмотренной вариационной задачей возникают следующие вопросы:

1. Каков смысл интеграла от энтропии по временному промежутку $[t_1,\ t_2]$?

2. Каков механизм взаимосвязи между несколькими альтернативами, и каков смысл функций $\pi_i(t)$ в функционале?

3. Каков смысл и какова роль параметров β и γ (возможно, других структурных параметров) в функции F^*?

4. Каковы общие условия, накладываемые на функцию F^*?

Ответ на первый вопрос уже дан выше. Ответ на второй вопрос сводится к тому, что в каждый момент выбирается не «чистая» стратегия (соответствующая когнитивной функции F_i), но компромиссная, агрегированная стратегия, причем агрегирование носит линейный характер, когда в качестве весовых коэффициентов выбираются величины $\pi_i(t)$.

В связи с третьим вопросом скажем, что структурные параметры β, γ, … следует считать «внешними» по отношению к данному вариационному принципу, по крайней мере, параметр β не может быть заранее определен, так как значение функции эффективности

$$E = \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) F_i(x,\ \dot{x},\ t) \tag{6.21}$$

неизвестно заранее и изопериметрическое условие вида $E = E_0$, где E_0 – число, заданное априорно, не используется. Поэтому, β может считаться экзогенным параметром, задаваемым «вне вариационного принципа». Например, β характеризует степень «психического» или «эмоционального» нагрева. Итак, существует два варианта: либо E_0 считается известным, либо E_0 не фиксируется заранее, но задано значение параметра β.

В нашем случае принимается второй вариант.

Поскольку распределение $\pi_i(t)$ по форме совпадает с распределением Гиббса в физической кинетике, где $\beta = \dfrac{1}{T}$, а T – абсолютная температура, то в данном случае, применительно к распределению $\pi_i(t)$, величину β^{-1} можно рассматривать как психическую (или эмоциональную) температуру T_{subj}.

Условия существования решения сформулированной вариационной задачи даются следующей теоремой:

<u>Теорема 1</u>

Пусть когнитивные (парциальные) функции $F_i(x,\ \dot{x},\ t)$ *имеют непрерывные частные производные первого порядка по* x *и по* t *и непрерывные частные производные первого и второго порядка по* $\dot{x}$ *на отрезке* $[t_1,\ t_2]$, *а функция* $F_i(x,\ \dot{x},\ t)$ *нигде на отрезке* $[t_1,\ t_2]$ *не обращается в нуль. Тогда необходимым условием существования экстремума вариационной задачи с функционалом* (6.12) *являются условия* (6.13) *либо* (6.13') *при* $\beta \neq f(t)$ *и* (6.13'') *если* $\beta = \beta(t)$.

В связи с соотношениями (6.17) – (6.20) очевидны два простых частных случая:

1. $F_i = F_i(x,\ t),\ \forall i \in \overline{1,\ N}$, т.е. $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \equiv 0$. Согласно (6.18) и (6.19) $P = Q = 0$, но тогда из (6.17) следует, что $R = 0$, причем

$$R = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0. \tag{6.22}$$

Следует вывод, что вектор $\vec{\pi} = (\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N)$ и вектор $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial F_N}{\partial x}\right)$ ортогональны:

$$\vec{\pi} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0. \tag{6.23}$$

2. Когнитивные функции зависят только от $\dot{x}$. Тогда, как видно из (6.19) и (6.20) $Q \equiv R \equiv 0$ и уравнение (6.17) принимает вид:

$$P\ddot{x} = 0. \tag{6.24}$$

Поскольку $P \neq 0$, а также еще и

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \neq 0; \tag{6.25}$$

то

$$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = D_1; \qquad x = D_1 t + D_2. \tag{6.26}$$

То есть, величина x изменяется линейно со временем. И, например, если в качестве F_i выступает кинетическая энергия: $F_i = \dfrac{1}{2} m_i \dot{x}^2$, то $\dot{x}$ оказывается по-

стоянной величиной, так как $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} = m_i \dot{x}$, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} = m_i \ddot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = D_1 = const$.

В чем состоит смысл первой задачи, где все функции F_i зависят от одной и той же переменной $x(t)$? Функции могут различаться значениями структурных коэффициентов, принадлежащими, в данном случае, конечному множеству, выбор из которого осуществляется пропорционально функциям $\pi_i(t)$, и которые, в свою очередь, в этом вырожденном случае оказываются постоянными величинами.

3. Если $F_i = F_i(\dot{x}, t)$, то $Q \equiv 0$, но $P \neq 0$ и $R \neq 0$,

$$R = \sum_{i=1}^{N}\left(-\beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} + \beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} \sum_{k=1}^{N} \pi_k \frac{\partial F_k}{\partial t} - \pi_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}\partial t} \right), \quad (6.27)$$

тогда уравнение (6.17) имеет вид

$$P\ddot{x} + R = 0, \quad (6.28)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{R(t, \dot{x})}{P(t, \dot{x})} = 0. \quad (6.29)$$

Условия существования и единственности решения этого уравнения определяются видом функций R и P.

Рассмотрим другие типы гибридных вариационных задач, объединенных, однако тем общим свойством, что соответствующие функционалы включают субъективную энтропию, а функция эффективности представляет собой линейную форму от когнитивных функций F_i, кофициентами выступают функции предпочтения. Поскольку функции π_i нормированы на единицу, функцию эффективности можно условно называть «субъективным ожиданием».

Пусть частные когнитивные функции отличаются структурой, переменными и возможно, экзогенными параметрами. Положим

$$F_i = F_i(x_i, \dot{x}_i, t). \quad (6.30)$$

Это означает, что функции F_i могут иметь различную структуру, но обязательно зависят от «своих» индивидуализированных переменных $x_i(t)$ и их производных $\dot{x}_i(t)$, в отличие от предыдущей задачи, где аргументами различных функций F_i была одна и та же переменная $x(t)$ (см. с. 13, пояснения к формуле (6.12), то есть предполагалось, что

$$F_i = F_i(x, \dot{x}, t), \quad \left(\forall i \in \overline{1, N}\right). \quad (6.31)$$

В данном случае функционал Φ^* запишем в виде

$$\Phi^* = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(-\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) \pm \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) F_i(x_i,\, \dot{x}_i,\, t) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) \right) dt \,. \quad (6.32)$$

Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial F^*}{\partial \pi_i} = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad \left(\forall i \in \overline{1, N}\right). \quad (6.33)$$

где F^* – подынтегральная функция в (6.32). Раскрывая (6.33), найдем

$$-\ln \pi_i(t) - 1 \pm \beta F_i(x_i,\, \dot{x}_i,\, t) + \gamma = 0, \quad (6.34)$$

$$\pi_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\pi_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (6.35)$$

при условии нормировки:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) = 1. \quad (6.36)$$

Из (6.34) находим, что

$$\pi_i(t) = \frac{e^{\pm\beta F_i(x_i,\, \dot{x}_i,\, t)}}{\sum\limits_{j=1}^{N} e^{\pm\beta F_j(x_j,\, \dot{x}_j,\, t)}}. \quad (6.37)$$

Связь между экзогенными переменными $x_1,\ x_2,\ \ldots$ осуществляется через условия нормировки, поэтому все функции $x_i(t)$ оказываются связанными между собой.

Смысл этой задачи состоит в том, что все объекты, состояние которых описывается переменными $x_i(t)$ функционируют одновременно («параллельно»), а субъект в процессе эволюции (движения) системы перераспределяет свои предпочтения между объектами и, соответственно, вмешивается в поведение частей, составляющих систему.

Как и в предыдущей задаче, рассмотрим частные случаи:

1. $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} = 0 \ \Rightarrow$ из (6.35) находим, что $\pi_i(t)\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$ но $\pi_i(t)$ – в общем случае не равно 0, тогда $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$, и имеем

$$F_i = F_i(\dot{x}_i,\, t), \quad (6.38)$$

однако, в связи с тем что $F_i \neq F_i(\dot{x}_i)$, как было положено вначале, то возможным будет только $F_i = F_i(t)$.

Итак, предположение, что $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} \equiv 0$, непосредственно влечет за собой как следствие $F_i = F_i(t)$.

2. $$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; F_i = F_i(\dot{x}_i,\, t) \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{d}{dt}\left(\pi_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \pi_i(t)\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} = D_i = const(i). \tag{6.39}$$

Если $D_i = 0$, то $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} = 0$, то есть опять имеем $F_i = F_i(t)$. Если положить, что $D_i \neq 0$, то $\pi_i(t)$ обратно пропорционально $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i}$. В том случае, когда эта производная обращается в 0, $\pi_i(t) = \infty$, чего быть не может, т.к. $\sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i(t) = 1$; $\pi_i(t) \leq 1$, $\left(\forall i \in \overline{1,\, N}\right)$. Следовательно, для таких случаев следует положить $D_i = 0$. Тогда снова $F_i = F_i(t)$. Например, если F_i есть кинетическая энергия: $T_i = \dfrac{1}{2} m_i \dot{x}^2$, то $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}} = m_i \dot{x}$.

Другими словами (6.39) накладывает ограничения на вид функции $F_i(t)$. Действительно, поскольку $\pi_i(t) \geq 0$ для $\forall t$ и, с другой стороны $D_i = const$, то это означает, что $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i}$ не может изменять знак в процессе «движения», то есть

$$sign\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i}\right) = const\,; \qquad \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$

И, если имеем $D_i = 0$, то $\dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i} = 0$, следовательно, и в этом случае $F_i = F_i(t)$.

6.1.2. Канонические переменные

Перейдем к каноническим переменным. Пусть вначале имеется N функционалов

$$\Phi_i = \int_{t_1}^{t_2} F_i(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)dt\,, \tag{6.41}$$

где q_i – обобщенные координаты, введенные для механических аналогий.

Вариационная задача в форме Лагранжа для каждого i имеет вид

$$q_i(t)_{extr} = \arg \underset{q_i \in Q}{extr}\, \Phi_i\,. \tag{6.42}$$

Пусть далее $\pi_1,\, \pi_2,\, \ldots,\, \pi_N$ – показатели предпочтений на множестве S_a. Рассмотрим расширенный функционал

$$\Phi^* = \int_{t_1}^{t_2} F^*(\pi_1,\, \pi_2,\, \ldots,\, \pi_N,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_N,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \ldots,\, \dot{q}_N,\, t)dt\,, \tag{6.43}$$

где

$$F^* = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i + \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i F_i(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi_i\,. \tag{6.44}$$

В данном случае F^* не зависит от производных $\dot{\pi}_i$. Введем функцию Гамильтона $\mathbf{H}^*\left(\pi_i,\, q_i,\, p_i^*\right)$ и дополнительно положим

$$p_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i}; \qquad r_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\pi}_i} \equiv 0\,. \tag{6.45}$$

Функцию $\mathbf{H}^*$ определим соотношением:

$$\mathbf{H}^* = -F^* + \sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i r_i^* + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i^*\,, \tag{6.46}$$

но так как $r_i^* \equiv 0$, то

$$\mathbf{H}^* = -F^* + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i^*\,. \tag{6.47}$$

Дифференциал $\mathbf{H}^*$ определяется формулой

$$dH^* = -\frac{\partial F^*}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \pi_i} d\pi_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} p_i^* d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i^*\,. \tag{6.48}$$

Согласно (6.48), в свою очередь находим

$$p_i^* = \beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}; \qquad \frac{\partial F^*}{\partial q_i} = \beta\pi_i \frac{\partial F_i(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i}. \quad (6.49)$$

Дифференциал $\mathbf{H}^*$ можно также записать в виде

$$dH^* = \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{t}}\mathbf{dt} + \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \pi_{\mathbf{i}}}\mathbf{d}\pi_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{q_i}}\mathbf{dq_i} + \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}}\mathbf{d}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{p_i^*}}\mathbf{dp_i^*}, \quad (6.50)$$

и учитывая (6.49) выражение (6.48) принимает вид

$$dH^* = -\frac{\partial F^*}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \pi_i}d\pi_i - \sum_{i=1}^{N} \beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial q_i}dq_i + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i^*. \quad (6.51)$$

Необходимые условия экстремума функционала (6.43), как уже отмечалось выше, есть

$$\frac{d}{dt}\left(\beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}\right) - \beta\pi_i \frac{\partial F_i}{\partial q_i} = 0; \quad \frac{\partial F_i^*}{\partial \pi_i} = 0, \quad \left(i \in \overline{1, N}\right). \quad (6.52)$$

Сравнивая (6.50) и (6.51) и учитывая (6.52), получаем следующие «канонические» уравнения:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \pi_i} = \ln \pi_i + 1 - \beta \boldsymbol{F}_i\left(\boldsymbol{q}_i, \dot{\boldsymbol{q}}_i, \boldsymbol{t}\right) - \gamma = 0; \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \dot{\pi}_i} = 0; \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{q}_i} = -\dfrac{\boldsymbol{dp}_i^*}{\boldsymbol{dt}}; \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i} = 0; \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{p}_i^*} = \dfrac{\boldsymbol{dq}_i}{\boldsymbol{dt}}; \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{t}} = -\beta\pi_i \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \boldsymbol{t}}. \end{array}\right\} \quad (6.53)$$

Отличие от «классического» варианта состоит в наличии первых двух уравнений (6.53). Точнее, можно далее говорить о первом уравнении, которое сразу разрешается относительно π_i с точностью до параметров β и γ. Параметр γ определяется из условия нормировки: $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$, параметр β считается эндогенным параметром психики. Отличие состоит также в определении величин $\boldsymbol{H}^*$ и p_i^*. Используя (6.53), найдем, для случая, когда F^* задана выражением (6.44), определяющим функционал (6.43), не зависит от t явно, производную:

$$\frac{\boldsymbol{dH}^*}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\pi}_i \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \pi_i} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{q}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{p}_i^*} - \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{p}_i^*} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right) = 0. \quad (6.54)$$

Отсюда следует, что вдоль экстремали

$$\frac{\boldsymbol{dH}^*}{\boldsymbol{dt}} = 0; \quad (6.55)$$

или $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{const}$. Следовательно, $\boldsymbol{H}^*$ – есть первый интеграл.

Пусть $\Phi\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N, q_1, q_2, \ldots, q_N, p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*\right)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по своим аргументам. Тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i + \left[\Phi, H^*\right], \tag{6.56}$$

где $\left[\Phi, H^*\right]$ – обобщенные скобки Пуассона.

Видно, что если $\Phi = H^*$, то $\left[\Phi, H^*\right] = 0$, $\Phi = const$ или $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$. То есть Φ является первым интегралом, если выполняются три условия:

1. Обобщенные скобки Пуассона $\left[\Phi, H^*\right] = 0$.
2. Скалярное произведение вектора градиента $grad_\pi \Phi = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_1}; \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_2}; \ldots; \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_N}\right)$ и вектора «скоростей» изменения предпочтений $\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\right)$ равно нулю (т.е. эти векторы ортогональны) $\mathbf{grad}_\pi \Phi \cdot \dot{\vec{\pi}} = 0$.
3. Третья возможность появляется в том случае, если

$$\left[\Phi, H^*\right] = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i . \tag{6.57}$$

6.1.3. *Законы сохранения. Аналог теоремы Нетер*

Пусть соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \varphi_0\left(t, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N, q_1, q_2, \ldots, q_N, \alpha\right); \\ \tilde{\pi}_i &= \varphi_{1i}\left(t, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N, q_1, q_2, \ldots, q_N, \alpha\right); \\ \tilde{q}_i &= \varphi_{2i}\left(t, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N, q_1, q_2, \ldots, q_N, \alpha\right), \end{aligned} \tag{6.58}$$

где α – некоторый параметр, определяют взаимно-однозначное преобразование переменных:

$$t, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N, q_1, q_2, \ldots, q_N \leftrightarrow \tilde{t}, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \ldots, \tilde{\pi}_N, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_N . \tag{6.59}$$

Интеграл $I^* = \int_{t_0}^{t_1} F^* dt$ инвариантен относительно преобразования (6.58), если

$$I^* = \int_{t_0}^{t_1} F^*\left(t, \vec{\pi}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}\right) dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} F^*\left(\tilde{t}, \tilde{\vec{\pi}}, \tilde{\vec{q}}, \tilde{\dot{\vec{q}}}\right) d\tilde{t} . \tag{6.60}$$

Рассмотрим частный случай преобразования (6.58), когда $\tilde{t} = t$ и пусть преобразование является инфинитезимальным – выполняются соотношения

$$\delta\pi_i \sim \tilde{\pi}_i - \pi_i = \left.\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + o_{\pi_i}(\alpha); \qquad (6.61)$$

$$\delta q_i \sim \tilde{q}_i - q_i = \left.\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + o_{q_i}(\alpha), \qquad (6.62)$$

где α – малая величина, $o_{\pi_i}(\alpha)$, $o_{q_i}(\alpha)$ – остаточные члены при разложении в ряд, скажем Тейлора, изменений функций π_i и q_i, которые соответствуют величинам выше первого порядка малости по отношению к α. Предположим также, что вариации моментов начала и конца процесса равны нулю: $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$ [73, с. 57, 58, 82, 114].

Обозначая $\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial\alpha} = \psi_{1i}$; $\frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial\alpha} = \psi_{2i}$, запишем

$$\delta\pi_i = \alpha\psi_{1i}; \qquad \delta q_i = \alpha\psi_{2i}. \qquad (6.63)$$

Если $\pi_i(t)$ и $q_i(t)$ есть экстремаль, то вариация функционала принимает вид

$$\delta J^* = \alpha\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F^*}{\partial\dot{\pi}_i}\psi_{1i}\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \alpha\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F^*}{\partial\dot{q}_i}\psi_{2i}\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \qquad (6.64)$$

Но F^* не зависит от $\forall\dot{\pi}_i \in \dot{\vec{\pi}}$, поэтому

$$\delta J^* = \alpha\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F^*}{\partial\dot{q}_i}\psi_{2i}\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \qquad (6.65)$$

Сформируем аналог теоремы Нётер.

<u>Теорема 2</u>

Каждому инфинитезимальному преобразованию (6.58) при $\tilde{t} = t$, где функции $\vec{\pi}(t)$ и $\vec{q}(t)$ соответствуют экстремали, оставляющему неизменным интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} F^*\left(t,\ \vec{\pi},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right)dt, \qquad (6.66)$$

соответствует первый интеграл системы (6.53) и этот интеграл определяется выражением

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{2i}(t, \vec{\pi}, \vec{q}, \alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = const\,. \quad (6.67)$$

Частные случаи:

<u>1. Группа трансляций координат – q_i:</u>

$$\tilde{t} = t\,; \quad \tilde{q}_i = q_i + \alpha\,; \quad \left(i \in \overline{1, N}\right). \qquad (6.68)$$

При этом $\dfrac{\partial \varphi_{2i}}{\partial \alpha} = 1$ и первый интеграл принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i} = \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i} = const\,. \qquad (6.69)$$

Учитывая, что $p_i^* = \beta \pi_i \dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}$ первый интеграл можно также записать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^* = const\,. \qquad (6.70)$$

Следовательно, сумма обобщенных импульсов сохраняется.

<u>2. Группа вращений. Закон сохранения кинетического момента</u>

Пусть обобщенные координаты совпадают с декартовыми координатами x_i, y_i, z_i. Тогда обобщенные интегралы определяются формулами

$$p_{x_i}^* = \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_i}\,; \qquad p_{y_i}^* = \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{y}_i}\,; \qquad p_{z_i}^* = \beta \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial \dot{z}_i}\,. \quad (6.71)$$

Выберем группу вращений в виде

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha; \\ \tilde{y}_i &= -x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha; \\ \tilde{z}_i &= z_i. \end{aligned}\right\} \qquad (6.72)$$

В этом случае:

$$\frac{\partial \varphi_{2i_x}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = y_i\,; \frac{\partial \varphi_{2i_y}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = -x_i\,; \frac{\partial \varphi_{2i_z}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0\,. \quad (6.73)$$

Первый интеграл, соответствующий этой группе преобразований имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} y_i - \frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}_i} x_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(p_{x_i}^* y_i - p_{y_i}^* x_i \right) = const\,. \quad (6.74)$$

Таким образом, мы получаем закон сохранения момента количества движения относительно оси OZ : $\left(K_z = const\right)$.

3. Закон сохранения «Энергии»

Выше уже было установлено, что величина $\boldsymbol{H}^*$ является инвариантом, по отношению к вариации времени, то есть (при условии, что $F_i = F_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right)$):

$$\frac{d\boldsymbol{H}^*}{dt} = 0. \tag{6.75}$$

Однако, Гамильтониан $\boldsymbol{H}^*$ не является в данном случае энергией в обычном понимании.

Заметим, что в формулах (6.70) и (6.74) фигурируют обобщенные импульсы $p_i^* = \beta\pi_i \dfrac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_i}$.

6.1.4. Обобщенное уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим снова интеграл

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} F^*\left(t,\, \vec{\pi},\, \vec{q},\, \dot{\vec{q}}\right) dt \tag{6.76}$$

и функцию

$$S^*(t) = \int_{t_0}^{t} F^*\left(t,\, \vec{\pi},\, \vec{q},\, \dot{\vec{q}}\right) dt. \tag{6.77}$$

Очевидно, что $S^*(t_1) = J^*$. Интеграл берется вдоль экстремали. При этом условии вариация функционала δJ^* для случая нефиксированных точек начала и конца траектории имеет вид

$$\delta J^* = \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=t_1} \cdot \delta q_{i_1} - \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=t_0} \cdot \delta q_{i_0} +$$
$$+ \left.\left(F^* - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)\right|_{t=t_1} \cdot \delta t_1 - \left.\left(F^* - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)\right|_{t=t_0} \cdot \delta t_0. \tag{6.78}$$

Необходимое условие экстремума есть

$$\delta J^* = 0. \tag{6.79}$$

Функция S^* определяется вдоль участка экстремали между точками A и B, причем точка A считается фиксированной, точка B варьируется. Имеет место соотношение

$$dS^* = \delta J^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{t=t_1} \cdot \delta q_{i_1} - H^*\Big|_{t=t_1} \cdot \delta t_1 \,. \quad (6.80)$$

Если все величины берутся в точке B (на правом конце траектории), то

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} = -H^* ; \qquad \frac{\partial S^*}{\partial q_i} = p_i^* ; \qquad \frac{\partial S^*}{\partial \pi_i} = 0 \,. \quad (6.81)$$

Поскольку $H^* = -F^* + \sum_{i=1}^{N} q_i p_i^*$ и

$$F^* = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i \pm \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i F_i(t,\, q_i,\, \dot{q}_i) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi_i \,, \quad (6.82)$$

то видим, что H^* зависит от π_i как непосредственно так и через p_i^*. Действительно, пусть $F_i = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} c_i q_i^2$ (пояснения см. ниже, п. 6.1.8), то есть – функция Лагранжа для простого осциллятора, то $p_i^* = \beta \pi_i m_i \dot{q}_i$, откуда $\dot{q}_i = \dfrac{p_i^*}{\beta \pi_i m_i}$. Таким образом, можем записать уравнение

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H^*\left(t, q_1, \ldots, q_N, \pi_1, \ldots, \pi_N, \frac{\partial S^*}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S^*}{\partial q_N}\right) = 0 \,. \quad (6.83)$$

Это уравнение является обобщенным уравнением Гамильтона-Якоби. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 3</u>

Пусть $S^* = S^*(t,\, q_1,\, \ldots,\, q_N,\, \pi_1,\, \ldots,\, \pi_N,\, \alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_k)$ – некоторое решение уравнения Гамильтона-Якоби, тогда каждая производная

$$\frac{\partial S^*}{\partial \alpha_j}; \quad \left(j \in \overline{1,k}\right), \quad (6.84)$$

является первым интегралом канонической системы уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}; \qquad \frac{dp_i^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial H^*}{\partial \dot{\pi}_i} = 0; \qquad \frac{\partial H^*}{\partial \pi_i} = 0; \quad (6.85)$$

то есть

$$\frac{\partial S^*}{\partial \alpha_j} = const \quad (6.86)$$

вдоль каждой экстремали.

6.1.5. Модель с когнитивными функциями, зависящими от многих фазовых переменных и их скоростей

Предположим, что когнитивные функции имеют вид

$$F_i = F_i\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dots,\ \dot{x}_N\right) \quad (6.87)$$

и критерий оптимальности выбирается в форме

$$\Phi^* = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[-\sum_{i=1}^{N}\pi_i \ln \pi_i \pm \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i F_i\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dots,\ \dot{x}_N\right) + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i\right]dt \quad (6.88)$$

$$F^* = -\sum_{i=1}^{N}\pi_i \ln \pi_i \pm \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i F_i\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dots,\ \dot{x}_N\right) + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i\,. \quad (6.89)$$

Функции F_i отличаются друг от друга, как структурой, так и набором аргументов. В общем случае они могут зависеть от всех переменных задачи. Запишем необходимые условия экстремума в этом случае:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F^*}{\partial \pi_i} = -\ln \pi_i - 1 \pm \beta F_i\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dots,\ \dot{x}_N\right) + \gamma = 0;\\
&\frac{\partial F^*}{\partial x_j} = \pm\beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i\,\frac{\partial F_i}{\partial x_j};\\
&\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_j} = \pm\beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i\,\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j};
\end{aligned}\right\} \quad (6.90)$$

тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_j}\right) = \pm\beta\sum_{i=1}^{N}\dot{\pi}_i\,\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \pm \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial t} + \sum_{q=1}^{N}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial x_q}\cdot \dot{x}_q + \sum_{q=1}^{N}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_q}\cdot \ddot{x}_q\right). \quad (6.91)$$

Уравнения Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\dot{\pi}_i\,\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} + \pi_i\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial t} + \sum_{q=1}^{N}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial x_q}\cdot \dot{x}_q + \sum_{q=1}^{N}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_q}\cdot \ddot{x}_q - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\right] = 0; \quad (6.92)$$

$$\left(j \in \overline{1, N}\right).$$

Производная $\dot{\pi}_i$ вычисляется по формуле

$$\dot{\pi}_i = \pm\beta\pi_i\left(\frac{dF_i}{dt} - \sum_{j=1}^{N}\pi_j\,\frac{dF_j}{dt}\right); \quad \left(\forall i \in \overline{1, N}\right). \quad (6.93)$$

Уравнение (6.93) содержит все функции π_j, $\left(j \in \overline{1, N}\right)$ и параметр $\beta = \dfrac{1}{T_{subj}}$, где T_{subj} – «субъективная» психическая температура.

Здесь, как и в предыдущих случаях, нетрудно перейти к каноническим переменным.

6.1.6. Модель с переменными эндогенными параметрами α и β

Ранее было сказано, что параметр β^{-1} играет роль абсолютной температуры T в распределении Гиббса. В нашем случае он может рассматриваться как психическая или эмоциональная температура.

В задаче с количественным моделированием параметр β (и, соответственно, T) считался постоянной величиной. С самого начала можно было предположить, что $T = \beta^{-1}$ изменяется с возникновением и развитием проблемной ситуации и оказывает влияние, в свою очередь на изменение предпочтений.

Ввиду важной роли, которую играет параметр β, рассмотрим модели «эндогенной» динамики с переменными $\beta = \beta(t)$.

Под моделью эндогенной динамики понимаем определенную систему уравнений, описывающую изменение параметров α, β, … с течением времени. Рассмотрим два типа распределений

$$\pi_i = \frac{e^{\pm\beta x_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\pm\beta x_j}}, \text{ (а);} \qquad \pi_i = \frac{x_i^{\alpha} \cdot e^{\pm\beta x_i}}{\sum_{j=1}^{N} x_j^{\alpha} \cdot e^{\pm\beta x_j}}, \text{ (б).} \tag{6.94}$$

Заметим, что здесь размерность вектора $\vec{x} = (x_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)$ (количество различных параметров x_i) совпадает с количеством тестируемых альтернатив N.

Очевидно, что это условие выполняется не всегда и не является обязательным.

Из (6.94) имеем

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\beta\pi_i\left(\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{N}\pi_j\dot{x}_j\right) \pm \dot{\beta}\pi_i\left(x_i - \sum_{j=1}^{N}\pi_j x_j\right). \tag{6.95}$$

Предположим, что параметр β (распределения (6.94, а)) изменяется с течением времени в соответствии с уравнением

$$\frac{d\beta}{dt} = h(\beta,\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ t). \tag{6.96}$$

В более общем случае модель для $\beta(t)$ может иметь более сложный вид. Например, скорость измерения β может зависеть от скоростей изменения экзогенных параметров: $\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \ldots,\ \dot{x}_N$; от предпочтений и скоростей изменения предпочтений: $\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ \dot{\pi}_1,\ \dot{\pi}_2,\ \ldots,\ \dot{\pi}_N$, наконец от величины и скорости изменения энтропии: H_π, $\dot{H}_\pi$. Зависимость $\beta(t)$ может иметь колебательный характер. В этом случае следует в качестве модели динамики $\beta(t)$ воспользоваться уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}=h\left(\beta,\ \frac{d\beta}{dt},\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \dot{x}_1,\ \ldots,\ \dot{x}_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ \dot{\pi}_1,\ \dot{\pi}_2,\ \ldots,\ \dot{\pi}_N,\ H_\pi,\ \dot{H}_\pi,\ t\right) \quad (6.97)$$

Предположение о колебательном характере «температуры» T_{subj} представляется естественным. При этом следует предположить, что возможны как спонтанные, самопроизвольные колебания температуры (подобно свободным колебаниям механических систем), так и «вынужденными» колебания, спровоцированные периодическими изменениями экзогенной ситуации.

В дальнейшем рассмотрим рекурсивные модели формирования температуры, а также модели, основанные на гипотезе о дополнительном вариационном принципе относительно функции $T_{subj}(t)$. Заметим, что уравнения (6.95) обеспечивают выполнение условия нормировки: $\sum_{i=1}^{N}\dot{\pi}_i=0$.

Уравнения (6.95), (6.96) (или (6.97) совместно с уравнениями, описывающими изменение экзогенных параметров, составляют модель динамики активной системы, в которой предпочтения задаются формулой (6.94, а). В качестве модели экзогенной динамики в некоторых случаях можно взять систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t\right). \quad (6.98)$$

Примером системы (6.98) является система уравнений экономической динамики Вальраса-Леонтьева [118], [2, с. 325 [108]], [2, с. 325-332, § 5.7.1, с. 332-337, § 5.7.2, с. 397-400, § 5.13.4], уравнения, описывающие динамику полета самолета, в которой выбор управляющего воздействия осуществляется пилотом и зависит от его предпочтений.

Для канонического распределения, зависящего от двух эндогенных параметров α и β (распределение (6.94, б), зависимых от времени, один из вариантов модели динамики активной системы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_i}{dt} = &\left(\ln x_i - \sum_{j=1}^{N} \pi_j \ln x_j\right) \cdot g(\alpha,\ \beta,\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t) \pm \\ &\pm \left(x_i - \sum_{j=1}^{N} \pi_j x_j\right) \cdot h(\alpha,\ \beta,\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t) + \\ &+ \left(\alpha x_i^{-1} \pm \beta\right) \cdot f_i(x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t) - \\ &- \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha x_j^{-1} \pm \beta\right) \cdot \pi_j f_j(x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t).\end{aligned} \tag{6.99}$$

При этом должно выполняться условие $x_i > 0;\ \forall i \in \overline{1, N}$ или условие $\lim\limits_{x_i \to 0}\left(\alpha x_i^{-1}\right) \neq \infty$.

В модель вводятся уравнения экзогенной динамики:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ t), \tag{6.100}$$

и уравнения эндогенной динамики:

$$\frac{d\alpha}{dt} = g(\alpha,\ \beta,\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ H_\pi,\ \dot{H}_\pi,\ t), \tag{6.101}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = h(\alpha,\ \beta,\ x_1,\ \ldots,\ x_N,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_N,\ H_\pi,\ \dot{H}_\pi,\ t). \tag{6.102}$$

Если уравнения экзогенной динамики (6.100) описывают динамику объекта управления с учтенным в них специфическим влиянием «человеческого фактора», то уравнения эндогенной динамики являются гипотетическими и вводятся на основе априорных правдоподобных допущений.

В частности α и β могут бать компонентами аттрактора (странного аттрактора), что позволяет моделировать возбужденные состояния психики [2, с. 338-345, § 5.7.3], [113].

6.1.7. Модель с неединичной нормировкой предпочтений

Рассмотрим уравнение динамики предпочтений, если принимается неединичная нормировка

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \varphi(t); \qquad \varphi(t) > 0. \tag{6.103}$$

Причем нормирующая величина является функцией времени. В этом случае

$$\pi_i = \varphi\pi_i^0 = \frac{\varphi(t)\cdot e^{\pm\beta F_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\pm\beta F_j}}. \qquad (6.104)$$

Нетрудно установить, что изменение функции предпочтения π_i описывается уравнением

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\beta\pi_i^0\left(\dot{F}_i - \sum_{j=1}^{N}\pi_j^0\dot{F}_j\right)\varphi + \dot{\varphi}\pi_i^0. \qquad (6.105)$$

Или

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\beta\pi_i\left(\dot{F}_i - \frac{\sum_{j=1}^{N}\pi_j\dot{F}_j}{\varphi}\right) + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\pi_i. \qquad (6.106)$$

Функция $\varphi(t)$ отражает суммарную «силу» желаний. В этом случае можно говорить, что функции π_i дают не только сравнительную значимость предпочтений, но и, в некотором смысле, их абсолютную величину, в связи с чем можно говорить о π_i как о показателях желательности альтернатив.

Вернемся, с учетом указанных выше дополнительных факторов, к вариационным постановкам.

Рассмотрим функционал

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2}\left[-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\ln\pi_i \pm \beta(t)\sum_{i=1}^{N}\pi_i F_i(x,\ \dot{x},\ t) + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i - \varphi(t)\right)\right]dt. \qquad (6.107)$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\pm\beta\sum_{i=1}^{N}\left[\dot{\pi}_i\frac{\partial F_i}{\partial\dot{x}} + \pi_i\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial\dot{x}\partial t} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial\dot{x}\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\cdot\ddot{x} - \frac{\partial F_i}{\partial x}\right)\right] \pm \dot{\beta}\sum_{i=1}^{N}\pi_i\frac{\partial F_i}{\partial\dot{x}} = 0, \qquad (6.108)$$

что не совпадает с уравнением (6.92). Производная $\dot{\pi}_i$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\pi_i\left\{\left(\dot{\beta}F_i + \beta\dot{F}_i\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(\dot{\beta}F_j + \beta\dot{F}_j\right)\pi_j^0\right\} + \dot{\varphi}\pi_i^0. \qquad (6.109)$$

Или

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pm\pi_i \left\{ \left(\dot{\beta}F_i + \beta\dot{F}_i\right) - \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\dot{\beta}F_j + \beta\dot{F}_j\right)\pi_j}{\varphi} \right\} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\pi_i . \quad (6.110)$$

6.1.8. Лагранжева система с двумя степенями свободы

В настоящем параграфе преследуется цель изучить частный случай системы, подчиненной обобщенному принципу оптимальности. Особенностью активной системы будет наличие «над» чисто механической системой субъекта, реализующего свои предпочтения, и в этом смысле «механическая» часть системы может считаться открытой. Как увидим, имеет место «диссипация» – несохранение полной механической энергии, несмотря на то, что компоненты механической части – консервативные объекты.

В качестве когнитивной функции F_i выбирается функция Лагранжа L_i простого осциллятора:

$$F_i = L_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right) = \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}c_i q_i^2\,; \qquad \left(i \in \overline{1,2}\right), \quad (6.111)$$

где q_i – обобщенная координата, $\dot{q}_i$ – обобщенная скорость, m_i – масса, c_i – жесткость «пружины».

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из двух простых осцилляторов с функцией Лагранжа.

Эндогенный параметр β считается постоянным, принимается единичная нормировка, для π_i.

Выберем функционал в виде

$$\Phi^* = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[-\sum_{i=1}^{N}\pi_i \ln\pi_i + \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i L_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right) + \gamma\sum_{i=1}^{N}\pi_i\right]dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} F^*\left(\pi_i,\, q_i,\, \dot{q}_i\right)dt \quad (6.112)$$

Необходимые условия экстремума в данном случае принимают вид

$$-\ln\pi_i - 1 + \beta L_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right) + \gamma = 0\,; \quad (6.113)$$

при $\beta \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\pi_i \frac{\partial L_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \pi_i \frac{\partial L_i\left(q_i,\, \dot{q}_i\right)}{\partial q_i} = 0\,. \quad (6.114)$$

Из уравнения (6.113) находим

$$\pi_i = \frac{e^{\beta L_i(q_i,\, \dot q_i)}}{\sum\limits_{j=1}^{N} e^{\beta L_j\left(q_j,\, \dot q_j\right)}}. \qquad (6.115)$$

Отсюда, и из (6.110)

при $\beta = const$ $\varphi = 1$ и $F_i = L_i$ находим:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \pi_i\beta\left\{\left(\frac{\partial L_i}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial L_i}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial L_j}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial L_j}{\partial \dot q_j}\ddot q_j\right)\pi_j\right\}. \qquad (6.116)$$

Или для случая (6.111)

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pi_2\pi_1\beta\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial q_1}\dot q_1 + \frac{\partial L_1}{\partial \dot q_1}\ddot q_1\right) - \left(\frac{\partial L_2}{\partial q_2}\dot q_2 + \frac{\partial L_2}{\partial \dot q_2}\ddot q_2\right)\right\}. \qquad (6.117)$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = -\frac{d\pi_1}{dt}. \qquad (6.118)$$

Учитывая явный вид L_i, $p_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial \dot q_i} = \beta\pi_i\frac{\partial L_i}{\partial \dot q_i} = \beta\pi_i m_i \dot q_i$, $\frac{p_i^*}{\beta\pi_i m_i} = \dot q_i$

$\frac{\dot p_i^*\beta\pi_i m_i - p_i^*\beta\dot\pi_i m_i}{\left(\beta\pi_i m_i\right)^2} = \ddot q_i$,в соответствии с (6.114), запишем

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \frac{\left\{-c_1q_1\cdot\frac{\pi_2 p_1^*}{m_1} + \frac{\pi_2 p_1^*}{1}\cdot\frac{\left[\dot p_1^*\right]}{\beta\pi_1 m_1} + c_2q_2\cdot\frac{\pi_1 p_2^*}{m_2} - \frac{\pi_1 p_2^*}{1}\cdot\frac{\left[\dot p_2^*\right]}{\beta\pi_2 m_2}\right\}}{1 + \frac{1}{\beta}\left[\frac{\pi_2}{m_1}\cdot\left(\frac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2 + \frac{\pi_1}{m_2}\cdot\left(\frac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2\right]}. \qquad (6.119)$$

Из уравнения (6.114) и при

$$\frac{\partial L_i}{\partial \dot q_i} = m_i\dot q_i, \qquad \frac{p_i^*}{\beta\pi_i m_i} = \dot q_i, \qquad \frac{\partial L_i}{\partial q_i} = -c_i q_i \qquad (6.120)$$

получаем уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{\dot p_1^*}{\beta} + \pi_1 c_1 q_1 = 0, \qquad \frac{\dot p_2^*}{\beta} + \pi_2 c_2 q_2 = 0. \qquad (6.121)$$

Разрешая уравнения (6.121) относительно $\dot p_1^*$ и $\dot p_2^*$, найдем

$$\dot p_1^* = -\beta\pi_1 c_1 q_1, \qquad \dot p_2^* = -\beta\pi_2 c_2 q_2. \qquad (6.122)$$

Тогда из (6.119)

$$\frac{d\pi_1}{dt}=\frac{2\left\{-c_1q_1\dfrac{\pi_2 p_1^*}{m_1}+c_2q_2\dfrac{\pi_1 p_2^*}{m_2}\right\}}{1+\dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{\pi_2}{m_1}\left(\dfrac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2+\dfrac{\pi_1}{m_2}\left(\dfrac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2\right]}. \qquad (6.123)$$

С уравнением Лагранжа II рода

$$\ddot{q}_1=-\left(\frac{c_1}{m_1}q_1+\frac{\dot{\pi}_1}{\pi_1}\dot{q}_1\right), \qquad \ddot{q}_2=-\left(\frac{c_2}{m_2}q_2+\frac{\dot{\pi}_2}{\pi_2}\dot{q}_2\right). \qquad (6.124)$$

Функция F_i может быть выбрана в виде

$$F_i=L_i(q_i,\,\dot{q}_i)+U_i(q_i), \qquad (6.125)$$

где $U_i(q_i)$ – играет роль функции полезности «оператора» и имеет размерность энергии.

Первое уравнение системы Эйлера-Лагранжа подобно (6.113) в этом случае дает формулу для функции π_i:

$$\pi_i=\frac{e^{\beta[L_i(q_i,\,\dot{q}_i)+U_i(q_i)]}}{\sum\limits_{j=1}^{N}e^{\beta\left[L_j(q_j,\,\dot{q}_j)+U_j(q_j)\right]}}. \qquad (6.126)$$

Вычислим с помощью (6.110) и (6.125) при $\beta=const$ производную $\dfrac{d\pi_i}{dt}$:

$$\frac{d\pi_i}{dt}=\pi_i\beta\left\{\left(\frac{\partial L_i}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial U_i}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial L_j}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L_j}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\frac{\partial U_j}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\pi_j\right\} \qquad (6.127)$$

Или

$$\frac{d\pi_i}{dt}=\pi_i\beta\left\{\left(-c_iq_i\dot{q}_i+m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i+\frac{\partial U_i}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(-c_jq_j\dot{q}_j+m_j\dot{q}_j\ddot{q}_j+\frac{\partial U_j}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\pi_j\right\} \qquad (6.128)$$

Далее расчеты производятся для простейшего случая, когда $N=2$, то есть имеется два простых осциллятора, связанных между собой посредством перераспределения предпочтений. Как будет видно из дальнейшего, если $\beta\neq 0$, то имеем дело с взаимосвязанной системой с двумя степенями свободы в фазовом пространстве. Эта система является открытой и диссипативной, даже если каждый из осцилляторов является идеальным (не содержащим диссипативных членов).

Заметим, что уравнения Эйлера-Лагранжа типа (6.114) для q_i принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\pi_i m_i \dot{q}_i\right) - \pi_i\left(-c_i q_i + \frac{\partial U_i}{\partial q_i}\right) = 0 . \quad (6.129)$$

При $\dot{q}_i = \dfrac{p_i^*}{\beta \pi_i m_i}$

$$\dot{p}_1^* = \beta\pi_1\left(-c_1 q_1 + \frac{\partial U_1}{\partial q_1}\right), \qquad \dot{p}_2^* = \beta\pi_2\left(-c_2 q_2 + \frac{\partial U_2}{\partial q_2}\right). \quad (6.130)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для вычисления экстремали обобщенной координаты найдем в виде:

$$\ddot{q}_i + \frac{\dot{\pi}_i}{\pi_i}\dot{q}_i + \frac{c_i}{m_i} q_i - \frac{1}{m_i}\frac{\partial U_i(q_i)}{\partial q_i} = 0 . \quad (6.131)$$

Член $\dfrac{\dot{\pi}_i}{\pi_i}\dot{q}_i$ играет роль диссипативного члена. Видим, что если $\dot{\pi}_i = 0$, то есть распределение предпочтений не меняется со временем, то диссипация отсутствует. «Коэффициент диссипации» $\dfrac{\dot{\pi}_i}{\pi_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\ln \pi_i\right)$ представляет собой «поток» частной субъективной информации $\ln \pi_i$.

Рассмотрим частный случай, когда $N = 2$. Имеем два идеальных осциллятора, связь между которыми осуществляется через предпочтения, которые в свою очередь зависят от значений соответствующих функций Лагранжа.

Уравнения (6.127), (6.128) в случае $N = 2$ имеют вид

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pi_1\beta\pi_2\left\{-c_1 q_1 \dot{q}_1 + m_1 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + U_{1_{q1}}\dot{q}_1 + c_2 q_2 \dot{q}_2 - m_2 \dot{q}_2 \ddot{q}_2 - U_{2_{q2}}\dot{q}_2\right\}. \quad (6.132)$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = \pi_2\beta\pi_1\left\{-c_2 q_2 \dot{q}_2 + m_2 \dot{q}_2 \ddot{q}_2 + U_{2_{q2}}\dot{q}_2 + c_1 q_1 \dot{q}_1 - m_1 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - U_{1_{q1}}\dot{q}_1\right\}. \quad (6.133)$$

Видим, что $\dfrac{d\pi_1}{dt} = -\dfrac{d\pi_2}{dt}$. Здесь $U_{1_{q1}} = \dfrac{\partial U_1(q_1)}{\partial q_1}$; $U_{2_{q2}} = \dfrac{\partial U_2(q_2)}{\partial q_2}$.

Переходя к каноническим переменным по формулам $\dot{q}_1 = \dfrac{p_1^*}{\beta\pi_1 m_1}$; $\dot{q}_2 = \dfrac{p_2^*}{\beta\pi_2 m_2}$; $\ddot{q}_1 = \dfrac{\dot{p}_1^*}{\beta\pi_1 m_1} - \dfrac{p_1^*\beta m_1[\dot{\pi}_1]}{(\beta\pi_1 m_1)^2}$; $\ddot{q}_2 = \dfrac{\dot{p}_2^*}{\beta\pi_2 m_2} - \dfrac{p_2^*\beta m_2[\dot{\pi}_2]}{(\beta\pi_2 m_2)^2}$, в (6.132), (6.133), получим следующие уравнения

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \frac{2\left\{\dfrac{\pi_2 p_1^*}{m_1}\left[-c_1 q_1 + \dfrac{\partial U_1}{\partial q_1}\right] + \dfrac{\pi_1 p_2^*}{m_2}\left[c_2 q_2 - \dfrac{\partial U_2}{\partial q_2}\right]\right\}}{1 + \dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{\pi_2}{m_1}\left(\dfrac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2 + \dfrac{\pi_1}{m_2}\left(\dfrac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2\right]}. \quad (6.134)$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = \frac{2\left\{\dfrac{\pi_1 p_2^*}{m_2}\left[-c_2 q_2 + \dfrac{\partial U_2}{\partial q_2}\right] + \dfrac{\pi_2 p_1^*}{m_1}\left[c_1 q_1 - \dfrac{\partial U_1}{\partial q_1}\right]\right\}}{1 + \dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{\pi_1}{m_2}\left(\dfrac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2 + \dfrac{\pi_2}{m_1}\left(\dfrac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2\right]}. \quad (6.135)$$

Переходя к каноническим переменным по приведенным выше формулам, в (6.131), и применив (6.132), (6.133), получим следующие уравнения

$$\ddot{q}_1 = \frac{\beta\pi_2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(\dfrac{-\dfrac{\dot{q}_2}{\pi_2}B_2 - A_2}{1 + \beta\pi_1 m_2 \dot{q}_2^2}\right) - \dfrac{\dot{q}_1}{\pi_1}B_1 - A_1}{1 + \beta\pi_2 m_1 \dot{q}_1^2 - \dfrac{\beta^2\pi_1\pi_2 m_1 m_2 (\dot{q}_1\dot{q}_2)^2}{1 + \beta\pi_1 m_2 \dot{q}_2^2}}, \quad (6.136)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{\beta\pi_1 m_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(\dfrac{-\dfrac{\dot{q}_1}{\pi_1}B_1 - A_1}{1 + \beta\pi_2 m_1 \dot{q}_1^2}\right) - \dfrac{\dot{q}_2}{\pi_2}B_2 - A_2}{1 + \beta\pi_1 m_2 \dot{q}_2^2 - \dfrac{\beta^2\pi_1\pi_2 m_1 m_2 (\dot{q}_1\dot{q}_2)^2}{1 + \beta\pi_2 m_1 \dot{q}_1^2}}, \quad (6.137)$$

где

$$A_1 = \frac{c_1}{m_1} q_1 - \frac{1}{m_1} \frac{\partial U_1(q_1)}{\partial q_1}, \qquad A_2 = \frac{c_2}{m_2} q_2 - \frac{1}{m_2} \frac{\partial U_2(q_2)}{\partial q_2}, \tag{6.138}$$

$$B_1 = \pi_1 \beta \pi_2 \left(-c_1 q_1 \dot{q}_1 + U_{1_{q_1}} \dot{q}_1 + c_2 q_2 \dot{q}_2 - U_{2_{q_2}} \dot{q}_2 \right),$$

$$B_2 = \pi_2 \beta \pi_1 \left(-c_2 q_2 \dot{q}_2 + U_{2_{q_2}} \dot{q}_2 + c_1 q_1 \dot{q}_1 - U_{1_{q_1}} \dot{q}_1 \right). \tag{6.139}$$

Динамика двух осцилляторов в каждый момент «смешивается» в пропорции, определенной величинами π_1 и π_2.

При $U_1 = U_2 = 0$ (6.130) обращается в (6.127). Если же к тому же $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$, то будем иметь частный случай:

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\beta}{2} c_1 q_1; \qquad \dot{p}_2^* = -\frac{\beta}{2} c_2 q_2. \tag{6.140}$$

Можно представить себе, что субъект системы управляет перераспределением энергии в системе таким образом, что при этом максимизируется показатель средней неопределенности – средняя субъективная энтропия. При этом «точки» взаимодействуют только через «оператора» – субъекта системы. Как следует из предыдущего суммарная механическая энергия не сохраняется, но сохраняется величина $\boldsymbol{H}^*$.

На рис. 6.1-6.4 представлены результаты расчетов с помощью выше описанной модели (6.111)-(6.140).

На рис. 6.1 показаны обобщенные импульсы активной системы (канонические переменные). Диаграммы на рис. 6.2 изображают обобщенные координаты. На рис. 6.3 видно изменение функций индивидуальных предпочтений субъекта. Динамика энтропии индивидуальных предпочтений проиллюстрирована на рис. 6.4.

Система дифференциальных уравнений модели (6.111)-(6.140) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_1^*}{dt}=\beta\pi_1\left(-c_1q_1+\frac{\partial U_1}{\partial q_1}\right),\\
&\frac{dp_2^*}{dt}=\beta\pi_2\left(-c_2q_2+\frac{\partial U_2}{\partial q_2}\right),\\
&\frac{dq_1}{dt}=\frac{p_1^*}{\beta\pi_1m_1},\\
&\frac{dq_2}{dt}=\frac{p_2^*}{\beta\pi_2m_2},\\
&\frac{d\pi_1}{dt}=\frac{2\left\{\frac{\pi_2p_1^*}{m_1}\left[-c_1q_1+\frac{\partial U_1}{\partial q_1}\right]+\frac{\pi_1p_2^*}{m_2}\left[c_2q_2-\frac{\partial U_2}{\partial q_2}\right]\right\}}{1+\frac{1}{\beta}\left[\frac{\pi_2}{m_1}\left(\frac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2+\frac{\pi_1}{m_2}\left(\frac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2\right]},\\
&\frac{d\pi_2}{dt}=\frac{2\left\{\frac{\pi_1p_2^*}{m_2}\left[-c_2q_2+\frac{\partial U_2}{\partial q_2}\right]+\frac{\pi_2p_1^*}{m_1}\left[c_1q_1-\frac{\partial U_1}{\partial q_1}\right]\right\}}{1+\frac{1}{\beta}\left[\frac{\pi_1}{m_2}\left(\frac{p_2^*}{\pi_2}\right)^2+\frac{\pi_2}{m_1}\left(\frac{p_1^*}{\pi_1}\right)^2\right]}.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.141)$$

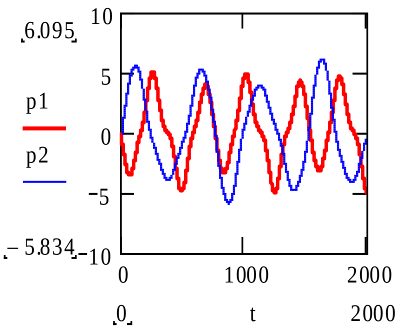


Рис. 6.1 – Импульсы

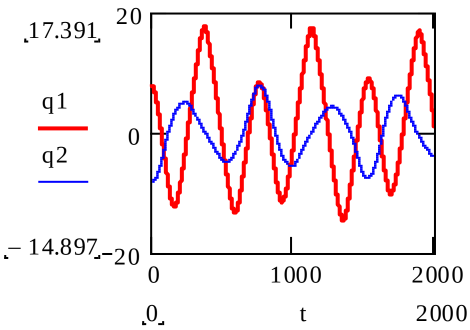


Рис. 6.2 – Координаты

Из диаграмм на рис. 6.1-6.14 видно, что имеет место взаимное влияние осцилляторов, которое осуществляется через предпочтения (см. рис. 6.3), связанные условием нормировки (см. рис. 6.9).

На рис. 6.5-6.10, 6.12 показаны фазовые портреты обобщенных импульсов и координат, а также предпочтений.

В системе (6.141) использованы при проведении расчетных экспериментов следующие значения величин: $c_1=c_2=0.01$; $m_1=20$; $m_2=50$; $\beta=2$;

$U_1 = U_2 = 0$; начальные данные: $p_1^*(0) = p_2^*(0) = 0$; $q_1(0) = 8$; $q_2(0) = -8$; $\pi_1(0) = 0.45$; $\pi_2(0) = 0.55$.

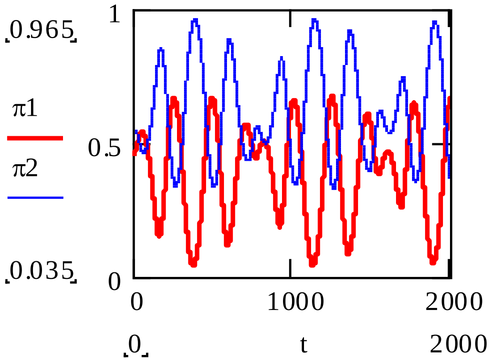


Рис. 6.3 – Предпочтения

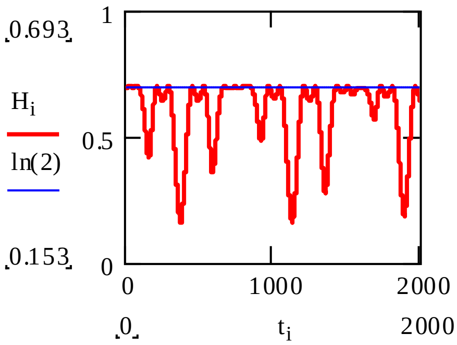


Рис. 6.4 – Энтропия

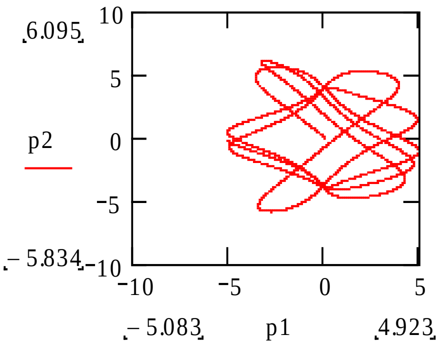


Рис. 6.5 – Импульсы

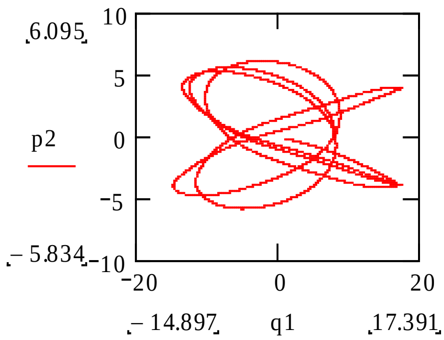
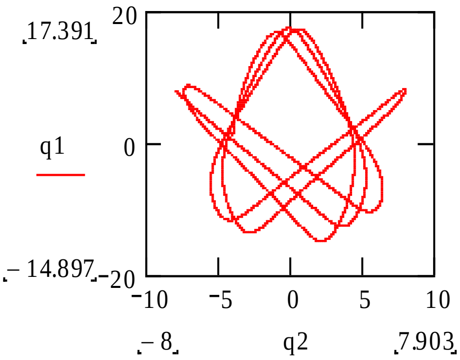


Рис. 6.6 – Импульс-координата



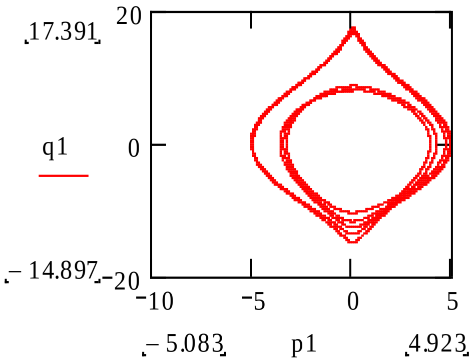


Рис. 6.7 – Координаты *Рис. 6.8 – Импульс-координата*

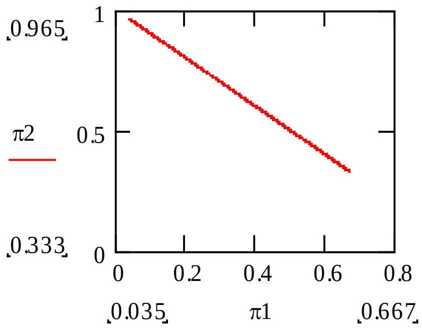


Рис. 6.9 – Предпочтения

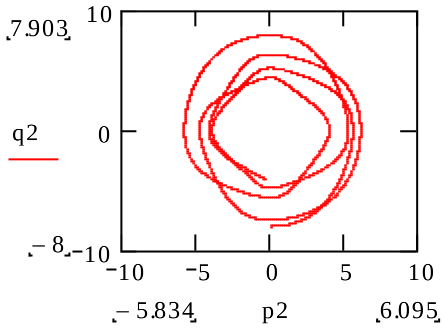


Рис. 6.10 – Импульс-координата

Видим также, что функция Гамильтона $\boldsymbol{H}^*$ сохраняет свою величину (см. рис. 6.11).

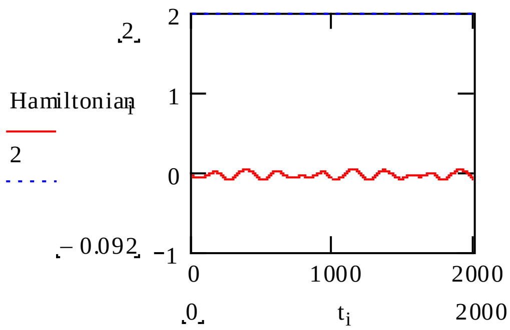


Рис. 6.11 – Гамильтониан

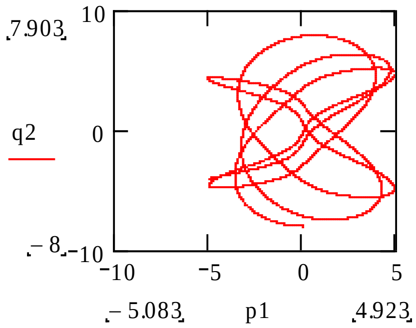


Рис. 6.12 – Импульс-координата

Некоторые незначительные отклонения объясняются «технологическими» неточностями «исчисления» модели. В то же время расчеты подтверждают, что «механическая энергия» H не сохраняется. Заметим, что инвариант $\boldsymbol{H}^*$ существует в приведенном виде, если функция F^* не зависит явно от времени.

Величина инварианта $\boldsymbol{H}^*$ – функции Гамильтона (первого интеграла системы канонических уравнений Эйлера-Лагранжа) определялась по формулам

$$\boldsymbol{H}^* = -F^* + \sum_{i=1}^{N} p_i^* \dot{q}_i \,. \tag{6.142}$$

$$F^* = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i + \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i \left[\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} c_i q_i^2 + U_i(q_i) \right] + \gamma \left[\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1 \right]. \tag{6.143}$$

$$p_i^* \dot{q}_i = \beta \pi_i m_i \dot{q}_i^2 \,. \tag{6.144}$$

$$H^* = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i - \beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i \left[\frac{1}{2} m_i q_i^2 - \frac{1}{2} c_i q_i^2 + U_i(q_i) \right] - \beta \sum_{i=1}^{N} \left(-\pi_i m_i \dot{q}_i^2 \right). \tag{6.145}$$

При $U_i(q_i)=0$

$$H^* = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i + \frac{1}{2}\beta \sum_{i=1}^{N} \pi_i \left[m_i \dot{q}_i^2 + c_i q_i^2 \right]. \qquad (6.146)$$

В модели (6.141)-(6.146) «технологическая деструктивность» «машинных» исчислений проявляется в меньшей степени при $\beta = 0.2$; $\pi_1(0) = 0.495$; $\pi_2(0) = 0.505$, как это видно из рис. 6.13, 6.14 соответственно.

При вышеуказанных данных и начальных условиях результаты моделирования $\sum_{i=1}^{N=2} p_i^*$ и $p_1^* q_2 - p_2^* q_1$ показаны на рис. 6.15, 6.16.

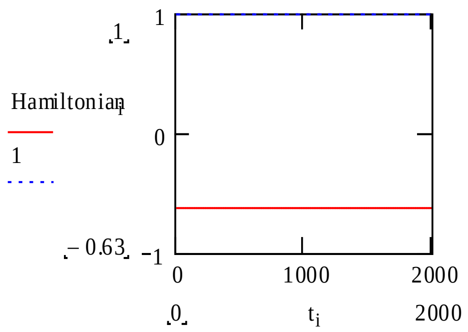


Рис. 6.13 – Гамильтониан

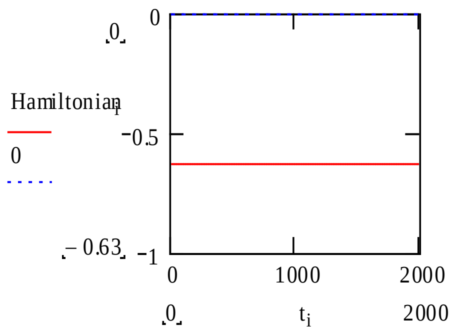


Рис. 6.14 – Гамильтониан

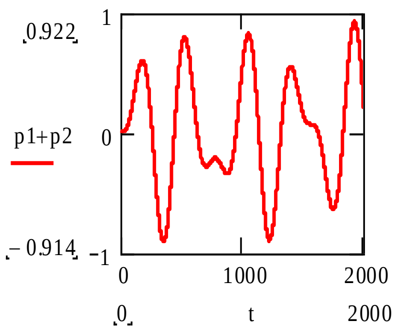


Рис. 6.15 – Импульс

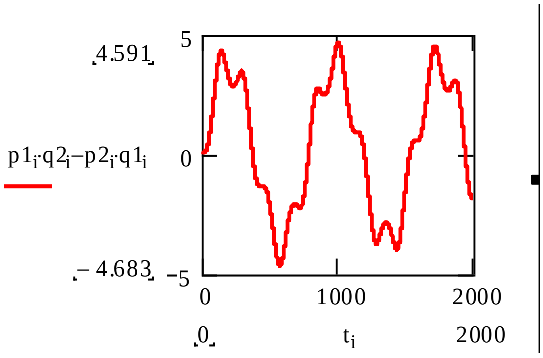


Рис. 6.16 – Кинетический момент

6.1.9. Основная формула для вариации функционала

Рассматривается функционал

$$\Phi^* = \int_{t_1}^{t_2} F^*(\pi_1, \pi_2, x, \dot{x}, t)\,dt. \qquad (6.147)$$

Предположим, что поварьированные переменные задаются формулами

$$\tilde{\pi}_1 = \pi_1 + \xi_1;\ \tilde{\pi}_2 = \pi_2 + \xi_2;\ \dot{\tilde{\pi}}_1 = \dot{\pi}_1 + \dot{\xi}_1;$$
$$\dot{\tilde{\pi}}_2 = \dot{\pi}_2 + \dot{\xi}_2;\ \tilde{x} = x + \eta;\ \dot{\tilde{x}} = \dot{x} + \dot{\eta}, \qquad (6.148)$$

причем все вариации ξ_1, ξ_2, η – величины малые и имеют непрерывные первые и, возможно, вторые производные, которые также малы. Не гладкие экстремали и негладкие вариации здесь не рассматриваются. В этих условиях получим формулу для полной вариации функционала с учетом вариации концов интервала интегрирования и затем рассмотрим необходимые условия экстремума для задачи с незакрепленными концами. Функционал (6.147) записан для случая двух альтернатив.

Приращение функционала

$$\Delta\Phi = \Phi^*[\pi_1 + \xi_1,\ \pi_2 + \xi_2,\ x + \eta,\ \dot{x} + \dot{\eta}] - \Phi^*[\pi_1,\ \pi_2,\ x,\ \dot{x}] =$$
$$= \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} F^*(\pi_1 + \xi_1,\ \pi_2 + \xi_2,\ x + \eta,\ \dot{x} + \dot{\eta},\ t)dt - \int_{t_1}^{t_2} F^*(\pi_1,\ \pi_2,\ x,\ \dot{x},\ t)dt \qquad (6.149)$$

Поскольку по предположению F^* не зависит от $\dot{\pi}_1$ и $\dot{\pi}_2$, то, из (6.149) находим первую вариацию функционала

$$\delta\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F^*}{\partial \pi_1}\xi_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F^*}{\partial \pi_2}\xi_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)\eta(t)dt +$$
$$+ \left.\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\eta(t)\right|_{t_2} - \left.\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\eta(t)\right|_{t_1} + \left.F^*\right|_{t_2}\delta t_2 - \left.F^*\right|_{t_1}\delta t_1. \qquad (6.150)$$

Выполняются следующие приближенные равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\pi_{11} \sim \xi_1(t_1) + \dot{\pi}_1(t_1)\delta t_1;\\
&\delta\pi_{21} \sim \xi_2(t_1) + \dot{\pi}_2(t_1)\delta t_1;\\
&\delta\pi_{12} \sim \xi_1(t_2) + \dot{\pi}_1(t_2)\delta t_2;\\
&\delta\pi_{22} \sim \xi_2(t_2) + \dot{\pi}_2(t_2)\delta t_2;\\
&\delta x_1 \sim \eta(t_1) + \dot{x}(t_1)\delta t_1;\\
&\delta x_2 \sim \eta(t_2) + \dot{x}(t_2)\delta t_2.
\end{aligned}\right\}. \qquad (6.151)$$

Первая вариация при произвольных ξ_1, ξ_2, η равна нулю, если имеют место равенства

$$\frac{\partial F^*}{\partial \pi_1} = 0; \qquad \frac{\partial F^*}{\partial \pi_2} = 0; \qquad \frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0; \qquad (6.152)$$

а также

$$F^*\Big|_{t_2}\delta t_2+\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\bigg|_{t_2}\left(\delta x_2-\dot{x}(t_2)\delta t_2\right)=F^*\Big|_{t_1}\delta t_1+\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\bigg|_{t_1}\left(\delta x_1-\dot{x}(t_1)\delta t_1\right)\quad(6.153)$$

Если δt_1 и δt_2, а также δx_1 и δx_2 не зависят друг от друга, то есть свободны, то (6.153) дает условия

$$\left.\left(F^*-\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\dot{x}(t_2)\right)\right|_{t_2}=0;\left.\left(F^*-\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\dot{x}(t_1)\right)\right|_{t_1}=0;\left.\frac{\partial F^*}{\partial x}\right|_{t_2}=0;\left.\frac{\partial F^*}{\partial x}\right|_{t_1}=0.\quad(6.154)$$

Когнитивная функция в данном случае имеет вид

$$F^*=-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta\pi_1F_1(\pi_1,\,\pi_2,\,x,\,\dot{x},\,t)\pm\beta\pi_2F_2(\pi_1,\,\pi_2,\,x,\,\dot{x},\,t)+\gamma(\pi_1+\pi_2)\quad(6.155)$$

Распространение этой модели на случай $N>2$ альтернатив не представляет затруднений. Соотношения (6.152) дают следующие условия:

$$\frac{\partial F^*}{\partial\pi_1}=-\ln\pi_1-1\pm\beta F_1(\pi_1,\,\pi_2,\,x,\,\dot{x},\,t)+\gamma=0,\quad(6.156)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial\pi_2}=-\ln\pi_2-1\pm\beta F_2(\pi_1,\,\pi_2,\,x,\,\dot{x},\,t)+\gamma=0.\quad(6.157)$$

Поскольку в уравнениях (6.156), (6.157) параметр γ имеет одно и то же значение, можно заметить, что

$$-\ln\pi_1\pm\beta F_1=-\ln\pi_2\pm\beta F_2,\qquad \ln\frac{\pi_1}{\pi_2}=\pm\beta(F_1-F_2)\quad(6.158)$$

или

$$\frac{\pi_1}{\pi_2}=\frac{e^{\pm\beta F_1}}{e^{\pm\beta F_2}}.\quad(6.159)$$

Условие (6.158) в некотором роде аналог закона Вебера-Фехнера [25], [33]. Соотношения (6.152) в подробной записи имеют вид

$$\left.\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta(\pi_1F_1+\pi_2F_2)+\gamma(\pi_1+\pi_2)\mp\beta\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\right|_{t=t_2}=0\quad(6.160)$$

$$\left.\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta(\pi_1F_1+\pi_2F_2)+\gamma(\pi_1+\pi_2)\mp\beta\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\right|_{t=t_1}=0\quad(6.161)$$

Учитывая, что в любой момент времени $\pi_1+\pi_2=1$, а γ не зависит (по предположению) от t, найдем

$$\left.\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta(\pi_1F_1+\pi_2F_2)\mp\beta\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\right|_{t=t_2}=$$

$$=\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta\left(\pi_1F_1+\pi_2F_2\right)\mp\beta\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_1}.\qquad(6.162)$$

Уравнения (6.160), (6.161) можно упростить, если учесть соотношения (6.156), (6.157). Получаем, соответственно

$$\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\Bigg|_{t=t_2}=0,\qquad\left(\pi_1\frac{\partial F_1}{\partial\dot{x}}+\pi_2\frac{\partial F_2}{\partial\dot{x}}\right)\Bigg|_{t=t_1}=0.\qquad(6.163)$$

Геометрически это означает, что в начальный и конечный моменты времени вектор показателей предпочтений ортогонален вектору частных производных $\dfrac{\partial F_i}{\partial\dot{x}}$. Но из (6.162) выходит, что

$$\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta\left(\pi_1F_1+\pi_2F_2\right)\right]\Big|_{t=t_2}=$$
$$=\left[-\pi_1\ln\pi_1-\pi_2\ln\pi_2\pm\beta\left(\pi_1F_1+\pi_2F_2\right)\right]\Big|_{t=t_1}.\qquad(6.164)$$

Относительно величин $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$, которые включены в качестве аргументов функций F_1 и F_2, заметим, что они характеризуют предпочтения в какой-либо иной момент времени, не совпадающий с t, например, в момент $t'=t-\tau$.

6.1.10. Модифицированные условия трансверсальности

Предположим, что приращение функции $x(t)$ в начальной и конечной точках $t_1+\delta t_1$ и $t_2+\delta t_2$ определяются выражениями

$$\delta x_2=\dot{\psi}\delta t_2,\qquad\delta x_1=\dot{\varphi}\delta t_1.\qquad(6.165)$$

Не делая априорно предположения о произвольности и независимости приращений δt_1, δt_2, δx_1, δx_2, из условия равенства нулю первой вариации функционала находим

$$\left(F^*-\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\dot{x}\right)\Bigg|_{t_2}\delta t_2+\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\Bigg|_{t_2}\delta x_2-\left(F^*-\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\dot{x}\right)\Bigg|_{t_1}\delta t_1-\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\Bigg|_{t_1}\delta x_1=0.\qquad(6.166)$$

Если предположить, что δx_1 и δx_2 определяются формулами (6.165), то есть концы экстремали лежат на кривых $x=\varphi(t)$ и $x=\psi(t)$, то уравнение (6.166) дает два условия:

$$\left(F^*+\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\left(\dot{\varphi}-\dot{x}\right)\right)\Bigg|_{t=t_1}=0,\qquad\left(F^*+\frac{\partial F^*}{\partial\dot{x}}\left(\dot{\psi}-\dot{x}\right)\right)\Bigg|_{t=t_1}=0.\qquad(6.167)$$

Это аналог *условий трансверсальности* где F^* – есть функция, заданная формулой (6.155).

6.2. Предпочтения и вариационные принципы в задачах управления

6.2.1 Задачи Лагранжа, Больца и Майера

Выбор той или иной формы вариационной задачи, как известно, зависит от ее практического предназначения. Определение вида функционала задачи на условный экстремум определяется видом дополнительных изопериметрических условий, учитываемых соответственно в форме *задачи Лагранжа, Больца или Майера* [65].

Математическая запись *изопериметрической задачи*, ее общая постановка, некоторые условия и частные случаи представлены в разделах 1 и 2 формулами (1.1)-(2.9.21). Для *задачи Больца* они имеют вид

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,\ \dot{x},\ t)dt + g[t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)], \quad (6.2.1)$$

при граничных условиях

$$\psi[t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)] = 0 \quad (6.2.2)$$

и связях

$$\varphi(x,\ \dot{x},\ t) = 0. \quad (6.2.3)$$

При $g \equiv 0$ задача Больца становится задачей Лагранжа, при $F \equiv 0$ – задачей Майера.

Исходя из того, что задача Больца имеет функционал смешанного типа, который состоит из суммы интегрального функционала и некоторой функции от конечных переменных и свободных функций на этих концах. Если положить

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad x_1(t_1) = \frac{g}{t_2 - t_1}, \quad (6.2.4)$$

то задача Больца является равносильной задаче Лагранжа и приводится к ней:

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} [F(x,\ \dot{x},\ t) + x_1]dt. \quad (6.2.5)$$

Такой подход был реализован в виде (2.1.1), (2.1.2), (2.1.9)-(2.1.12), с последующим разрешением соотношений (2.1.13)-(2.1.20), так же как и в изопериметрической задаче.

Задача Больца равносильна и приводится к задаче Майера, если положить

$$J_2 = x_0(t_2) + g[t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)], \quad (6.2.6)$$

где

$$\dot{x}_0 = F(x,\ \dot{x},\ t), \qquad x_0(t_1) = 0. \quad (6.2.7)$$

Выбор той или иной формы задачи, как уже отмечалось, а также той топологии, в которой потом такая задача рассматривается, чаще всего будут продиктованы соображениями целесообразности соответствующей постановки и конкретики восприятия задачи, а также содержанием и удобством трактовки исходных положений и получаемых результатов. В теории оптимального управления наиболее часто постановки задач рассматриваются в форме Майера. В вариационном исчислении предпочтительной является постановка в форме задачи Лагранжа [65].

6.2.2 Задача Лагранжа в форме Понтрягина

Вернемся к проблемам управления в активных системах с позиций субъективного анализа и постулируемого в нем вариационного принципа, утверждающего оптимальность распределения индивидуальных предпочтений лиц принимающих решения.

Следуя положениям принципа максимума Понтрягина (ПМП) [59 с. 620 …]; где оптимизируемой величиной является функционал [117]

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),\, u(t),\, t]dt\,, \tag{6.2.8}$$

где u – управление, x – свободная функция, t – параметр (к примеру, время), при наличии условий

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x(t_1) = x_1 \tag{6.2.9}$$

и ограничений, в общем случае в виде дифференциальных связей, голономных либо неголономных:

$$\dot{x}(t) = g[x(t),\, u(t),\, t], \tag{6.2.10}$$

а также, вводятся так называемые присоединенные переменные:

$$\lambda(t) = V_x\left[x^*(t),\, t\right], \tag{6.2.11}$$

где $x^*(t)$ – искомая экстремаль, таким образом, получаем

$$\frac{d}{dt}[\lambda(t)x(t)] = \lambda\dot{x} + \dot{\lambda}x = \lambda g + x\dot{\lambda}\,, \tag{6.2.12}$$

$$\underset{u,\,x}{\text{maximize}}\ f(x,\, u,\, t) + \lambda g + x\dot{\lambda} = R\,, \tag{6.2.13}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0\,, \tag{6.2.14}$$

вводя расширенную функцию:

$$R^* = f + \lambda g \tag{6.2.15}$$

имеем

$$\frac{\partial R^*}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial u} = 0\,, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial x} = \frac{\partial R^*}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x} = -\dot{\lambda}\,, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = g\,; \tag{6.2.16}$$

рассмотрим целевой функционал интегрального вида типа (1.1):

$$\Phi_\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left(-\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)\ln\pi_i(t) + \beta\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t)F_i + \gamma\left[\sum_{i=1}^{N}\pi_i(t) - 1\right]\right)dt, \quad (6.2.17)$$

где F_i – соответствующие рассматриваемым альтернативам когнитивные функции.

Среди альтернативных F_i, в функционалах типа (6.2.17), могут оказаться, например, высота полета и управление ею, а также и другие попадающие в поле зрения пилота параметры и их комбинации.

Во многих случаях функция эффективности имеет вид линейной комбинации фазовой переменной и управления, как это отражено в следующей формуле

$$\Phi_\pi^a = \int_{t_0}^{t_1}\left(-\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t)\ln\pi_i(t) + \beta[\pi_1(t)x(t) + \alpha\pi_2(t)u(t)] + \gamma\left[\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t) - 1\right]\right)dt \quad (6.2.18)$$

где a – индекс, обозначающий субъекта – носителя функционала содержащего индивидуальные (субъективные) предпочтения в конкретной проблемно-ресурсной ситуации, $x(t)$ – обобщенная функция, выступающая в роли соответствующей конкретной альтернативе – высота полета, например, $u(t)$ – управление, например, высотой полета, как функция, отвечающая второй альтернативе для данной постановки задачи, α – коэффициент, учитывающий различия в размерностях.

Полагая

$$\dot{x} = g = u, \quad (6.2.19)$$

функция (6.2.15) будет

$$R^* = -\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i\ln\pi_i + \beta[\pi_1 x + \alpha\pi_2 u] + \gamma\left[\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i - 1\right] + \lambda u. \quad (6.2.20)$$

Тогда

$$\frac{\partial R^*}{\partial u} = \alpha\beta\pi_2 + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial x} = \beta\pi_1 = -\dot{\lambda}, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial\lambda} = u. \quad (6.2.21)$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial\pi_1} = -\ln\pi_1 - 1 + \beta x + \gamma = 0, \qquad \pi_1 = e^{\gamma-1}e^{\beta x},$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial\pi_2} = -\ln\pi_2 - 1 + \alpha\beta u + \gamma = 0, \qquad \pi_2 = e^{\gamma-1}e^{\alpha\beta u}. \quad (6.2.22)$$

Из условий нормировки

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 = e^{\gamma-1}e^{\beta x} + e^{\gamma-1}e^{\alpha\beta u} = e^{\gamma-1}\left(e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}\right),$$

$$e^{\gamma-1} = \frac{1}{e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}},$$

$$\pi_1 = \frac{e^{\beta x}}{e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}}, \qquad \pi_2 = \frac{e^{\alpha\beta u}}{e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}}. \tag{6.2.23}$$

Из (6.2.21)

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta\pi_2 + \lambda\right) = \alpha\beta\dot{\pi}_2 + \dot{\lambda} = 0 = \beta\pi_1 + \dot{\lambda}. \tag{6.2.24}$$

При $\beta \neq 0$

$$\pi_1 = \alpha\dot{\pi}_2. \tag{6.2.25}$$

$$\dot{\pi}_2 = \frac{d\pi_2}{dt} = \frac{\partial\pi_2}{\partial t} + \frac{\partial\pi_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\pi_2}{\partial u}\dot{u}. \tag{6.2.26}$$

При наличии связи (6.2.19) производная предпочтения по времени (6.2.26) примет вид

$$\dot{\pi}_2 = \frac{\partial\pi_2}{\partial t} + \frac{\partial\pi_2}{\partial x}u + \frac{\partial\pi_2}{\partial u}\dot{u}. \tag{6.2.27}$$

Получаем

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial t} \equiv 0, \qquad \frac{\partial\pi_2}{\partial x} = -\frac{e^{\alpha\beta u}\beta e^{\beta x}}{\left(e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}\right)^2} = -\beta\pi_1\pi_2,$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial u} = \frac{\alpha\beta e^{\alpha\beta u}\left(e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}\right) - e^{\alpha\beta u}\alpha\beta e^{\alpha\beta u}}{\left(e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}\right)^2} = \frac{\alpha\beta e^{\alpha\beta u}\left(e^{\beta x}\right)}{\left(e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}\right)^2} = \alpha\beta\pi_1\pi_2. \tag{6.2.28}$$

Следовательно

$$\dot{\pi}_2 = -\beta\pi_1\pi_2 u + \alpha\beta\pi_1\pi_2\dot{u}. \tag{6.2.29}$$

Тогда

$$\pi_1 = \alpha\left(\alpha\beta\pi_1\pi_2\dot{u} - \beta\pi_1\pi_2 u\right). \tag{6.2.30}$$

Сократив на $\pi_1 \neq 0$

$$1 = \alpha\beta\pi_2\left(\alpha\dot{u} - u\right), \qquad \dot{u} = \frac{1}{\alpha^2\beta\pi_2} + \frac{u}{\alpha}. \tag{6.2.31}$$

Используя (6.2.23)

$$\dot{u} = \frac{1}{\alpha^2\beta\left(\dfrac{e^{\alpha\beta u}}{e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}}\right)} + \frac{u}{\alpha} = \frac{e^{\beta x} + e^{\alpha\beta u}}{\alpha^2\beta e^{\alpha\beta u}} + \frac{u}{\alpha}. \tag{6.2.32}$$

Окончательно

$$\dot{u} = \frac{1 + e^{\beta(x - \alpha u)}}{\alpha^2\beta} + \frac{u}{\alpha}. \tag{6.2.33}$$

Решение задач отыскания экстремумов функционалов типа (6.2.17), (6.2.18) возможно не только методами ПМП, так называемая постановка задачи Лагранжа в форме Понтрягина, но и с использованием метода Эйлера-Лагранжа.

При этом, например, в функционале (6.2.18) непосредственно учитывается выражение для уравнения связи (6.2.19):

$$\Phi_\pi^a = \int_{t_0}^{t_1}\left(-\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t)\ln\pi_i(t)+\beta\left[\pi_1(t)x(t)+\alpha\pi_2(t)\dot{x}(t)\right]+\gamma\left[\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t)-1\right]\right)dt \quad (6.2.18')$$

На экстремалях необходимым условием является выполнение системы уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial R^*}{\partial\pi_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R^*}{\partial\dot{\pi}_i}\right)=0, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R^*}{\partial\dot{x}}\right)=0, \quad (6.2.34)$$

где R^* – подынтегральная функция функционала (6.2.18').

Получаем зависимости предпочтений π_1 и π_2 от x и $\dot{x}$:

$$\pi_1=\frac{e^{\beta x}}{e^{\beta x}+e^{\alpha\beta\dot{x}}}, \qquad \pi_2=\frac{e^{\alpha\beta\dot{x}}}{e^{\beta x}+e^{\alpha\beta\dot{x}}}. \quad (6.2.35)$$

Для экстремали $x(t)_{opt}$ найдем выражение (6.2.25), откуда получаем дифференциальное уравнение второго порядка идентичное (6.2.33):

$$\ddot{x}-\frac{\dot{x}}{\alpha}-\frac{1+e^{\beta(x-\alpha\dot{x})}}{\alpha^2\beta}=0. \quad (6.2.36)$$

6.2.3. Задача управления с предпочтениями в форме Понтрягина

Если предполагать, что в общем случае закон движения объекта определяется уравнениями:

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i\left(x^1,\,x^2,\,\ldots,\,x^n,\,u^1,\,u^2,\,\ldots,\,u^r\right)=f^i(x,\,u),$$
$$i=1,\,2,\,\ldots,\,n, \quad (6.2.37)$$

где $x^1,\,x^2,\,\ldots,\,x^n$ – n действительных чисел, характеризующих состояние объекта, поведение которого рассматривается в каждый момент времени t (векторное пространство X векторной переменной $x=\left(x^1,\,x^2,\,\ldots,\,x^n\right)$ является фазовым пространством данного объекта); $u^1,\,u^2,\,\ldots,\,u^r$ – система числовых параметров, задающая точку некоторой *области управления* U, которая может быть любым множеством некоторого r-мерного евклидова пространства E_r (важен случай, когда U является з а м к н у т о й областью пространства E_r); или, в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\, u); \tag{6.2.38}$$

функции

$$f^i\left(x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, u^1,\, u^2,\, \ldots,\, u^r\right) \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial f^i\left(x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, u^1,\, u^2,\, \ldots,\, u^r\right)}{\partial x^j},$$

$$i,\; j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \tag{6.2.39}$$

определены и непрерывны на прямом произведении $X \times U$; и основная задача (отыскание оптимальных управлений) формулируется следующим образом:

«В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\, u(t))\,dt \tag{6.2.40}$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $x(t)$ – решение уравнения (6.2.38) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, а t_1 – момент прохождения этого решения через точку x_1.»,

где $f^0(x(t),\, u(t))$ – еще одна заданная функция, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, на всем пространстве $X \times U$; то функция H

$$\mathsf{H}\,(\psi(t),\, x(t),\, u(t)) = \mathsf{M}(\psi(t),\, x(t)), \tag{6.2.41}$$

при обозначении через

$$\mathsf{M}(\psi,\, x) = \sup_{u \in U} \mathsf{H}\,(\psi,\, x,\, u), \tag{6.2.42}$$

точной верхней грани этой функции,

$$\mathsf{H}\,(\psi,\, x,\, u) = (\psi,\; f(x,\, u)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x,\, u), \tag{6.2.43}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t),\, u(t))}{\partial x^i}\psi_\alpha, \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{6.2.44}$$

С помощью (6.2.43) Гамильтонова система принимает вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \psi_i}, \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \tag{6.2.45}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.2.46)$$

Рассмотрим функционал (6.2.17) в виде

$$\Phi_\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) F_i + \gamma \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) \right) dt \qquad (6.2.47)$$

со связями

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = u_i \qquad (6.2.48)$$

и ограничениями допустим

$$|u_i| \leq 1, \qquad (6.2.49)$$

по примеру [6.2.43].

По методу (6.2.37)-(6.2.46) функция Понтрягина (6.2.43) запишется как

$$\mathrm{H}\,(\psi, \pi, u) = \psi_0 f^0 + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2, \qquad (6.2.50)$$

где

$$f^0 = -\sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) F_i + \gamma \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) = \frac{d\pi_0(t)}{dt} = f^0[\pi_1(t), \pi_2(t)] \qquad (6.2.51)$$

в данном примере π_0 является не предпочтением; а еще одной координатой, закон изменения которой имеет вид (6.2.51), где f^0 – функция, участвующая в определении функционала Φ_π (6.2.47) (6.2.40)), поэтому не входит в условие нормировки.

Для вспомогательных переменных получаем систему (6.2.46) в виде

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi_0} = 0, \qquad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi_1} = -\psi_0(-\ln \pi_1 - 1 + \beta F_1 + \gamma),$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi_2} = -\psi_0(-\ln \pi_2 - 1 + \beta F_2 + \gamma). \qquad (6.2.52)$$

Откуда

$$\psi_0 = C_0 = \mathrm{const}, \qquad \psi_1 = C_0 \int (\ln \pi_1 + 1 - \beta F_1 - \gamma) dt + C_1,$$

$$\psi_2 = C_0 \int (\ln \pi_2 + 1 - \beta F_2 - \gamma) dt + C_2, \qquad (6.2.53)$$

где C_0, C_1, C_2 – постоянные интегрирования, соответственно.

Условие ПМП

$$\sup_{u \in U} \mathrm{H} = \sup_{u \in U} \left\{ C_0 \left[f^0 + u_1 \left(\int (\ln \pi_1 + 1 - \beta F_1 - \gamma) dt + \frac{C_1}{C_0} \right) + \right.\right.$$

$$+u_2\left(\int\left(\ln\pi_2+1-\beta F_2-\gamma\right)dt+\frac{C_2}{C_0}\right)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (6.2.54)$$

То есть

$$\sup_{u\in U}\mathrm{H}\ \to\sup_{u\in U}\left[u_1\left(\int\left(\ln\pi_1+1-\beta F_1-\gamma\right)dt+\frac{C_1}{C_0}\right)+\right.$$

$$\left.u_2\left(\int\left(\ln\pi_2+1-\beta F_2-\gamma\right)dt+\frac{C_2}{C_0}\right)\right]. \qquad (6.2.55)$$

Оптимальное управление

$$u_1^*=\mathrm{sign}\left(\int\left(\ln\pi_1+1-\beta F_1-\gamma\right)dt+\frac{C_1}{C_0}\right),$$

$$u_2^*=\mathrm{sign}\left(\int\left(\ln\pi_2+1-\beta F_2-\gamma\right)dt+\frac{C_2}{C_0}\right). \qquad (6.2.56)$$

То есть $u_1^*=\pm1$.

$$u_1^*=1,\qquad \text{если}\qquad \int\left(\ln\pi_1+1-\beta F_1-\gamma\right)dt+\frac{C_1}{C_0}>0 \qquad (6.2.57)$$

и

$$u_1^*=-1,\qquad \text{если}\qquad \int\left(\ln\pi_1+1-\beta F_1-\gamma\right)dt+\frac{C_1}{C_0}<0. \qquad (6.2.58)$$

Аналогично и для $u_2^*=\pm1$.

$$u_2^*=1,\qquad \text{если}\qquad \int\left(\ln\pi_2+1-\beta F_2-\gamma\right)dt+\frac{C_2}{C_0}>0 \qquad (6.2.59)$$

и

$$u_2^*=-1,\qquad \text{если}\qquad \int\left(\ln\pi_2+1-\beta F_2-\gamma\right)dt+\frac{C_2}{C_0}<0. \qquad (6.2.60)$$

Тут оптимальные π_i должны доставлять экстремум функционалу (6.2.47) при условии (6.2.49). Это означает, что оптимальные функции предпочтений являются интегральными кривыми системы

$$\frac{\partial\mathrm{R}^*}{\partial\pi_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{R}^*}{\partial\dot{\pi}_i}\right)=0,\qquad \frac{\partial\mathrm{R}^*}{\partial u_i}=0,\qquad \frac{\partial\mathrm{R}^*}{\partial\lambda_i}=0 \qquad (6.2.61)$$

где

$$\mathsf{R}^{*} = R^{*} + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i\,, \qquad (6.2.62)$$

где R^{*} – подынтегральная функция функционала (6.2.47), λ_i – некоторая функция $\lambda_i(t)$, такая, что π_i доставляют экстремум функционалу (6.2.48), а g_i – дифференциальное уравнение из условия (6.2.49):

$$g_i = \frac{d\pi_i(t)}{dt} - u_i = 0\,. \qquad (6.2.63)$$

Тогда

$$\mathsf{R}^{*} = \left(-\sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) F_i + \gamma \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) \right) + \lambda_i(t) \left(\frac{d\pi_i(t)}{dt} - u_i \right). \qquad (6.2.64)$$

Поскольку условие нормировки $\sum_{i=1}^{2} \pi_i(t) = 1$, то есть при $N = 2$, связывает предпочтения обоих альтернатив однозначно, то не имеет значения какая из π_i и u_i войдет в уравнение (6.2.64). Получим

$$\mathsf{R}^{*} = -\pi_1 \ln \pi_1 - \pi_2 \ln \pi_2 + \beta(\pi_1 F_1 + \pi_2 F_2) + \gamma(\pi_1 + \pi_2) + \lambda(\dot{\pi}_1 - u_1). \qquad (6.2.65)$$

Из (6.2.61)

$$\frac{\partial \mathsf{R}^{*}}{\partial \pi_1} = -\ln \pi_1 - 1 + \beta F_1 + \gamma\,, \quad \frac{\partial \mathsf{R}^{*}}{\partial \dot{\pi}_1} = \lambda\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{R}^{*}}{\partial \dot{\pi}_1} \right) = \dot{\lambda}\,, \qquad (6.2.66)$$

$$-\ln \pi_1 - 1 + \beta F_1 + \gamma - \dot{\lambda} = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathsf{R}^{*}}{\partial \pi_2} = -\ln \pi_2 - 1 + \beta F_2 + \gamma = 0\,, \qquad (6.2.67)$$

$$\pi_1 = e^{-1 + \beta F_1 + \gamma - \dot{\lambda}}\,, \quad \pi_2 = e^{-1 + \beta F_2 + \gamma}\,, \quad e^{-1+\gamma} = \frac{1}{e^{\beta F_1 - \dot{\lambda}} + e^{\beta F_2}}\,, \qquad (6.2.68)$$

$$\pi_1 = \frac{e^{\beta F_1 - \dot{\lambda}}}{e^{\beta F_1 - \dot{\lambda}} + e^{\beta F_2}}\,, \qquad \pi_2 = \frac{e^{\beta F_2}}{e^{\beta F_1 - \dot{\lambda}} + e^{\beta F_2}}\,, \qquad \frac{\partial \mathsf{R}^{*}}{\partial u_1} = -\lambda = 0\,, \qquad (6.2.69)$$

$$\dot{\lambda} = 0\,, \qquad \pi_1 = \frac{e^{\beta F_1}}{e^{\beta F_1} + e^{\beta F_2}}\,, \qquad \pi_2 = \frac{e^{\beta F_2}}{e^{\beta F_1 - \dot{\lambda}} + e^{\beta F_2}}\,. \qquad (6.2.70)$$

Таким образом, получили решение для задачи на безусловный экстремум. Однако, экстремали в задаче (6.2.47) на безусловный экстремум по управлениям (6.2.48), а следовательно, и без ограничений (6.2.48) имеют вид (6.2.70).

Из условий экстремальности (6.2.66)-(6.2.70) выходит, что подставляя их в (6.2.53) получаем

$$\psi_1 = C_1 = const\,, \qquad \psi_2 = C_2 = const\,. \qquad (6.2.71)$$

Из (6.2.56), при этом – оптимальное управление $u_1^* = \mathrm{sign}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)$, $u_2^* = \mathrm{sign}\left(\frac{C_2}{C_0}\right)$. Причем, очевидно, что это не является причиной нелинейности функционала (6.2.47) содержащего энтропию:

$$\Phi_{\lambda\pi} \neq \lambda_1 \Phi_{\pi_1} + \lambda_2 \Phi_{\pi_2}\,. \qquad (6.2.72)$$

То есть, для постановки задачи (6.2.47)-(6.2.60) имеем следующее: оптимальное управление постоянно.

Через условие нормировки $\dot{\pi}_1 = -\dot{\pi}_2$. Поэтому $u_1^* = -u_2^*$. При $u_1^* = 1$, $u_2^* = -1$. Тогда $\pi_1 = t + S_1$, где S_1 – постоянная интегрирования, $S_1 = \pi_1(t)\big|_{t_0=0}$, $\pi_2 = -t + S_2$, $S_2 = \pi_2(t)\big|_{t_0=0}$ и $S_2 = 1 - S_1 = 1 - \pi_1(t)\big|_{t_0=0}$. Поскольку $0 \le \pi_1 = t + S_1 \le 1$, то $0 - S_1 \le t \le 1 - S_1$. То есть, продолжительность оптимального процесса управления активной системой ограничена единичным интервалом времени, и, этот единичный интервал может передвигаться по оси времени, будучи фиксированным по продолжительности, также в ограниченном диапазоне времени $[-1,\, 1]$, начиная со значения $t_0 = -S_1$.

Это не противоречит начальному условию $t_0 = 0$ только если $S_1 = 0$. Таким образом $0 \le \pi_1 = t \le 1$.

С другой стороны канонические распределения типа (6.94), в частности и (6.2.70) характеризуются строгой положительностью предпочтений. Следовательно, $0 < \pi_i < 1,\ \forall i \in 1 \ldots N$. Хотя и может быть такое положение, при котором сколько угодно предпочтений, вплоть до все кроме одного бесконечно близкого к единице предпочтения, являются как угодно малыми. Далее, при постоянных когнитивных функциях F_i предпочтения π_i тоже становятся постоянными и при этом нарушаются условия оптимального управления (6.2.50)-(6.2.60), следующие из ПМП, со связями (6.2.48) и ограничениями (6.2.49).

Бесконечно близкая согласованность между оптимальным управлением вида (6.2.65)-(6.2.70) возможна при соответствующем задании функций $F_i(t)$, эндогенного параметра β, промежутка $[t_0,\, t_1]$ и ограничений (6.2.49) при наличии связей (6.2.48).

Получается, бессмысленно управлять предпочтениями не управляя когнитивными функциями (управлять (6.2.47) в смысле (6.2.48) не имеет смысла).

Возьмем функционал (6.2.46), (6.2.47) в виде (6.2.47), (6.2.47'):

$$\Phi_\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left(-\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t)\ln\pi_i(t) + \beta\left[\pi_1(t)x^1(t) + \alpha\pi_2(t)x^2(t)\right] + \gamma\left[\sum_{i=1}^{N=2}\pi_i(t) - 1\right]\right)dt\,, \quad (6.2.73)$$

здесь $x^1(t) = x(t),\ x^2(t) = \dfrac{dx^1(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ – фазовые переменные (координаты),

при этом $\ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dot{x}^2(t) = u_x(t),\ |u_x| \le 1.$

Функция Понтрягина

$$\mathrm{H}\,(\psi,\, x,\, u) = \psi_0 f^0 + \psi_1 x^2 + \psi_2 u_x, \quad (6.2.74)$$

где

$$f^0 = -\sum_{i=1}^{2}\pi_i\ln\pi_i + \beta\left[\pi_1 x^1 + \alpha\pi_2 x^2\right] + \gamma\sum_{i=1}^{2}\pi_i = \frac{dx^0}{dt} = f^0\left(x^1,\ x^2\right). \quad (6.2.75)$$

Система для вспомогательных переменных

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x^1} = -\psi_0\beta\pi_1,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x^2} = -(\psi_0\alpha\beta\pi_2 + \psi_1). \quad (6.2.76)$$

Откуда

$$\psi_0 = C_0 = \mathrm{const}, \qquad \psi_1 = -C_0\beta\int\pi_1 dt + C_1,$$

$$\psi_2 = C_0\beta\left(\int\int\pi_1 dtdt - \alpha\int\pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta}\right), \quad (6.2.77)$$

где C_0, C_1, C_2 – постоянные интегрирования, соответственно.

Условие ПМП

$$\sup_{u\in U}\mathrm{H} = \sup_{u\in U}\left\{C_0\left[f^0 + \beta\left(u_x\left[\int\int\pi_1 dtdt - \alpha\int\pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta}\right] - x^2\left[\int\pi_1 dt - \frac{C_1}{C_0\beta}\right]\right)\right]\right\}$$

(6.2.78)

То есть

$$\sup_{u\in U}\mathrm{H} \to \sup_{u\in U}\left[u_x\left(\int\int\pi_1 dtdt - \alpha\int\pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta}\right)\right]. \quad (6.2.79)$$

Оптимальное управление

$$u_x^* = \mathrm{sign}\left(\int\int \pi_1 dtdt - \alpha\int \pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta}\right). \quad (6.2.80)$$

То есть $u_x^* = \pm 1$.

$$u_x^* = 1, \quad \text{если} \quad \int\int \pi_1 dtdt - \alpha\int \pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta} > 0 \quad (6.2.81)$$

и

$$u_x^* = -1, \quad \text{если} \quad \int\int \pi_1 dtdt - \alpha\int \pi_2 dt + \frac{C_2 - C_1 t}{C_0\beta} < 0\,. \quad (6.2.82)$$

Тогда если:

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = u_x^* = -1, \Rightarrow \quad x^2(t) = -t + S_2 = \frac{dx^1(t)}{dt}, \Rightarrow$$

$$x^1(t) = \int(-t + S_2)dt\,, \quad (6.2.83)$$

$$x^1(t) = -\frac{t^2}{2} + S_2 t + S_1 = -\frac{t^2}{2} + S_2 t - \frac{S_2^2}{2} + S_1 + \frac{S_2^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(t^2 - 2S_2 t + S_2^2\right) +$$

$$+ S_1 + \frac{S_2^2}{2} = -\frac{(-t + S_2)^2}{2} + S_1 + \frac{S_2^2}{2} = -\frac{\left[x^2(t)\right]^2}{2} + S_1 + \frac{S_2^2}{2}, \quad (6.2.84)$$

где S_1, S_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных или граничных условий;

$$S_1 = x^1(t)\Big|_{t_0=0}, \qquad S_2 = x^2(t)\Big|_{t_0=0}; \quad (6.2.85)$$

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = u_x^* = 1, \Rightarrow \quad x^2(t) = t + S_2, \Rightarrow$$

$$x^1(t) = \frac{\left[x^2(t)\right]^2}{2} + S_1 - \frac{S_2^2}{2}\,. \quad (6.2.86)$$

Промоделируем поведение объекта управления при следующих данных: $\alpha = 36$, $\beta = 0.001$, $x^1(t)\Big|_{t_0=0} = 1000$, $x^2(t)\Big|_{t_0=0} = 10$. Результаты показаны на рис. 3.6-3.12.

На рис. 6.16-6.21 обозначено: $\mathrm{x1\_(t)}$, $\mathrm{x1\_p(t)}$, $\mathrm{x2\_(t)}$, $\mathrm{x2\_p(t)}$ – $x^1(t)$, $x^2(t)$ для случаев (6.2.83) и (6.2.86) соответственно.

Моделирование произведено для случая не экстремального $x(t)$, поэтому предпочтения отличаются от таковых в случае, что показано на рис. 6.22, где обозначено: $\pi\_1(\mathrm{t})$, $\pi\_\mathrm{p1}(\mathrm{t})$, $\pi\_2(\mathrm{t})$, $\pi\_\mathrm{p2}(\mathrm{t})$ – $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$ для случаев

(6.2.83) и (6.2.86) соответственно, а также $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ – $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$ в случае (6.2.11) или (6.2.11').

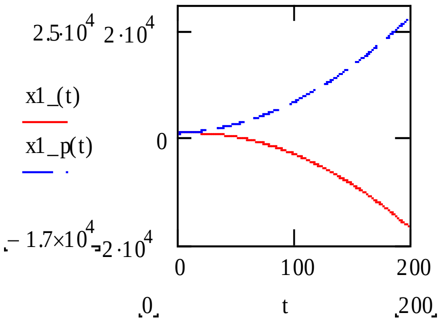


Рис. 6.17 – Фазовые координаты (координаты)

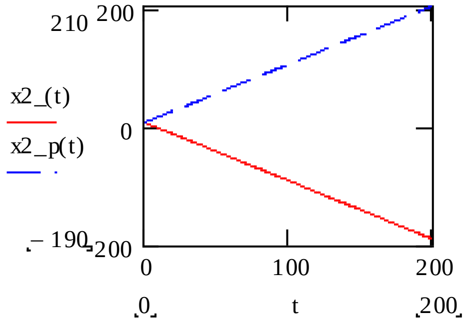


Рис. 6.18 – Фазовые координаты (скорости)

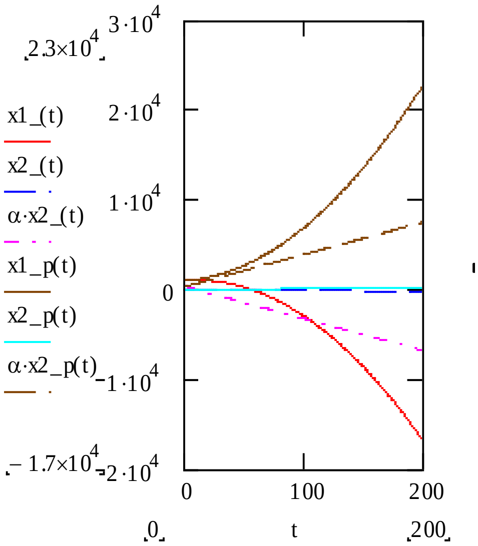


Рис. 6.19 – Фазовые координаты (когнитивные функции)

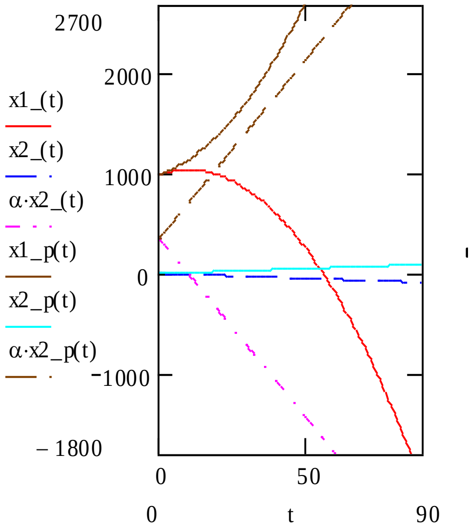


Рис. 6.20 – Фазовые координаты (когнитивные функции)

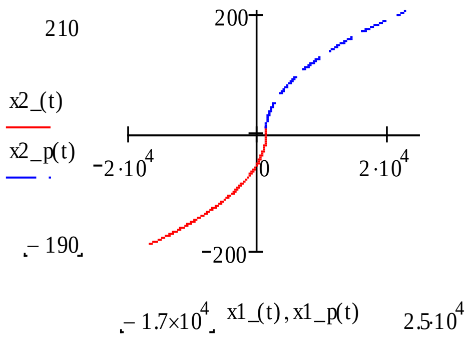


Рис. 6.21 – Фазовый портрет

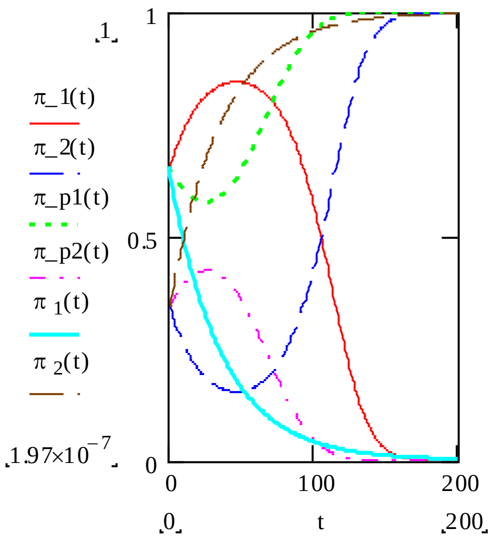


Рис. 6.22 – Предпочтения

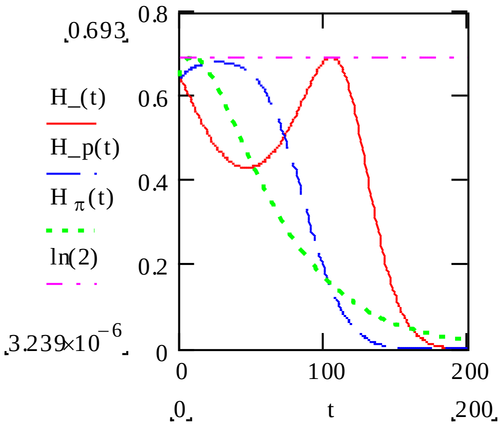


Рис. 6.23 – Энтропии

На рис. 3.12 обозначено: $H\_(t)$, $H\_p(t)$, $H_\pi(t)$ – субъективные энтропии в случаях (6.2.83), (6.2.86) и (6.2.11) соответственно.

Решение существенно зависит от когнитивных параметров α и β, а также начальных данных. При значениях $\alpha = 54$, $\beta = 0.01$ наиболее выразительные результаты расчетов показаны на рис. 6.24-6.27.

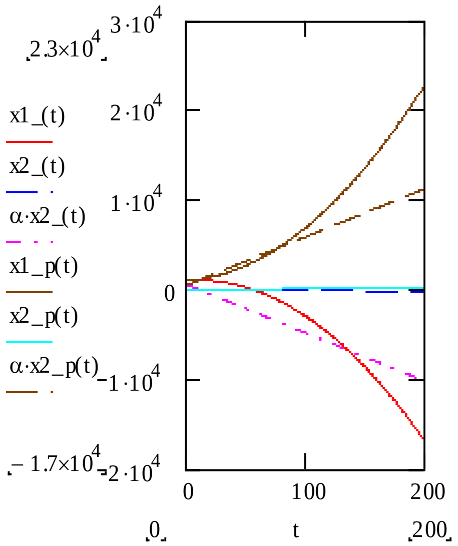


Рис. 6.24 – Когнитивные функции

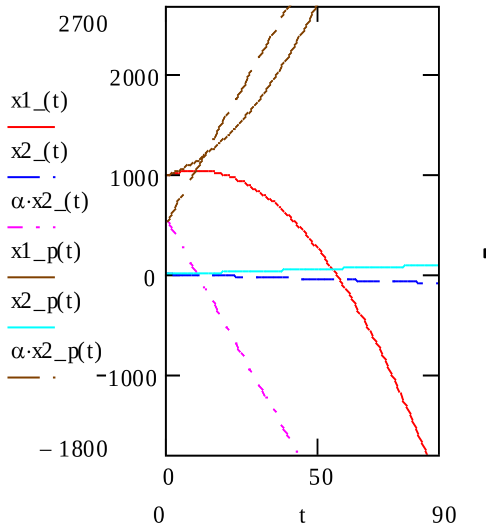


Рис. 6.25 – Когнитивные функции

В более сложном случае, при экстремальном $x(t)$ с ограничением типа $\ddot{x}(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=\dot{x}^2(t)=u_x(t)$, $|u_x|\le 1$, приходится решать задачу трансверсальности при переходе экстремали на граничную поверхность.

Когда в ходе развития процесса оптимальное управление изменяется в соответствии с условиями (6.2.80)-(6.2.83), то получаем более сложную картину эволюции предпочтений. В частности, для данных: $\alpha=36$, $\beta=0.001$, $C_0=5$, $C_1=0.09$, $C_2=3$; имеем результаты моделирования показанные на рис. 6.28-6.34.

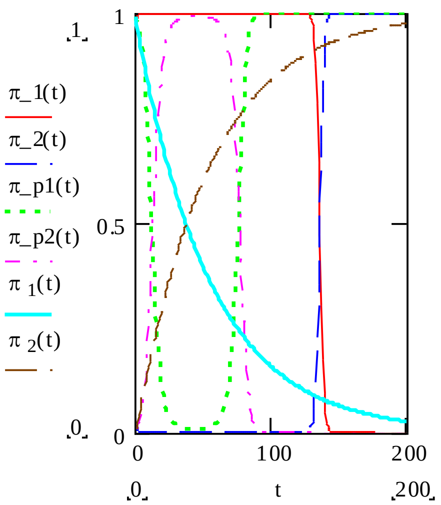


Рис. 6.26 – Предпочтения

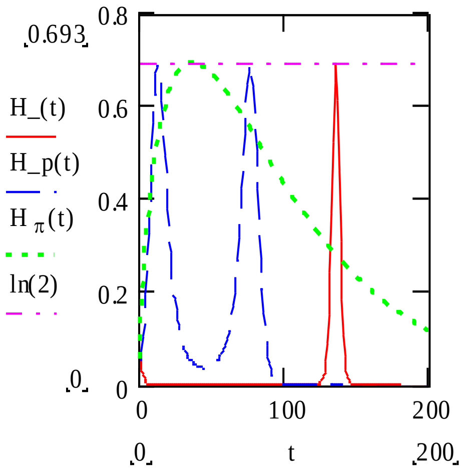


Рис. 6.27 – Энтропии

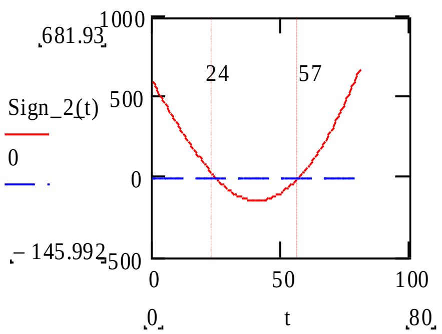


Рис. 6.28 – Показатель для выбора знака оптимального управления

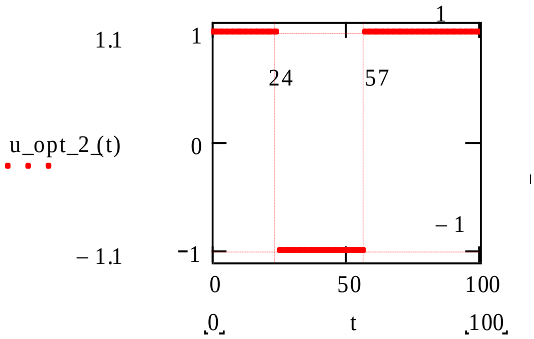


Рис. 6.29 – Оптимальное управление

На рис. 6.28 показаны результаты вычислений произведенных по выражению (6.2.80), которое в моменты времени $t \approx 24$ и ≈ 57 меняет свой знак. Это влечет за собой изменение знака оптимального управления в соответствии с (6.2.81) и (6.2.82), что видно из рис. 6.29.

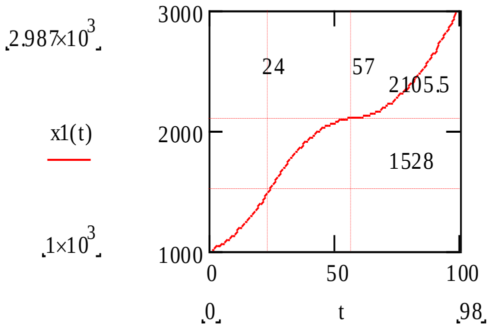


Рис. 6.30 – Фазовая координата

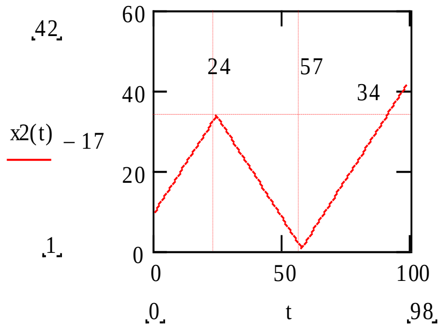


Рис. 6.31 – Фазовая скорость

В моменты изменения управления фазовые координаты меняют, соответственно, характер своего изменения, показанный на рис. 6.30, 6.31. Фазовая траектория, при этом, имеет вид, проиллюстрированный на рис. 6.32.

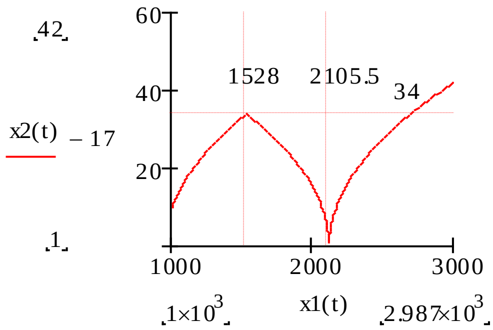


Рис. 6.32 – Фазовый портрет

Соответствующие данным альтернативам предпочтения показаны на рис. 6.33, а их энтропии на рис. 6.34.

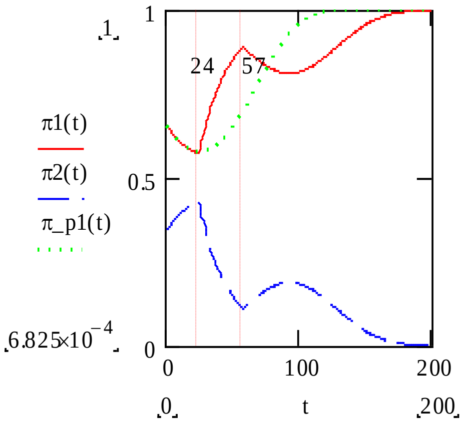


Рис. 6.33 – Предпочтения

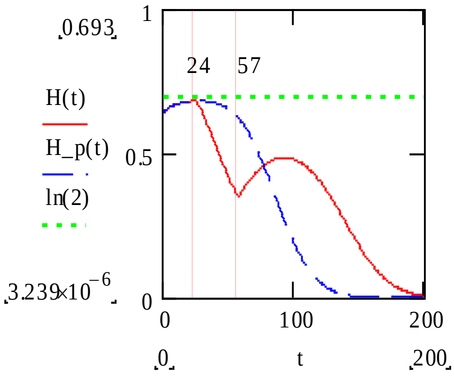


Рис. 6.34 – Энтропии

Анализ результатов данного эксперимента и интерпретация модели в общем контексте свидетельствует о первом переключении управления, которое происходит в момент $t \approx 24$ ибо субъект находится в состоянии максимальной неопределенности (энтропия $\mathrm{H}(\mathrm{t})$ (см. рис. 6.34) распределения предпочтений $\pi 1(\mathrm{t})$ и $\pi 2(\mathrm{t})$ (см. рис. 6.33) в этот момент имеет максимальное значение). Стремление субъекта уйти из состояния связанного с этим дискомфорта вынуждает его менять начальное оптимальное управление с $u_x^* = 1$ при условии (6.2.80) на $u_x^* = -1$ при (6.2.81) (см. рис. 6.28, 6.29).

Однако, такое развитие событий, хотя и приводит к более быстрому достижению состояния сравнительной определенности (сравните скорости изменения энтропий $\mathrm{H\_p}(\mathrm{t})$ и $\mathrm{H}(\mathrm{t})$ (см. рис. 6.34) или соответствующих предпочтений показанных на рис. 6.33), все же имеет «некий побочный эффект» ясно видный по фазовой траектории (см. рис. 6.32). То есть, существует необходимость увеличения первой фазовой координаты $\mathrm{x1}(\mathrm{t})$ при положительности второй фазовой координаты $\mathrm{x2}(\mathrm{t})$. Данное условие предусмотрено в постановке в исходном функционале (6.2.77).

Выражение (6.2.81) после момента времени $t \approx 24$ снова меняет свой знак (см. рис. 6.28). В связи с этим, в момент $t \approx 57$ оптимальное управление снова становится $u_x^* = 1$ (см. рис. 6.29). То есть, субъект, достигая большей определенности, но, перестав при этом наращивать (приобретать) $\mathrm{x1}(\mathrm{t})$, ***полностью*** «разо-

чаровывается» в управлении $u_x^* = -1$ и «навсегда» в данном случае меняет его на $u_x^* = 1$ даже невзирая на определенный рост энтропии $\mathrm{H}(\mathrm{t})$ после $t \approx 57$.

Такое положение вещей является еще одним свидетельством несовершенства энтропии традиционного вида, но выгодных качеств предлагаемой энтропийной функции вида, что было продемонстрировано в работах [20, с. 123, (21)], [21, с. 64, (19)], [22], [103].

Прикладной аспект позволяет интерпретировать рассматриваемую постановку в следующий терминах:

1. **Набор высоты.** До момента $t \approx 24$ – режим ускоренный в условиях $\ddot{x}(t) = 1$; после $t \approx 24$, до $t \approx 57$ – переход на режим «отчасти по инерции», $\ddot{x}(t) = -1$, набор высоты осуществляется за счет поддержания заданного отрицательного ускорения и достигнутой до этого скорости, при этом очевидно экономится топливо и энергия; как только скорость набора высоты становится практически нулевой: $\mathrm{x2}(\mathrm{t})_+ \to 0$ (или, что тоже самое, высота перестает увеличиваться: $\mathrm{x1}(\mathrm{t}) \to const$, как видно из рис. 3.21) и при этом время набора высоты еще не исчерпано $t > 57$, снова включается режим $\ddot{x}(t) = 1$.

2. **Приоритеты наращивания ресурсов.** Фазовая координата $\mathrm{x1}(\mathrm{t})$ – капитал (счет в банке), $\mathrm{x2}(\mathrm{t})$ – скорость его изменения во времени. В таком случае данные экономические категории показывают динамические свойства эволюции управления ведением бизнеса, при котором в трех описанных выше периодах происходит переключение с первого вида деятельности на второй и затем, полностью в нем разочаровавшись, снова на первый.

3. **Социальная ориентация.** Подобно альтернативным методам ведения бизнеса, контроль развития общественных форм предполагает управление социумом, на основе определенных обобщенных показателей эффективности $\mathrm{x1}(\mathrm{t})$, $\mathrm{x2}(\mathrm{t})$, посредством некоего параметра $u_x(t)$. В данном случае управления с учетом динамических свойств управляемого приводит к тому, что источник власти меняет свои приоритеты в означенные моменты времени. Трактовка этих изменений и их причинно-следственных связей сходна с предыдущим примером, в частности, например, в момент $t \approx 57$ в выборном процессе побеждает первая партия, лишенная до того, в момент $t \approx 24$, власти в пользу оппозиционных политических сил.

Возможны и иные аналогии данной постановки.

Логичным продолжением проводимых исследований является комбинация из двух предыдущих случаев. То есть:

$$\Phi_\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\sum_{i=1}^{N=2} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta\left[\pi_1(t) x^1(t) + \alpha \pi_2(t) x^2(t)\right] + \gamma \left[\sum_{i=1}^{N=2} \pi_i(t) - 1\right] \right) dt, \quad (6.2.87)$$

но здесь будет совместно, как и выше в обеих постановках было отдельно $\dfrac{d\pi_i(t)}{dt} = u_\pi^i, \quad |u_\pi^i| \le 1, \quad \dfrac{d\pi_1(t)}{dt} = u_\pi^1 = -\left(\dfrac{d\pi_2(t)}{dt} = u_\pi^2\right)$, в случае (6.2.47)-(6.2.62); а $x^1(t) = x(t),\ x^2(t) = \dfrac{dx^1(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ – фазовые переменные (координаты), как функции эффективности в случае (6.2.73)-(6.2.86). При этом, как и там же, $\ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dot{x}^2(t) = u_x(t),\ |u_x| \le 1.$

Функция Понтрягина

$$\mathrm{H}\,(\psi,\, x,\, u) = \psi_0 f^0 + \psi_1 x^2 + \psi_2 u_x + \psi_3 u_\pi^1 + \psi_4 u_\pi^2, \quad (6.2.88)$$

где

$$f^0 = -\sum_{i=1}^{2} \pi_i \ln \pi_i + \beta\left[\pi_1 x^1 + \alpha \pi_2 x^2\right] + \gamma \sum_{i=1}^{2} \pi_i = \frac{dx^0}{dt} = f^0\left(\pi_1,\, \pi_2,\, x^1,\, x^2\right). \quad (6.2.89)$$

6.3. Вариационные задачи с подвижными границами

6.3.1. Основная формула для вариации функционала

В случае функционала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y_i,\, y_i')dx, \quad (6.3.1)$$

зависящего от n функций $y_1, \ldots, y_n$, его вариация, в предположении, что концы кривых, на которых определен этот функционал, могут сдвигаться произвольным образом, находится по основной формуле:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}\right) h_i(x) dx + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_i \Bigg|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) \delta x \Bigg|_{x_0}^{x_1}, \quad (6.3.2)$$

где $h_i(x)$ – вариация функции $y_i(x)$, а символ $\Big|_{x_0}^{x_1}$ показывает, что нужно взять разность между значениями соответствующей величины в конечной точке дуги с координатами $(x_1,\, y_1)$ и в начальной – $(x_0,\, y_0)$.

6.3.2. Частные случаи задач с подвижными границами

В случае трех функций задачу с подвижными границами сформулируем следующим образом:

Среди всевозможных кривых, концы которых лежат на двух фиксированных трехмерных поверхностях

$$t = \varphi(x,\, y,\, z), \qquad t = \psi(x,\, y,\, z), \quad (6.3.3)$$

найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')dt\,. \qquad (6.3.4)$$

Воспользовавшись общей формулой для вариации (6.3.2) (при $n = 3$), получаем

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}\right)h_x(t) + \left(F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right)h_y(t) + \left(F_z - \frac{d}{dt}F_{z'}\right)h_z(t)\right]dt +$$

$$+ F_{x'}\big|_{t=t_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{t=t_1}\delta y_1 + F_{z'}\big|_{t=t_1}\delta z_1 + \left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_1}\delta t_1 - \qquad (6.3.5)$$

$$- F_{x'}\big|_{t=t_0}\delta x_0 - F_{y'}\big|_{t=t_0}\delta y_0 - F_{z'}\big|_{t=t_0}\delta z_0 - \left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_0}\delta t_0 = 0\,.$$

Проводя те же самые рассуждения, что и в случае двух неизвестных функций, получаем, что функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, определяющие искомую кривую, тоже должны удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0\,, \qquad F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0\,, \qquad F_z - \frac{d}{dt}F_{z'} = 0\,. \quad (6.3.6)$$

Поэтому в выражении вариации (6.3.5) первый член обращается в нуль, и получим

$$\delta J =$$

$$F_{x'}\big|_{t=t_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{t=t_1}\delta y_1 + F_{z'}\big|_{t=t_1}\delta z_1 + \left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_1}\delta t_1 -$$

$$- F_{x'}\big|_{t=t_0}\delta x_0 - F_{y'}\big|_{t=t_0}\delta y_0 - F_{z'}\big|_{t=t_0}\delta z_0 - \left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_0}\delta t_0 = 0\,. \quad (6.3.7)$$

Так как

$$\delta t_1 = \psi_x\delta x_1 + \psi_y\delta y_1 + \psi_z\delta z_1 + \alpha_1\,,$$

$$\delta t_0 = \varphi_x\delta x_0 + \varphi_y\delta y_0 + \varphi_z\delta z_0 + \alpha_0\,, \qquad (6.3.8)$$

где α_1 и α_0 – бесконечно малые величины порядка выше первого, то окончательно необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ примет вид

$$\delta J = \left(F_{x'} + F\psi_x - x'F_{x'}\psi_x - y'F_{y'}\psi_x - z'F_{z'}\psi_x\right)\big|_{t=t_1}\delta x_1 +$$

$$+ \left(F_{y'} + F\psi_y - x'F_{x'}\psi_y - y'F_{y'}\psi_y - z'F_{z'}\psi_y\right)\big|_{t=t_1}\delta y_1 +$$

$$+ \left(F_{z'} + F\psi_z - x'F_{x'}\psi_z - y'F_{y'}\psi_z - z'F_{z'}\psi_z\right)\big|_{t=t_1}\delta z_1 - \qquad (6.3.9)$$

$$-\left(F_{x'}+F\varphi_x-x'F_{x'}\varphi_x-y'F_{y'}\varphi_x-z'F_{z'}\varphi_x\right)\Big|_{t=t_0}\delta x_0-$$
$$-\left(F_{y'}+F\varphi_y-x'F_{x'}\varphi_y-y'F_{y'}\varphi_y-z'F_{z'}\varphi_y\right)\Big|_{t=t_0}\delta y_0-$$
$$-\left(F_{z'}+F\varphi_z-x'F_{x'}\varphi_z-y'F_{y'}\varphi_z-z'F_{z'}\varphi_z\right)\Big|_{t=t_0}\delta z_0=0. \quad (5.1.7)$$

Так как δx_1, δy_1, δz_1, δx_0, δy_0 и δz_0 – независимые приращения, то отсюда получаем, что в концевых точках должны выполняться условия трансверсальности:

$$\left[F_{x'}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_0}=0,$$
$$\left[F_{y'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_0}=0,$$
$$\left[F_{z'}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_0}=0,$$
$$\left[F_{x'}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_1}=0,$$
$$\left[F_{y'}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_1}=0,$$
$$\left[F_{z'}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(F-x'F_{x'}-y'F_{y'}-z'F_{z'}\right)\right]\Bigg|_{t=t_1}=0. \quad (6.3.10)$$

6.3.3. Общий случай задачи с угловыми точками для трех неизвестных функций

В некоторых вариационных задачах экстремум может достигаться на негладких кривых. Кусочно-непрерывные экстремали в силу теоремы могут иметь излом лишь там, где

$$F_{y'y'}=0. \quad (6.3.11)$$

Условия Вейерштрасса-Эрдмана для функционала, зависящего от трех функций в общем виде запишутся так:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_c} F(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')dt+\int_{t_c}^{t_1} F(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')dt=J_0+J_1, \quad (6.3.12)$$

где t_c – абсцисса угловой точки.

Воспользовавшись общей формулой для вариации (при $n=3$), получаем

$$\delta J=\delta J_0+\delta J_1=$$

$$\int_{t_0}^{t_c}\left[\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}\right)h_x(t)+\left(F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}\right)h_y(t)+\left(F_z-\frac{d}{dt}F_{z'}\right)h_z(t)\right]dt+$$

$$+F_{x'}\big|_{t=t_c-0}\delta x_c+F_{y'}\big|_{t=t_c-0}\delta y_c+F_{z'}\big|_{t=t_c-0}\delta z_c+$$

$$\left[F-\left(x'F_{x'}+y'F_{y'}+z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c-0}\delta t_c-$$

$$-F_{x'}\big|_{t=t_0}\delta x_0-F_{y'}\big|_{t=t_0}\delta y_0-F_{z'}\big|_{t=t_0}\delta z_0-\left[F-\left(x'F_{x'}+y'F_{y'}+z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_0}\delta t_0+$$

$$+\int_{t_c}^{t_1}\left[\left(F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}\right)h_x(t)+\left(F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}\right)h_y(t)+\left(F_z-\frac{d}{dt}F_{z'}\right)h_z(t)\right]dt+$$

$$+F_{x'}\big|_{t=t_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{t=t_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{t=t_1}\delta z_1+$$

$$\left[F-\left(x'F_{x'}+y'F_{y'}+z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_1}\delta t_1-$$

$$-F_{x'}\big|_{t=t_c+0}\delta x_c-F_{y'}\big|_{t=t_c+0}\delta y_c-F_{z'}\big|_{t=t_c+0}\delta z_c-$$

$$\left[F-\left(x'F_{x'}+y'F_{y'}+z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c+0}\delta t_c=0. \quad (6.3.13)$$

Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, определяющие искомую кривую, на каждом из участков непрерывности должны удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0, \qquad F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0, \qquad F_z-\frac{d}{dt}F_{z'}=0. \quad (6.3.14)$$

Поэтому в выражении вариации (6.3.13) интегральные члены обращаются в нуль. Кроме того, смещения в крайних точках 0 и 1 не происходит, поэтому

$$\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = \delta t_0 = \delta x_1 = \delta y_1 = \delta z_1 = \delta t_1 = 0\,. \qquad (6.3.15)$$

Окончательно необходимое условие экстремума принимает вид

$$\delta J = \delta J_0 + \delta J_1 = F_{x'}\big|_{t=t_c-0}\delta x_c + F_{y'}\big|_{t=t_c-0}\delta y_c + F_{z'}\big|_{t=t_c-0}\delta z_c +$$
$$+\left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c-0}\delta t_c -$$
$$F_{x'}\big|_{t=t_c+0}\delta x_c - F_{y'}\big|_{t=t_c+0}\delta y_c - F_{z'}\big|_{t=t_c+0}\delta z_c -$$
$$-\left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c+0}\delta t_c = 0\,. \qquad (6.3.16)$$

$$\left(F_{x'}\big|_{t=t_c-0} - F_{x'}\big|_{t=t_c+0}\right)\delta x_c + \left(F_{y'}\big|_{t=t_c-0} - F_{y'}\big|_{t=t_c+0}\right)\delta y_c +$$
$$+\left(F_{z'}\big|_{t=t_c-0} - F_{z'}\big|_{t=t_c+0}\right)\delta z_c + \Big\{\left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c-0} -$$
$$-\left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c+0}\Big\}\delta t_c = 0\,. \qquad (6.3.17)$$

Откуда в силу произвольности δx_c, δy_c, δz_c и δt_c получаем условия Вейерштрасса-Эрдмана для функционала (6.3.12):

$$\left.\begin{aligned}
F_{x'}\big|_{t=t_c-0} - F_{x'}\big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
F_{y'}\big|_{t=t_c-0} - F_{y'}\big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
F_{z'}\big|_{t=t_c-0} - F_{z'}\big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
\left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c-0} - \left[F - \left(x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'}\right)\right]_{t=t_c+0} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.3.18)$$

6.3.4. Экстремали с угловыми точками

Проблемно-ресурсный подход, задействованный в субъективном анализе, позволяет через субъективные предпочтения определять координаты точек излома (по крайней мере, в приведенном ниже примере на фазовой плоскости). Так, например, в случае с наемными служащими и руководством предприятия, количество сотрудников P будет формироваться под воздействием предпочтений как одних, так и других, причем эти предпочтения находятся во взаимовлиянии.

Количество служащих, предпочитающих работать на предприятии

$$P_p = P_0 + kS_p\,, \qquad (6.3.19)$$

где P_0 – количество служащих согласных работать за минимальную заработную плату (символическую, т.е. практически бесплатно) (волонтеры, альтруисты, энтузиасты); k – коэффициент, учитывающий предпочтения сотрудничать; S_p – размер ежемесячной зарплаты.

Для простоты выбран линейный характер зависимости (6.3.19), что вполне правомерно в грубой постановке.

Количество работников, принимаемых на предприятие исходя из предпочтений руководства, максимально возможное исходя из располагаемых ресурсов

$$P_a = P_0 + \frac{R_{es}}{S_p}, \tag{6.3.20}$$

где R_{es} – ресурсы предприятия, задействованные для привлечения необходимого количества сотрудников требуемого качества.

Тогда, максимальное количество действительно принимаемых на предприятие сотрудников определится равенством

$$P_p = P_a = P_0 + kS_p = P_0 + \frac{R_{es}}{S_p}, \tag{6.3.21}$$

причем, при $S_p \le \left(S_p^* = \sqrt{\frac{R_{es}}{k}} \right)$, $P(S_p) = P_0 + kS_p$ – предприятие, исходя из располагаемых ресурсов, могло бы принять и больше сотрудников при заданной зарплате S_p, однако, это количество ограничено предпочтениями самих наемных работников сотрудничать за данную плату; а при $S_p \ge \left(S_p^* = \sqrt{\frac{R_{es}}{k}} \right)$, $P(S_p) = P_0 + \frac{R_{es}}{S_p}$ – предприятие, исходя из располагаемых ресурсов, не в состоянии принять больше работников, хотя, за соответствующую зарплату S_p и предпочитают сотрудничать большее количество желающих.

Здесь имеем характерную ситуацию известную из классической модели спроса и предложения.

Ситуация иллюстрируется графиками $P(S_p)$, $P1(S_p)$ на рис. 6.35

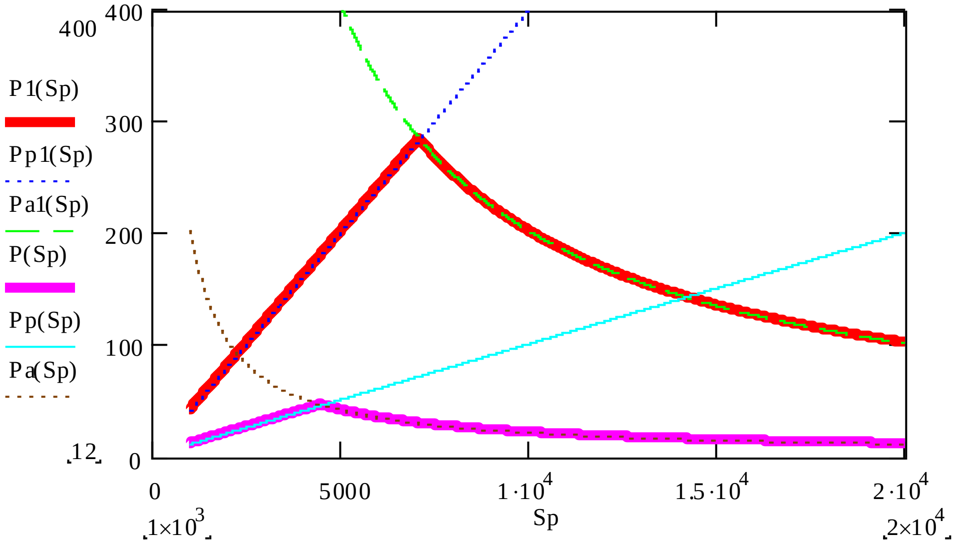


Рис. 6.35 – Количество нанимаемых сотрудников P в зависимости от ежемесячного оклада S_p, ресурсов предприятия R_{es} и коэффициента k

Наличие точек излома и их координаты могут быть определены при оптимизации функционала:

$$\Phi_\pi^a = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\sum_{i=1}^{N=2} \pi_i(t) \ln \pi_i(t) + \beta \left[P_0 + k\pi_1(t) S_p(t) + \pi_2(t) \frac{R_{es}}{S_p(t)} \right] + \gamma \sum_{i=1}^{N=2} \pi_i(t) \right) dt \,. \quad (6.3.22)$$

Необходимым условием экстремума является выполнение системы уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial R^*}{\partial \pi_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\pi}_i} = 0, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial S_p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{S}_p} = 0, \quad (6.3.23)$$

где R^* – подынтегральная функция функционала (6.3.22).

В данном случае подынтегральная функция не зависит от $\dot{\pi}_i$ и $\dot{S}_p$, следовательно

$$\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\pi}_i} \equiv 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\pi}_i} \equiv 0, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial \dot{S}_p} \equiv 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{S}_p} \equiv 0, \quad (6.3.24)$$

и система уравнений (6.3.23) приобретает вид

$$\frac{\partial R^*}{\partial \pi_i} = 0, \qquad \frac{\partial R^*}{\partial S_p} = 0. \quad (6.3.25)$$

Следуя условиям (6.3.25) получаем для предпочтений

$$\frac{\partial R^*}{\partial \pi_1} = -\ln \pi_1 - 1 + \beta k S_p + \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial \pi_2} = -\ln \pi_2 - 1 + \beta \frac{R_{es}}{S_p} + \gamma = 0. \qquad (6.3.26)$$

Откуда

$$\pi_1 = e^{-1+\beta k S_p + \gamma} = e^{\gamma-1} e^{\beta k S_p}, \qquad \pi_2 = e^{-1+\beta \frac{R_{es}}{S_p} + \gamma} = e^{\gamma-1} e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}. \qquad (6.3.27)$$

Из условия нормировки

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 = e^{\gamma-1} e^{\beta k S_p} + e^{\gamma-1} e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}} = e^{\gamma-1} \left(e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}} \right),$$

$$e^{\gamma-1} = \frac{1}{e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}}. \qquad (6.3.28)$$

Получаем зависимости предпочтений π_1 и π_2 от S_p:

$$\pi_1 = \frac{e^{\beta k S_p}}{e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}}, \qquad \pi_2 = \frac{e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}}{e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}}. \qquad (6.3.29)$$

Для экстремали $S_p(t)$

$$\frac{\partial R^*}{\partial S_p} = \beta \left(k \pi_1 - \pi_2 \frac{R_{es}}{S_p^2} \right). \qquad (6.3.30)$$

При $\beta \neq 0$, найдем

$$k \frac{e^{\beta k S_p}}{e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}} - \frac{R_{es}}{S_p^2} \frac{e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}}{e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}}} = 0. \qquad (6.3.31)$$

Сократив на

$$S_p^2 \left(e^{\beta k S_p} + e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}} \right), \qquad (6.3.32)$$

получим

$$S_p^2 k e^{\beta k S_p} - R_{es} e^{\beta \frac{R_{es}}{S_p}} = 0\,. \qquad (6.3.33)$$

Откуда

$$2\ln S_p + \ln k + \beta k S_p = \ln R_{es} + \beta \frac{R_{es}}{S_p}\,. \qquad (6.3.34)$$

Ввиду неразрешимости уравнения (6.3.34) в элементарных функциях относительно S_p, применим численное решение. При значениях:

$$k = 0.01, \qquad \beta = 1, \qquad R_{es} = 2\cdot 10^5, \qquad (6.3.35)$$

получим корень уравнения (6.3.34):

$$S_p^* = 4.472\cdot 10^3\,. \qquad (6.3.36)$$

При этом значении достигается излом и кульминация, рис. 5.2:

$$P\left(S_p^*\right) = 46.72\,. \qquad (6.3.37)$$

На рис. 6.36, рис. 6.37 показаны также результаты численного математического моделирования при значениях:

$$\beta = 1, \qquad \beta 1 = 0.072, \qquad \beta 2 = 0.027, \qquad \beta 3 = 0.01. \qquad (6.3.38)$$

Для функций предпочтений, рис. 6.36, характерно

$$\pi_1\left(S_p^*\right) = \pi_2\left(S_p^*\right) = \frac{1}{2}, \qquad (6.3.39)$$

при значении корня (6.3.36).

В данном случае, для функционала (6.3.32) условия Вейерштрасса-Эрдмана (6.3.36)

$$\left.\begin{aligned}
R^*_{\dot S_p}\Big|_{t=t_c-0} - R^*_{\dot S_p}\Big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
R^*_{\dot\pi_1}\Big|_{t=t_c-0} - R^*_{\dot\pi_1}\Big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
R^*_{\dot\pi_2}\Big|_{t=t_c-0} - R^*_{\dot\pi_2}\Big|_{t=t_c+0} &= 0,\\
\left[R^* - \left(\dot S_p R^*_{\dot S_p} + \dot\pi_1 R^*_{\dot\pi_1} + \dot\pi_2 R^*_{\dot\pi_2}\right)\right]_{t=t_c-0} - \left[R^* - \left(\dot S_p R^*_{\dot S_p} + \dot\pi_1 R^*_{\dot\pi_1} + \dot\pi_2 R^*_{\dot\pi_2}\right)\right]_{t=t_c+0} &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

(6.3.40)

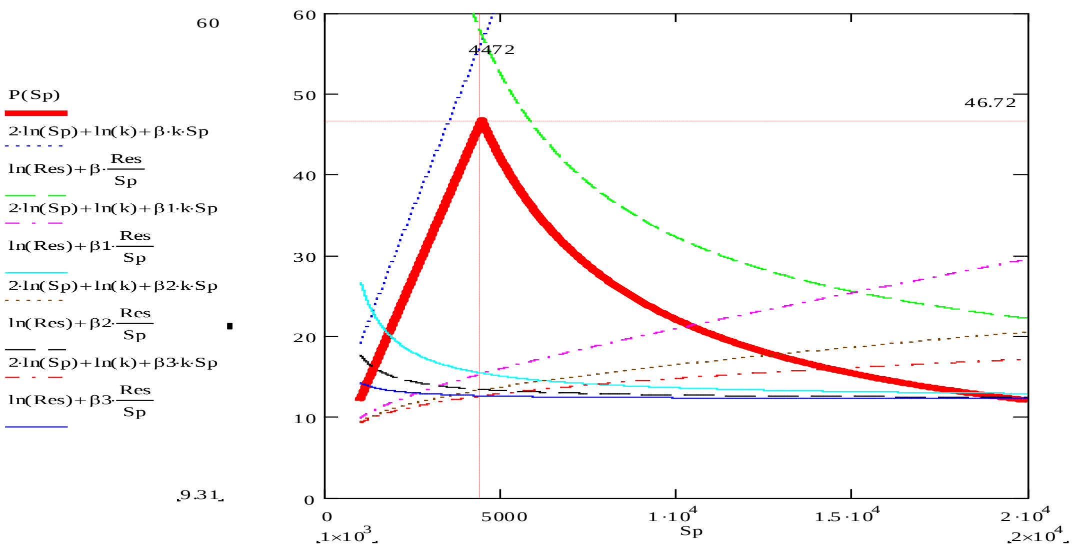


Рис. 6.36 – Соответствие максимального количества нанимаемых сотрудников P корню, получаемому из необходимых условий экстремума

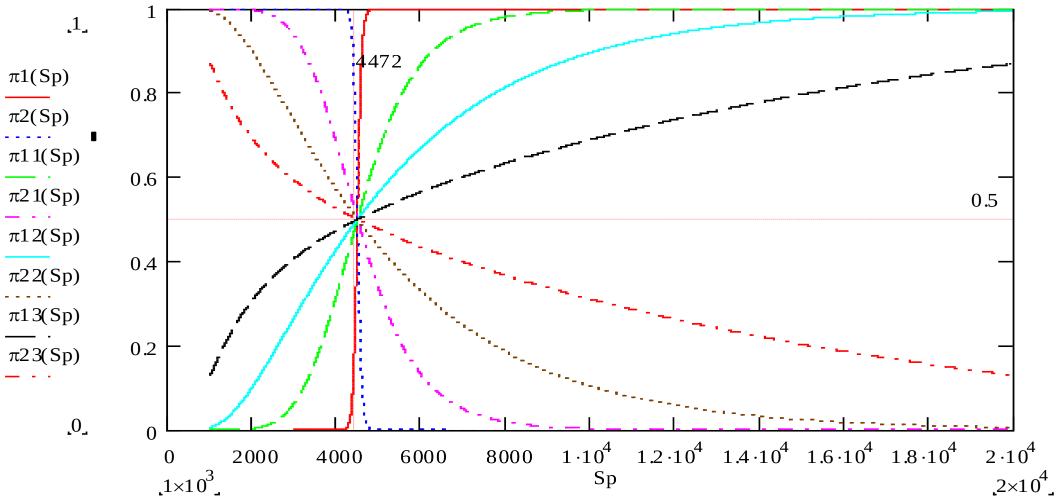


Рис. 6.37 – Изменение функций предпочтений в зависимости от изменения параметра β

С учетом условия Вейерштрасса-Эрдмана (6.3.40) превращаются в условия непрерывности подынтегральной функции R^* функционала (6.3.22).

7 КОНФЛИКТЫ, КОГНИТИВНЫЙ ДИССОНАНС, СУБЪЕКТИВНАЯ СВОБОДА

7.1. Конфликты с точки зрения субъективного анализа

В «Психологическом словаре» дано следующее определение конфликта: *«Конфликт — это столкновение противоположно направленных целей, интересов, позиций или взглядов оппонентов или субъектов взаимодействия».* Авторы приводят определенную классификацию конфликтов. Выделяются в частности «межличностный», «внутриличностный», «межгрупповой» конфликты. В основе конфликтов второго типа обычно лежит «амбивалентность желаний», либо стремлений субъекта, а также так называемый «когнитивный диссонанс», введенный в теоретическую психологию Фестингером определяемый как *«негативное побудительное состояние, возникающее в ситуации, когда субъект одновременно располагает психологически противоречивыми «знаниями» ...об одном объекте».*

Примером таких знаний является одновременное знание о «показаниях» и «противопоказаниях» лекарственного препарата, то есть о возможной пользе и возможном вреде. Выше мы уже ввели «функции вреда» наряду с «функциями полезности» ($L(\sigma_i)$, $U(\sigma_i)$).

Различают конфликты «конструктивные» и «деструктивные». В связи с конфликтами рассматривают «проблемные ситуации», что тесно перекликается с понятиями и терминологией, использованными в настоящей работе.

Согласно Булдингу [181] «Конфликт — это состязание, в котором стороны стремятся достичь несовместимых положений».

В одной из монографий, посвященных теории конфликтов, разработке математических моделей и методов исследования конфликтов [181], конфликт представлен как взаимодействие сложных систем. Конфликт предполагает борьбу, причем выделяются два этапа: первый — подготовительный, характеризуемый зарождением и нарастанием противоречий и второй — разрешение конфликта — борьба, завершение борьбы «победой» одной из сторон или «соглашением» (седловая точка по Паретто).

Согласно [64] с ростом технологической оснащенности роль «человеческого фактора» уменьшается и, по-видимому, предполагается уменьшение остроты конфликтов. С этим трудно согласиться, так как вес принимаемых субъектом решений, их цена и последствия (техногенные, экологические, социальные) многократно возрастают.

Это мы наблюдаем на глобальном уровне. Экспоненциальный рост технологий во всех областях жизни и деятельности человека коррелирует с ростом частоты, ожесточенности и разрушительности конфликтов. Крайним случаем конфликта является война, когда разрешение конфликта предполагает силовое подавление или уничтожение одной из сторон и когда имеет место переплетение внутриличностных, межличностных и групповых конфликтов, которые коррелируют, усиливают друг друга до такой степени, что все другие возможности управления процессом отпадают, оставляя только одну возможность — военную. Здесь мы сталкиваемся с проблемой взаимодействия, кумулятивного усиления, катализации конфликтов которая, как представляется, также лежит в области субъективного анализа.

Теории конфликтов в современной научной литературе посвящено огромное количество работ. Даже беглый их обзор и попытка систематизации представляли бы собой самостоятельное исследование, требующее больших усилий многих участников и значительного времени. В настоящей работе мы не претендуем на развитие и обобщение теории конфликтов, в том числе их психологической основы.

В данном случае задача состоит в том, чтобы выяснить, как можно применить развиваемые методы субъективного анализа, энтропийно-информационную технологию и функции предпочтения в теории конфликтов, попытаться предположить подход к количественному описанию конфликта.

Приведем некоторые источники по теории конфликтов, как монографии, так и учебники, что позволит читателю познакомиться с современным состоянием дел в этой области.

Весьма часто цитируемыми являются монография Л. Козера [106] (2000), а также монография Т.Л. Саати [181], большинство работ по теории игр, поскольку игра чаще всего формулируется как разрешение конфликтной ситуации. К этому направлению можно отнести книги Н.Н. Моисеева [141] и Ю.Б. Гермейера [45, 46, 47|, В. Ф Крапивина [105], работы А.П. Назаретяна [157, 158]. К учебникам относятся работы И.В. Ващенко [41], О.И. Бондарчука [141], А.А. Гирник [55], В.О. Гнеушева [56], С. Грушевской [57], Н.В. Гришиной [58], А.Д. Дмитриева [63], Н.И. Леонова [127], Н.Д. Лукъяненко [126] и др. Этот перечень можно продолжить. Выбор перечисленных источников может показаться случайным и, конечно, он является далеко неполным.

Перейдем к описанию конфликтов в терминах субъективного анализа.

В настоящей работе основным аппаратом исследований являются распределения предпочтений, поэтому естественно попытаться дать интерпретацию некоторых положений теории конфликтов, в частности выяснить, какую роль играет субъективная энтропия и моменты распределений предпочтений: дисперсия, корреляционные моменты.

Будем различать следующие виды конфликтов:

— *самоконфликт* — конфликт субъекта с самим собой, внутренний конфликт, например, конфликт предметных (утилитарных) предпочтений с этическими предпочтениями, формируемыми на основе этических императивов;

— *межсубъектный конфликт предметных предпочтений*;

— *межсубъектный конфликт рейтинговых предпочтений*;

— *конфликт между субъектом и группой,* в том числе, в иерархической системе, между субъектами и группами на разных иерархических уровнях.

Одной из задач энтропийной теории конфликтов является задача о переходе конфликта одного типа в конфликт другого типа. Так, представляет интерес вопрос, куда и при каких условиях внутренний конфликт переходит в межсубъектный конфликт, и наоборот, межсубъектный конфликт переходит во внутриличностные конфликты у взаимодействующих субъектов, когда «холодный» конфликт переходит в «горячий» конфликт, и наоборот, когда «горячий» конфликт может быть потушен.

Решение этих и подобных задач лежит в плоскости динамической теории конфликтов. Более того любой конфликт является процессом и не может рассматриваться вне динамики.

Конкретизируем некоторые виды конфликтов начиная с самоконфликта. В книге Фестингера [222] мы находим определение внутреннего конфликта, который отделя-

ется от «когнитивного диссонанса»: *«необходимо также обсудить различие между конфликтом и диссонансом, поскольку динамика этих процессов различна. Человек находится в ситуации конфликта, перед тем как он должен принять решение. После того, как решение принято, конфликта больше нет: человек сделал свой выбор. Он так сказать, разрешил данный конфликт. С этого момента он находится в рамках выбранного образа действий».*

И далее: *«Когда ... говорят о конфликте между мнениями и ценностями (или этическими императивами и полезностями), часто довольно трудно понять, что конкретно имеется в виду».* В книге Фестингера [222] конфликт понимается как «столкновение факторов, действующих на индивида, в ситуации неясности (или неопределенности)».

Что касается когнитивного диссонанса, то ему отводится отрезок времени после принятия решения. Ссылаясь на Адамса, Фестингер пишет: *«Само по себе принятие решения — это всего лишь половина проблемы. Неудовлетворенность и остающаяся напряженность отклоненной альтернативы продолжают оказывать свое влияние, если дальнейший процесс не происходит».*

Предполагается, что такая трактовка сужает как понятие конфликта, так и то, что называют «когнитивным диссонансом». По-видимому, четкой смысловой и временной границы между тем и другим не существует. Конфликт представляется более общей категорией.

Может быть, более адекватным было бы «*внутриличностный конфликт*» отождествлять с «*когнитивным диссонансом*».

Еще более привлекательной представляется следующая концепция, упорядочивающая отношения между категориями «*конфликт*» и «*диссонанс*». Конфликт есть форма реализации диссонанса в виде определенного действия или, наоборот, бездействия. Во всяком случае, конфликт есть внешнее проявление диссонанса, которое можно фиксировать и идентифицировать. Через анализ конфликта, по-видимому, можно определять характеристики диссонанса. Еще одной особенностью, позволяющей дистанцировать конфликт от диссонанса, является то обстоятельство, что носителем диссонанса всегда является индивидуум, тогда как конфликт возможен и между индивидуумами. Кроме того, как мы увидим дальше, конфликт возможен и в условиях консонанса.

Предпринимаемая здесь попытка определенным образом формализовать понятие конфликта, направлена не столько на развитие теории конфликтов как таковой, сколько на то, чтобы в процессе осмысливания этого понятия с позиций субъективного анализа, проверить работоспособность принятых подходов, теоретических схем последнего еще на одном важном объекте исследования, уточнить некоторые понятия и взаимосвязи между ними.

Из приведенных выше цитат можно сделать некоторые выводы, а именно:

1. Конфликт, как и диссонанс, можно трактовать как состояния, однако в действительности они выступают как явления, развивающиеся во времени, и поэтому адекватное описание и понимание этих категорий сопряжено с их динамической трактовкой. Итак, и конфликт и диссонанс — это процессы, тесно взаимосвязанные и, скорее всего, диссонанс и консонанс являются атрибутами — составляющими конфликта.

Строго говоря, конфликт — это достаточно общая весообъемлющая категория — вся жизнь состоит из последовательности больших и малых конфликтов, сменяющих друг друга. Может быть, это просто выраженный в других терминах тезис о

«единстве и борьбе противоположностей», который и составляет с точки зрения материалистической диалектики существо жизни.

Представляется, что категория «конфликта» более удобна для формализации и более адекватна методу субъективного анализа.

2. После того, как принято решение, человек «*находится в рамках выбранного образа действий*». Этот тезис в точности совпадает с утверждением, что принятие решения каждый раз сопряжено с переходом из «царства свободы» в «царство необходимости». Эти «царства» скорее всего, имеют размытую границу, поскольку в общем случае принятие частного решения не ведет к полному вырождению проблемного множества S_a, если речь идет о предметных предпочтениях, и к вырождению множества S_ξ, если речь идет о рейтинговых предпочтениях. Под принятием решения над рейтинговым множеством S_ξ понимается перераспределение *рангов* в группе, то есть *организационное решение.*

Примером, который иллюстрирует высказанный выше тезис о переходе в «царство необходимости», может служить ситуация, когда некто, принимая решение, вкладывает крупные ресурсы в выбранном направлении и, связав их с определенной проблемой и, соответственно, — целью, уже не может отклониться от выбранного курса и становится как бы «рабом» своего собственного решения. Существует «*тенденция индивидуума оставаться верным своему решению*».

Мы уже говорили, что предположительно для каждого индивидуума существует нижний энтропийный барьер H_π^*, достижение которого «сверху» открывает возможность принятия решения и верхний энтропийный барьер H_π^{**}, превышение которого в принципе невозможно, так как соответствующее распределение предпочтениий «непереносимо». Наступает психологический коллапс.

Эти пределы строго индивидуализированы для каждого субъекта. Энтропийный слой, лежащий между $H_{\pi j}^*$ и $H_{\pi j}^{**}$, можно условно называть «*энтропийным царством свободы».* Внутри этого слоя могут находиться еще несколько уровней — порогов, где в процессе анализа происходят переходы от одной вариационной задачи к другой.

Поскольку, как уже было отмечено выше, формирование различных типов предпочтений происходит каждый раз с использованием той или иной специфической энтропии (H_π^+, H_π^-, H_υ^+, H_υ^-, ...), и для каждой из них следует допустить наличие соответствующего «слоя свободы», то теперь мы можем говорить о многомерном пространстве субъективных энтропий и наличии в этом многомерном пространстве выделенного верхними и нижними порогами «*гиперслоя свободы*». Этот слой имеет подвижные границы, динамика которых определяется эндогенными и экзогенными факторами.

Очевидно также, что все самоконфликты зарождаются и развиваются в этом слое. Согласно воззрениям Фестингера выход за пределы «слоя свободы» означает разрешение конфликта и одновременно зарождение диссонанса, который в дальнейшем ведет к новым конфликтам. С получением новых ресурсов, или, точнее, с изменением ресурсной ситуации, субъект возвращается в «*царство свободы*», где снова ярким цветом расцветают новые конфликты. Было бы заманчиво постулировать такую схему (или концепцию): «*Царство свободы есть одновременно царством конфликтов, царство необходимости — есть царство диссонансов».*

Однако более естественным является предположение о том, что диссонансы существуют и в «царстве свободы», особенно, вблизи его границ. Пример, который уже приводился, с приобретением лекарственного препарата, когда описание представляет

одновременно позитивную и негативную информацию и на фоне возникающего в связи с этим диссонанса принимается решение о приобретении или неприобретении, ясно показывает, что диссонанс возникает перед принятием решения, а не только после него. В момент принятия решения диссонанс меняет характер: до решения он обращен в будущее и связан с прогнозом; после решения он обращен в прошлое и проявляется как неудовлетворенность, сомнение в правильности принятого решения. Поскольку решение каждый раз ограничивает направления дальнейшей активности субъекта — подталкивает его в «царство необходимости», постольку этот «*ретроспективный*» диссонанс создает негативные психологические переживания.

Мы приведем еще некоторые рассуждения из книги Фестингера [222], которые соответствуют сделанным выше предположениям о роли субъективной энтропии, как характеристики психических процессов, связанных с принятием решений, возникновением и развитием конфликтов.

Фестингер ссылается на Мартина, который рассматривает три категории, относящиеся к процессу принятия решения — типы выбора:

1. «*Предпочтение. Такой процесс осуществления выбора характеризуется ясно* выраженным предпочтением одной из альтернатив. Хотя важность решения высока, *необходимость выбора обычно не приводит к возникновению сильного внутреннего конфликта*».

С нашей точки зрения, это действительно так, поскольку в этом случае субъективная энтропия мала и пересечение нижнего порога H_π* (порога решения) не требует большого психического напряжения и значительных объемов дополнительной информации.

Когда выбор уже сделан «... *существует тенденция оправдать выбранную альтернативу специфическими причинами, которые нередко проводились с «напором», что увеличивало степень удовлетворенности сделанным выбором. Этот процесс оправдания выбора после его совершения имеет целью скорее психическое удовлетворение самого субъекта, нежели поиск логических оснований его совершения*».

С позиции энтропийного анализа это может означать, что, если выбор сделан на достаточно высоком пороговом значении энтропии H_π^* и, соответственно, в «околострессовом» психическом состоянии, то требуется некоторое время для релаксации стресса, связанного с принятием решения, и дальнейшего уменьшения энтропии. И далее

2. «*Конфликт. Такой тип принятия решения характеризуется значительными трудностями при осуществлении выбора, что вызвано весьма небольшими различиями в уровне привлекательности доступных альтернатив, который настолько низок, что решение приходит медленно и с большим трудом. Процесс принятия решения может сопровождаться выражением сомнений в правильности сделанного выбора и связанным с ощущением дискомфорта в противоположность спокойствию и чувству удовлетворения, характерным для описанного выше типа. Иногда может даже возникать тенденция сожалеть о сделанном выборе*».

Яркое описание колебаний Цезаря приведено у Плутарха: «когда он приблизился к реке под названием Рубикон ... его охватило глубокое раздумье при мысли о наступившей минуте и он заколебался перед величием своего дерзания... Оставив повозку, он вновь долгое время молчал, обдумывая со всех сторон свой замысел, принимая то одно, то другое решение... Наконец, как бы отбросив размышления и отважно

устремляясь навстречу будущему, он произнес слова обычные для людей, вступающих в отважное предприятие, исход которого сомнителен».

На языке энтропийного анализа «конфликт» здесь соответствует состоянию субъекта (или процессу) с весьма высоким значением субъективной энтропии, стремящейся к своему максимальному значению

$$\boldsymbol{H}_{\pi} \to \boldsymbol{H}_{\pi\,\mathbf{max}} = \mathbf{ln}\boldsymbol{N}$$

Верхний порог $H_{\pi}^{**} \le H_{\pi\max}$, по-видимому, никогда не достигает теоретического максимума $\ln N$, а приближение к H_{π}^{**} вызывает реакцию, направленную на совершение действий, снижающих энтропию: поиск дополнительной информации, отбрасывание альтернатив (уменьшение размерности множества S_a, ...).

Еще одним ярким примером конфликтной ситуации является ситуация, возникшая в кабине самолета непосредственно перед катастрофой. Имеется в виду катастрофа самолета ТУ-15 ЦМ б/н 101, принадлежащего Польше, 10.04.2010 г. при заходе на посадку на аэродром «Смоленск «северный». В кабине находились первый пилот (КВС), второй пилот и третье лицо (А – директор Казана), которое вело переговоры с президентом страны, находящемся в салоне. Ниже приведена транскрипция переговоров экипажа, зафиксированная системой «Марс»:

10:20:20,5 (КВС) Плохо, появился туман, неизвестно, сядем ли мы.

10:26:24,7 (КВС) В данный момент, в тех условиях, которые сейчас есть, мы не можем сесть.

10:26:30,9 (КВС) Попробуем подойти, сделаем один заход, но скорее всего, ничего из этого не получится.

10:26:34,3 (КВС) Если окажется (нрзб), тогда что будем делать?

10:26:40,2 (КВС) Топлива не так много, не хватит, для того (нрзб).

10:26:44,8 (А – директор Казана) Значит у нас проблема.

10:26:47,3 (КВС) Можно полчаса повисеть и улететь на запасной.

10:26:55,11 (А – директор Казана) Пока нет решения президента, что делать дальше.

10:38:02,2 (А – директор Казана) Он взбесится, если еще (нрзб).

10:38:03,2 (А – директор Казана) (нрзб).

Видим, что перед катастрофой существовали и обсуждались альтернативные варианты продолжения полета. Существенное влияние на выбор варианта, (приведение к катастрофе) оказал (опосредовано, через А) президент. Согласно авиационным правилам исключительное право принятия решений в полете принадлежит КВС и никто не должен влиять, личные мнения не должны приниматься КВС во внимание.

Этот пример рассматривается ниже, где он сопровождается попыткой количественных оценок, текущей энтропии и высоты энтропийного порога.

Смысл приведенных выше цитат также в точности согласуется со сделанными ранее предположениями о роли субъективной энтропии (меры неопределенности предпочтений) в процессе принятия решений.

В гл. 5 показаны частные результаты моделирования на примере модифицированной динамической модели Вальраса—Леонтьева с возбуждением аттрактора Лоренца, который предположительно моделирует психологическую реакцию на изменение энтропии. Видно, как возникает участок неопределенности — многократных бифуркаций, постепенно затухающих в результате наличия демпфирующих членов в уравнениях аттрактора.

Третий тип выбора:

3. «*Безразличие. Такой процесс осуществления выбора характеризуется отсутствием ярко выраженного предпочтения одной из альтернатив, а также высокого безразличия по отношению к данным альтернативам вообще. В этом случае решение имеет очень низкую значимость для субъекта*»... «*В случае безразличия отрезок времени, необходимый для принятия решения, также должен быть относительно небольшим*»... «*Отрезок же времени, необходимый для принятия решения в случае конфликта, должен быть достаточно большим*»...

В подтверждение этих соображений в [222] приведена следующая экспериментальная таблица.

Таблица 7.1

СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ, ЗАТРАЧЕННОЕ НА ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ (секунды)

Предложенная задача (N= 2)	Тип ситуации при принятии решения		
	Предпочтение	Конфликт	Безразличие
Выбор из двух гипотетических ситуаций	23,3	51,0	37,2
Выбор из двух преложенных запахов	4,1	14,1	6,2

В нашем случае «предпочтение» является категорией, инструментом анализа, используемым в каждом из трех случаев и, следовательно, понимается в более широком смысле.

Заметим, что в двух случаях «конфликт» и «безразличие», энтропия велика, однако степень психического напряжения различна и зависит, по-видимому, от дополнительных обстоятельств.

Возможность принятия решения зависит *не только от величины энтропии, но также от соотношения располагаемого времени (временных ресурсов) и времени, необходимого для достижения нижнего порога энтропии* H_π^*.

Ситуация безразличия может характеризоваться тем, что все рассматриваемые субъектом альтернативы имеют относительно небольшую «стоимость» $R^{req}(\sigma_i)$ по сравнению с располагаемыми ресурсами. В число этих ресурсов входит также и располагаемое операционное время.

Необходимо попытаться формализовать различие между «конфликтом» и «безразличием» в том смысле, как это понимается в [222]. Введем показатель

$$\mu = \frac{\max\limits_{i \in \overline{1,N}} \boldsymbol{R}^{req}(\sigma_i)}{\boldsymbol{R}^{disp}}, \ \mu \in [0,1].$$

Если он мал, то доля потребных ресурсов мала по сравнению с располагаемыми ресурсами и даже при условии, что $H_\pi \to H_{\max}$, субъект должен относительно легко принимать решение и следует ожидать небольшого диссонантного последействтя, кроме того, такое решение может быть легко изменено, поскольку для этого имеется достаточный запас ресурсов. Наоборот, если μ велико ($\mu \to 1$), решение будет дополнительно усложнено, а изменение решения может оказаться вообще невозможным, так

как для этого может не хватать располагаемых ресурсов (после изъятия части ресурсов необходимых для разрешения избранной проблемы).

В качестве *модели критерия,* который сигнализирует о возможности принятия решения, можно предложить критерий

$$\boldsymbol{K}_{\pi}^{(1)} = \mu \boldsymbol{H}_{\pi}\,. \tag{7.1}$$

Для этого критерия следует также установить пороги K_{π}^{*} и K_{π}^{**}. Другой возможный подход состоит в том, чтобы считать пороги H_{π}^{*} и H_{π}^{**} функциями от относительного потребного времени

$$\overline{\tau} = \frac{\max\limits_{i \in \overline{1,N}} t^{req}(\sigma_i)}{t^{disp}}\,. \tag{7.2}$$

Если предположить, что $H_{\pi}^{*} = \varphi(\overline{\tau})$ и $H_{\pi}^{**} = \psi(\overline{\tau})$, то следует считать, что $\varphi(\overline{\tau})$ — возрастающая функция $\overline{\tau}$, причем

$$\lim_{\overline{\tau} \to 1} \boldsymbol{H}_{\pi}^{*}(\overline{\tau}) = \boldsymbol{H}_{\pi \max} = \ln \boldsymbol{N}\,. \tag{7.3}$$

а $\psi(\overline{\tau})$ — убывающая функция.

Это означает, что при нарастании дефицита времени ($\overline{\tau} \to 1$) субъект будет принимать решения при более высокой степени неопределенности — при более высоком пороге H_{π}^{*} и, наоборот, верхний порог H_{π}^{**} должен снижаться, то есть при меньшей неопределенности субъект будет стремиться к релаксации проблемно-ресурсной ситуации.

Итак, при увеличении дефицита времени оба порога смещаются по направлению друг к другу, «слой свободы» сужается. При условии $H_{\pi}^{**} \le H_{\pi}^{*}$ решение будет приниматься «мгновенно».

Возвращаясь к модели (7.1), попробуем на основании экспериментальных данных оценить значение нижнего порога энтропии H_{π}^{*}, допуская, что после принятия решения (выбора одной из двух альтернатив) ретроспективная энтропия в течение определенного небольшого времени сохраняет свое значение, равное приблизительно пороговому значению H_{π}^{*}.

В работе [222] приводятся еще две таблицы, которые служат косвенным свидетельством реалистичности принимаемых здесь модельных представлений.

Таблица 7.2

УСРЕДНЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТЕПЕНИ УВЕРЕННОСТИ В ПРИНЯТОМ РЕШЕНИИ
(измеряемом по шкале [0, 1])

Предложенная задача (N = 2)	Тип ситуации при принятие решения		
	Предпочтение	Конфликт	Безразличие
Hi.и юр из двух гипотетических ситуаций	0,925	0,600	0,500
Выбор из двух преложенных запахов	0,975	0,700	0,475

Из этой таблицы следует, что максимальная неуверенность возникает после решения, принимаемого в условиях *безразличия,* и минимальная неуверенность, когда предпочтения выбранной альтернативы выражено вполне определенно.

Таблица 7.3

ДОЛЯ РЕШЕНИЙ, КОТОРЫЕ ИСПЫТУЕМЫЕ БЫЛИ НЕ В СОСТОЯНИИ ИЗМЕНИТЬ (%)

Предложенная задача (N = 2)	Тип ситуации при принятии решения		
	Предпочтение	Конфликт	Безразличие
Выбор из двух гипотетических ситуаций	90,3	75,8	40,6
Выбор из двух преложенных запахов	84,2	50,0	10,0

Продолжая табл. 7.2, припишем «*степени неуверенности*» новое название в духе субъективного анализа: «субъективная энтропия». Тогда «*степень уверенности*» (как в табл.7.3) может быть охарактеризована величиной

$$\boldsymbol{K}_{\pi}^{(2)*} = 1 - \overline{\boldsymbol{H}}_{\pi}^{*}, \tag{7.4}$$

где $\overline{H}_{\pi}^{*} = \dfrac{H_{\pi}^{*}}{\ln N}$; $H_{\pi\max} = \ln N = 0{,}693$ (N = 2).

Отождествляя данные табл.7.2 со значениями параметра K_{π}, найдем соответствующие значения энтропии H_{π}:

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{*} = \left(1 - \boldsymbol{K}_{\pi}^{(2)*}\right) \ln \boldsymbol{N} = 0{,}963\left(1 - \boldsymbol{K}_{\pi}^{(2)*}\right). \tag{7.5}$$

Значения H_{π}^{*} при N = 2 представлены в табл.7.4.

Таблица 7.4

ЗНАЧЕНИЯ СУБЪЕКТИВНОЙ ЭНТРОПИИ ПОСЛЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ
(«остаточной» энтропии)

Предложенная задача (N = 2)	Тип ситуации при принятии решения		
	Предпочтение	Конфликт	Безразличие
Выбор из двух гипотетических ситуаций	0,052	0,277	0,346
Выбор из двух предложенных запахов	0,017	0,208	0,364

Энтропия минимальна, когда предпочтения четко выражены, энтропия значительно больше, когда принятому решению предшествовал «конфликт», и энтропия еще выше, если решение принималось в условиях безразличия.

Эта таблица говорит о том, что более реалистичным условием принятия решения является, например, условие

$$\boldsymbol{K}_{\pi}^{(1)} \le \boldsymbol{K}_{\pi}^{*},$$

включающее кроме энтропии фактор экстренности («emergency») μ.

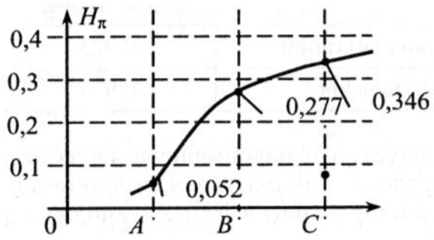


Рис. 7.1

A — «предпочтение», *B* — «конфликт», *C* — «безразличие»

Диаграмма на рис. 7.1 является иллюстративной, поскольку на оси абсцисс отмечены неизмеримые характеристики.

7.2. Модельные характеристики внутреннего конфликта

7.2.1. Утилитарные внутренние конфликты

Внутренний конфликт или самоконфликт возникает и развивается на фоне когнитивного диссонанса или консонанса. Рассмотрим возможные модели, воспользовавшись введенными ранее функциями предпочтений $\pi^+(\sigma_i)$, $\pi^-(\sigma_i)$, $\upsilon^+(\sigma_i)$, $\upsilon^-(\sigma_i)$. Напомним их смысл:

$\pi^+(\sigma_i)$ — принять σ_i на основе позитивного анализа;

$\pi^-(\sigma_i)$ — принять σ_i на основе негативного анализа;

$\upsilon^+(\sigma_i)$ — отвергнуть σ_i на основе позитивного анализа;

$\upsilon^-(\sigma_i)$ — отвергнуть σ_i на основе негативного анализа.

Будем говорить, что на множестве S_a имеет место полный консонанс, если распределения π^+ и π^- совпадают. Степень консонанса или диссонанса определим коэффициентом корреляции субъективных предпочтений Пирсона:

$$\rho\left(\pi^+,\pi^-\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi^+\left(\sigma_i\right)-\dfrac{1}{N}\right)\left(\pi^-\left(\sigma_i\right)-\dfrac{1}{N}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi^+\left(\sigma_i\right)-\dfrac{1}{N}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi^-\left(\sigma_i\right)-\dfrac{1}{N}\right)^2}}. \tag{7.6}$$

Полный консонанс соответствует значению $\pi(\pi^+, \pi^-) = 1$, диссонанс — значению $\rho(\pi^+, \pi^-) = -1$, в остальных случаях $-1 < \rho(\pi^+, \pi^-) < 1$.

Вообще консонансом будем считать случай, когда $\rho(\pi^+, \pi^-) > 0$, диссонансом — случай, когда $\rho(\pi^+, \pi^-) < 0$.

Наличие консонанса или диссонанса еще не гарантирует наличия конфликта, поскольку последний понимается как такая ситуация, когда субъекту трудно принять решение и сделать выбор. Внутренний конфликт в условиях консонанса возникает, если обе субъективные энтропии

$$H_\pi^+=-\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\sigma_i^+\right)\ln\pi\left(\sigma_i^+\right);\ H_\pi^-=-\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\sigma_i^-\right)\ln\pi\left(\sigma_i^-\right)$$

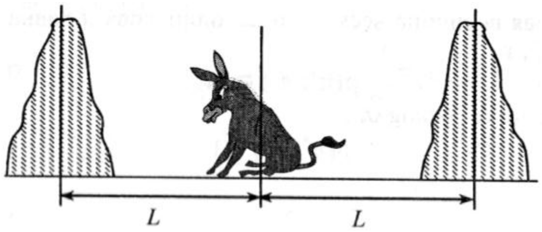
находятся в соответствующих «слоях свободы»

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{+} \in \left(\boldsymbol{H}_{\pi}^{**+}, \boldsymbol{H}_{\pi}^{*+}\right); \ \boldsymbol{H}_{\pi}^{-} \in \left(\boldsymbol{H}_{\pi}^{**-}, \boldsymbol{H}_{\pi}^{*-}\right).$$

Пусть, например, при $N = 2$, $\pi^{+}(\sigma_1) = 0{,}55$; $\pi^{+}(\sigma_2) = 0{,}45$, $\pi^{-}(\sigma_1) = 0{,}52$, $\pi^{-}(\sigma_2) = 0{,}48$. Находим, что $\rho(\pi^{+}, \pi^{-}) = 1$, $H_{\pi}^{+} = 0{,}6881$, $H_{\pi}^{-} = 0{,}692\ldots$

Имеет место консонанс между распределениями π^{+} и π^{-}, но внутренний конфликт состоит в том, что обе энтропии H_{π}^{+} и H_{π}^{-} высоки и решение принять трудно. При этом острота конфликта тем больше, чем ближе энтропии к максимально возможному значению ln2.

Консонантный конфликт можно условно назвать «буридановым конфликтом», а состояние, в котором субъект при этом пребывает, — «буридановым стрессом», имея в виду известную философскую притчу об осле, умершем от голода, не в состоянии сделать выбор между двумя одинаковыми стогами сена.



Животное погибло от избытка возможностей — от избытка «энтропийной свободы» и, очевидно, перед смертью находилось и состоянии крайнего стресса ($H_{\pi} = \ln 2$). В связи с этой притчей мы можем поставить весьма нетривиальный и важный в теоретическом плане вопрос об устойчивости конфликтов по отношению к малым изменениям экзогенной обстановки. Решение этого вопроса лежит в динамической теории конфликтов.

Пусть теперь при $N = 2$, $\pi^{+}(\sigma_1) = 0{,}55$; $\pi^{+}(\sigma_2) = 0{,}45$, $\pi^{-}(\sigma_1) = 0{,}48$ и $\pi^{-}(\sigma_2) = 0{,}52$. В этом случае $\rho(\pi^{+}, \pi^{-}) = -1$, $H_{\pi}^{+} = 0{,}6881$, $H_{\pi}^{-} = 0{,}692$.

Имеет место диссонанс, но ввиду больших значений обеих энтропий конфликт не выглядит острым. Решение, однако, не будет принято, так как обе энтропии выше «порогов», если примем: $H_{\pi}^{*+} = 0{,}683$, $H_{\pi}^{*-} = 0{,}683$.

Слой свободы определяется неравенствами:

$$0{,}683 \le \boldsymbol{H}^{+}_{\pi} \le 0{,}693; \ 0{,}683 \le \boldsymbol{H}^{-}_{\pi} \le 0{,}693.$$

В следующем случае одна из энтропии остается высокой, в то время как вторая имеет величину, меньшую порогового значения.

Пусть при $\pi^{+}(\sigma_1) = 0{,}55$; $\pi^{+}(\sigma_2) = 0{,}45$, $\pi^{-}(\sigma_1) = 0{,}25$ и $\pi^{-}(\sigma_2) = 0{,}75$. Очевидно, что $\rho(\pi^{+}, \pi^{-}) = -1$. Для энтропии находим $H_{\pi}^{+} = 0{,}6881$, $H_{\pi}^{-} = 0{,}5624$. Видим, что $H_{\pi}^{+} \in [0{,}683, 0{,}693]$, но $H_{\pi}^{-} < H_{\pi}^{+} = 0{,}683$.

Конфликта нет, и решение будет принято на основании «негативного» анализа (по распределению π^{-}).

Рассмотрим случай, когда в условиях диссонанса обе энтропии малы и приближенно одинаковы по величине: $\pi^{+}(\sigma_1) = 0{,}75$; $\pi^{+}(\sigma_2) = 0{,}25$, $\pi^{-}(\sigma_1) = 0{,}23$ и $\pi^{+}(\sigma_2) = 0{,}77$. При этом $\rho(\pi^{+}, \pi^{-}) = -1$, $H_{\pi}^{+} = 0{,}5624$, $H_{\pi}^{+} = 0{,}5392$. Таким образом, в этом случае степень уверенности в результатах как позитивного, так и негативного анализа высока и примерно одинакова. Мы имеем здесь случай ярко выраженного диссонантного конфликта.

Как видим, в случае диссонанса при сравнении распределений π^+ и π^- высокое значение хотя бы одной из энтропии: H_π^+ или H_π^- свидетельствует о невозможности диссонантного конфликта.

При $N > 2$ положим $\pi_i^+ = \frac{1}{N} + \alpha_i^+$; $\pi_i^- = \frac{1}{N} + \alpha_i^-$, где α_i^+ и α_i^- — малые (по сравнению с единицей) величины, для которых выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^+ = 0\,;\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^- = 0\,.$$

Найдем, что

$$\rho\left(\pi^+, \pi^-\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^+ \alpha_i^-}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{+2} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{-2}}}\,.$$

Если абсолютные величины всех α_i^+ и α_i^- одинаковы и равны α, тогда, если каждый раз $(\forall i)$ $\alpha_i^+ = -\alpha_i^-$, то

$$\rho(\pi^+, \pi^-) = -1,$$

если же каждый раз sing α_i^+ = sing α_i^-,

$$\rho(\pi^+, \pi^-) = 1.$$

Энтропия

$$H_\pi^+ = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N} + \alpha_i^+\right)\ln\left(\frac{1}{N} + \alpha_i^+\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N} + \alpha_i^+\right)\ln\left(\frac{1}{N} + \frac{\alpha_i^+}{\frac{1}{N} + \alpha_i^+} + \ldots\right) \approx \ln N\,.$$

Здесь учтено, что $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^+ = 0$. Следовательно, если α_i^+ (и α_i^-) настолько мало, что можно ограничиться двумя членами в разложении Тейлора, то энтропии H_π^+ и H_π^- принимают максимальные значения.

Пусть теперь сравниваются распределения предпочтений $\pi^+(\sigma_i)$ и $\upsilon^+(\sigma_i)$. Будем говорить, что существует полный диссонанс, если коэффициент корреляции

$$\rho\left(\pi^+, \upsilon^+\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\pi^+\left(\sigma_i\right) - \frac{1}{N}\right)\left(\upsilon^+\left(\sigma_i\right) - \frac{1}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\pi^+\left(\sigma_i\right) - \frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\upsilon^+\left(\sigma_i\right) - \frac{1}{N}\right)^2}} \tag{7.7}$$

равен +1 и полный консонанс, если он равен –1, в остальных случаях

$$-1 < \rho(\pi^+, \upsilon^+) < 1.$$

Условие $\rho(\pi^+, \upsilon^+) \approx 1$ уже является основанием для внутреннего конфликта, так как даже при условии $H_\pi^+ < H_\pi^{+*}$ и $H_\upsilon^+ < H_\upsilon^{+*}$, хотя может быть сделан выбор определенного $\sigma_i \in S_a$, тем не менее остается вопрос «принять или не принять» соответствующее решение. Действительно, в этом случае $\pi^+(\sigma_i) \approx \upsilon^+(\sigma_i)$.

Если дополнительно выполняются условия

$$H_\pi^{+*} < H_\pi^{+} < H_\pi^{+**};$$
$$H_\upsilon^{+*} < H_\upsilon^{+} < H_\upsilon^{+**},$$

конфликт усложняется в связи с тем, что имеется неопределенность с выбором $\sigma_i \in S_a$. В случае консонанса, когда $\rho(\pi^+, \upsilon^+) \approx -1$, вопрос с выбором альтернативы $\sigma_i \in S_a$ не возникает, если энтропия H_π^+ мала. Конфликт возникает в том случае, если H_π^+ принадлежит «слою свободы» (H_π^{+*}, H_π^{+**}).

Подобные рассуждения можно провести в случае сравнения распределений $\pi^-(\sigma_i)$ и $\upsilon^-(\sigma_i)$.

Другая модель диссонантного конфликта возникает, когда субъекту известны не только полезности альтернатив $U(\sigma_i)$, но и вероятности разрешения соответствующих проблем $p(P\!: \sigma_0 \to \sigma_i) = p_i$, причем $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Во всяком случае, p_i можно рассматривать как оценки реальных вероятностей, доступные субъекту.

Предположим, что распределение предпочтений формируется как решение вариационной задачи с функционалом

$$\Phi_\pi = -\sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) \ln \pi(\sigma_i) - \alpha \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) \ln p_i + \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i) U(\sigma_i) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i). \quad (7.8)$$

Мы исключаем здесь деление предпочтений на типы (π^+, π^-, υ^+, υ^-). Соответствующее каноническое распределение имеет вид:

$$\pi(\sigma_i) = \frac{p_i^\alpha e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} p_j^\alpha e^{\beta U(\sigma_j)}}. \quad (7.9)$$

Энтропия H_π стремится к максимальному значению, если для $\forall i$ $p_i \to \frac{1}{N}$ и для $\forall i, j$ $U(\sigma_i)$ — $U(\sigma_j) \to 0$. Степень диссонанса характеризуется коэффициентом корреляции

$$\rho(\pi, p) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(p_i - \frac{1}{N}\right)\left(\pi_i - \frac{1}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(p_i - \frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\pi_i - \frac{1}{N}\right)^2}}. \quad (7.10)$$

В частном случае, когда $\alpha = 1$, $U_i - U_j = 0$ V/, $\forall i, j \in \overline{1, N}$, $\rho(\pi, p) = 1$, диссонанс не возникает, конфликт, однако, может иметь место, если $H_\pi > H^*_\pi$.

Пусть далее субъект формирует предпочтения исключительно как утилитарные:

$$\pi(\sigma_i) = \frac{e^{\beta U(\sigma_i)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta U(\sigma_j)}},$$

ему также известны вероятности (или их оценки) успешного разрешения проблем P: $\sigma_0 \to \sigma_i$. В этом случае может иметь место диссонанс, когда $\rho(\pi, p) \to -1$, поскольку наиболее предпочтительная альтернатива может иметь наименьшую вероятность реализации. Если дополнительно $H_\pi > H^*_\pi$, конфликт оказывается более глубоким, поскольку затруднен выбор $\sigma_i \in S_a$.

Итак, консонантный конфликт соответствует высокому (близкому к максимальному) значению энтропии и коэффициенту корреляции, близкому к +1, если рассматривается конфликт между одноименными распределениями (π^+ и π^-, либо υ^+ и υ^-) и близкому к –1, если рассматривается конфликт между разноименными распределениями (π^+ и υ^+, π^- и υ^-, π^+ и υ^-, π^- и υ^+).

Возможные типы внутренних конфликтов в зависимости от участвующих в них распределений предпочтений, а также величины коэффициентов корреляции и энтропий приведены в табл.7.5.

Таблица 7.5

Коэффициент корреляции	Значения энтропии	Тип конфликта
$\rho(\pi^+, \pi^-) \to +1$	$H_\pi^+ > H_\pi^{*+}$; $H_\pi^- > H_\pi^{*-}$	Консонантный
$\rho(\pi^+, \pi^-) \to -1$	H_π^+ и H_π^- малы	Диссонантный
$\rho(\upsilon^+, \upsilon^-) \to +1$	$H_\upsilon^+ > H_\upsilon^{*+}$; $H_\upsilon^- > H_\upsilon^{*-}$	Консонантный
$\rho(\upsilon^+, \upsilon^-) \to -1$	H_υ^+ и H_υ^- малы	Диссонантный
$\rho(\pi^+, \upsilon^+) \to -1$	$H_\pi^+ > H_\pi^{*+}$; $H_\upsilon^+ > H_\pi^{*+}$	Консонантный
$\rho(\pi^+, \upsilon^+) \to +1$	H_π^+ и H_υ^+ малы	Диссонантный
$\rho(\pi^-, \upsilon^-) \to -1$	$H_\pi^- > H_\pi^{*-}$; $H_\upsilon^- > H_\upsilon^{*-}$	Консонантный
$\rho(\pi^-, \upsilon^-) \to +1$	H_π^- и H_υ^- малы	Диссонантный
$\rho(\pi^+, \upsilon^-) \to -1$	$H_\pi^+ > H_\pi^{*+}$; $H_\upsilon^- > H_\upsilon^{*-}$	Консонантный
$\rho(\pi^+, \upsilon^-) \to +1$	$H\pi^+$ и H_υ^- малы	Диссонантный
$\rho(\pi^-, \upsilon^+) \to -1$	$H_\pi^- > H_\pi^{*-}$; $H_\upsilon^+ > H_\upsilon^{*+}$	Консонантный
$\rho(\pi^-, \upsilon^+) \to +1$	H_π^- и H_υ^+ малы	Диссонантный

При развитии конфликтной ситуации во времени «бинарные» сравнения могут сменять друг друга, а конфликт одного типа заменяется конфликтом другого типа до тех пор, пока не будет принято решение — выбрана цель на множестве S_a.

В следующем примере попытаемся показать, как влияет изменение ресурсной ситуации на показатели конфликта и, следовательно, на его «остроту». Сделаем предположения о характере зависимости позитивных предпочтений π_i^+ и негативных предпочтений π_i^- от ресурсов. Пусть позитивные предпочтения определяются соотношением между ожидаемыми ресурсами R_i^{exp} и потребными ресурсами R_i^{req}, а именно, допустим, что предпочтение альтернативы σ_i тем выше, чем больше отношение

$$\frac{\boldsymbol{R_i^{\mathbf{exp}}} - \boldsymbol{R_i^{req}}}{\boldsymbol{R_i^{req}}} = \bar{\boldsymbol{r}}_i^{\boldsymbol{e}} - 1,$$

где $\bar{r}_i^e = R_i^{\exp}\left(R_i^{req}\right)^{-1}$. Предполагается также, что $R_i^{\exp} \ge R_i^{req}$. Величина $x_i = \bar{r}_i^e - 1 \in [0, +\infty)$. Другими словами, чем выше ожидаемое превышение дохода над вкладываемыми средствами, тем лучше.

Положим, что негативные ощущения возникают в связи с расходами и они тем острее, чем ближе потребные ресурсы к располагаемым. Это обстоятельство можно отразить количественно, если выбрать в качестве показателя величину

$$y_i = \frac{\bar{r}_i^r}{1 - \bar{r}_i^r},$$

где $\bar{r}_i^r = R_i^{req}\left(R^{disp}\right)^{-1}$. Поскольку для всех $\sigma_i \in S_a$ должно выполняться условие: $R_i^{req}\left(R^{disp}\right)^{-1} \in [0,1]$, то $y_i \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим два распределения:

$$\pi_i^+ = \pi_i^+(\sigma_i) = \frac{e^{\beta\left(\bar{r}_i^e - 1\right)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\beta\left(\bar{r}_j^e - 1\right)}}; \quad \pi_i^- = \pi_i^-(\sigma_i) = \frac{e^{-\alpha\bar{r}_i^r\left(1-\bar{r}_i^r\right)^{-1}}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha\bar{r}_i^r\left(1-\bar{r}_i^r\right)^{-1}}}.$$

Пусть имеется две альтернативы σ_1 и σ_2 и ресурсная ситуация задана таблицей

	σ_1	σ_2	
R_i^{exp}	1,5	2,7	$\beta = 1$
R_i^{req}	1,0	2,0	$\alpha = 1$
R^{disp}	3		

Распределения π_i^+ и π_i^-, соответствующие этим данным, приведены в таблице

	σ_1	σ_2
π_i^+	0,53742	0,46257
π_i^-	0,81757	0,182439

Имеет место консонанс между π_i^+ и π_i^-, поэтому $\rho(\pi^+, \pi^-) \to +1$.

$$\boldsymbol{H}_\pi^+ = 0{,}69034,\ \boldsymbol{H}_\pi^- = 0{,}47506.$$

Анализ позитивных обстоятельств в данном случае дает высокую энтропию H_π^+, близкую к максимальной $H^+_{\pi\max}$, тогда как анализ негативных обстоятельств дает низкую энтропию H_π^-, наверняка ниже порога H_π^{*-}. Это означает, что конфликта, по-видимому, нет и решение будет принято на основании негативного анализа.

Предположим, что увеличились располагаемые ресурсы. В предыдущем случае располагаемые ресурсы универсальны (например, деньги) и равны 3 ед. Пусть теперь $R^{disp} = 6$ ед. Энтропия H_π^+ не изменится, поскольку распределение π_i^+ не зависит от располагаемых ресурсов и, как и ранее, $H_\pi^+ = 0{,}69034$.

Распределение π_i^- в результате роста располагаемых ресурсов «выравнивается»:

	σ_1	σ_2
π_i^+	0,53742	0,46257
π_i^-	0,57444	0,42556

Энтропия $H_\pi^- = 0{,}68203$, то есть возрастает и, скорее всего, превышает порог H_π^{*-}. Поэтому имеет место консонантный конфликт.

Пусть теперь произошло одновременное пропорциональное повышение потребных ресурсов (например, цен). Предположим, цены на все блага повысились в 1,2 раза. Исходная таблица выглядит следующим образом:

	σ_1	σ_2
R_i^{exp}	1,5	2,7
R_i^{req}	1,2	2,4
R^{disp}	3	

Распределения π_i^+ и π_i^- показаны в таблице

	σ_1	σ_2
π_i^+	0,53120	0,46878
π_i^-	0,96555	0,03444

Как и выше $\rho(\pi^+, \pi^-) \to +1$, то есть имеет место консонанс. Энтропии равны

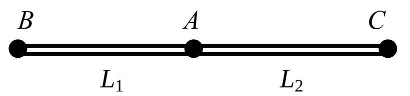
$$\boldsymbol{H}_\pi^+ = 0{,}69110,\ \boldsymbol{H}_\pi^- = 0{,}14986.$$

Поскольку одна из энтропии (H_π^-) мала, конфликта нет, и решение может быть принято на основании негативного анализа.

Можно сказать, что в случае консонанса при высоких энтропиях всех положительно коррелирующих распределений достаточно одного из них, чтобы говорить о наличии внутреннего конфликта, связанного с невозможностью принятия решении при высоких энтропиях.

В случае диссонанса решающую роль играет корреляция. Коэффициент корреляции образует как бы «третью ось» и совместно с энтропиями образует пространство, каждая точка которого характеризует конфликтность ситуации. Как видно из табл.7.5, в случае диссонанса энтропии малы и, тем не менее, решение не может быть принято из-за наличия соответствующей корреляции конкурирующих распределений.

В заключение заметим, что, к счастью, «буриданов осел» не умер. Если рассмотреть «проблемно-ресурсную» ситуацию, в которой он оказался, в динамике, то мы быстро придем к выводу, что исходное положение (точка A) является неустойчивым



$L_1 + L_2 = L = \mathrm{const}$

Пусть в начальный момент $t = 0$ расстояния L_1 и L_2 одинаковы: $L_1 = L_2$, $L_1 + L_2 =$ $= L = \text{const}$ и пусть предпочтения альтернатив σ_1 и σ_2 выражаются формулами

$$\pi(B) = \frac{e^{-\beta L_1}}{e^{-\beta L_1} + e^{-\beta L_2}}; \ \pi(C) = \frac{e^{-\beta L_2}}{e^{-\beta L_1} + e^{-\beta L_2}}; \ \beta > 0.$$

Видно, что $\pi(B) + \pi(C) = 1$.

Возьмем следующую модель изменения L_1 и L_2 ($K > 0$):

$$\frac{dL_1}{dt} = -K\big(\pi(B) - \pi(C)\big); \ \frac{dL_2}{dt} = -K\big(\pi(C) - \pi(B)\big).$$

Учитывая условие нормировки для $\pi(B)$ и $\pi(C)$, а также условие $\frac{dL_1}{dt} = -\frac{dL_2}{dt}$, сведем предыдущую систему к одному уравнению:

$$\frac{dL_1}{dt} = -K\left(\frac{2}{1 + e^{-\beta L} e^{2\beta L_1}}\right).$$

Пусть в начальный момент имеется малое отклонение от положения равновесия $L_1 = L_2$:

$$L_1 = \frac{1}{2}L - \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

в сторону позиции B. Величина е удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = K\beta\varepsilon.$$

Отсюда следует, что при $K > 0$, $\beta > 0$, положение A экспоненциально неустойчиво: $\frac{d\varepsilon}{dt} > 0$.

Производная меняет знак, если β меняет знак.

Это видно и из исходного уравнения. При любом $\beta > 0$

$$\left.\frac{dL_1}{dt}\right|_{L_1=0} = K\left(1 - \frac{2}{1 + e^{-\beta L}}\right) < 0,$$

наоборот, при любом $\beta < 0$

$$\left.\frac{dL_1}{dt}\right|_{L_1=0} > 0$$

то есть положение A неустойчиво. В приведенной модели расстояния A и B или C воспринимаются как «потребные ресурсы» и в этом случае имеет место неустойчивость положения равновесия. Возможность «голодной смерти», однако, сохраняется, если в положении A будет проявляться «нерешительность». Это обстоятельство можно попытаться смоделировать, добавив в предпочтения аддитивно «ремнантную» составляющую $\pi'(t)$:

$$\pi(B) = \pi_0(B) + \pi'(t); \ \pi(C) = \pi_0(C) - \pi'(t).$$

Условия нормировки не нарушаются. В качестве $\pi'(t)$ можно взять какой-либо случайный процесс с нулевым средним, либо компоненту аттрактора Лоренца. Моделирование показывает, что при наличии ремнантной составляющей пребывание субъекта в окрестности точки A затягивается, а время прибытия в пункт B (где можно «утолить голод») может стать недопустимо большим. Пусть в простейшем случае $\pi'(t)$ задается в виде периодических синусоидальных колебаний $\pi'(t) = \mu\sin\omega t$ ($\mu > 0$). В этом случае уравнение для $L_1(t)$ имеет вид:

$$\frac{d L_1}{dt} = K\left(1 - 2\mu\sin\omega t - \frac{2}{1 + e^{-\beta L} e^{2\beta L_1}}\right).$$

Полагая снова $L_1(t=0) = \frac{1}{2}L + \varepsilon$, обнаруживаем, что при определенных комбинациях параметров ε, β, μ время прибытия в пункт B существенно зависит от частоты ремнантных колебаний ω, причем при некоторых значениях ω оно минимально, а в других случаях — значительно больше времени, соответствующего отсутствию ремнантной составляющей ($\mu = 0$).

На рис. 7.2 показана зависимость $L_1(t)$ для «решительного осла», не испытывающего психических колебаний с начальным условием $L_1(0) = L - 0{,}05$, где $L = 5$, $\beta = 0{,}3$, $k = 0{,}1$.

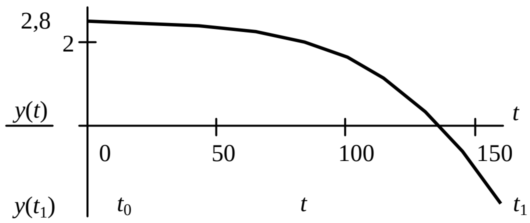


Рис. 7.2

«Цель» достигается примерно через 130 сек. На рис. 7.3, 7.4 показано решение уравнения для $L_1(t)$, когда эндогенный параметр р является переменным и определяется как один из компонентов аттрактора Лоренца, в который добавлены демпфирующие члены — $\beta = \lambda(Q_2 - 18{,}877)$. Здесь число 18,877 — это установившееся значение переменной Q_2 после «затухания» возмущенного процесса в аттракторе при условии, что структурные параметры заданы следующим образом:

$\boldsymbol{a} = 8$; $\boldsymbol{b} = 8$; $\boldsymbol{c} = 20$; $\boldsymbol{h} = 0{,}01$; $\boldsymbol{m} = 0{,}03$; $\boldsymbol{n} = 0{,}015$; $\boldsymbol{k} = 0{,}3$; $\boldsymbol{s} = 5$; $\boldsymbol{\beta} = 0{,}1$; $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}3$.

Начальные условия переменных Q_i заданы так

$$\boldsymbol{Q}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}0001 \\ 0 \\ 0 \\ 2{,}45 \end{pmatrix}.$$

Как видим, имеется начальное отклонение от равновесного положения влево на 0,05. Система уравнений имеет вид:

$$D(t,Q)=\begin{bmatrix} aQ_1-bQ_0-hQ_0^2 \\ -Q_1-Q_0Q_2+cQ_0-mQ_1^2 \\ Q_0Q_1-dQ_2-nQ_2^2 \\ k\left(1-\dfrac{2}{1+e^{-\lambda(Q_2-18{,}877)s}e^{2\lambda(Q_2-18{,}877)Q_3}}\right) \end{bmatrix}.$$

Из рис.7.4 видно, что в этом случае решение $L_1(t)$ стабилизируется вблизи от равновесного положения даже после «затухания» больших возмущенных движений аттрактора. Остающихся малых колебаний Q_2 достаточно чтобы положение $h_1(t) \cong 2{,}5$ сделать устойчивым. Этот эффект напоминает случай, когда точка подвеса математического маятника колеблется, что делает устойчивым верхнее положение равновесия.

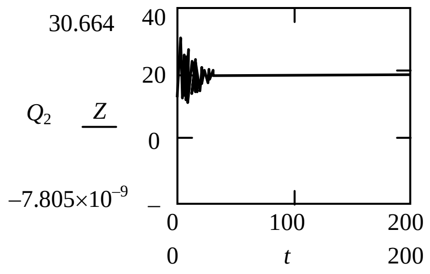


Рис. 7.3

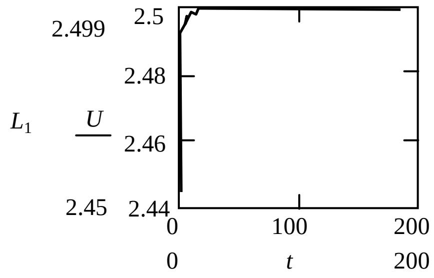


Рис. 7.4

7.2.2. Внутренние этические конфликты

Рассмотренные ранее конфликты относятся к типу *утилитарных конфликтов*, поскольку распределения предпочтений зависели от утилитарных характеристик: полезностей, вредностей (U, L), ресурсов (R_i^{exp}, R_i^{req}, R^{disp}, ...).

Внутренние конфликты, связанные с соперничеством систем этики, распределений этических предпочтений с утилитарными, являются *этическими конфликтами*. Этические конфликты могут быть «конкурирующими» и «антагонистическими». Мы уже говорили выше о различии между антагонистическими и конкурирующими отношениями с точки зрения теории бинарных отношений. Добавим, что «разрешение антагонистического конфликта сопряжено с «гибелью» (не обязательно физической) одной из состязающихся сторон. Так, разрешение (ликвидация) антагонистических отношений между покупателем и продавцом возможно только, если исчезает один из них. Если «покупатель» перестанет быть «покупателем», то в тот же момент изменится статус «продавца»: он перестанет быть «продавцом».

В результате революции был уничтожен класс капиталистов и, как следствие, пролетариат перестал быть пролетариатом. Конкуренция не предполагает (хотя и не исключает) «гибели» (в том числе и физической) одной из конкурирующих сторон.

Для борьбы этических систем каждый раз необходимо «поле битвы». Таким полем является множество предметных альтернатив S_a, либо рейтинговых альтернатив S_ξ, а также «паства» — *«носители»* как утилитарных, так и этических предпочтений.

Фундаментальным является следующее утверждение: *любая этика (этическая система) «спит» до тех пор, пока ей не будет «предъявлено» некоторое множество альтернатив (S_a, S_ξ, ...), утилитарного характера.*

Этика не существует вне сознания ее «носителей» — этических субъектов, Следующий фундаментальный факт: *этика «обитает» в группах субъектов* ($M > 1$). *Этика теряет смысл применительно к одному изолированному субъекту.*

Когда этике предъявляется «поле битвы» (S_a, S_ξ, ...), она «просыпается» и начинает влиять на процессы принятия решений, при этом проявляет себя как одна из фундаментальных «простых» этик:

— инъективная,

— сюръективная,

— всюду-определенная,

— функциональная,

либо как комбинированная — биективная. В дополнение к тому, что уже было сказано относительно этических императивов, необходимо добавить, что их удобно разделить на *«запрещающие», «предписывающие», «рекомендующие»* (подобно тому, как подразделяются знаки в правилах уличного движения), например, «запрещающие» императивы: не убей, не укради, не пожелай жену ближнего... «Предписывающие» императивы: помогай бедным, защищай Родину, веруй... Можно сказать, что этика — это правила движения по «дорогам жизни», что формальные правила и нормы, законы государств, юридические кодексы воплощаются в жизнь через этику и посредством этики. Ее можно представить себе, как «мост от прошлого к будущему, переброшенный через настоящее».

Чисто утилитарные предпочтения и решения базируются, в конечном счете на определенной системе этики. Так неолиберализм, фридмановская модель признает этику, состоящую из одного постулата: хорошо (этично) то, что обеспечивает максимальную прибыль.

Если существует две этические системы, претендующие на одну и ту же «жилплощадь» — сознание данного субъекта, то возникает один из видов этических конфликтов. При этом каждая из этик имеет свой «тестовый» набор альтернатив, в отношении которых она дает категорические рекомендации. Пусть это будут множества $S_{a1}^{(0)}$, $S_{a2}^{(0)}$. Если есть общие элементы — альтернативы, то есть непустое пересечение

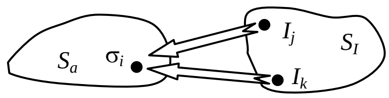
$$\boldsymbol{S_{a1}^{(0)} \cap S_{a2}^{(0)} \neq \varnothing},$$

на этом пересечении происходит столкновение этик, борьба идеологий, религий, философских систем. Для того, чтобы судить о существе борьбы, необходимо в явном виде описать множество альтернатив (поведенческих, экономических, социальных). В данной работе однако, как уже говорилось раньше, задача состоит в том, чтобы, отвлекаясь от существа частных альтернатив и проблем, разработать на концептуальном уровне подход к формализованному, в том числе, количественному описанию процессов субъективного анализа.

Система этики (система императивов) *не противоречива относительно множества* S_a, если на этом множестве не возникает конкуренции или антагонизма между императивами, включенными н данную систему.

Легко представить себе примеры, когда по отношению к определенной альтернативе $\sigma_i \in S_a$ возникает конфликт между императивами (содержащимися в данной

системе: I_j, $I_k \in S_I$). Это может иметь место, когда императивы I_j и I_k «обслуживают» одновременно одну и ту же альтернативу $\sigma_i \in S_a$



Возможен либо консонанс, либо диссонанс между I_j и I_k.

Пусть $\rho_D(\sigma_i \in S_a)$ — отношение бинарного диссонанса этических императивов S_I относительно альтернативы σ_I, $\rho_c(\sigma_i \in S_a)$ — отношение бинарного консонанса относительно $\sigma_i \in S_a$. Запись:

$$\boldsymbol{I_j \rho_D(\sigma_i \in S_a) I_k}$$

означает, что императивы I_j и I_k диссонантны относительно $\sigma_i \in S_a$, а запись $I_j\rho_c(\sigma_i \in S_a)I_k$ означает, что императивы I_j и I_k консонантны относительно $\sigma_i \in S_a$. Очевидно, что отношение ρ_c — рефлексивно и транзитивно:

$$\boldsymbol{I_j\rho_c I_k \Leftrightarrow I_k\rho_c I_j;\ \ (I_j\rho_c I_k \$\ I_k\rho_c I_m) \Rightarrow I_j\rho_c I_m}.$$

Отношение p_D рефлексивно, но может быть отрицательно транзитивным:

$$\boldsymbol{I_j\rho_c I_k \Leftrightarrow I_k\rho_c I_j;\ \left(I_k\bar{\rho}_D I_j; I_k\rho_D I_m\right) \Rightarrow I_j\rho_D I_m}.$$

Пусть $\rho_0(\sigma_i \in S_a)$ — такое бинарное отношение на S_I, когда либо оба императива I_j и I_k, либо один из них индифферентны по отношению к альтернативе σ_i. Опираясь на приведенные рассуждения, уточним понятие *непротиворечивой относительно S_a системы этики*. Можно сказать, что это такая система, когда отсутствуют диссонантные пары (I_j, I_k) для $\forall\sigma_i \in S_a$ и $\forall j,k \in \overline{1,M}$ (I_j, $I_k \in S_I$). Система этики *индифферентна к данному множеству S_a*, если ей «нечего сказать» относительно хотя бы одной альтернативы из S_a.

Действие этических императивов в «царстве свободы» ведет к перераспределению предпочтений и, в конечном итоге, оказывает влияние на «выбор» — принятие решения. После принятия решения — перехода в «царство необходимости» императивы продолжают влиять на психическое состояние: субъект испытывает либо удовлетворение, либо сожаление в связи с принятым решением, то, что в обиходе называют «угрызениями совести». Таким образом, можно сказать, что этика из активной фазы в «царстве свободы» переходит в пассивную фазу в «царстве необходимости». Пассивная фаза не является «безобидной»: здесь готовятся «взрывы» — в терминологии нелинейных систем — бифуркации. Переходы из «царства свободы» в «царство необходимости» осуществляются в основном на основе утилитарных интересов с корректирующим влиянием этики и сопряжены с возрастанием и преобладанием консонансов одноименных распределений (π^+, π^- или υ^+, υ^-).

Обратные переходы — в «царство свободы» сопряжены с нарастанием диссонансов одноименных распределений их взаимным усилением — кумуляцией. Таким образом, можно сделать предположение, что движение «вверх» по шкале субъективной энтропии связано с нарастанием диссонансов указанного типа. При этом диссонансы усиливаются с приближением «снизу» к абсолютному порогу энтропии H_π^{**}. Наоборот, движение «вниз» по шкале энтропии связано с уменьшением таких диссо-

нансов и нарастанием соответствующих консонансов. Нижняя граница, когда $H_\pi = 0$ отвечает полному отсутствию диссонансов. При этом S_a вырождается в сингулярное множество, содержащее одну альтернативу.

Какова роль этики при «блуждании» активной системы в пространстве энтропий?

Можно ожидать, что наиболее активную корректирующую роль играют этические императивы в районе границы «царств»: $H_\pi = H_\pi^*$. Далее, естественно предположить, что переход «вверх» и переход «вниз» происходит на разных уровнях энтропии $H_\pi^*\downarrow$ и $H_\pi^*\uparrow$. Их взаимное расположение не очевидно.

Так, «граница» $H_\pi^*\uparrow$ скорее всего является размытой, поскольку речь идет о нарастании утилитарных возможностей, постепенном расширении множества достижимых альтернатив S_a (исключая случаи внезапного скачкообразного появления «богатства»). Скачкообразные переходы также возможны как «вверх», так и «вниз». При этом может оказаться, что

$$\boldsymbol{H}_\pi^*\uparrow > \boldsymbol{H}_\pi^*\downarrow.$$

Было бы неосторожным называть такие переходы «революциями».

Однако, переход «вверх» — от «необходимости» к «свободе» в некоторых случаях воспринимается как «революция», так как связан с высоким уровнем диссонанса между группами субъектов и высоким уровнем консонанса внутри групп. После перехода «вверх» консонансы внутри групп убывают, а диссонансы нарастают, и наоборот, убывают диссонансы между группами и нарастают межгрупповые консонансы.

В других случаях и в других условиях переход «вниз» — от «свободы» к «необходимости» воспринимается как «*революция*». Соответствующие примеры хорошо известны.

Это эвристическое описание является умозрительным, но основано на анализе взаимоотношения категорий — рассматриваемых в рамках субъективного анализа.

Роль этических систем по отношению к возникновению и развитию проблемно-ресурсных ситуаций и, в частности, конфликтных ситуаций в группах является объектом субъективного анализа.

Заметим, что аналогично можно рассматривать внутриличностные конфликты рейтинговых предпочтений формируемых в сознании одного индивидуума. Если допустить, что субъект «*j*» формирует распределения позитивных и негативных рейтингов субъектов некоторой группы $S_\xi; \xi_j^+(i); \xi_j^-(i)$, то можно говорить о конфликтах этих распределений

7.3. Модельные характеристики межсубъектного конфликта

В этом разделе мы рассматриваем конфликты между двумя субъектами, имея в виду, что перенос соответствующих результатов на группу из 3-х и более субъектов не представляет принципиальных затруднений.

Конфликт распределений индивидуальных предпочтений I рода зависит от характера альтернатив. Пусть два субъекта имеют распределения предпочтений $\pi_1(\sigma_i)$ и $\pi_2(\sigma_k)$, $\sigma_i \in S_{a1}$, $\sigma_i \in S_{a2}$. Доопределим эти распределения так, чтобы на $S_a = S_{a1} \cup S_{a2}$ для них выполнялись условия нормировки. Коэффициент корреляции определим формулой:

$$\rho(\pi_1,\pi_2)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_1(\sigma_i)-N^{-1}\right)\left(\pi_2(\sigma_i)-N^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_1(\sigma_i)-N^{-1}\right)^2\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_2(\sigma_i)-N^{-1}\right)^2}}. \tag{7.11}$$

I случай. Все альтернативы «одноместны», то есть каждая альтернатива σ_i может быть реализована только одним субъектом, тогда, если $\rho(\pi_1, \pi_2) \to 1$, то на S_a имеет место конфликтная ситуация, причем чем меньше энтропии $H_{\pi1}$ и $H_{\pi2}$, тем острее конфликт. Если по мере уменьшения энтропий они приближаются к соответствующим порогам $H^*_{\pi1}$ и $H^*_{\pi2}$ одновременно, то эти пороги сами могут понижаться, так как принятие решения затруднено наличием конфликта. Будет происходить обострение конфликта и «затягивание» порогов в область низких энтропий. Это соответствует более высокой определенности индивидуальных противоречащих друг другу желаний субъектов. Конфликт в рассматриваемом случае отсутствует, если $\rho(\pi_1, \pi_2) \to -1$.

Если в конфликтной ситуации ($\rho(\pi_1, \pi_2) \to 1$) одна из энтропий быстрее приближается к своему порогу, а вторая остается высокой, то конфликт ослабевает и один из субъектов раньше другого «принимает решение». В этом случае конфликт из пассивной подготовительной фазы перейдет в активную фазу, связанную с расходованием ресурсов одним из субъектов, существенным изменением распределения его предпочтений и энтропии. Возникновение и развитие конфликтной ситуации связано с производством или поглощением субъективной информации. Количественное описание опирается на использование канонических распределений предпочтений и изучении их динамики.

Развитие конфликта характеризуется изменением предпочтений каждого из субъектов, и, соответственно, изменением обеих энтропии и коэффициента корреляции. Динамика предпочтений рассмотрена в 5 главе, где, в частности, показано, что в результате принятия решения проблемно-ресурсная ситуация изменяется «скачком».

Здесь нас в основном интересует «пассивная» фаза развития конфликта, то есть события, происходящие в «царстве свободы». В то же время очевидно, что конфликт может деформировать границы этого «царства», изменяя пороговые значения энтропий.

II случай. Все альтернативы являются корпоративными. В этом случае под межличностным конфликтом будем понимать расхождение в предпочтениях различных альтернатив $\sigma_i \in S_a$, которое количественно также характеризуется величиной коэффициента корреляции $\rho(\pi_1, \pi_2)$.

Расхождение предпочтений велико, когда $\rho(\pi_1, \pi_2) \to -1$, и это можно трактовать как конфликтную ситуацию. Расхождение предпочтений мало, если $\rho(\pi_1, \pi_2) \to 1$. В этом случае конфликт отсутствует.

При исследовании динамики конфликтных ситуаций могут быть использованы некоторые модели из гл. 5. Речь идет об уравнениях, описывающих изменение предпочтений (как I, так и II рода) с учетом динамики экзогенных и эндогенных факторов. Дополнительно необходимо наблюдать динамику коэффициентов корреляции. Для коэффициента корреляции (7.11) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\Big((\pi_{2i} - N^{-1})\dot{\pi}_{1i} + (\pi_{1i} - N^{-1})\dot{\pi}_{2i}\Big) - \\ - \frac{\rho}{S^2}\sum_{i=1}^{N}\Big((\pi_{1i} - N^{-1})\dot{\pi}_{1i} + (\pi_{2i} - N^{-1})\dot{\pi}_{2i}\Big), \tag{7.12}$$

где $\rho = \rho(\pi_1, \pi_2)$; $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\pi_{1i} - N^{-1}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\pi_{2i} - N^{-1}\right)^2}$.

В случае, если число альтернатив $N = 2$, коэффициент корреляции принимает только два значения: +1 и –1, причем $\rho(\pi_1, \pi_2) = -1$, когда одновременно $\pi_{11} > 0{,}5$ и $\pi_{22} > 0{,}5$ и $\rho(\pi_1, \pi_2) = 1$, когда либо $\pi_{11} > 0{,}5$ и $\pi_{22} < 0{,}5$, либо $\pi_{11} < 0{,}5$ и $\pi_{22} > 0{,}5$.

Изменение энтропии определяется, как и ранее в гл.5, соотношениями:

$$\frac{dH_{\pi 1}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\ln\pi_{1i} + 1\right)\dot{\pi}_{1i} = \sum_{i=1}^{N}(\ln\pi_{1i}),\dot{\pi}_{1i}; \tag{7.13}$$

$$\frac{dH_{\pi 1}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\ln\pi_{2i} + 1\right)\dot{\pi}_{21i} = \sum_{i=1}^{N}(n\pi_{2i}),\dot{\pi}_{2i};. \tag{7.14}$$

По аналогии несложно построить схемы, когда в конфликте принимают участие канонические распределения других типов (υ^+, υ^-, ...).

Представляет интерес проследить развитие конфликта во всем диапазоне изменения энтропии и корреляций. Существенным является вопрос о том, чем и как разрешается конфликт и что происходит на отрезке времени, следующем за этим событием. Такой анализ может быть осуществлен путем моделирования динамики предпочтений подобно тому, как это делалось в гл. 5 применительно к другим задачам.

В частности, если имеется только два субъекта и только две альтернативы, то в результате разрешения антагонистического конфликта (бинарное отношение между субъектами *A* и *B* является «антагонизмом») происходит полное «разрушение» системы: если исчезает «покупатель», то одновременно исчезает и «продавец». Они не существуют друг без друга. Следовательно, исчезает и вся активная система. Это не означает обязательной физической смерти *A* и *B*. На месте предыдущей активной системы может возникнуть другая активная система.

В результате разрешения конкурентного конфликта субъекты *A* и *B* не исчезают, не исчезает и активная система.

Представляется, что при определенных условиях *антагонизм может перейти в конкуренцию и наоборот.* В условиях конкуренции подразумевается наличие третьего субъекта *C*, который играет пассивную роль (рис.7.5).I

Рис. 7.5

На схеме *а,* рис. 7.5, между *А* и *В* имеет место антагонизм, на схеме *б*, рис. 7.5 между *А* и *В* имеет место конкуренция, в то время, как между *А* и *С* и *В* и С существует антагонизм.

Чтобы представить себе как это можно выразить в терминах предпочтений I рода, рассмотрим такую модельную ситуацию: продавец *А* может продать один и тот же товар по цене p_1 либо по цене p_2 и $p_2 > p_1$. Покупатель *В* соответственно может купить товар по цене p_1 либо p_2. Если π_{Ai} — предпочтения продавца, а π_{Bi} — предпочтения покупателя, то

$$\pi_{A2} > \pi_{A1},\ \text{а}\ \pi_{B2} < \pi_{B1}.$$

Это означает, что

$$\rho(A, B) = -1$$

и конфликт между *А* и *В* является антагонистическим.

В случае *б* распределения предпочтений *А* и *В* таковы, что

$$\pi_{A2} > \pi_{A1},\ \text{и}\ \pi_{B2} > \pi_{B1}.$$

Следовательно,

$$\rho(A, B) = +1.$$

Конфликт существует, поскольку есть третий субъект *С* (своего рода «третейский судья»), но этот конфликт является конкурентным. В этом втором случае можно представить себе аналогию с двумя субъектами и с двумя стульями: α и β. Каждая альтернатива является «одноместной». Если и *А* и *В* предпочитают стул α, то их предпочтения находятся в консонантном отношении, однако имеет место конфликт. Если хотя бы одному из субъектов все равно, на каком стуле сидеть, то его энтропия $H_\pi - H_{\pi\max} = \ln 2$ и конфликт не может возникнуть.

Конфликт рейтингов развертывается над множеством S_ξ субъектов в группе. Ранее рассматривались различные типы распределений рейтинговых предпочтений: интегральные рейтинги $\xi(j)$, условные рейтинги $\xi(j|\ i)$, дифференциальные рейтинги $\xi(j|\ i, \sigma_k)$ и другие. Рассмотрим некоторые виды рейтинговых конфликтов. Бинарный конфликт условных рейтинговых распределений двух субъектов i и k определяется как расхождение в отношении оценки своих коллег — распределениях рейтингов $\xi(j|\ i)$ и $\xi(j|\ k)$. О наличии рейтингового конфликта сигнализирует коэффициент корреляций распределений условных рейтингов:

$$\rho_\xi\left(\xi_j, \xi_{j|k}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{M}\left(\xi(j|i) - M^{-1}\right)\left(\xi(j|k) - M^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\xi(j) - M^{-1}\right)^2 \sum_{i=1}^{M}\left(\xi(j|k) - M^{-1}\right)^2}} = \rho_\xi(i, k) \qquad (7.15)$$

В условиях «круговой поруки», как было показано в гл.4, все рейтинги одинаковы, $\rho_\xi(i,\ k) = +1$ для $\forall j, k \in \overline{1, M}$. Матрица $\hat{\rho}_\xi = \left\|\rho_\xi(i, k)\right\|$ симметрична, причем $\rho_\xi(i,\ i) = 1$ для $\forall i$. При наличии полного консенсуса, то есть совпадения условных распределений всех субъектов: $\xi(j|\ i) = \xi(j|\ k)$ для $\forall j, k \in \overline{1, M}$ все $\rho_\xi(i, k) = 1$ и $\det\hat{\rho} = 0$.

За меру несовпадения предпочтений для всей группы можно принять величину

$$1-\mathbf{det}\,\hat{\rho}\geq 0.$$

Пусть, например, в группе из 3 субъектов распределение центрированных рейтинговых предпочтений задано таблицей:

j	$\xi(j\mid 1)-M^{-1}$	$\xi(j\mid 2)-M^{-1}$	$\xi(j\mid 3)-M^{-1}$
1	0,5	–0,2	–0,3
2	–0,25	0,6	–0,3
3	–0,25	–0,4	0,4

В этом случае матрица $\hat{\rho}_\xi$ имеет вид:

$$\hat{\rho}_\xi=\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23}\\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0{,}3397 & -0{,}4901\\ -0{,}3397 & 1 & 0{,}0951\\ -0{,}4901 & 0{,}0951 & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{det}\,\hat{\rho}=1+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2\cong 0{,}6670$$

и

$$1-\mathbf{det}\,\hat{\rho}\ =0{,}333.$$

Для бинарного конфликта, когда $\rho\xi(i,k)<0$, дополнительную информацию дают индивидуальные энтропии $H_{\xi i}$ и $H_{\xi k}$

$$\boldsymbol{H}_{\xi i}=-\sum_{j=1}^{M}\xi\left(j|i\right)\mathbf{ln}\,\xi\left(j|i\right);$$

$$\boldsymbol{H}_{\xi k}=-\sum_{j=1}^{M}\xi\left(j|k\right)\mathbf{ln}\,\xi\left(j|k\right).$$

«Острота» конфликта тем больше, чем меньше эти энтропии. Если исследование относится к «предвыборному этапу», который в рамках применяемой здесь терминологии следует считать «царством свободы», то максимальная «острота» рейтингового конфликта достигается в момент достижения пороговых значений $H^*_{\xi i}$ и $H^*_{\xi k}$, то есть, образно говоря, в момент «заполнения бюллетеней» субъектами i и k. Конфликт отсутствует, или почти отсутствует, если хотя бы одному из субъектов «все равно кого выбирать» и его энтропия высока: $H_{\xi i}\to \ln M$.

Другой вид рейтингового конфликта основан на сравнении индивидуального условного распределения $\xi(j\mid i)$ с интегральными рейтингами $\xi(j)$.

Согласно принятой концепции любое распределение предпочтений должно иметь конкретного «носителя», в данном случае «носителем» распределения интегральных рейтингов является «оператор» — некто определяющий эти рейтинги на основании обработки индивидуальных условных рейтингов и затем использующий их в «своих интересах», либо — это «виртуальный субъект», представляющий всю группу, как единый социальный организм то, что мы выше назвали «коллективным разумом», «общественным мнением». Коэффициент корреляции между распределениями $\xi(j)$ и $\xi(j\mid k)$.

$$\rho_\xi\left(\xi_j,\xi_{j|k}\right)=\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(\xi(j)-M^{-1}\right)\left(\xi(j|k)-M^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\xi(j)-M^{-1}\right)^2\sum_{i=1}^{M}\left(\xi(j|k)-M^{-1}\right)^2}} \tag{7.16}$$

характеризует степень расхождения индивидуальных рейтинговых предпочтений субъекта с «общественным мнением» и в том числе свидетельствует о наличии конфликта между субъектом «j» и группой, если

$$\rho(\xi_j,\ \xi_{j|\ k}) \to -1.$$

Мы не рассматриваем здесь вопрос о том, что следует из такого конфликта: будет ли субъект «j» проявлять активность и стремиться изменить «общественное мнение» и будет ли некто, представляющий общественное мнение стремится воздействовать на «j» с целью изменить его индивидуальные предпочтения.

Как и в случае предметных предпочтений, можно представить себе на множестве S_ξ неантагопистические, например, конкурентные конфликты.

Интегральные предпочтения $\xi(j)$, всегда существуют. По отношению к рейтингам $\xi(j)$ группа, в которой эти рейтинги существуют, является «замкнутой».

Рассмотрим группу из трех субъектов: $M = 3$. Должны выполняться условия:

$$\xi(1)=\xi(1)\xi(1|1)+\xi(2)\xi(1|2)+\xi(3)\xi(1|3); \tag{7.17}$$

$$\xi(2)=\xi(1)\xi(2|1)+\xi(2)\xi(2|2)+\xi(3)\xi(2|3);$$

$$\xi(3)=\xi(1)\xi(3|1)+\xi(2)\xi(3|2)+\xi(3)\xi(3|3).$$

Кроме того, должны выполняться условия нормировки

$$\sum_{j=1}^{M}\xi(j)=1;\ \sum_{j=1}^{M}\xi(j|i)=1;\ \forall i\in\overline{1,M}\ .$$

Три приведенных выше уравнения (7.17), и три равенства, следующие из условий нормировки, составляют систему 6 уравнений относительно 9 величин $\xi(j\,|\,i)$ (с учетом того, что в общем случае $\xi(j|\,i) \neq \xi(i\,|\,j)$), следовательно, эти условия не определяют однозначно условные предпочтения $\xi(j\,|\,i)$. Наоборот, можно показать, что, если условие (7.17) рассматривать как уравнения для интегральных рейтингов $\xi(i)$, то с учетом условий нормировки определитель этой однородной системы тождественно равен нулю.

Следовательно, интегральные рейтинги, определяемые формулой (4.129), всегда существуют, о чем уже говорилось:

$$det(Z-1) = 0,$$

где Z — матрица условных рейтингов. Один из интегральных рейтингов может быть выбран произвольно. Пусть это будет $\xi(1) = \xi^*(1)$. В нашем примере, когда $M = 3$, мы можем взять любые два уравнения системы (7.17) и условие нормировки.

В результате получим систему трех уравнений, например:

$$\xi^*(1)+\xi(2)+\xi(3)=1; \tag{7.18}$$

$$\xi(2|1)\xi^*(1)+\left(\xi(2|2)-1\right)\xi(2)+\xi(2|3)\xi(3)=0\,;$$

$$\xi^*(1)\xi(3|1)+\xi(3|2)\xi(2)+\left(\xi(3|3)-1\right)\xi(3)=0\,.$$

Определитель матрицы этой системы

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{Z}^*=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \xi(2|1) & \xi(2|2)-1 & \xi(2|3)\\ \xi(3|1) & \xi(3|2) & \xi(3|3)-1\end{vmatrix}>0\,, \qquad (7.19)$$

так как все рейтинги положительны. Таким образом, система (7.18) имеет единственное решение.

Определим матрицу

$$\boldsymbol{W}=\left[\begin{array}{c:c}1 & \hat{\rho}^0(\boldsymbol{k})\\ \hdashline \hat{\rho}(\boldsymbol{k}) & \hat{\rho}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k})\end{array}\right], \qquad (7.20)$$

где $\hat{\rho}(k)$ – вектор - столбец коэффициентов корреляции индивидуальных условных предпочтений субъекта «*k*» с «общественным мнением», а $\hat{\rho}(i,k)$ — матрица коэффициентов корреляции предпочтений различных субъектов между собой. Тогда, по аналогии, со статистикой можно ввести коэффициент субъективной множественной корреляции

$$\boldsymbol{R}=\sqrt{1-\frac{\mathbf{det}\,\boldsymbol{W}}{\mathbf{det}\;\hat{\rho}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k})}}\,. \qquad (7.21)$$

Как известно, R лежит в пределах

$$0\le \boldsymbol{R}\le 1$$

и характеризует «степень согласия» относительно распределения рейтингов в группе. Согласия нет, если $R \to 0$, если $R \to 1$, имеет место высокий уровень согласия (консенсус, конвергенция).

Следующий тип конфликтной ситуации связан с возможными несовпадением *рейтинговых* предпочтений данного субъекта с распределением рангов в группе (в социуме), либо несовпадением *«общественного мнения»,* то есть интегральных рейтингов с распределением *рангов* (читай «должностей», «властных полномочий»).

Обозначим, как и ранее, ранг субъекта в группе $\eta_k\left(k\in\overline{1,L}\right)$, $L \le M$, где L — число классов ранговой эквивалентности. Коэффициент корреляции распределения рангов в группе и индивидуальных ранговых предпочтений субъекта «*i*» определяется формулой:

$$\rho_\xi(\eta,\xi_{\boldsymbol{i}})=\frac{\sum\limits_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{M}}\left(\eta_{\boldsymbol{j}}-\boldsymbol{M}^{-1}\right)\left(\xi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})-\boldsymbol{M}^{-1}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{M}}\left(\eta_{\boldsymbol{j}}-\boldsymbol{M}^{-1}\right)^2\sum\limits_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{M}}\left(\xi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})-\boldsymbol{M}^{-1}\right)^2}}= \qquad (7.22)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{L}\left(\eta_k - M^{-1}\right)\sum_{j=M_{k-1}+1}^{M_k}\left(\xi\left(j|i\right) - M^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left(\eta_k - M^{-1}\right)^2 M_k \sum_{j=1}^{M}\left(\xi\left(j|i\right) - M^{-1}\right)^2}}.$$

Аналогично вычисляется коэффициент корреляции распределения рангов и распределения интегральных рейтингов, то есть «общественного мнения»:

$$\rho_\xi\left(\eta,\xi\right) = \frac{\sum_{k=1}^{L}\left(\eta_k - M^{-1}\right)\sum_{j=M_{k-1}+1}^{M_k}\left(\xi\left(j\right) - M^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left(\eta_k - M^{-1}\right)^2 M_k \sum_{j=1}^{M}\left(\xi\left(j\right) - M^{-1}\right)^2}}. \qquad (7.23)$$

Последние два вида коэффициента корреляции сигнализируют о возможном наличии расхождения между рейтинговыми предпочтениями членов группы и установленной объективной ранговой иерархией и, соответственно, распределением властных полномочий. Можно высказать допущение, что межрейтинговые корреляции играют решающую роль в «царстве свободы» («до выборов»), в то время как смешанные рангово-рейтинговые корреляции определяют уровень конфликта после распределения рангов («после выборов»). Ранее рассматривались соответствующие энтропии, которые участвуют и в данном случае в характеризации ситуации в группе.

Анализ возможных конфликтов можно распространить на этические системы. Выясним, каким образом можно представить конфликт между двумя этическими системами. Напомним, что этика для того, чтобы проявиться, вступить в действие, должна иметь «поле битвы». Во всех случаях без исключения каждая этическая система имеет некий «стандартный» (или канонизированный) набор альтернатив $S_a^{(0)}$, относительно которых она «повелевает», либо «советует» относительно выбора предпочтений. Ранжирование этических императивов условно будем считать «априорным». Пусть это ранжирование отражено в виде распределения $\pi(I_k)$, $I_k \in S_I$. Распределение $\pi(I_k)$ может быть ординальным либо кардинальным.

Если имеется две системы этических императивов с априорными распределениями $\pi_1(I_k)$ и $\pi_2(I_k)$ на одном и том же каноническом множестве $S_a^{(0)}$, то степень соответствия или расхождения этик можно определить коэффициентом корреляции $\rho(\pi_1(I_k), \pi_2(I_k))$, а остроту этического конфликта, если таковой имеется, величинами энтропий

$$H_{\rho 1} = -\sum_{k=1}^{S}\pi_1\left(I_k\right)\ln\pi_1\left(I_k\right);\ H_{\rho 2} = -\sum_{k=1}^{S}\pi_2\left(I_k\right)\ln\pi_2\left(I_k\right).$$

Под $S_a^{(0)}$ мы подразумеваем снова объединение $S_{a1}^{(0)} \cup S_{a2}^{(0)}$ с доопределением распределений нулями на «не занятых» альтернативах.

Более общее и более реалистичное определение этического конфликта состоит в следующем: пусть в качестве «поля битвы» для двух этических систем предлагается множество альтернатив S_a и $\pi(\sigma_k)$, где $\sigma_k \in S_a$, представляют собой утилитарные предпочтения. «Наложим» на распределение $\pi(\sigma_k)$ первую этическую систему, и пусть в результате возникает распределение $\pi(\sigma_k|\ S_I)_1$ отличное от исходного $\pi(\sigma_k)$. Аналогично, глядя на множество S_a через «призму» второй этической системы, получим другое

распределение $\pi(\sigma_k | S_I)_2$. Информация, связанная с «воздействием» этики на утилитарные предпочтения, определяется формулой

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{S}_a \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}\right) = \boldsymbol{H}_\pi\left(\boldsymbol{S}_a \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}\right) - \boldsymbol{H}_\pi\left(\boldsymbol{S}_a\right). \tag{7.24}$$

Смысл обозначений здесь ясен. Разность условных энтропии

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{S}_a \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}, \boldsymbol{S}_{Ik}\right) = \boldsymbol{H}_\pi\left(\boldsymbol{S}_a \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}\right) - \boldsymbol{H}_\pi\left(\boldsymbol{S}_a \middle| \boldsymbol{S}_{Ik}\right) \tag{7.25}$$

представляет собой субъективную информацию, обусловленную заменой одной этической системой другой на одном и том же «поле битвы» — множестве предметных альтернатив S_a.

Принятые обозначения (например, $\pi(\sigma_k | S_I)$) подразумевают, что каждая альтернатива $\sigma_k \in S_a$ «тестируется» всеми императивами $I_j \in S_I$ (рис.7.4), в результате чего выбирается откорректированное, учитывающее этические факторы, предпочтение $\pi(\sigma_i | S_I)$.

Степень расхождения распределений $\pi(\sigma_k | S_N)$ и $\pi(\sigma_k | S_{Ij})$ отражается величиной коэффициента корреляции

$$\rho\left(\boldsymbol{S}_{Ii}, \boldsymbol{S}_{Ij} \middle| \boldsymbol{S}_a\right) = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_{Ij}\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_{Ii}\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_{Ij}\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)^2}}. \tag{7.26}$$

Если $\rho(S_{Ii}, S_{Ij} | S_a) \to -1$, то можно говорить, что на множестве S_a две этические системы находятся в состоянии конфликта.

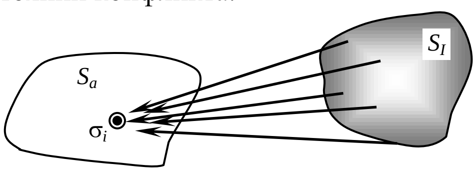


Рис. 7.6

Можно ли считать, что один и тот же субъект является носителем двух «этик». Скорее всего, ответ является отрицательным.

Два субъекта могут иметь одно и то же множество предметных альтернатив, но быть носителями различных этик. В этом случае коэффициент корреляции $\rho(S_{Ii}, S_{Ij} | S_a)$ сигнализирует о *межличностном конфликте.*

Предположим теперь, что $\pi(\sigma_k)$, $\sigma_k \in S_a$ — распределение утилитарных предпочтений, а $\pi(\sigma_k | S_I)$ — распределение предпочтений того же субъекта на том же множестве S_a, откорректированное в результате учета этических императивов из множества S_I. Определим коэффициент корреляции

$$\rho\left(\pi\left(\sigma_k\right), \pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_I\right)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_I\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^{N}\left(\pi\left(\sigma_k \middle| \boldsymbol{S}_I\right) - \boldsymbol{N}^{-1}\right)^2}}. \tag{7.27}$$

В этом случае мы можем говорить о внутриличностном конфликте между чисто утилитарными предпочтениями и предпочтениями, учитывающими этические нормы. Конфликт имеет место, если

$$\boldsymbol{\rho(\pi(\sigma_k), \pi(\sigma_k \mid S_I))} \to -1.$$

Подобные рассуждения применимы к другим видам предметных предпочтений (π^+, π^-, υ^+, υ^-) и рейтинговых предпочтений ($\xi(j)$, $\xi(j \mid i)$, ...).

Пусть, например, $\xi(j \mid i)$ — распределение рейтинговых предпочтений, основанное на утилитарных соображениях (пользе субъекта j для субъекта i, ...), а $\xi(j \mid i, S_I)$ — распределение рейтинговых предпочтений на том же множестве S_ξ, откорректированное с учетом этических императивов из множества S_I. Более подробно набросок теории конфликтов с использованием рейтинговых распределений $\xi(j \to i \mid \ldots)$ приведен ниже, рассуждения относительно взаимных полезностей даны в гл. IV.

По аналогии с предыдущим величина

$$\boldsymbol{I(S_\xi \mid S_I) = H_\xi(S_\xi \mid S_I) - H_\xi(S_\xi)} \tag{7.28}$$

есть информация, связанная с воздействием императивов из S_I на рейтинговые представления субъекта «i». О внутреннем конфликте сигнализирует коэффициент корреляции

$$\boldsymbol{\rho(\xi(j \mid i), \xi(j \mid i, S_I)}.$$

Если он приближается к –1, это свидетельствует о наличии "*конфликта*", если он близок к +1, это говорит о том, что исходное рейтинговое распределение $\xi(j \mid i)$ находится в "согласии с данной этикой". Пусть теперь утилитарные рейтинговые предпочтения двух субъектов совпадают:

$$\boldsymbol{\xi(j \mid i) = \xi(j \mid k)} \ (\forall \boldsymbol{j} \in \overline{1, \boldsymbol{M}}).$$

Затем, условно говоря, один из них принимает христианство (этика "X"), а другой — ислам (этика "M").

Распределение $\xi(j \mid i, S_{IX})$ отличается от распределения $\xi(j \mid k, S_{IM})$. Расхождение между ними характеризуется коэффициентом корреляции

$$\boldsymbol{\rho(\xi(j \mid i, S_{IX})\xi(j \mid k, S_{IM}))},$$

а субъективная информация, связанная с изменением «веры»

$$\boldsymbol{I(S_\xi \mid S_{IX}, S_{IM}) = H_\xi(S_\xi \mid S_{IX}) - H_\xi(S_\xi \mid S_{IM})}. \tag{7.29}$$

В связи со всем сказанным выше в этом параграфе, сделаем следующее замечание. Пусть P_a — множество множеств всех возможных проблемно-ресурсных ситуаций, $(S_I, \pi(I))$ — некоторая этическая система. P_a можно разделить на подмножества P_a^+ и P_a^-, такие, что в P_a^+ содержатся такие множества утилитарных распределений $\pi(\sigma_k)$ на S_a, которые не вступают в конфликт с данной системой этики, а в P_a^- входят те подмножества распределений, которые находятся с данной системой этики в конфликте.

Представляет интерес промоделировать развитие конфликтов во всем диапазоне изменения энтропий и корреляций. Существенным является вопрос, который мы здесь практически не затронули: как разрешается конфликт каждого типа и что происходит после его разрешения?

Практически важной является проблема управления конфликтами. Она уходит в область теории игр [46, 47, 55, 56, 106, 113, 126, 156]. Однако, в рамках данной версии субъективного анализа эта проблема приобретает своеобразную окраску и сулит возможность получения новых и интересных результатов.

Очевидным, в частности, является вопрос о том, какое экзогенное воздействие на активную систему необходимо осуществить для вывода энтропии на нижнюю границу «царства свободы» H_π^*, если в данный момент $H_\pi > H_\pi^*$. Необходимая информация есть

$$\boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{H}_\pi - \boldsymbol{H}_\pi^*. \tag{7.30}$$

Потребная информация максимальна, когда вначале система находится на верхней границе «царства свободы»

$$\boldsymbol{I}^*_{\mathbf{max}} = \mathbf{ln}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{H}_\pi^*. \tag{7.31}$$

Поскольку $I^*_{\max} = f(R^{disp})$, можно определить необходимые дополнительные потребные ресурсы ΔR^{disp}.

Другой вопрос: какие экзогенные воздействия нужны для ослабления либо ликвидации конфликта

а — внутреннего;

б — межличностного;

в — внутригруппового.

7.4. Энтропийная парадигма в теории иерархических активных систем. Энтропийная теория конфликтов

7.4.1. Теория иерархических активных систем и принцип максимума субъективной энтропии

Теория иерархических активных систем и энтропийная теория конфликтов являются еще одной областью приложения энтропийной парадигмы. На этом пути удается использовать ряд новых понятий, в частности, субъективной энтропии и принцип максимума этой энтропии.

В настоящей главе мы продолжаем конкретизацию теории межсубъектных конфликтов, в том числе, делается попытка построить модель иерархической системы, ввести количественные характеристики «остроты» межсубъектного конфликта. По сравнению с предыдущим изложением несколько изменены обозначения, в частности, субъекты в двухуровневой системе обозначаются буквами A и B.

Предлагается вариант теории иерархических активных систем, основанный на принципе максимума субъективной энтропии, который с формально-математической точки зрения совпадает с принципом Джейнса-Гиббса. Упомянутый принцип опирается на понятие субъективной энтропии, принцип «индивидуального носителя» и схемы агрегирования предпочтений и, в этом смысле, является самостоятельным принципом.

Для распределений предметных и рейтинговых предпочтений построена модель иерархии предпочтений. Используется свойство иерархической аддитивности энтропии в форме Шенона.

На основе этой модели развивается теория конфликтов, как конфликтов распределений предпочтений. Предложена классификация конфликтов, отражающая в значительной мере существующие представления в этой области. Переход конфликта из

одной фазы в другую связывается с преодолением определенных энтропийных порогов. Рассмотрена динамика конфликтов, внутриличностные и межличностные конфликты.

Настоящая теория, с нашей точки зрения, является актуальной при изучении проблемы безопасности активных систем, в том числе социальных и экономических объектов, проблемы безопасности полетов, поскольку авиатранспортная система в целом и система «Самолет – пилот – среда», в частности, являются активными системами.

Если присмотреться внимательно, мы обнаружим, что практически при каждом авиационном происшествии имеет место тот или иной конфликт.

Показано, что энтропийный подход к теории конфликтов является эффективным средством исследования и дает необходимый инструментарий.

Термин «активная система» мы уже обсуждали ранее. Сошлемся здесь дополнительно на высказывание Бердяева Н.А. [26.1]:

«Источник движения лежит внутри, а не в толще извне, идущее от внешней среды, как думает механический материализм, материи присуща настоящая свобода, в ее недрах есть источник активности, изменяющий среду».

Эта точка зрения созвучна с тем, что автор думает по этому поводу. Задача в данном случае состоит в том, чтобы интерпретировать ее в терминах энтропийной парадигмы.

7.4.2. О принципе максимума субъективной энтропии применительно к теории конфликтов

«Принцип максимума субъективной энтропии», математическая формулировка которого совпадает с формулировкой принципа Джейнса-Гиббса [282, 283], в содержательном смысле существенно отличается от последнего и, будучи отнесенным к моделированию проявлений психики, является по существу самостоятельным принципом. Повторим здесь основные допущения:

1. Существует непустое множество альтернатив S.

Количество альтернатив всегда больше *1*. Таким образом, субъект постоянно находится в ситуации выбора.

2. На множестве альтернатив психика формирует распределение предпочтений.

Указанные распределения формируются оптимальным образом. На множестве S_a или S_ξ определена субъективная энтропия предпочтений. Распределение предпочтений максимизирует субъективную энтропию на многообразии, заданном «изопериметрическими» условиями.

3. Психика обладает способностью к агрегированию предпочтений.

4. Существует два типа предпочтений: предметные $\pi(\sigma_i)$, где $\sigma_i \in S_a$ – множество предметных альтернатив, $i \in \overline{1,N}$ и рейтинговые $\xi(j),$ где j – индекс субъекта из группы S_ξ; $j \in N$.

5. Существуют определенные уровни (пороги) субъективной энтропии, задающие структуру энтропийного пространства. Переход через пороги соответствует качественному и скачкообразному колличественному изменению состояния психики,

например, - изменение числа изучаемых альтернатив σ_i и, соответственно, размерности множества S_a (или S_ξ).

Таким образом, функционал Джейнса представляет собой «математическую упаковку» для нового содержания. Атрибутами психики, которыми оперирует рассматриваемый принцип, являются: множества альтернатив, распределения предметных (I рода) и рейтинговых (II рода) предпочтений, когнитивные функции, зависящие от эндогенных и экзогенных факторов, энтропийные пороги.

При построении когнитивных функций учитываются известные законы индивидуальной психики: Вебера-Фехнера, Йеркса-Додсона, Стивенса, Забродина и др.

7.4.3. Модель двухуровневой системы

Ограничимся рассмотрением двухуровневой иерархической системы (рис.7.7).

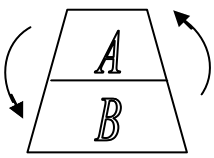


Рис. 7.7

Здесь A – субъект верхнего уровня, B – субъект нижнего, подчиненного уровня.

В моделях, которые мы стремимся построить, необходимо отразить это обстоятельство – отношение подчиненности, преобладания, в структуре функционалов и предпочтений.

Пусть $S_a(A)$ – множество предметных альтернатив субъекта A:

$\sigma_{Ai}(i \in \overline{1, M_A}), S_a(B)$ – множество альтернатив субъекта B. Естественно считать, что соотношение между $S_a(A)$ и $S_a(B)$ может быть различным. Если $S_a(A) \cap S_a(B) = \varnothing$ субъекты A и B не имеют общих интересов и потому не образуют систему. Если $S_a(A) \cap S_a(B) \neq \varnothing$, то можно говорить о системе. В этом случае выделим $S_a = S_a(A) \cap S_a(B)$ и будем рассматривать распределения предпочтений $\pi_A(\sigma_i)$ и $\pi_B(\sigma_i)$ на пересечении S_a и если мощность S_a есть N, то условиями нормировки будут равенства:

$$\sum_{i=n}^{N} \pi_A(\sigma_i) = 1; \sum_{i=n}^{N} \pi_B(\sigma_i) = 1 \qquad (7.32)$$

Здесь N – мощность пересечения $\boldsymbol{S_a(A) \cap S_a(B)}$

Не исключается вариант, когда нормирование предметных предпочтений осуществляется на каждом из индивидуальных множеств альтернатив:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \pi_A(\sigma_i) = 1; \sum_{i=1}^{N_B} \pi_B(\sigma_i) = 1$$

Отношение субъекта к альтернативам, содержащимся в пересечении S_a, то есть к корпоративным альтернативам может зависеть от наличия других «посторонних» альтернатив в соответствующем проблемном индивидуальном множестве.

В теории полезности часто требуется независимость от посторонних альтернатив, если речь идет об индивидуальном субъекте. Применительно к группе взаимодей-

ствующих субъектов обязательность этого требования неочевидна. В настоящей работе мы заранее будем считать, что множества $\boldsymbol{S_a(A)}$ и $\boldsymbol{S_a(B)}$ совпадают.

Задача управления иерархической системой решается в два этапа:

— управление процессом принятия решения – выбором альтернативы на множестве S_a и, следовательно, цели и

— управление процессом достижения цели.

В двухуровневой системе естественно считать, что право выбора (принятия решения) принадлежит субъекту верхнего уровня, то есть субъекту *A* (первый пилот в экипаже воздушного судна). Это происходит однако с учетом наличия *B*, его предпочтений, его ресурсов, как пассивных, так и активных.

Выражаясь условно, можно сказать, что на этапе выбора «внешнее» управление «осуществляет вариационный принцип», без нашего ведома, «запаянный» в нашем сознании. Мы допускаем, что может существовать и внешний уравняющий – 3-й субъект, который верит в справедливость постулата субъективной оптимальности, в то, что предпочтения формируются в соответствие с вариационным принципом. Тогда «внешнее» управление осуществляется в соответствие со схемой (рис. 7.8). Однако внешний «управляющий» должен хорошо представлять общие работы психики субъекта $\sum$.

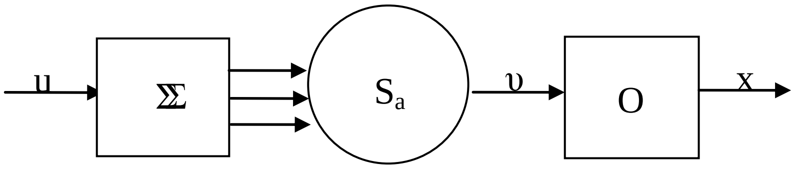


Рис. 7.8

Управление объектом «О» осуществляется опосредовано. «Внешний» уравняющий управляет субъектом $\sum$, полагая, что субъект реагирует в соответствие с вариационным принципом (постулатом субъективной оптимальности).

На втором этапе – осуществление выбора и достижения выбранной цели – управляющим является сам субъект $\sum$. При этом он решает основную задачу управления, используя традиционные методы, определяемые объективными факторами и объективными оценками.

Первая задача – управление выбором решается в рамках субъективного анализа, вторая – методом обычной теории управления.

Предполагается, что в пределах системы имеются определенные располагаемые ресурсы, которые находятся «под уравнением» субъектов *A* и *B*: $\boldsymbol{R_A^{req}}$ и $\boldsymbol{R_B^{req}}$. В процессе решения ресурсы меняются (расходуются) и, в том числе, перераспределяются между уровнями *A* и *B*.

В более общем случае мы говорим о полезностях индивидуальных и «взаимных полезностях» [231],: $U(i \to j)$ – полезность субъекта «*i* для субъекта *j*».

Имеют место следующие формы связности в иерархических системах:

— общность проблем (непустые пересечения множеств альтернатив) $S_a(A) \cap S_a(B) \neq \varnothing$ (в дальнейшем S_{aA} и S_{aB});

— общность ресурсов (консолидированные ресурсы для корпоративных проблем);

— наличие взаимных полезностей;
— общность интересов – желаний, предпочтений;
— общность этических представлений, признаваемых этических императивов.

Наконец, можно говорить об информационной субъективной связности между субъектами внутри иерархической системы.

7.4.4. Элементы энтропийной теории конфликтов

Одной из форм взаимодействия в системе являются конфликты.

На субъективном уровне конфликт трактуется как конфликт распределений предпочтений. Рассматриваются следующие типы конфликтов и, соответственно, модели конфликтов:

— внутриличностные конфликты – это «конфликты» между разнотипными распределениями, пренадлежащими данному субъекту [83, 231]: $\pi^{+}(\sigma_i)$, $\pi^{-}(\sigma_i)$: $\upsilon^{+}(\sigma_i)$, $\upsilon^{-}(\sigma_i)$. Здесь $\pi^{+}(\sigma_i)$ – предпочтение принять (выбрать) альтернативу σ_i, на основе позитивного анализа, $\pi^{-}(\sigma_i)$ – предпочтение принять σ_i, на основе негативного анализа, $\upsilon^{+}(\sigma_i)$, $\upsilon^{-}(\sigma_i)$ – предпочтения отбросить альтернативу σ_i

— внутриличностный конфликт между распределениями рейтингов членов группы с точки зрения «данного субъекта» и распределением рангов: между $\xi\left(j\middle|A\right)$ и $\eta(j)$;

— межличностные конфликты – это «конфликты» между однотипными распределениями принадлежащими разным субъектам: например, конфликт между $\pi_A^{+}(\sigma_i)$ и $\pi_B^{+}(\sigma_i)\ldots$;

— множественные (социальные) конфликты;
— конфликты продуктивные (созидательные);
— конфликты контрпродуктивные (разрушительные);
— «холодные конфликты» - когда «говорят музы»;
— «горячие конфликты» - когда «говорят пушки».

Теория конфликтов предполагает ее применение для решения ряда задач:

— прогнозирование конфликтов;
— диагностика (обнаружение), определение типа, стадии и глубины (остроты) конфликтов;
— профилактики конфликтов;
— управления на этапе назревания конфликта;
— управления на этапе разрешения конфликта;
— перевода конфликта одного типа в конфликт другого типа.

С теоретической точки зрения представляют интерес переходы конфликтов одного типа в конфликты другого типа. Эти переходы связаны со структурой энтропийного пространства. Предполагается, что психическое состояние субъекта (или индивидуальная психика) характеризуется наличием энтропийных порогов, а также порогов коэффициентов корреляции и, что эта структура как и все остальные факторы имеет строго индивидуальный характер. Естественно предположить, что упомянутые пороги

зависят от времени и, возможно от оценок – «субъективной вероятности», некоторых других факторов, в частности, имеет место явление гистерезиса при «движении» энтропийных порогов.

Продолжим формальное описание иерархических систем и конфликтов.

Кроме распределений абсолютных предметных предпочтений (I рода) $\pi_A(\sigma_{k1})$ и $\pi_B(\sigma_{k2})$; $k1 \in 1,\overline{N}_A$; $k2 \in 1,\overline{N}_B$, на множествах, соответственно, S_{aA} и S_{aB}, определяются условные предметные предпочтения двух типов.

$$\pi_A\left(\sigma_{i_1}\middle|\sigma_{k_1}\right);\pi_B\left(\sigma_{i_2}\middle|\sigma_{k_2}\right) \quad (7.33)$$

и перекрестные условные предпочтения.

$$\pi_A\left(\sigma_{i_1}\middle|\sigma_{k_2}\right);\pi_B\left(\sigma_{i_2}\middle|\sigma_{k_1}\right) \quad (7.34)$$

С условиями нормировки

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i_1=1}^{N_A}\pi_A\left(\sigma_{i_1}\middle|\sigma_{k_1}\right)=1,\forall k_1\in\overline{1,N_A};\\&\sum_{i_2=1}^{N_B}\pi_B\left(\sigma_{i_2}\middle|\sigma_{k_2}\right)=1,\forall k_2\in\overline{1,N_B}.\end{aligned}\right\} \quad (7.35)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i_1=1}^{N_A}\pi_A\left(\sigma_{i_1}\middle|\sigma_{k_2}\right)=1,\forall k_2\in\overline{1,N_B};\\&\sum_{i_2=1}^{N_B}\pi_B\left(\sigma_{i_2}\middle|\sigma_{k_1}\right)=1,\forall k_1\in\overline{1,N_A}.\end{aligned}\right\} \quad (7.36)$$

Распределения (7.33) заданы на декартовом произведении $S_{a1} * S_{a1}$, предпочтения (7.34) – на декартовом произведении $S_{a1} * S_{a2}$.

Потребуются еще «двухточечные» распределения

$$\pi_A(\sigma_{i_1},\sigma_{k_1}):\pi_B(\sigma_{i_2},\sigma_{k_2}) \quad (7.37)$$

которые определяются как предпочтения одношаговых «путей» (переходов)

$$\sigma_{i_1}\to\sigma_{k_1};\sigma_{i_2}\to\sigma_{k_2}$$

(Индекс «1» относит альтернативу к субъекту *A*, множеству S_{aA}, индекс «2» - к субъекту *B* и множеству S_{aB}),

а также смешанные «двухточечные» распределения:

$$\pi_A(\sigma_{i_1},\sigma_{k_2});\pi_B(\sigma_{k_2},\sigma_{i_1}) \quad (7.38)$$

Эти распределения индивидуализированы, то есть «принадлежат» либо *A,* либо *B* и характеризуют, например, для *A* ситуацию, когда *A* предпочитает σ_{i1}, а *B* – предпочитает σ_{k2}.

Если имеют место переходы, то функции предпочтения в общем случае несимметричны относительно своих аргументов и имеют место соотношения:

$$\sum_{j_1=1}^{N_A} \pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{j1}\right)=\pi_A\left(\sigma_{i1}\right) \quad (7.39)$$

$$\sum_{i_1=1}^{N_A} \pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{j1}\right)=\pi_A\left(\sigma_{j1}\right) \quad (7.40)$$

предполагается, что имеет место соотношение:

$$\pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{j1}\right)=\pi_A\left(\sigma_{i1}\right)\cdot\pi_A\left(\sigma_{j1}\middle|\sigma_{i1}\right) \quad (7.41)$$

Поскольку распределения предпочтений не являются вероятностными распределениями, соотношения типа (7.41) приходится постулировать. При этом в общем случае $\pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{j1}\right)$ несимметрична:

$$\pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{j1}\right)\neq\pi_A\left(\sigma_{j1},\sigma_{i1}\right)$$

то есть, переходы $\sigma_{i1}\to\sigma_{j1}$ и $\sigma_{j1}\to\sigma_{i1}$ не равнопредпочтительны. Однако

$$\pi_A\left(\sigma_{j1},\sigma_{i1}\right)=\pi_A\left(\sigma_{j1}\right)\pi_A\left(\sigma_{i1}\middle|\sigma_{j1}\right) \quad (7.42)$$

Аналогично постулируются соотношения

$$\pi_A\left(\sigma_{i1},\sigma_{k2}\right)=\pi_B\left(\sigma_{k2}\right)\cdot\pi_A\left(\sigma_{i1}\middle|\sigma_{k2}\right) \quad (7.43)$$

$$\pi_B\left(\sigma_{k2},\sigma_{i1}\right)=\pi_A\left(\sigma_{i1}\right)\pi_B\left(\sigma_{k2}\middle|\sigma_{i1}\right) \quad (7.44)$$

Как и везде в этой работе применяется гипотеза о «полной взаимной информированности субъектов *A* и *B* об их предпочтениях» и полной определенности предпочтений.

Постулат о полной информированности и определенности естественно никогда не выполняется в точности.

Он носит упрощающий характер. Отказ от этого допущения потребовал бы применения некоторой модели неаддитивной меры. (Сугено и др…). В настоящей работе сознательно ставится задача построить модель конфликта для заведомо не вполне реализуемых условий. Совершенствование модели путем учета фактора неаддитивности меры, является следующим шагом.

Легко видить, что для приведенных выше формул условия нормировок выполняются. В более общем случае следует иметь в виду системы с большим количеством уровней. Еще римский император Диоклетиан ввел для чиновников «табель о рангах», содержащий 14 рангов. В России императором Петром I-м был принят «табель» Диоклетиана и в почти неизменном виде сохранился до наших дней.

Мы видим два пути ранговой структуризации организационной системы: первый – навязывание ранговой структуры «сверху» в административном порядке, сопровождаемое сводом правил ее функционирования, второй – возникновение ранговой структуры в результате самоорганизации. в этом втором случае возникает самопроизвольное распределение рейтингов и закрепление рангов.

Модели таких самоорганизующихся рейтинговых структур описаны в [111]. Возникающее распределение рейтингов затем через механизмы самоуправления за-

крепляется в виде рангового распределения. Приведем некоторые ранее введенные соотношения.

Принцип максимума субъективной энтропии (гл. 3) в наиболее простой его форме состоит в следующем: распределения предпочтений формируются в психике «оптимальным» образом. причем каждый раз существует «индивидуальный носитель» множеств альтернатив, функционалов, канонических распределений предпочтений, эндогенных параметров (α, β,…). Функционал для субъекта *A*

$$\Phi\pi_{jA} = -\sum_{j_1}^{N_A} \pi_A(\sigma_{i_1}) \ln \pi_A(\sigma_{i_1}) \pm \\ \pm \beta_\pi^A \sum_{i_1}^{N_A} \pi_A(\sigma_{i_1}) F_A(\sigma_{i_1}) + \gamma_\pi^A \sum_{i_1}^{N_A} \pi_A(\sigma_{i_1}) \qquad (7.45)$$

где $F_A\left(\sigma_{i_1}\right)$ - «когнитивная» предметная функция, принимает экстремальное значение на S_{uA}.

Распределение предпочтений II рода по предположению являются следствием экстремизации функционала.

$$\Phi_{\xi A} = -\sum_{j=1}^{M} \xi\left(j|A\right) \ln \xi\left(j|(A)\right) \pm \beta_\xi^A \sum_{j=1}^{M} \xi\left(j|A\right) G\left(j|A...\right) + \gamma_\xi^A \sum_{j=1}^{M} \xi\left(j|A\right) \qquad (7.46)$$

где $\xi\left(j|A...\right)$ - функция распределения условных рейтингов «глазами субъекта *A*» в группе *M* субъектов. Поскольку мы в дальнейшем рассматриваем двухуровневую систему, то принимается *M* =2, а j принимает два значения: *A* и *B*, $G\left(j|A...\right)$ - когнитивная рейтинговая функция.

Если рассматриваются дифференциальные рейтинги, то используются функции $\xi\left(j|A,\sigma_{i_1}\right)$

Аналогичные функционалы вводятся для второго субъекта *B*: Φ_{π_B} и Φ_{ξ_B} независимо от знака перед вторым слагаемым в функционалах (7.45) и (7.46) «оптимальное» распределение $\pi_A(\sigma_{i_1})$, а также распределение $\xi\left(j_1|A_1\sigma_{i_1}\right)$ - доставляют максимум соответствующему функционалу. Решение вариационных задач с функционалами(7.45), (7.46) дает распределения:

$$\pi_A\left(\sigma_{j1}\right) = \frac{e^{\beta_\pi F_A(\sigma_{i1})}}{\sum_{q=1}^{N_A} e^{\beta_\pi F_A(\sigma_{q1})}}; \qquad (7.47)$$

$$\pi_A(\sigma_{i1}) = \frac{e^{\beta_\xi G(j|A,\sigma_{i1}}}{\sum_{p=1}^{M} e^{\beta_\xi G(p|A,\sigma_{i1}}} \qquad (7.48)$$

Аналогичные распределения получаем для субъекта *B*: $\pi_B(\sigma_{i2})$, $\pi_A(\sigma_{i1})$.

Общая теория обрастает некоторыми дополнительными подробностями и допущениями. Так β_π^{-1} и β_ξ^{-1} трактуются как психические, (или эмоциональные) температуры, в частности $\beta^{-1} = T_\xi$ есть «социальная» температура. Видим, что если, например, $\beta_\pi \to 0$, (или $T_\pi \to \infty$), то распределение $\pi_A(\sigma_{i1})$ стремится к равномерному, а соответствующая энтропия приобретет максимальное значение $H_{\pi A} = \ln N_A$; наоборот, если $\beta_\pi \to \infty$,т.е. $T_\pi \to 0$ то распределение $\pi_A(\sigma_{i1})$ становится сингулярным, а энтропия обращается в нуль.

Предполагается наличие энтропийных порогов, которые задают определенную структуру энтропийного пространства. Один из порогов связывается с возможностью принятия решения (с проблемой выбора).Так, если $H_{\pi A}^*$ — порог предметной энтропии носителя *A*, то предполагается, что если $H_{\pi A} \rangle H_{\pi A}^*$, то альтернативы «плохо различимы» субъектом *A* и решение им не может быть принято. Одним из необходимых условий принятия решения субъектом *A* в предметной области является выполнение нестрогого неравенства.

$$\boldsymbol{H_{\pi A} \le H_{\pi A}^*; t = t_A^*} \qquad (7.49)$$

Реализация условия, аналогичного (7.49) для субъекта *B*, то есть условия

$$\boldsymbol{H_{\pi B} \le H_{\pi B}^*; t = t_B^*} \qquad (7.49')$$

наступает в другой момент $\boldsymbol{t_B^*}$ (в общем случае). Таким образом, переход конфликта из подготовительной пассивной формы к активной форме для субъектов *A* и *B* происходит не одновременно. Следовательно, их реализация в смысле перераспределения ресурсов, (полезностей, властных полномочий…) также сдвинутся по времени. Согласование профилей индивидуальных предпочтений, которые в данном случае следует считать агрегированными с учетом распределения условных рейтингов (схемы агрегирования предметных предпочтений рассматривались ранее). В частности, не совпадение времен $\boldsymbol{t_A^*}$ и $\boldsymbol{t_B^*}$ может приводить к изменению типа конфликта (диссонантный, консонантный…).

Преодоление энтропией порога $\boldsymbol{H^*}$ «сверху вниз» сигнализирует о начале активных действий субъекта по разрешению конфликта (расходование располагаемых ресурсов, например).

Старт (запуск) процессов перестройки организационной структуры группы (социума), принятие решений на множестве организационных (в частности, ранговых) альтернатив также связан с преодолением порогов рейтинговыми энтропиями.

Для групп с большим числом членов, чем $M = 2$; $M > 2$ принятие решения связано с преодолением таких же трудностей, что и в общей теории коллективных решений

[144] (Мулен), в ряде случаев, с невозможностью согласовать индивидуальные «профили» рейтинговых предпочтений. При этом можно использовать процедуры агрегирования, некоторые из которых описаны выше. В частности, тривиальная схема «круговой поруки», которая приводит к равномерному распределению с максимальной рейтинговой энтропией.

В заключение этого параграфа отметим, что развиваемая здесь теория в основном относится к пассивной подготовительной стадии конфликта, то есть, к процессу формирования предпочтений.

Для описания «принятия решения» и перехода к активной стадии нужны дополнительные допущения, в частности, конкретизация схемы учета принимающим решения предпочтений членов группы, то есть, «общественного мнения». Здесь также должны быть испытаны различные схемы голосования (Кондорес, Борда и др.).

7.4.5. Связность субъектов

Когда говорится о «системе», в том числе «иерархической системе», подразумевается, что имеется определенная связность между субъектами, действующими на разных уровнях иерархии или на одном и том же уровне.

Выделяется объективная связность через ресурсы разных типов, связность, обусловленная установленной организационной структурой через ранги. Объективная связность – это общность ресурсов, технологий, способов обмена ресурсами, установленных правил, предписаний, законов, связность, предусмотренная существующей системой рангов.

К субъективной связности относится наличие непустых пересечений индивидуальных «проблемных» множеств $S_{aj}\left(j\in 1,\overline{M}\right)$, следовательно, наличие общих проблем (целей), частичная или полная общность этических систем – наборов этических *императивов,* наличие информационного обмена.

Субъективная информация, содержащаяся в событии A для субъекта «j» определяется формулой

$$I_j(A)=H_j-H_j(A) \tag{7.50}$$

Тогда, если событие A состоит в появлении в группе субъекта i и взаимодействия субъекта j с субъектом i, то соответствующая информация есть

$$I\left(j|i\right)=H(j)-H\left(j|i\right), \tag{7.51}$$

где $H(j)$ - энтропия субъекта j в отсутствии субъекта i, $H\left(j|i\right)$ - энтропия j в присутствии i. Аналогично определяется информация

$$I\left(i|j\right)=H(i)-H\left(i|j\right) \tag{7.52}$$

Здесь $H(i)$ и $H(j)$ - энтропия изолированных субъектов.

В общем случае

$$I\left(i|j\right)\neq I\left(j|i\right) \tag{7.53}$$

Для двухуровневой системы с субъектами A и B формулы (7.51), (7.52) и (7.53) записываются в виде:

$$I_A\left(\,|B\right) = H(A) - H\left(A|B\right) \tag{7.54}$$

$$I_B\left(\,|A\right) = H(B) - H\left(B|A\right) \tag{7.55}$$

$$I_A\left(\,|B\right) \neq I_B\left(\,|A\right) \tag{7.56}$$

Можно представить себе большое разнообразие типов связности множеств S_{aj}. Утилитарно-связанной назовем систему, если по крайней мере одна альтернатива содержится одновременно во всех множествах S_{aj}. (рис. 7.9).

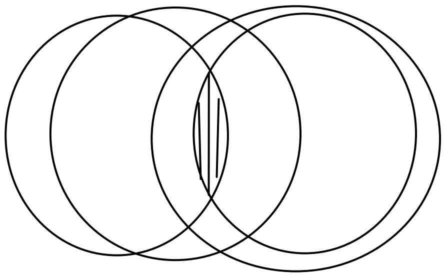


Рис. 7.9

Система линейно-связана, если множества S_a имеют непустые пересечения попарно, то есть

из $S_{ai} \cap S_{aj} = S_{aj} \neq \varnothing$ и $S_{aj} \cap S_{ak} = S_{aik} \neq \varnothing \Rightarrow S_{aij} \cap S_{aik} = \varnothing$.

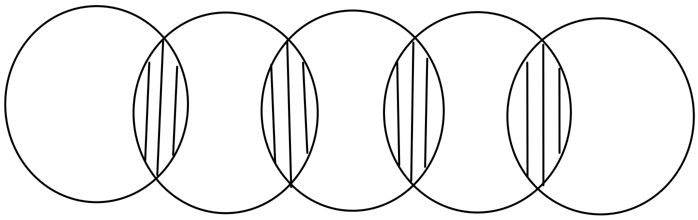


Рис.7.10.

Подчеркнем, что важным является предположение о степени взаимной информированности субъектов о множествах альтернатив других субъектов, их априорных распределениях предпочтений I и II рода, об их располагаемых ресурсах.

7.4.6. Задачи управления в иерархической системе

Задачи управления в иерархической системе – диагностика и профилактика конфликтов, управление на этапе назревания конфликта («холодного» конфликта), поддержка и регулирование «продуктивных» конфликтов, имеющих часто форму конкуренции, соревнования, и подавление «деструктивных» - «контрпродуктивных» конфликтов, имеющих в своей основе антагонизмы. Субъективный анализ предлагает метод формализации перехода «холодного» конфликта (когда «говорят музы») к стадии

«горячего» конфликта (когда «говорят пушки»), а также модели динамики психологических процессов в рамках энтропийной парадигмы.

Важную роль при этом играют модели агрегирования предпочтений и рекурсивные модели. С их помощью удается описать различие между «горизонтальными» и «вертикальными» конфликтами. В первом случае модель является симметричной, во втором («вертикальном») случае – несимметричной. «Конфликт», как и другие важные категории («свобода», «социальная справедливость» …) имеет динамический характер и должен рассматриваться как процесс.

Приемлемой моделью для таких процессов является рекурсивная модель. Применение рекурсии позволяет «развязать» существенные нелинейности, появляющиеся при агрегировании предпочтений, и кроме того, находящиеся в соответствии с действительным характером рассматриваемых явлений.

В соответствие с «принципом индивидуального носителя» для каждого субъекта (в данном случае для субъектов A и B) составим функционалы $\Phi_{\pi A}$ и $\Phi_{\pi B}$, соответственно для «двухточечных» распределений $\pi_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})$ и $\pi_B(\sigma_{Bk},\sigma_{Ai})$: Функционал $\Phi_{\pi A}$ выберем в следующей форме:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi A}(A,B) = &-\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}\hat{\pi}_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})\cdot\ln\pi_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk}) + \\ &+\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}\pi_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})\cdot\left[\beta F_A(A|B,\sigma_{Ai},\sigma_{Bk}) + \alpha\ln F_A(A|B,\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})\right] + \\ &+\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2}\gamma_k\cdot\pi(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})\end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\text{где}\quad \pi_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk}) = \overset{\wedge}{\pi}_B(\sigma_{Bk})\cdot\pi_A\left(\sigma_{Ai}\middle|\sigma_{Bk}\right); \quad (7.58)$$

$\overset{\wedge}{\pi}_B(\sigma_{Bk})$ **–** оценка предпочтений B субъектом A. Из (7.57) с учетом (7.58) получим:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi A}(A,B) = &\hat{H}_{\pi B} + \sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk})\cdot H_{\pi A}(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk}) + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\pi_B(\sigma_{Bk})\cdot\pi_A(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk})\cdot\left[\beta F_A(A|B,\sigma_{Ai},\sigma_{Bk}) + \alpha\ln F_A(A|B,\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})\right] + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk})\pi_A(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk})\end{aligned} \quad (7.59)$$

Здесь

$$\hat{H}_{\pi B} = -\sum_{k=1}^{N}\overset{\wedge}{\pi}_B(\sigma_{Bk})\ln\overset{\wedge}{\pi}_B(\sigma_{Bk}) \quad (7.60)$$

– оценка безусловной энтропии субъекта B субъектом A,

$$H_{\pi A}\left(\sigma_{Ai}\middle|\sigma_{BK}\right) = -\sum_{k=1}^{N}\pi_A(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk})\ln\pi_A(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk}) \quad (7.61)$$

Учтено условие нормировки: $\sum_{i=1}^{N}\pi_A(\sigma_{Ai}|\sigma_{Bk})=1;\forall k\in\overline{1,N}$

Функция $\pi_A(A|B,\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})$ может, в частности, считаться функцией взаимной полезности, в данном случае, полезности *B* для *A*. Однако, речь, скорее всего, идет об индивидуальной полезности *A* «в присутствии» *B*.

Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом – когнитивная функция субъекта *A*.

Реализуем в этой задаче рекурсивную схему. Положим, что $\pi_A(\sigma_{Ai},\sigma_{Bk})=\pi_A(\sigma_{Ai},t;\sigma_{Bk},t-1)$, то есть функция распределения предпочтений зависит от предпочтений субъекта *A* в момент *t* и предпочтений субъекта *B* в момент *t-1*.

Пусть, также, справедливо соотношение:

$$\pi_A(\sigma_{Ai,}t;\sigma_{Bk,}t-1)=\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\cdot\pi_A(\sigma_{Ai,}t|\sigma_{Bk,}t-1), \qquad (7.62)$$

тогда

$$\begin{aligned}H_{\pi At,t-1}&=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\cdot\pi_A(\sigma_{Ai},t|\sigma_{Bk},t-1)\times\\&\times\left[\ln\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)+\ln\pi_A(\sigma_{At},t|\sigma_{Bk},t-1)\right]=\\&=\hat{H}_{\pi B,t-1}+\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\cdot H_{\pi At,t-1}(A,t|B,t-1)\end{aligned} \qquad (7.63)$$

где

$$H_{\pi At,t-1}=-\sum_{i=1}^{N}\pi_A(\sigma_{Ai,}t|\sigma_{Bk,}t-1)\ln\pi_A(\sigma_{Ai,}t|\sigma_{Bk,}t-1) \qquad (7.64)$$

Обозначим когнитивную функцию:

$$F_{A_i|B,k}(t,t-1)=\beta F_A\left(A|B,\sigma_{Ai}t,\sigma_{Bk},t-1\right)+\alpha\ln F_A\left(A|B,\sigma_{Ai},t,\sigma_{Bk},t-1\right) \qquad (7.65)$$

Тогда функционал для *A* рекурсивной модели запишем в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pi A}(A,t,B,t-1)&=-\hat{H}_{\pi B,t-1}-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\cdot\pi_A(\sigma_{Ai},t|\sigma_{Bk},t-1)\times\\&\times\ln\pi_A(\sigma_{Ai},t|\sigma_{Bk},t-1)\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\pi_A(\sigma_{Ai},t|\sigma_{Bk},t-1)\cdot\\&\cdot F_{Ai,B,k}(t,t-1)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{B,t-1}\cdot\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk},t-1)\cdot\pi_A(\sigma_{Ai},t|\sigma_{Bk},t-1)\end{aligned} \qquad (7.66)$$

В этом функционале еще нет учета агрегированных предпочтений. Введем процедуру агрегирования. В нашем случае агрегирование имеет смешанный характер: в схеме задействованы предпочтения I рода (предметные) и II рода (рейтинговые).

$$\pi_A^{\Sigma}(\sigma_i,t)=\pi_A(\sigma_{Ai},t)\xi(A|A,\sigma_{Ai}t)+\hat{\pi}_B(\sigma_{Ai},t)\xi(B|A,\sigma_i,t) \qquad (7.67)$$

$$\pi_B^{\Sigma}(\sigma_i,t)=\hat{\pi}_A(\sigma_i,t)\xi(A|B,\sigma_it)+\pi_B(\sigma_i,t)\xi(B|B,\sigma_i,t) \qquad (7.68)$$

Поскольку $S_{aA} == S_{aB} = S_a$, можно опустить индексы «*A*» и «*B*» у альтернатив т.е. $\sigma_{ai} \to \sigma_i; \sigma_{Bk} \to \sigma_k$

Здесь $\xi(A|A...), \xi(B|B...)$ - «саморейтинговые» оценки, то есть оценки субъектами своего собственного рейтинга, $\xi(A|B...), \xi(B|A...)$ - «перекрестные» рейтинги (глазами другого субъекта). В двухуровневой системе с двумя субъектами *A* и *B* условия нормировки дают:

$$\begin{aligned} \xi(A|A...) &= 1 - \xi(B|A...); \\ \xi(B|B...) &= 1 - \xi(A|B...). \end{aligned} \tag{7.69}$$

Модель агрегирования предпочтений I и II типов приводит к общей схеме с существенной нелинейностью. «Развязать» эту нелинейность можно, если воспользоваться рекурсивной схемой. Приходится предположить, что различные предпочтения формируются последовательно в разные моменты времени.

Это естественное предположение вносит в модель работы «сознания» субъекта «последовательный» метод. Для того, чтобы избежать излишних усложнений, мы реализуем рекурсию на «один шаг назад». На данном этапе этого оказывается достаточно.

Организуем рекурсию по предметным предпочтениям, добавив в функционалы $\Phi_{\pi A}$ и $\Phi_{\pi B}$, соответственно, слагаемые

$$...+\mu\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{Bk}, t-1)\pi_A(\sigma_{Ai,t}|\sigma_{Bk,t-1})\ln\pi_A^{\Sigma}(\sigma_{Ai,}t)+..., \tag{7.70}$$

$$...+\mu\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_A(\sigma_{Ai}, t-1)\pi_B(\sigma_{Bk}, t|\sigma_{Ait-1})\ln\pi_B^{\Sigma}(\sigma_{Bk}, t-1)+... \tag{7.71}$$

С учетом сделанных замечаний найдем условные распределения предпочтений I рода из условий

$$\frac{\partial\Phi_{\pi A}(A,t;B,t-1)}{\partial\pi_A(\sigma_i t|\sigma_k t-1)} = 0; \tag{7.72}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\pi B}(A,t,B,t-1)}{\partial\pi_B(\sigma_k t|\sigma_i t-1)} = 0; (\forall i \in \overline{1,N}; k \in \overline{1,N}) \tag{7.73}$$

Получим

$$\pi_A(\sigma_{it}|\sigma_{kt-1}) = \frac{\left(\pi_A^{\Sigma}(\sigma_i, t-1)\right)^{\mu}\cdot\left(F_A(A|B,i,k,t)\right)^{\alpha}\cdot e^{\beta F_A(A|B,i,k,t)}}{\sum_{q=1}^{N}\left(\pi_A^{\Sigma}(\sigma_{qt-1})\right)^{\mu}\left(F_A(A|B,q,k,t)\right)^{\alpha}\cdot e^{\beta F_A(A|B,q,k,t)}} \tag{7.74}$$

$$\pi_B(\sigma_{kt}|\sigma_{it-1}) = \frac{\left(\pi_B^{\Sigma}(\sigma_k, t-1)\right)^{\mu}\cdot\left(F_B(B|A,i,k,t)\right)^{\alpha}\cdot e^{\beta F_B(B|A,k,i,t)}}{\sum_{q=1}^{N}\left(\pi_B^{\Sigma}(\sigma_{qt-1})\right)^{\mu}\left(F_B(B|A,q,k,t)\right)^{\alpha}\cdot e^{\beta F_B(B|A,q,i,t)}} \tag{7.75}$$

В формулах (7.67) и (7.68) безусловное распределение $\pi_A(\sigma_i, t)$ и $\pi_B(\sigma_i, t)$ образуются по формулам:

$$\pi_A(\sigma_i,t)=\sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_B(\sigma_{k,t-1})\cdot\pi_A(\sigma_{it}|\sigma_{k,t-1}) \tag{7.76}$$

$$\pi_B(\sigma_k,t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{\pi}_A(\sigma_{i,t-1})\cdot\pi_B(\sigma_{kt}|\sigma_{i,t-1}) \tag{7.77}$$

В связи с формулами агрегирования (7.68) и (7.69) следует пояснить, откуда получаются функции рейтинговых предпочтений.

Ясно, что иерархичность может быть в наибольшей степени отражена через рейтинговые предпочтения. Степень подчиненности уровней в двухуровневой системе «с точки зрения *A*» отразим, например, коэффициентом

$$m_\xi^A=\frac{\xi(A|A...)}{\xi(B|A...)}=\frac{\xi(A|A...)}{1-\xi(A|A...)} \tag{7.78}$$

Если $m_\xi^A\to 0$, то предпочтения $\pi_A(\sigma_i,t)$ в основном отражают предпочтения *B* (повторяют), если $m_\xi^A\to\infty$, то *A* вообще склонен не учитывать предметные предпочтения B :

$$\pi_A^\Sigma(\sigma_i t)\approx\pi_A(\sigma_i t)$$

Аналогично, если

$$m_\xi^B=\frac{\xi(B|B...)}{\xi(A|B...)}=\frac{\xi(B|B...)}{1-\xi(A|B...)} \tag{7.79}$$

и $m_\xi^B\to 0$ то *B* «не имеет своего мнения» и ориентируется целиком на интересы A.

Распределение рейтинговых предпочтений и их динамика должны регулироваться через структуру и содержание соответствующих функционалов. Согласно гипотезе «индивидуального носителя» мы здесь должны рассматривать два функционала $\Phi_{A\xi}$ и $\Phi_{B\xi}$, «носителями» которых являются субъекты *A* и *B*. Таким образом, в данной модели предполагается, что каждый субъект в каждый момент времени «оптимизирует» два функционала.

Заметим, что, по-видимому, возможно попарно объединение двух функционалов $\{\Phi_{A\pi},\Phi_{A\xi}\}$ и $\{\Phi_{B\pi},\Phi_{B\xi}\}$.

Рассмотрим следующий функционал:

$$\begin{aligned}\Phi_{A\xi,t,t-1}=&-\xi\left(A|A,t...\right)\ln\xi\left(A|A,t...\right)-\xi\left(B|A,t...\right)\ln\xi\left(B|A,t...\right)+\\&+\mu_\xi\cdot\left(\xi(A|A,t...)\ln\xi\left(A|A,t-1...\right)\cdot\varphi\left(\rho,\pi_{A,t-1}\right)+\right.\\&+\xi\left(B|A,t...\right)\ln\xi\left(B|A,t-1\right)\psi\left(\rho,\pi_{B,t-1}\right)+\beta_\xi(\xi\left(A|A,t...\right)\bar{\cup}\left(A\to A,t...\right)+\\&+\xi\left(B|A,t...\right)\bar{\cup}\left(B\to A,t\right)+\gamma_\xi(\xi\left(A|A,t...\right)+\xi\left(B|A,t...\right)).\end{aligned} \tag{7.80}$$

Здесь μ_ξ, β_ξ эндогенные параметры γ_ξ – множитель Лагранжа. При μ_ξ,*=1* первые три слагаемые представляют собой рекурсивный вариант информации Кульбака. Ве-

личины $\overline{\bigcup}\left(A \to A, t...\right), \overline{\bigcup}(B \to A, t...)$ представляют собой «взаимные ожидаемые полезности»: $\overline{\bigcup}\left(A \to A, t...\right)$ - «самополезность *A*», $\overline{\bigcup}(B \to A, t...)$ - «полезность *B* для *A*» в момент *t*.

Смысл множителей φ и ψ будет описан ниже при рассмотрении задачи о моделировании «обострения конфликта».

Как видно, рейтинги *A* и *B* в момент *t* зависят, в частности от рейтингов *A* и *B* в предыдущий момент *t-1*, то есть имеет место зависимость «сегодняшних» оценок от «вчерашних». Вообще говоря ничто не мешает эту немарковость динамики рейтингов протянуть еще дальше в прошлое, т.е для *t-2*, *t-3*… В данной модели ограничимся, однако, одним шагом «назад».

Взаимные полезности грубо можно считать функциями располагаемых и потребных ресурсов. В данном случае они представляют собой когнитивные функции в задаче о рейтингах. При конкретизации их структуры также должны быть учтены законы психологии: Вебера-Фехнера, Йеркса-Додсона, и др., а также, возможно, аналоги первого и второго законов Госсена в теории предметной индивидуальной полезности.

Один из способов иерархизации отношений *A* и *B* состоит в использовании для этой цели соотношений агрегирования (7.67) и (7.68). При этом необходимо построить такие схемы, которые делали бы эти отношения несимметричными в случае вертикального («иерархического») конфликта и симметричными в случае горизонтального конфликта между субъектами на одном и том же уровне.

Примем следующее предположение:

Если предметные дифференциальные предпочтения *A* и *B* альтернативы σ_i «расходятся», то должны «расходиться» и соответствующие дифференциальные рейтинги, возникает тенденция не учитывать мнение соперника, а это означает, что растут самооценки $(\xi\left(A \middle| A, ...\right), \xi\left(B \middle| B, ...\right))$ и, следовательно уменьшаются взаимные рейтинги $(\xi\left(B \middle| A, ...\right), \xi\left(A \middle| B, ...\right))$. Это имеет место при горизонтальном конфликте (рис.7.11)

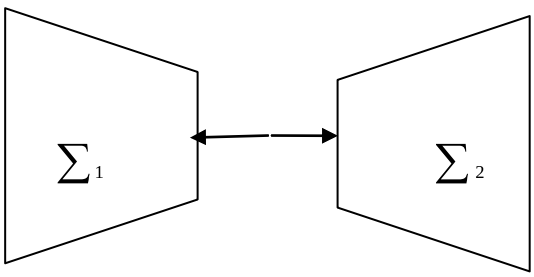


Рис.7.11

т.е. субъектами, находящимися на одном уровне, должна быть реализована симметрия вида:

$$\xi\left(A \middle| A...\right)\uparrow; \xi\left(B \middle| A...\right)\downarrow$$

$$\xi\left(B \middle| B...\right)\uparrow; \xi\left(A \middle| B...\right)\downarrow$$

При иерархическом «вертикальном» конфликте должна проявляться другая, асимметричная тенденция (рис. 7.12):

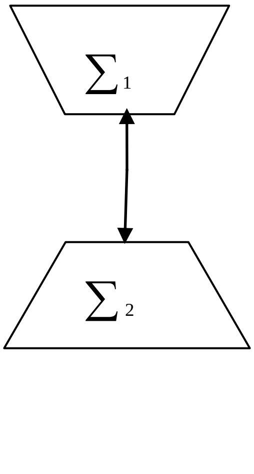


Рис. 7.12

$\xi(A|A...)\uparrow;\xi(B|A...)\downarrow$

$\xi(B|B...)\downarrow;\xi(A|B...)\uparrow$

Приводимые ниже соотношения применимы в том случае, когда имеется только две предметных альтернативы σ_1 и σ_2. Тогда «расхождение» предпочтений одной альтернативы сопровождается «расхождением» предпочтений A и B для второй альтернативы и, как следствие, уменьшением предметной энтропии как у A, так и у B, и можно говорить об интегральных рейтинговых функциях. При большем числе альтернатив ($N > 2$), в распределениях должны использоваться дифференциальные рейтинговые функции.

Если имеет место «расхождение» предметных рейтингов на всем множестве S_a при $N > 2$, то это проявляется в том, что энтропии $H_{A\pi}$ и $H_{B\pi}$ уменьшаются. В этом случае можно говорить об интегральном «расхождении» и интегральном предметном конфликте.

Указанные выше тенденции отразим с помощью коэффициента корреляции Пирсона предметных предпочтений в новых обозначениях

$$\rho(\pi_A,\pi_B,t)=\frac{\sum_{i=1}^{N=2}\left(\pi_A(\sigma_i,t)-\frac{1}{N}\right)\left(\pi_B(\sigma_i,t)-\frac{1}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N=2}\left(\pi_2(\sigma_i,t)-\frac{1}{N}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{N=2}\left(\pi_B(\sigma_i,t)-\frac{1}{N}\right)^2}} \quad (7.81)$$

где $-1\le\rho(\pi_A,\pi_B,t)\le+1$, а также энтропий распределений $H_{A\pi}$ и $H_{B\pi}$.

Если альтернативы одноместны, то при

$$\rho(\pi_A,\pi_B,t)\to\mp1;;$$

$$H_{A\pi}\to0:H_{B\pi}\to0,$$

должно происходить обострение конфликта. Тип взаимодействия субъектов определяется характером рассматриваемой альтернативы и направлением изменения предпочтений.

Пусть альтернатива σ_n «одноместна» и оба субъекта стремятся занять это «место»: $\rho(\pi_A,\pi_B,\sigma_n,t)\to1$. Если конфликт горизонтальный (рис. 7.11), то A учитывает намерения B и наоборот, очевидно что π_A^{Σ} должно стремиться к $+1$, π_B^{Σ} также → +1. Такой конфликт можно еще назвать консонантным горизонтальным конфликтом.

$$H_{A\pi}\to0:H_{B\pi}\to0$$

Направленность тенденций A и B симметрична, хотя количественная симметрия не требуется.

Возникает вопрос: как отразить в модели тенденции в изменении предпочтений предметных и рейтинговых?

Канонические рейтинговые распределения, соответствующие функционалу (7.80), то есть решение уравнений

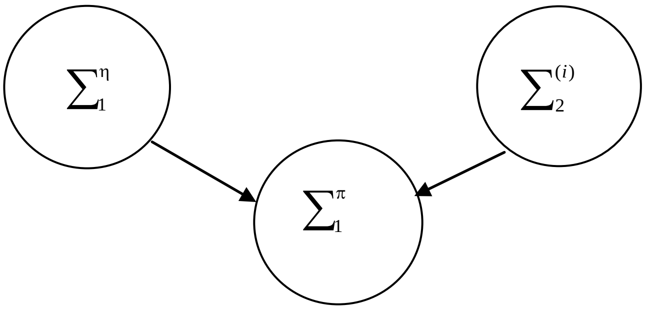


Рис.7.13

$$\frac{\partial \upsilon \Phi_{A\xi t,t-1}}{\partial \xi(A|A,t,...)}=0; \tag{7.82}$$

$$\frac{\partial \Phi_{A\xi t,t-1}}{\partial \xi(B|A,t,...)}=0, \tag{7.83}$$

а также для аналогичного функционала $\Phi_{B\xi t,t-1}$, носителем которого является субъект *B*, уравнений

$$\frac{\partial \Phi_{B\xi t,t-1}}{\partial \xi(B|B,t,...)}=0; \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial \Phi_{B\xi t,t-1}}{\partial \xi(A|B,t,...)}=0, \tag{7.85}$$

даются функциями:

$$\xi\left(A|A,t...\right)=\frac{\varphi_A\left(\rho,\overline{H}_{A,t-1}\right)\left(\xi\left(A|A,t-1...\right)\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(A\to A,t...)}}{\left(\begin{array}{l}\varphi_A\left(\rho,\overline{N}_{A,t-1}\right)\xi\left(A|A,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(A\to A,t)}+\\+\psi_A\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B|A,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to A,t...)}\right)\end{array}\right)} \tag{7.86}$$

$$\xi\left(B|A,t...\right)=\frac{\psi_A\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B|A,t-1...\right)\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to A,t...)}}{\left(\begin{array}{l}\varphi_A\left(\rho,\overline{N}_{A,t-1}\right)\xi\left(A|A,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(A\to A,t)}+\\+\psi_A\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B|A,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to A,t...)}\right)\end{array}\right)} \tag{7.87}$$

$$\xi\left(B\middle|B,t...\right)=\frac{\psi_B\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B\middle|B,t-1...\right)\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to B,t...)}}{\left(\begin{array}{l}\varphi_B\left(\rho,\overline{N}_{A,t-1}\right)\xi\left(A\middle|B,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(A\to B,t)}+\\+\psi_B\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B\middle|B,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to B,t...)}\right)\end{array}\right)} \tag{7.88}$$

$$\xi\left(A\middle|B,t...\right)=\frac{\varphi_B\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B\middle|B,t-1...\right)\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to B,t...)}}{\left(\begin{array}{l}\varphi_B\left(\rho,\overline{N}_{B,t-1}\right)\xi\left(A\middle|B,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(A\to B,t)}+\\+\psi_B\left(\rho,\overline{H}_{B,t-1}\right)\left(\xi\left(B\middle|B,t-1...\right)^{\alpha_\xi}\cdot e^{\beta_\xi\overline{\bigcup}(B\to B,t...)}\right)\end{array}\right)} \tag{7.89}$$

В этих формулах, а также в функционале (7.80) использованы функции $\varphi_A,\psi_A,\varphi_B,\psi_B$, которые вводятся для того, чтобы отразить взаимное влияние *A* и *B* в условиях обострения конфликта в двух случаях: «горизонтального» конфликта, когда *A* и *B* находятся на одном и том же уровне и «вертикального» конфликта, когда *A* и *B* находятся на разных (смежных) уровнях иерархической системы. Приведенная модель, конечно, весьма схематична.

В случае «горизонтального» конфликта и одноместных альтернатив выберем φ и ψ таким образом, чтобы при обострении конфликта

$$\rho_{AB}\to 1; \overline{H}_{A\pi}=\frac{H_A}{H_{A\max}}\to 0:\overline{H}_B=\frac{H_B}{H_{B\max}}\to 0 \tag{7.90}$$

а именно в виде:

$$\varphi_A\left(\rho_{AB},\overline{H}_{A\pi},t\right)=1-(1-|\rho_{AB}|)\overline{H}_{A\pi} \tag{7.91}$$

$$\psi_A\left(\rho_{AB},\overline{H}_{B\pi},t\right)=(1-|\rho_{AB}|)\overline{H}_{B\pi} \tag{7.92}$$

При таком выборе функций φ_A и ψ_A и обострении конфликта рейтинговый коэффициент $\xi(A|A,t...)\to 1,$ а $\xi(B|A,t...)\to 0.$

В функции $\xi(B|A,t...)$ и $\xi(B|B,t...)$ включены коэффициенты $\varphi_B\left(\rho_{AB},\overline{H}_A,t\right)$ и $\psi_B(\rho_{AB},\overline{H}_{B\pi},t)$, которые задаются формулами:

$$\varphi_B(\rho_{AB},\overline{H}_{A\pi})=\left(1-|\rho_{AB}|\right)\overline{H}_{A\pi} \tag{7.93}$$

$$\psi_B(\rho_{AB},\overline{H}_{B\pi})=\left(1-|\rho_{AB}|\right)\overline{H}_{B\pi} \tag{7.94}$$

Такой выбор функций φ и ψ, а также распределений $\xi(A|A,t...)$, $\xi(B|A,t...)$, $\xi(B|B,t...)$ $\xi(A|B,t...)$, при обострении конфликта обеспечивают синхронное возрастание «саморейтингов» и уменьшение «взаимных» рейтингов.

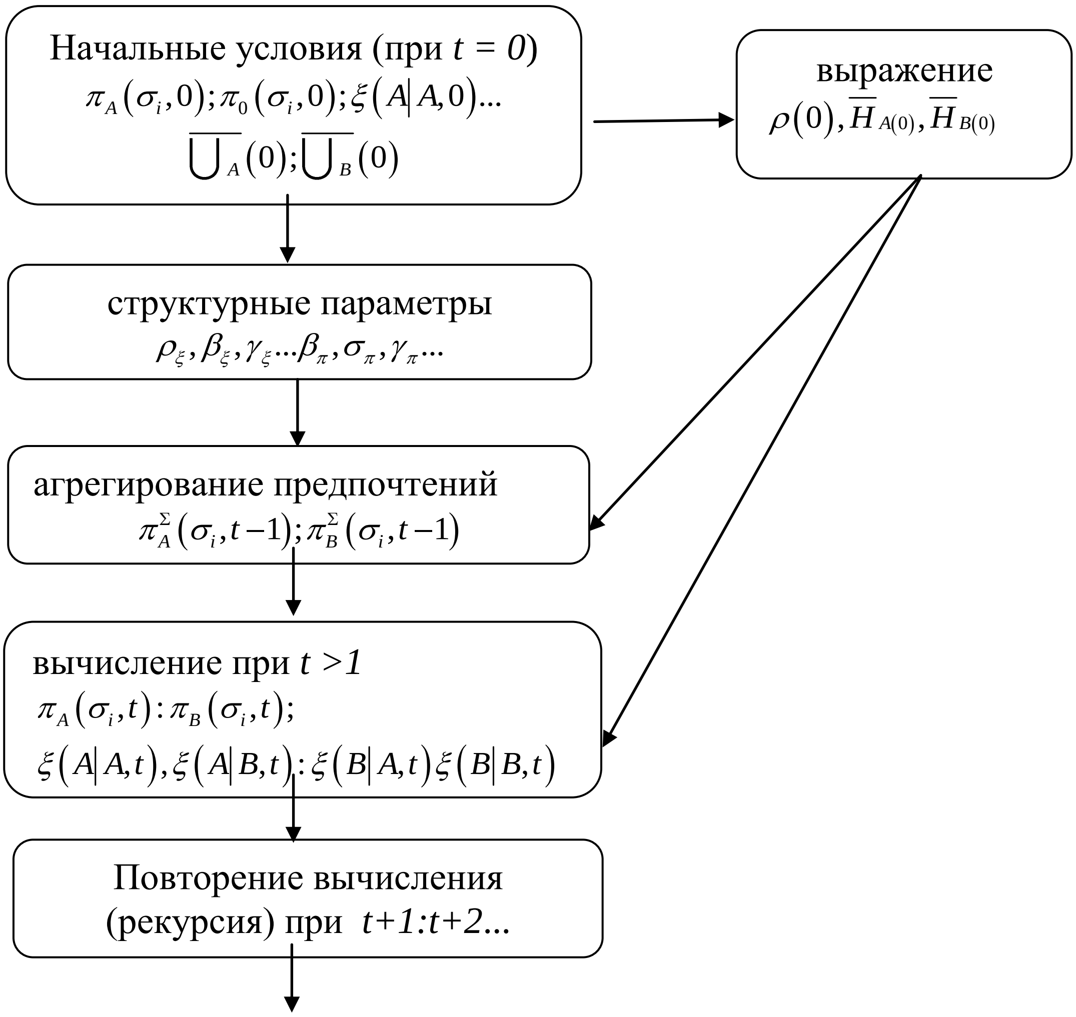
Если в том же случае «горизонтального»взаимодействия субъектов A и B имеет место диссонансный конфликт, то при обострении

$$\rho_{AB} \to -1; \overline{H}_{A\pi} \to 0; \overline{H}_{B\pi} \to 0 \qquad (7.95)$$

Чтобы реализовать принятую схему расхождения достаточно в формулах (7.88) и (7.89) сделать замену:

$$\psi_B \to \varphi_B; \varphi_B \to \psi_B$$

Представим последовательность расчетов в виде следующей схемы:



Для каждого *t* вычисления информации $I_{A(t)} : I_{B(t)}$

$$\downarrow$$

$$I_{ABt,t-1} = \overline{H}_{A(B)}\left(t-1\right) - \overline{H}_{A(B)}\left(t\right)$$

Рис. 7.14

Ниже приводятся результаты численного моделирования процессов изменения предпочтений на основе описанной выше схемы.

Рассматривается развитие конфликта между субъектами *A* и *B*, находящихся в иерархическом подчинении при наличии трех альтернатив. вычислены как функции времени предметные абсолютные и условные предпочтения, рейтинговые интегральные предпочтения, предметные энтропии, коэффициент корреляции предметных предпочтений субъектов *A* и *B*.

Взаимные полезности считаются постоянными и равными:

$$\overline{\text{U}}_{A\to A} = 3; \overline{\text{U}}_{A\to B} = 2;$$

$$\overline{\text{U}}_{B\to B} = 2; \overline{\text{U}}_{B\to A} = 3,$$

(определенные в условных единицах).

Структурные параметры выбраны следующим образом:

$$\alpha_\pi = \alpha_\xi = 0,6; \beta_\pi = \beta_\xi = 0,6; \gamma_\xi = \xi_\pi = 1$$

Когнитивные функции F_A и F_B также считаются постоянными. Заданы определенным образом начальные условия, так, чтобы в начальный момент уровень конфликта был небольшим.

На рис.7.15 показано, как изменяются интегральные рейтинги

$$\xi(A|A,t) = \xi_{00,t}; \xi(B|B,t = \xi_{11t}; \xi(B|A,t = \xi_{10t}; \xi(A|B,t) = \xi_{01,t}$$

Видим что происходит быстрый рост «саморейтингов», соответственно, падение «взаимных» рейтингов, причем саморейтинги субъекта *A*, который стоит на более высокой ступени иерархической системы, растет быстрее, чем саморейтинги субъекта *B*. взаимные рейтинги падают, что следует из условий нормировки. Начальные условия в данном примере выбраны так:

$$\xi(A|A,0) = 0,75; \xi(B|A,0) = 0,25;$$

$$\xi(A|B,0) = 0,6; \xi(B|B,0) = 0,40$$

Из рис. 7.15 видно, что рейтинговая энтропия для *A* и *B* вначале растет, а затем быстро падает до нуля, причем для *A* изменение происходит быстрее, чем для *B*.

Рис. 7.17 иллюстрирует изменения условных предметных предпочтений *A* и *B*. π_{ij} представляет собой условное предпочтение альтернативы σ_i в момент *t*, если до этого в момент *t-1* субъект находится в позиции σ_j.

В этих формулах также отражается рекурсивность всей задачи. Если F_A или F_B представляют собой полезности, то принятая трактовка соответствует предположению, что «предметная» полезность данного субъекта *A* (или *B*), в момент *t* находящегося в «положении» σ_i, зависит от того, в каком положении σ_j находится субъект (*A* или *B*) в момент *t-1*. Предположение о постоянстве F_A и F_B является весьма частным.

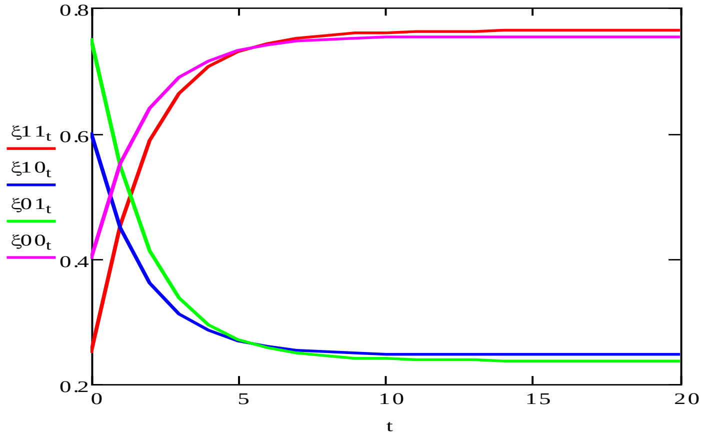


Рис. 7.15. Зависимость рейтинговых показателей субъектов $A(\xi_{10,t}$ и $\xi_{00,t})$ и $B(\xi_{10,t}$ и $\xi_{11,t})$ от времени с учетом коэффициентов $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Здесь: $\xi_{11,t}$ — интегральный рейтинг «*A* в глазах *A*» — саморейтинг *A*.

$\xi_{01,t}$ — интегральный рейтинг «*B* в глазах *A*»,

$\xi_{10,t}$ — интегральный рейтинг «*A* в глазах *B*»,

$\xi_{00,t}$ — интегральный рейтинг «*B* в глазах *B*» — саморейтинг *B*.

Видно, что расхождение рейтингов подчиненного субъекта *B* происходит (при принятых условиях) быстрее, чем расхождение рейтингов *A*.

На рис. 7.16. (*a, b*) показана динамика условных предпочтений π_{ij} индекс *i* есть номер альтернативы, индекс *j* — номер субъекта, причем *j=1* отвечает субъекту *A*. Обозначение π — отнесено к субъекту *A*.

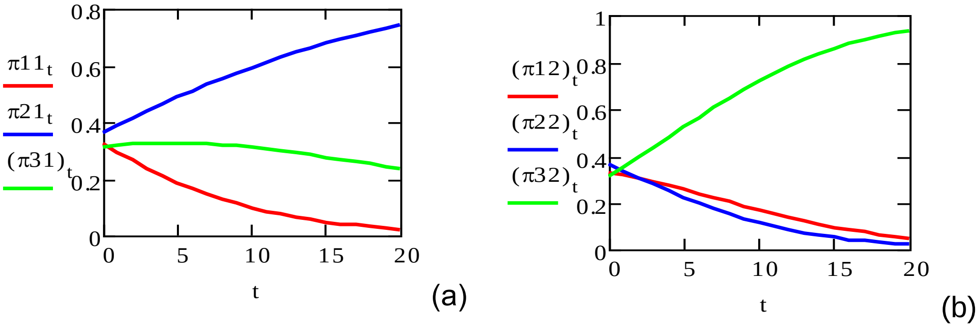


Рис. 7.16. Распределение условных предпочтений для субъекта A.
π_{Aij} – предпочтения субъекта A относительно альтернатив σ_i.

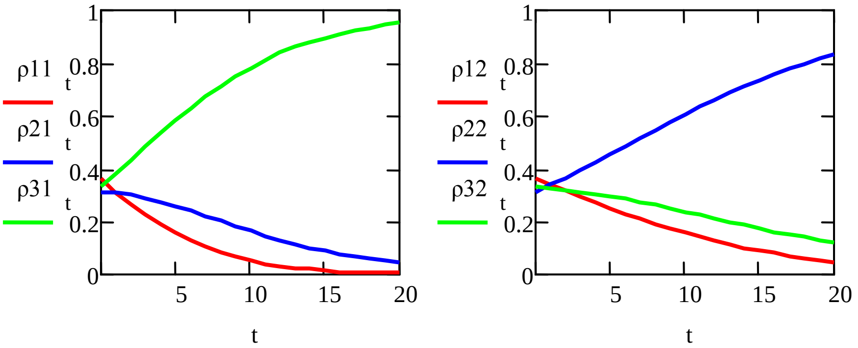


Рис. 7.17. Распределение условных предпочтений для субъекта B.
π_{Bij} – предпочтения субъекта B относительно альтернатив σ_i.

На рис. 7.18. показаны безусловные («свернутые») показатели предметных предпочтении (субъекта «$A - \pi$», субъекта «$B - \rho$», по формулам (7.76) и (7.77).

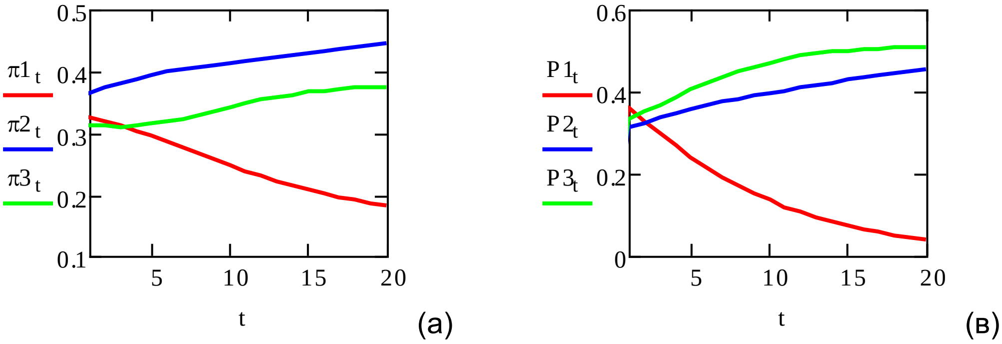


Рис. 7.18. Свернутые предпочтения до безусловных для субъектов A и B

Рис. 7.19 представляет агрегированные предпочтения, вычисленные по формулам (7.67) и (7.68).

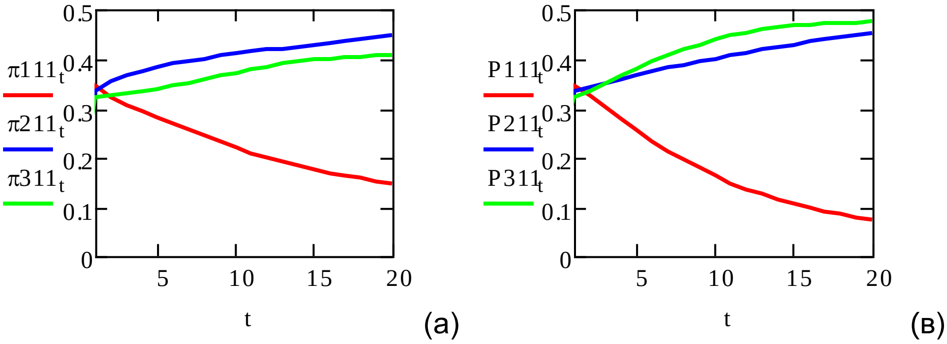


Рис. 7.19. Агрегированные предпочтения субъектов *A* и *B*

Изменение коэффициентов φ и ψ, характеризующие скорость расхождения рейтинговых предпочтений, можно проследить, используя формулы (7.91), (7.92), (7.93), (7.94). Рис. 7.20. демонстрирует зависимость от времени коэффициента корреляции агрегированных предметных предпочтений, определенного формулой (51).

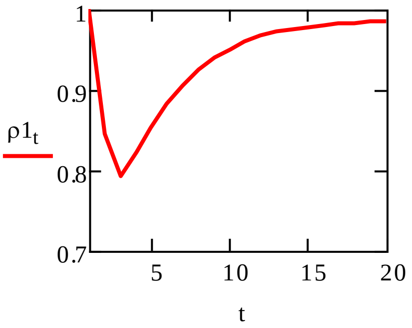


Рис. 7.20. Коэффициент корреляции агрегирования предметных предпочтений

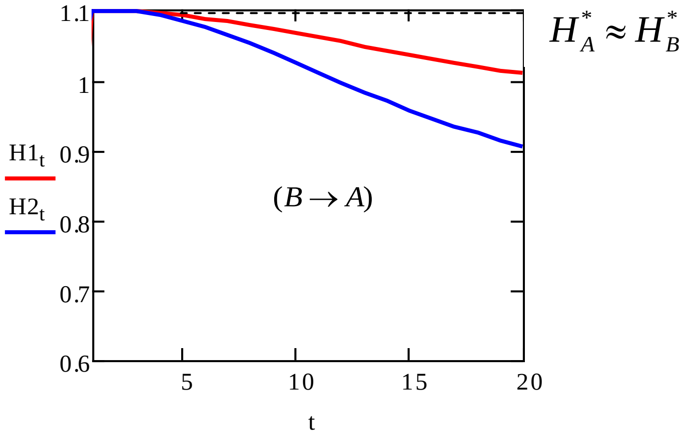


Рис. 7.21. Энтропии для субъектов A и B

Рис. 7.21 показывает зависимость от времени энтропий агрегированных предметных предпочтений:H_{1t} субъекта *A*, H_{2t} субъекта *B*.

Видим, что энтропия субъекта *A* уменьшается медленнее, чем энтропия субъекта *B*. В то же время, согласно принятой концепции, «решение принимает» субъект, имеющий более высокий ранг, т.е. субъект *A*. Если оба субъекта имеют одинаковые энтропийные пороги $H_A^* \approx H_B^*$, то, как видно из рисунка первым сделает выбор субъект *B*, (при $t_B^* \approx 2{,}7$ ед.) но, ему придется ждать до того момента, когда выбор сделает *A* (при $t_A^* \approx 7$ ед.). Решение, как уже было сказано, принимает *A*. при этом может возникнуть своеобразный конфликт между *A* и *B*.

Приведенный численный пример имеет весьма частный характер и соответствует ряду существенных допущений и упрощений. Он призван продемонстрировать технологию работы с моделью.

Заметим еще, что как модель в целом, так и приведенные расчеты относятся целиком к подготовительной – пассивной стадии конфликта.

Для определения пороговых значений энтропий H_A^* и H_B^* нужны дополнительные гипотезы, возможно, экспериментальные исследования. Что касается конкретизации структурных параметров $\alpha, \beta, \ldots$, то есть основания полагать, что их можно определить на основании постулирования вариационных принципов более высокого порядка – «надпринципов», возможно, таких как принцип Пригожина-Гленсдорфа или Циглера [124].

Сделаем некоторые дополнительные замечания относительно энтропийных и корреляционных порогов, наличие которых постулировано выше. Можно полагать, что они не являются неподвижными, но изменяют свое положение в энтропийном пространстве. Таким образом, момент принятия решения определяется как результат встречи «текущей энтропии», $H_\pi(t)$ величина которой зависит от экзогенных и эндогенных факторов и энтропийного порога $H_0^*(t)$. В некоторых случаях миграцию энтропийного порога можно описать логистической кривой, например, вида

$$H_\pi^* = f(\ln N) + (H_0^* - f(\ln N))e^{-h\sigma^2};\ f(\ln N) \le \ln N,$$

где N – число альтернатив, H_0 - начальное значение порога, t – располагаемое время до момента исчерпания ресурса. То есть по мере обострения конфликта, порог движется вверх. При этом предполагается, что для большинства индивидов рост дефицита ресурсов, в том числе располагаемого времени влечет повышение энтропийного порога.

К условию $H_\pi \le H_\pi^*$ в качестве необходимого следует добавить требования:

$$\left.\frac{dH_\pi}{dt}\right|_{H_\pi = H_\pi^*} \le 0,\ \left|\frac{dH_\pi}{dt}\right| \le q(t^*)\max; q(t^*)\max; \ge 0$$

где $q(t^*)$ - предельная скорость переработки и осмысления поступающей информации.

В этой работе остается неразработанным вопрос о схемах и условиях взаимного информирования *A* и *B*. В некоторых формулах, относящихся к субъекту *A* встречаются предпочтения $\pi_B(\sigma_i)$, в частности в формулах, описывающих агрегирование. При этом формально нарушается принцип «индивидуального носителя». Поэтому функции $\pi_B(\sigma_i)$ (или $\pi_A(\sigma_i)$ в формулах, относящихся к субъекту *B*). следует рассматривать как субъективные оценки, что и отмечено значком «^» в соответствующих формулах.

Предполагается, что в процессе эволюции порогов имеет место гистерезис, то есть проявляется определенный психический консерватизм. Предполагается, что существует «граница психической непереносимости» $H_\pi^{**} \le \ln N$, выше которой энтропия вообще не может подниматься. Наконец, существует характерное значение энтропии, которое соответствует действию закона Йеркса-Додсона.

7.5. О квантовании предпочтений

Порядковые (ординальные) распределения предпочтений являются частным случаем кардинальных распределений, поскольку в ординальных распределениях альтернативы можно пронумеровать, а затем «взвесить» с весом $S_N = 0{,}5N(N + 1)$, то есть положить, что

$$\pi(\sigma_i) = \frac{i}{S_N} = \frac{2i}{N(N+1)}.$$

Предположение о квантовании предпочтений не связано с теориями «квантовой психологии» и не является столь амбициозным. Здесь не используются представления об аристотелевских «сущностях», платоновских «глубоких реальностях», метафизических «призраках», проявлениях квантово-механических эффектов на уровне психофизиологии.

В другом месте, где мы вводим понятие «виртуального субъекта» или «коллективного разума», мы также не связываем их с обозначенными выше понятиями.

В основу предположения о квантованности предпочтений кладутся простые и, с нашей точки зрения, соответствующие «здравому смыслу» соображения:

1. Субъект может одновременно анализировать ограниченное число дискретных альтернатив.

2. Существуют диапазоны неразличимости «стоимости» и, следовательно, предпочтительности альтернатив, причем эти диапазоны индивидуализированы, изменчивы зависят от типа и «остроты» проблемно-ресурсной ситуации, от наличия или отсутствия конфликтной ситуации.

3. Различимость имеет здесь субъективный смысл, так, если реальные «стоимости» альтернатив 5,01 $ и 4,99 $, то субъективно они часто воспринимаются как существенно различные.

4. Чем больше абсолютная величина располагаемых ресурсов R^{disp} в сравнении с потребными ресурсами, тем больше «шаг» — диапазон неразличимости. Более точную оценку диапазонов неразличимости предпочтений можно получить используя эластичности предпочтений.

Так, например, находим, что

$$\left|\Delta\pi_i\right| = \beta(1-\pi_i)\pi_i\left|\Delta R_i^r\right| \tag{7.96}$$

Если $\left|\Delta R_i^r\right|$ — диапазон «неразличимости» уровня потребных ресурсов для данного субъекта, обладающего ресурсами R_i^{disp}, то соответствующий диапазон «неразличимости» предпочтений есть $\left|\Delta\pi_i\right|$. Аналогичные зависимости можно получить и в других случаях. Альтернативы, которые попадают в один и тот же диапазон «неразличимости», воспринимаются как эквивалентные (по потребным ресурсам) и могут быть отнесены к одному классу эквивалентности.

Здесь уместно вспомнить закон Госсена в теории маргинальной полезности или закон Вебера – Фехнера в психологии. Интерпретация этих законов в данном случае может стать опорой при построении модели квантования предпочтений.

Квантованные предпочтения вводят промежуточный класс распределений, находящихся между ординальными и кардинальными распределениями. Они могут быть названы «*квантовыми распределениями*».

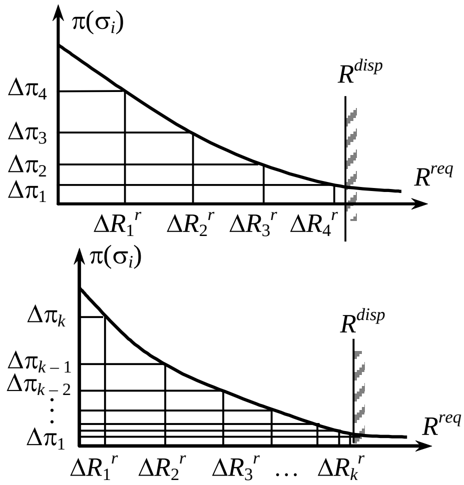
Вопрос о том, как выбрать диапазон «неразличимости» на шкале потребных ресурсов, требует дополнительных предположений. Из рис. 7.22, *а* видно, что при условии, что диапазон неразличимости альтернативы по отношению к потребным ресурсам одинаков в любом месте оси R^{req}, то для более удаленных от нуля участков оси R^{req} одному и тому же диапазону ΔR^{req} отвечает меньший диапазон неопределенности $\Delta\pi_i$. В качестве другого варианта рассмотрим допущение, что ΔR^{req} уменьшается по мере приближения R^{req} и R^{disp} (рис. 7.22, *б*).

Конечно, при этом каким-либо способом должны быть установлены границы диапазонов эквивалентности на оси потребных ресурсов. Это можно было бы сделать, например, так: «стоимость» наиболее дорогой альтернативы считается верхней границей диапазона неразличимости: все альтернативы, которые попадают в этот диапазон, относятся к первому классу эквивалентности, нижняя граница этого касса является верхней границей следующего класса, и так далее.

На рис. 7.22, *а* показано, как изменяются диапазоны эквивалентности на оси предпочтений в предположении, что диапазоны ресурсной неразличимости одинаковы и не зависят от соотношения между располагаемыми и потребными ресурсами. Для канонического распределения первого типа диапазоны на оси $\pi(\sigma_i)$ тем шире, чем меньше потребные ресурсы. Отличие в величине диапазонов эквивалентности для $\pi(\sigma_i)$ возрастает, если предположить, что диапазон неразличимости уменьшается, когда $R^{req}(\sigma_i) \to R^{disp}$ в соответствии с допущением 4 (рис. 7.22, *б*).

а

б



$$\pi(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta R^{req}(\sigma_i)}}{\sum\limits_{j=1}^{N} e^{-\beta R^{req}(\sigma_j)}};$$

$$\Delta R_i^r = \text{const};$$

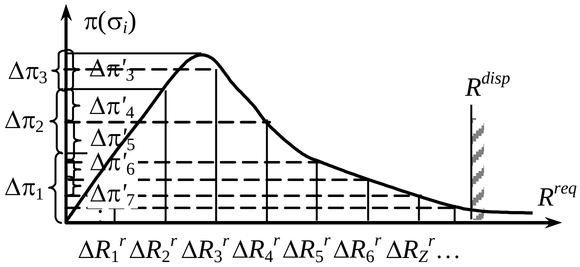
$$\Delta\pi_1 < \Delta\pi_2 < \Delta\pi_3 < \Delta\pi_4.$$

$$\Delta R_1^r > \Delta R_2^r > \Delta R_3^r > \ldots > \Delta R_k^r;$$

$$\Delta\pi_1 < \Delta\pi_2 < \Delta\pi_3 < \ldots < \Delta\pi_k.$$

Рис. 7.22

Для канонического распределения второго типа зависимость между ΔR_i^r и $\Delta\pi_i$ отличается уменьшением диапазонов $\Delta\pi_i$ в районе пика распределения (рис.7.23).



$$\pi(\sigma_i)=\frac{R^{req^{\alpha}}_{(\sigma_i)}\,e^{-\beta R^{req}_{(\sigma_i)}}}{\sum\limits_{j=1}^{N} R^{req^{\alpha}}_{(\sigma_j)}\,e^{-\beta R^{req}_{(\sigma_j)}}}$$

Рис. 7.23

Квантование предпочтений ведет к квантованию субъективных энтропий и субъективных корреляций и в этом смысле связано с проблемой принятия решений, а также с анализом конфликтов.

7.5.1. Энтропийная карта

Назовем «энтропийной картой» график, на осях которого откладываются энтропии «сопряженных» распределений предпочтения: π_i^+, π_i^-, υ_i^+, υ_i^-. Как и ранее, используем следующие обозначения: H_π^* — энтропийный барьер, отделяющий «царство свободы» от «царства необходимости», то есть порог, который нужно преодолеть «сверху вниз» для обретения возможности принятия решения. «Царство свободы» можно трактовать как «слой перемешивания» или «слой дискуссии». H_π^{**} — верхний «предстрессовый» порог энтропии. В ситуации, когда $H_\pi^{**} \le H_\pi \le H_{\pi\max}$, субъект по предположению находится в стрессовой ситуации — в состоянии «буриданова стресса».

Рассмотрим рис. 7.24. Он схематично отражает условия возникновения внутреннего конфликта, когда имеется две альтернативы σ_1 и σ_2 ($M = 1$, $N = 2$).

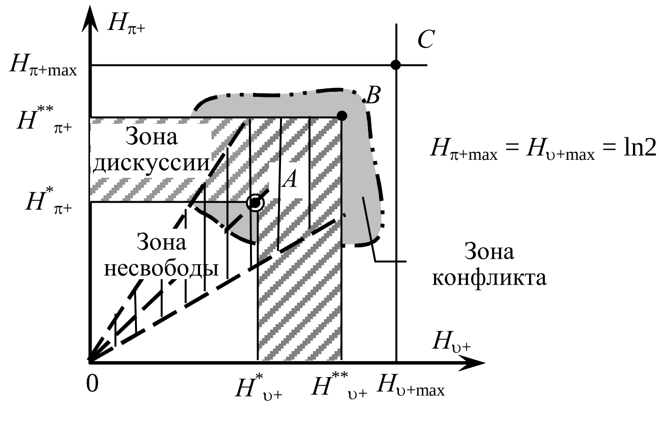


Рис. 7.24. Консонантный внутренний конфликт

Смысл альтернатив: ответ на некоторый вопрос A: σ_1 — «да», σ_2 — «нет». Сравниваются распределения π_i^+ (принять на основе позитивной информации, например, о

полезности U_i) и υ^+ (отвергнуть A на основе позитивной информации о полезности U_i). Для принятия решения должны быть выполнены необходимые условия:

$$\boldsymbol{H}_{\pi+} < \boldsymbol{H}^*_{\pi+};\ \boldsymbol{H}_{\upsilon+} < \boldsymbol{H}^*_{\upsilon+}. \tag{7.97}$$

Обе границы, однако, одновременно не достигаются, поэтому более слабые условия принятия решения

либо $$\boldsymbol{H}_{\pi+} < \boldsymbol{H}^*_{\pi+};\ \boldsymbol{H}_{\upsilon+} \in [\boldsymbol{H}^*_{\upsilon+}, \boldsymbol{H}^{**}_{\upsilon+}], \tag{7.98}$$

либо $$\boldsymbol{H}_{\upsilon+} < \boldsymbol{H}^*_{\upsilon+};\ \boldsymbol{H}_{\pi+} \in [\boldsymbol{H}^*_{\pi+}, \boldsymbol{H}^{**}_{\pi+}].$$

В первом и втором случаях результат будет различный: σ_1 — в первом случае и σ_2 — во втором. Несмотря на выполнение строгих неравенств решение может быть не принято, если $H_{\pi+} \approx H_{\upsilon+}$. Зона *консонантного конфликта* охватывает окрестность точек A и B и может простираться до точки О в виде окрестности «магистрали» OA, где выполняется условие приближенного равенства «сопряженных» энтропий $H_{\pi+}$ и $H_{\upsilon+}$. Кроме значений энтропий наличие конфликта определяется величиной коэффициента корреляции $r_{\pi+\upsilon+}$.

Если $r_{\pi+\upsilon+} = -1$ консонантный конфликт отсутствует. Это утверждение подтверждает рис. 7.25.

Здесь энтропии $H_{\pi+}$ и $H_{\upsilon+}$ могут быть одинаковыми и удовлетворять приведенными выше неравенствами, тем не менее конфликт отсутствует, поскольку $r_{\pi+\upsilon+} = -1$. Ситуация, показанная на рис. 7.26 соответствует консонантному конфликту, поскольку основания принять A и отвергнуть A одинаковы.

Этот тип конфликта мы условно назовем консонантным, поскольку он возникает на основе изучения одной и той же информации по поводу «вопроса A» — полезности с различных «точек знания»: принять A либо отвергнуть A.

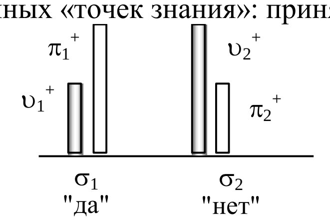


Рис.7.25

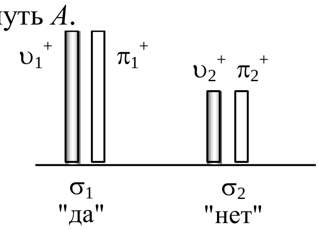


Рис.7.26

Рассмотрим случай *диссонантного конфликта*. Пусть также решается вопрос о выборе из двух альтернатив σ_1 и σ_2. На основе параллельного изучения позитивной информации (полезности) и негативной информации (вредности) о каждой из альтернатив, в результате чего возникает два распределения предпочтений π_i^+ и π_i^-. «Энтропийная карта» показана рис. 7.27.

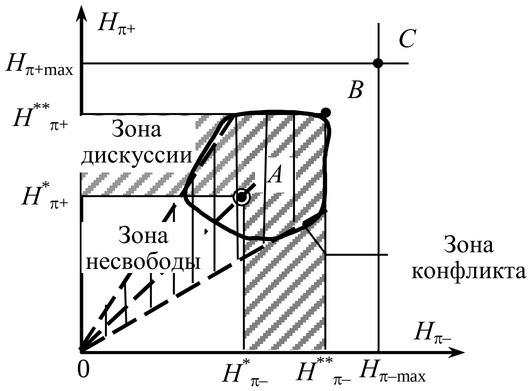


Рис. 7.27

Суть диссонантного конфликта поясняют рис.7.28 и рис. 7.29. На рис. 7.28 распределения π_i^+ и π_i^- совпадают (или близки), соответственно коэффициент корреляции $r_{\pi+\pi-} = +1$. (Это имеет место, если $\pi_1^+ > 0{,}5$ и $\pi_1^- > 0{,}5$). Здесь конфликт отсутствует, так как оба распределения свидетельствуют в пользу выбора одной альтернативы. На рис. 7.28 показан случай диссонантного конфликта. Коэффициент корреляции $r_{\pi+\pi-} = -1$.

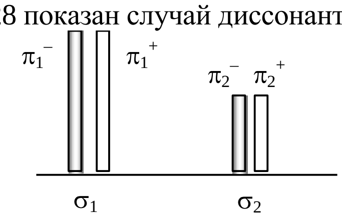


Рис.7.28

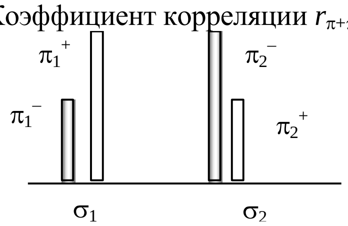


Рис.7.29

Заштрихованная область на рис.7.27 представляет собой зону диссонантного конфликта. По-видимому «остаточный» конфликт сохраняется и после принятия решения, а зона конфликта, включает точки *O*, *A*, *B*. Если $r_{\pi+\pi-} = -1$ острота конфликта тем больше, чем меньше энтропии $H_{\pi+}$ и $H_{\pi-}$. Значит до принятия решения наибольшая острота конфликта имеет место в точке *A*, после принятия решения — в точке *O* (если по-прежнему $r_{\pi+\pi-} = -1$).

Энтропии, образующие двумерную «энтропийную карту» могут находиться в зависимости друг от друга, поскольку в данном случае их носителем является один тот же субъект. Следовательно, конфигурация «царств» может быт более сложной, что отражено схематически на рис.7.30.

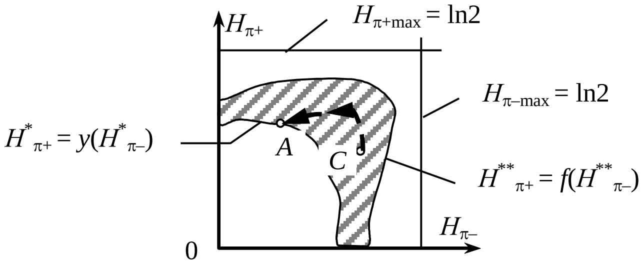


Рис. 7.30

В качестве примера показана карта в координатах $H_{\pi+}$, $H_{\pi-}$.

Построение и анализ «энтропийных карт» может оказаться, полезным инструментом при исследовании не только конфликтов, но и процессов принятия решений вообще.

Можно представить себе, что «дискуссия» начинается в точке «*C*» (рис.7.30). Линия *CA* отражает процесс блуждания в «царстве свободы». В определенный момент времени достигается точка *A* на границе между «царством свободы» и «царством необходимости», откуда возможен переход в результате принятия решения. Наличие конфликта может деформировать двумерную картину. В этом смысле целесообразно рассматривать трехмерную «энтропийно-корреляционную карту», где на третьей оси откладывается коэффициент корреляции, например, $r_{\pi+\pi-}$. Трехмерная картина (в случае $N = 2$) заключена в параллелограмме со сторонами ln2, ln2, [–1, +1] (рис.7.31).

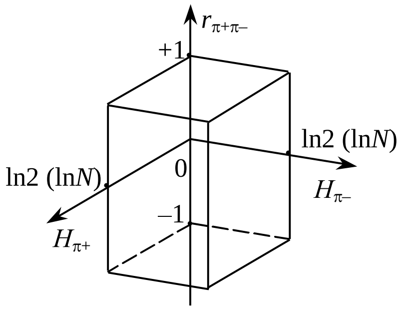


Рис. 7.31

Границы «царств» скорее всего не являются неизменными, но изменяются под влиянием эндогенных и экзогенных процессов. Мы не в состоянии в данный момент предложить какие-либо модели относительно изменчивости этих границ. Можно, однако, высказать некоторые общие предположения:

1. С обострением ситуации, увеличением дефицита ресурсов, в первую очередь — временных, «царство необходимости» расширяется и, наоборот, «царство свободы» сужается. «Бедный» не может быть свободным. «Общее количество свободы» в социуме распределяется приблизительно пропорционально «богатству» и определяется в первую очередь количеством разрешимых проблем, то есть размерностью множества S_a.

2. В спокойной ситуации, наличии больших располагаемых ресурсов, в том числе, больших запасов времени и, соответственно, возможностей для более взвешенных решений «царство необходимости» сужается, а «царство свободы» расширяется.

Эти утверждения, по-видимому, носят эвристический характер. Что происходит с «царствами» очевидно, сильно зависит от психического типа субъекта, от его способности рисковать, от наличия сдерживающих или поощряющих этических факторов, отношений между субъектами и между субъектом и группой.

От понятия «свободы» для одного субъекта, следует перейти к понятию «свободы» группы, «свободы», связанной с взаимоотношениями субъекта с другими членами группы.

Рассмотрим межличностный конфликт, когда имеется два субъекта и две альтернативы:

$$\boldsymbol{M} = 2,\ \boldsymbol{S_a}\textbf{: }(\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}).$$

Пусть $\pi_1(\sigma_i)$ и $\pi_2(\sigma_i)$ — предпочтения первого и второго субъекта соответственно. Условно назовем альтернативы «одноместными», если «состояние» σ_i может быть достигнуто (занято) только одним субъектом (двое не могут сидеть на одном стуле), и назовем альтернативы «потенциально корпоративными», если оба субъекта могут достичь каждое из состояний σ_i не только не мешая, но, может быть, помогая друг другу, объединяя свои ресурсы.

Возможные ситуации представлены на рис. 7.32—7.34. Рис. 7.32 отражает консонантный конфликт двух субъектов, стремящихся занять одну и ту же позицию (сесть на один и тот же стул).

Если каждая из альтернатив «одноместна», то имеет место консонантный конфликт. При этом может быть $H_{\pi 1} \approx H_{\pi 2}$, а $r_{\pi 1,\pi 2} = +1$. Очевидно, что конфликт тем острее, чем меньше обе энтропии. Очевидно также, что если энтропия хотя бы одного из двух субъектов велика

$$\boldsymbol{H_{\pi i} > H^{*}_{\pi i},}$$

то конфликт не может возникнуть, поскольку этому субъекту «все равно на каком стуле сидеть». Таким образом, обязательным условием возникновения конфликта является малое (близкое к нулю) значение обеих энтропий.

В ситуации, показанной на схеме рис. 7.33, в случае «одноместных» альтернатив конфликт отсутствует, так как $r_{\pi 1,\pi 2} = -1$ независимо от величины индивидуальных энтропий.

Пусть теперь альтернативы σ_1 и σ_2 «потенциально корпоративны». Условия конфликта здесь иные (рис. 7.33).

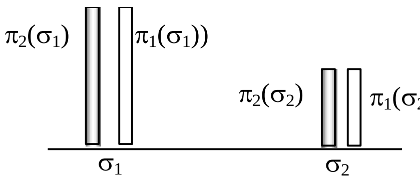


Рис. 7.32

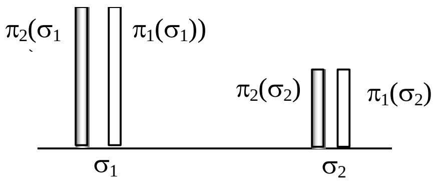


Рис. 7.33

Здесь оба субъекта отдают предпочтения первой альтернативе и, следовательно, готовы сообща решать соответствующую проблему, может быть, объединяя (консолидируя) свои ресурсы. Коэффициент корреляции

$$\boldsymbol{r_{\pi 1,\pi 2}} = +1$$

и конфликт отсутствует.

Ситуация, представленная на рис. 7.34 отражает конфликтную ситуацию, результатом которой является отказ от совместного решения корпоративной проблемы и от консолидации ресурсов в этом направлении.

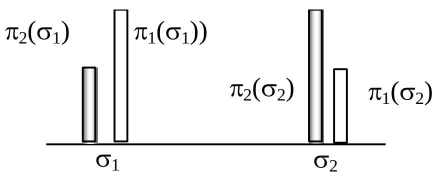


Рис.7.34

Коэффициент корреляции $r_{\pi1,\pi2} = -1$, энтропии могут быть равными. Но как и выше, условием возникновения конфликта является достаточно низкое значение энтропий

$$\boldsymbol{H}_{\pi1} < \boldsymbol{H}^{*}_{\pi1};\ \boldsymbol{H}_{\pi2} < \boldsymbol{H}^{*}_{\pi2}.$$

Напомним, что пороговые значения энтропий индивидуализированы и при изучении конфликтов в группе $M > 2$ это обстоятельство должно учитываться. Заметим, что применительно к межличностным конфликтам можно также построить двумерные и трехмерные энтропийные и энтропийно-корреляционные карты.

Соображения о подвижности границ «неравенств» следует дополнить замечанием о том, что границы перехода из «царства свободы» в «царство необходимости» и обратного перехода могут не совпадать. Возможны два варианта:

1. Граница перехода «вниз» (рис.7.35, *а*) находится выше границы обратного перехода

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{*}\downarrow > \boldsymbol{H}_{\pi}^{*}\uparrow$$

2. Граница перехода «вниз» (рис.7.33, б) находится ниже границы обратного перехода

$$\boldsymbol{H}_{\pi}^{*}\downarrow < \boldsymbol{H}_{\pi}^{*}\uparrow.$$

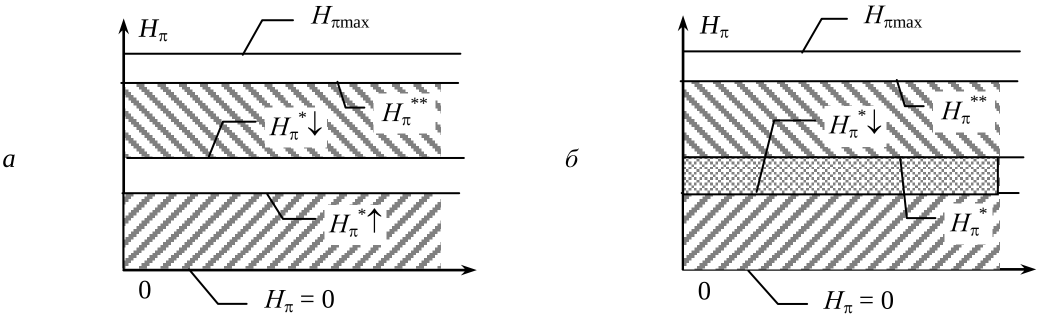


Рис. 7.35

Частично обсуждение переходов было дано ранее. В заключении заметим, что пороговые значения не только индивидуализированы, но, скорее всего, различаются для энтропий различных распределений: π^{+}, π^{-}, υ^{+}, υ^{-}.

Кроме того, ранее были введены субъективные байесовские риски для предметных и рейтинговых и сделано допущение о существовании пороговых значений рисков подобных пороговым значениям энтропий.

Одним из достаточных условий принятия решения является пересечение текущим значением соответствующего риска своего порогового значения «снизу вверх». Т.о. наряду со структурированным энтропийным пространством мы имеем дело со структурированным пространством субъективных рисков.

7.6. Категория «свобода» с точки зрения субъективного анализа. Краткий исторический экскурс

Поскольку выше многократно используется термин «свобода», как одна из категорий развиваемой версии субъективного анализа, а «царство свободы» позаимствованное из работы [2], связывается с субъективной энтропией, необходимо попытаться найти связь понятия «свобода», используемого здесь, с трактовками этой категории в различных философских системах.

Проведем краткий исторический экскурс, подчиненный только одной задаче — найти какую-либо корреляцию общефилософских трактовок «свободы» с тем смыслом, который вкладывается в это понятие в данной работе. При этом мы ни в коем случае не предполагаем развить или усовершенствовать соответствующий раздел философии. Уместность такого экскурса нам представляется очевидной, поскольку ясно, что изучение множеств альтернатив, содержащих более одной альтернативы, и возможность выбора сопряжена с априорным допущением о наличии такой возможности.

Будем следовать в основном монографии [243].

Категория «свобода» родилась вместе с философией. Проблема в целом был поставлена в древнегреческой философии, причем сразу были выделены главные атрибуты свободы:

1. Ответственность, добровольность, свобода воли.
2. Свобода выбора и решения между разными возможностями.
3. Самостоятельность действия.

Дальнейшая история философии — это толкование и развитие этих понятий, усложнение, развязывание узлов, обусловленных сематинтической неопределенностью, накапливавшимися противоречиями и возникновением новых концепций. Все это вплоть до последнего времени происходило и происходит на вербальном уровне.

Изучение проблемы в целом свидетельствует о том, что к настоящему времени трактовка категории «свобода» не только не достигла завершенности, но стала более запутанной и неопределенной. Об этом свидетельствует категорическое расхождение ряда философских направлений и школ по этому вопросу.

Рассмотрим в историческом контексте основные этапы развития категории «свобода». В древней Греции знали понятия «свободный выбор» и «воля», синонимом которых была автономия — внутренняя независимость от внутренних и внешних факторов (Антистенес, Диоген). Сократ выделяет общественно-политический и индивидуально-субъективный аспекты свободы.

Одна из первых моделей тоталитарного государства содержится в труде Платона «Государство». Он утверждает, что в демократическом государстве свобода трактуется как «наибольшее богатство», что часто приводит к забвению других основных ценностей: чрезмерная свобода ни во что другое не превращается, как только в «*непомерную несвободу и для человека и для государства*».

Греки различали три типа государственного устройства: монархия, элитарная аристократия и демократия. Платон считал, что элитарная аристократия легко может превратиться в олигархию.

Аристотель в труде «Политика» выделяет свободу индивидуальную и общественно-политическую. «Демократия — это то устройство, в котором в наибольшей степени реализованы основы равенства». Основой демократии есть установление и

защита свободы. Аристотель считал, что демократия подвергается деформации, когда управляется исключительно интересами большинства, а не благом всех.

Свобода не может входить в противоречие с общественным порядком, необходимо первенство права. Политическая активность должна основываться на морали и на *наличии свободного времени*. В «Трех этиках» Аристотель анализирует инвидуально-моральную свободу, «свободный выбор» — понятие близкое к христианскому «liberum arbitrum» и имеющие прямое отношение к понятию «свобода воли», существующему в более поздних теориях. «Свобода воли» коррелирует с ответственностью как за выбор альтернатив, так и за способы реализации соответствующих проблем.

Другая античная концепция свободы является частью философии стоицизма, представителями которой были Сенека, Эпиктет и Марк Аврелий. Стоики полагали, что существует «вселенская свобода», материальным носителем которой есть человек. Наиболее ценным в человеке является «свободная воля». Свобода не то же самое, что вседозволенность, своеволие. «Разумная свобода» требует *познания законов природы и законов общественной жизни, чувства ответственности*. Это достаточно близко к понятию «свободы как познанной необходимости». Эпиктет различал «*свободу внутреннюю*» и «*свободу внешнюю*». Эта идея имеет историческое продолжение вплоть до наших дней.

Благодаря свободе воли человек способен осуществлять выбор между добром и злом.

На вопрос «как достичь свободы внутренней?» Эпиктет отвечал: *смириться с собственной судьбой и ничего не желать*. Благодаря внутренней свободе человек не является невольником ничего и никого. Вещи, не зависящие от человека, есть вещи этично нейтральные.

Картезианская философская система, к которой относят В. Декарта, Картезиуса, Э. Канта также трактует категорию «свобода». Один из основных тезисов: «Cogito ergo vum» (мыслю значит существую) перемещает исходную точку из мира внешнего в мир внутренний. Это в известной мере созвучно с принятой в нашей концепции исходной идеей, что всякое предпочтение (как переживание), всякая альтернатива как субъективное понятие, имеет своего персонального носителя и, следовательно, принадлежит миру внутреннему. Здесь также как у античных философов свобода воли является тем, что говорит о величии человека и его подобии Богу. Оппоненты теории свободы воли ссылаются на факт колебаний, сомнений, которые переживает человек, готовясь принять решение. Картезиус утверждал, что, наоборот, способность сомневаться подтверждает существование свободы. В нашей работе в модельных задачах в гл.5 мы сделали попытку смоделировать колебания, использовав аттракторы.

Иммануил Кант в «Критике чистого разума» стремился согласовать достижения в области естественных наук и новый образ материального мира с признанием исключительности человека и его автономии в этом мире. С точки зрения Канта исключительность человека заключена в его свободе. Он выделял в человеческом бытие своеобразную двойственность — дихотомию: совокупность внешних проявлений — *Homo phenomenon* и явлений психики — духовных — *Homo noumenon*. Если *Homo phenomenon* — есть предмет чувственного, эмпирического восприятия, то *Homo noumenon* — есть «личность», обладающая свободой и независимостью от окружающего мира свободная в своей активности. *Необходимость* и *свобода* сосуществуют в человеке.

Взгляды Канта основаны на антагонизме и трансцендентном идеализме: феномены, явления внешнего мира — фикции, произвольные творения человеческого во-

ображения: истинная природа вещей непознаваема. Он выделил два типа познания: «*чистый разум*» и «*разум практический*». Первый связан с априорными идеями, второй подчинен деяниям моральным. «Свобода» не подлежит эмпирической верификации и можно говорить о ее существовании как об идее трансцендентальной. С этим связан вопрос о том, отвечает ли этой идее какая-либо реальность. Кант называл трансцендентальную идею «эвристической фикцией».

Общечеловеческим стремлением по Канту есть стремление к реализации моральных благ. В связи с этим имеется внутреннее побуждение: делай добро. Это есть один из *категорических императивов* Канта. Постулаты *практического разума*:

— свобода воли;
— бессмертие души;
— существование Бога

не являются теоретическими догмами, но есть своеобразная гипотеза познания.

С точки зрения Канта свобода имеет два аспекта: *негативный и позитивный*. Первый понимается как независимость от законов и сил материальной природы. Выбор и решения *свободной воли* не обусловлены природой, но подчинены постулатами морального права и выходят за рамки эмпирического опыта.

Позитивный аспект свободы заключается в ее автономности: она *сама для себя есть правом*. Действительная свобода человека — это автономия его воли. Свобода есть фундаментальная ценность, власть интеллекта. Автономия воли — это единый принцип всех законов морали. Кантовская концепция свободы не есть концепция анархизма. «Люди являются правомочными членами королевства моральности, возможного благодаря «свободе»«. Этот тезис перекликается с термином «Царство свободы».

Свобода воли не что иное, как детерминация воли через законы морали.

Кант рассматривал проблему общественно-политической свободы: человек — существо разумное и свободное, поэтому есть «цель» и никогда не должен трактоваться как орудие для реализации «чужих» целей. К основным критериям государства он относил: уважение автономности человека, признание права, согласие с нормами морали. Эта концепция не согласуется с концепциями утилитаризма и политического макиавелизма.

Критерии государства более точно выражаются в следующих утверждениях:

1. Каждый член сообщества должен быть свободным.
2. Все граждане должны быть равными, как участники общественных процессов.
3. Каждый гражданин имеет право на независимость.

С позиций современного опыта и понимания невозможно принять эти постулаты как систему. Ясно, что они противоречат друг другу и представляют очень жесткие и практически никогда не реализуемые идеалы. Любопытным является замечание Канта о том, что «человек есть существо, которое требует господина», что абсолютно верно, но находится в противоречии с требованием автономии. В целом концепция «свободы» Канта противоречива и может быть квалифицирована как антропологический дуализм.

Проблема «свободы» является центральным понятием классического либерализма, создателями которого являются Хоббс, Локке, Ньюм, Милл, Руссо, Монтескью.

В трактовке Хоббса «свобода» в античном мире понималась не как свобода личности, а как свобода государства. «Свобода личности» является более поздним продуктом христианской идеологии и морали.

Хоббс, как и Кант, различал *негативный* и *позитивный* аспекты свободы, постулировал противоположность между *свободой* и *принуждением*, а не между *свободой* и *необходимостью*. Это был шаг в сторону будущего понимания свободы в материализме, как познанной необходимости. Корни этой трактовки находятся в античных и средневековых философских системах.

Негативная свобода в смысле Хоббса понимается как отсутствие препятствий к индивидуальным действиям. Свободой *позитивной* обладает тот человек, который может делать то, что хочет. Концепция свободы в системе Хоббса была натуралистичной, определяя человека как «тело живое, имеющее ощущения, разумное».

Среди философов *классического либерализма* наиболее созвучной построениям, проведенным в настоящей работе является концепция «свободы», предложенная английским философом — эмпириком Локке. Он как и Хоббс допускал сосуществование свободы *негативной* и *позитивной*, однако, с отклонениями в трактовках.

Остановимся подробнее на взглядах Локке [243]. «… Для творцов либерально-индивидуалистической теории контрактуализма» характерна мысль, что … на заре «… человечества имел место период предобщественный, или «естественный». Естественная «свобода» есть отсутствие зависимости от какой-либо общественной власти и неподчиненность в основах существования любого человека иной воле или власти, кроме «*права естественного*».

В связи с этим «человек современный родится с правом полной свободы и неограниченного использования всех законов и привилегий *естественного права* в такой же степени, как и все другие люди на земле».

Другим типом свободы, кроме свободы состояния естественного, есть свобода общественно-политическая. «Свобода человека в сообществе сводится к не подвластности никакой другой власти законодательной, кроме той, которая установлена в результате общественного согласия».

Отчетливо видна неполнота, внутренняя противоречивость концепции свободы и, в целом, утопичность с точки зрения ее фактической реализации. Это же относится и к ранее рассмотренным концепциям.

Далее однако, Локке признает, что установление «*государства*» состоит в том, что каждый гражданин отказывается от части своих естественных прав и передает их «элитам» руководителей. Локке выделил во властных структурах «*власть законодательную*» и «*власть исполнительную*».

В терминах субъективного анализа сознательный отказ гражданина от части прав можно трактовать как исключение части альтернатив из индивидуальных множеств S_{aj}, либо перевод их в категорию корпоративных альтернатив, относительно которых решения принимаются сообща, либо руководящей элитой, как передача части ресурсов под юрисдикцию «власти».

Локке не был поклонником анархизма, считал только, что «*целью права не является упразднение или ограничение, но сохранение и увеличение свободы* — где нет *права*, там нет *свободы*. Недостаток права открывает дорогу к бесправию, принуждению, злоупотреблениям».

Интерпретация Локке свободы является амбивалентной. «*Классическое понимание свободы сводится к утверждению, что она есть способность выбора одной из множества альтернатив*».

Это весьма тесно коррелирует с пониманием свободы в нашей версии субъективного анализа. Локке, однако, испытывал колебания относительно классической трактовки свободы воли. «*Свобода не состоит в выборе определенной возможности*». Свобода может пониматься как способность, внутренняя сила управлять своими желаниями. В идее «свободы» Локке видел элемент психологического детерминизма. «*С одной стороны признавал существование свободы как способность действовать, либо воздерживаться от действия, с другой утверждал, что поскольку человек вынужден делать определенный выбор, то он тем самым уже не есть свободным. Он не может избежать актов проявления воли, не может предотвратить желаний, поскольку они являются следствием естественных потребностей. Противоположностью свободы является внутреннее принуждение.*» Свобода, понимаемая позитивно — это способность владеть своими эмоциями и желаниями. Быть свободным — это значит решать свободно, в соответствии со своей совестью, управлять своими действиями с соблюдением законов. Это не означает отказ от своих обязанностей. Локке вышел за рамки *негативно-юридического* понимания свободы и признавал свободу *позитивно-моральную*.

«Континентальный либерализм» представляли Руссо и Монтескью. Проблема свободы также была главной в их философских системах. Руссо, например, различал три типа свободы: естественная, общественная и моральная.

К пантеистическому течению в философии относятся Спиноза, Фихте, Шелинг, Гегель и частично Шопенгауер.

Спиноза исповедовал натуралистический пантеизм, который признает существование «Бога» и «Природы», однако утверждает их неразрывное единство в определенном смысле тождественность. Их функции разделены, они образуют, говоря современным языком двухступенчатую иерархическую систему, на верхнем уровне которой находится «Бог». Он есть творцом «Природы» — *natura naturans*. На нижнем уровне стоит «Природа» — объект творения — *natura naturata*. Из этого следует трактовка категории свобода как свободы Бога и свободы человека. Свобода человека не имеет внешней причины своего существования, то есть является изначальным атрибутом человека и, следовательно, абсолютом. Из классической философии Спиноза позаимствовал отождествление личной свободы с авто детерминацией индивидуальной деятельности связывал *категории «свободы» и «необходимости»*. При этом он выделял две разновидности *необходимости*: «*свободная необходимость*» и «*вынужденная необходимость*». Свобода человека — это и есть «свободная необходимость», тогда как принуждение — это «вынужденная необходимость». Как видим в этой модели «*необходимость*» стоит выше и порождает «*свободу*».

Спиноза дистанцируется от классического понимания «свободы» как *свободы выбора одной из многих альтернатив*. Сферы познания и желаний — это одно и то же. «Воля и разум идентичны». Она есть явлением мысленным. опирающимся на желания. «Свободу воли» Спиноза считал фикцией, вещью мнимой.

Как можно заметить, имеются определенные близкие трактовки в пантеизме и классическом либерализме, а также противоречивость и незавершенность обеих концепций. Корреляция с понятиями, использованными в настоящей работе, состоит в частности в том, что возникновение желаний есть действительно необходимым, но желания могут превратиться в предпочтения, если они сопоставляются с «внешними» обстоятельствами, которые становятся альтернативами, будучи сопоставленными, в

свою очередь с желаниями. Логическое звено, которое связывает «внешние возможности» с желаниями — это «предпочтения». Можно попытаться согласовать модель субъективного анализа с одним из тезисов классического либерализма о том, что «свобода» включает в себя и свободу «*не делать никакого выбора*».

Для этого достаточно каждый раз в множестве альтернатив S_a предусмотреть еще одну дополнительную специальную «альтернативу» σ_e: «не делать никакого выбора среди содержательных утилитарных альтернатив». Альтернатива σ_e соответствовала бы отсутствию каких-либо желаний.

Сингулярному распределению

$$\left.\begin{aligned}\pi(\sigma_i) &= 0; \forall \boldsymbol{i} \in \overline{1, \boldsymbol{N}} \\ \pi(\sigma_e) &= 1\end{aligned}\right\} \mathbf{dim}\, \boldsymbol{S_a} = \boldsymbol{N} + 1$$

соответствует энтропия $H_\pi^{(e)} = 0$, то есть имеет место полная определенность. Альтернативу σ_e можно было бы доопределить условиями

$$\boldsymbol{\sigma_i \wedge \sigma_e = \sigma_e;\ \ \sigma_i \vee \sigma_e = \sigma_i.}$$

В этом предположении также содержится внутреннее противоречие: не желать желаний — тоже своеобразное «желание» — определенный акт воли. Это действительно неотъемлемое право человека и элемент его внутренней свободы.

Необходимо отметить, что «желания» формируются не только внутренними факторами как результат естественных потребностей, но и, в значительной мере, внешними обстоятельствами.

Где граница между «внутренней свободой» и «внешней свободой», или в терминологии Спинозы — между «свободой Бога» и «свободой человека». Приблизиться к пониманию этого на наш взгляд можно основываясь на развиваемом подходе к субъективному анализу. В этом отношении импонирующими являются взгляды другого представителя пантеизма Фихте, сводящиеся, в частности, к тому что «свобода — это возможность управления будущим».

Отсюда следует, что «свобода» есть понятие динамическое, которое может быть адекватно определено только в контексте развития как процесс. Утверждение, что человек сам является «своим творцом» — это понимание «автокреации» хотя и окрашено пантеистическим восприятием действительности, хорошо коррелирует с точкой зрения, что человек как *основной элемент каждой активной системы сам* формирует свои желания и проблемы и каждую извне предлагаемую цель преобразует свою собственную проблему. Важным в системе Фихте является также место, отводимое им общественной компоненте сознания человека, пониманию невозможности изоляции индивидуума от общества.

Мы уже говорили, что такие базовые понятия как этика, свобода, справедливость не имеют смысла вне социального организма.

Гегель находился под сильным влиянием Спинозы, воспринял и развивал, как тесно взаимосвязанные, понятия *свободы* и *необходимости*. По крайней мере, терминологически эксплуатируемые в настоящей работе понятия «*царства свободы*» и «*царства необходимости*» напрямую связаны с соответствующими понятиями.

В гегельянской концепции «свободы» различают «свободу абсолюта» и «свободу человека», что близко к представлениям Фихте.

Считают, что в системе Гегеля признается:

1. Свобода, как возможность выбора из многих альтернатив, осуществляемого властью психической, стоящей выше интеллекта.

2. Свобода, как детерминация самого себя, осуществляемая разумным путем.

Первую он связывает с духом абсолюта. Имеет место различие и противопоставление «воли индивидуальной» и «воли общей». Последнее понятие солидарно с концепцией «виртуального субъекта».

Гегельянская концепция свободы рационалистична, связывает реализацию свободы с функционированием интеллекта: «*Сознание, которое мыслит … есть самопознание свободы*», «*незнающий не есть свободным*».

Понимание, разум открывают двери в «царство свободы». Гегель также употребляет этот термин. Мы придаем ему смысл, обозначенный выше в гл.5.

В историческом плане следующий шаг в изучении категории «свобода» был сделан марксизмом. Идея «свободы» была одним из центральных понятий концепции Маркса, в которой различают три аспекта: феноменологический, онтологично-антропологический и общественно-философский. Свободу социума он ставил выше свободы индивидуума, полагая, что реализация последней возможна через свободу общественную. Как и Гегель он представлял «свободу» как категорию динамическую. Реализация свободы сегодня, не должна препятствовать, уменьшать свободу будущих поколений. Он связывал реализацию свободы всего сообщества и каждого индивидуума с коммунистическим устройством общества. Маркс «свободу» понимал как естественный атрибут человека. Следуя концепции Гегеля, Маркс и Энгельс утверждали, что «*свобода есть осознанная необходимость*». Мы видели, что понимание свободы и необходимости как тесно взаимосвязанных категорий имело место и в более ранних, догегелевских философских системах.

В последнем утверждении для нас существенным является то, что в нем отражен динамический характер: познание есть процесс и, следовательно *свобода*, в данном случае, следует за *необходимостью*.

К философским системам прошедшего столетия относятся «философия жизни» (Ницше, Бергсон, Девью Пирс), феноменология (Шелер, Хейдегер, Ингарден). Эти направления так или иначе связаны с привлечением Бога при разработке категории «свобода». Это относится также к энзистенциализму (Кардегард, Сартр, Марцел, Джасперс) и неотомизму (Маритан, Вельте).

Наиболее важной с точки зрения поставленной в начале параграфа задачи: взглянуть через призму различных философских концепций свободы на эксплуатируемые в настоящей работе представления о свободе и ее связи с энтропией предпочтений, является концепция неолиберализма, которую представляют в первую очередь Хайек, Фридман, Берлин, Новак.

В работе Хайека «Конституция свободы» [223] даны основные положения утилитарного либерализма англо-американского типа, который отличается от так называемого «континентального либерализма»:

1. Признание необходимости изменений в общественно-политической жизни.

2. Отрицание чрезмерного контроля государства.

3. Признание духовной близости консерватизма и национализма.

4. Признание того факта, что сторонники консерватизма стремятся навязать свою модель цивилизации.

Эгоцентризм либеральной модели выражается в концепции, согласно которой индивидуальная активность является следствием внешних потребностей и стремлений и, как следствие, приводит к конкуренции. Эта интерпретация исключает идею «благ общественных», и ведет к крайнему индивидуализму.

Хайек видит в человеке не общественное существо, а эгоцентричного индивидуума, он отделяет свободу личную от свободы общественно-политической. Говоря о «*свободе внутренней*» и «*свободе внешней*», Хайек, однако полагал, что существует только одна форма свободы, которая проявляется двояко. Следуя традиции, он выделял *свободу негативную* и *свободу позитивную*. Первую отождествлял с отсутствием принуждения со стороны других, а позитивную свободу традиционно связывал с возможность выбора одной из нескольких альтернатив. Однако, наиболее фундаментальной Хайек считал *свободу негативную*. Относясь критически к идее внутренней свободы в таком виде, как она понималась стоиками и в христианской традиции, он связывал «*свободу негативную*» с отсутствием внешних препятствий или принуждения при реализации индивидуальных целей. Можно сказать, что так понимаемая «свобода» относится к этапу, следующему за принятием решения, то есть в условиях, когда энтропия $H_\pi < H_\pi^*$ (меньше порога H_π^* — нижней границы «царства свободы» или «слоя дискуссии»), и в то же время, реализуется до принятия решения и состоит в возможности на основе индивидуальных желаний формировать множества альтернатив и распределять на этих множествах свои предпочтения.

«Негативная свобода» связана с личной ответственностью: чем «больше» этой свободы, тем больше личная «*ответственность*». «*Ответственность*» в свою очередь связана напрямую с «*необходимостью*».

Принуждение считается всегда злом, которое невозможно оправдать. С этими тезисами трудно согласиться. История и повседневная частная жизнь опровергают его.

В этой связи неолиберализм считает, что государственное право ограничивает «свободу», но не является принуждением. Оправдывая ценности неолиберализма, Хайек даже альтернативу голода работника и его семьи не считает принуждением, что противоречит его утверждению о существовании морального принуждения. Неолиберализм имеет вполне определенное понимание демократии, где главная роль отводится индивидуальной свободе. Если индивидуальная свобода не обеспечена, демократия «*дегенерирует в демагогию*». Обсуждение, однако, этого вопроса не является нашей целью.

В «Конституции свободы» разбирается вопрос о соотношении между «свободой» и признанием этических норм.

Этот вопрос также лежит в пределах интересов и возможностей субъективного анализа. Говоря об основах морали, Хайек утверждал, что они не являются творением человеческого интеллекта, моральные ценности являются результатом соглашения и претерпевают общественно-историческую эволюцию. Как видим, здесь снова налицо «динамизм» основных категорий. Полагая, что нормативная этика не нарушает свободы человека, допускаем, однако, возможность *конфликта* между «свободой» и строгой верностью постулатам морали. Эта точка зрения важна, так как она оправдывает рассмотрение категории «свобода» в главе, посвященной конфликтам, и отражает тесную связь категории «конфликт» с категорией «свобода».

Один из главных представителей неолиберализма Фридман, лауреат нобелевской премии, в работах «Капитализм и свобода» и «Свобода выбора» декларирует в качестве

отправной идеи *утилитаризм*, основанный на эмпиризме, позитивизме и прагматизме. Главным критерием является широко понимаемая *полезность* и *экстремальный индивидуализм*. Фридман связывает «*свободу*» с общественными отношениями, фактически речь идет о *свободе политической*, которая определяется как отсутствие принуждения данного субъекта со стороны других, причем условием свободы субъекта есть свобода экономическая. Последняя, определяется наличием ресурсов (от которых зависит, между прочим, и «размер» множества альтернатив S_a и уровень субъективной энтропии).

В работах Берлина «Две концепции свободы» и «Четыре эссе о свободе» сопоставляются основные концепции свободы, о которых говорилось выше:

Кант — *свобода* — подчинение нормам морали;

Милл — *свобода негативная* — возможность осуществления собственных желаний;

Монтескью — *свобода* — возможность делать то, что должен;

Руссо — *свобода индивидуальная* должна быть подчинена *свободе общей*.

Во всех этих постулатах принимается, что *свобода* несовместима с возможностью творить зло. Берлин в отличие от упомянутых философов допускает, что действительная *свобода* не должна исключать альтернатив, *как добра, так и зла*.

Приведенный краткий обзор основных философских трактовок категории «свобода» является далеко не полным. Тем не менее, он позволяет сделать вывод о том, что понимание термина «свобода» и, в частности, употребление понятий «*царство свободы*» и «*царство необходимости*» в основном не противоречат известным воззрениям.

В некоторых случаях имеется «однозначное» соответствие. Так, определение свободы Левитского прямо ложится на схему, принятую в данной работе: «*предпочтение*» есть следствие «*желания*», дивергенция предпочтений предполагает «выбор», выбор цели предполагает действие по ее достижению.

С другой сторон, очевидна незавершенность раздела философии, касающегося разработки понятия свободы.

Автор не берется здесь отстаивать ту или иную концепцию, или создавать новую модель «свободы». Представляется, однако что взгляд на описанные трактовки этой категории через призму субъективного анализа, попытки формализации с использованием утилитарных и этических распределений предпочтений, возможностей анализа динамики могут оказаться полезными как для общефилософского анализа, так и для развития методов субъективного анализа.

В связи с приведенным обзором можно поставить ряд вопросов.

Представляется, что при попытке классифицировать различные «свободы» каждый раз необходимо ответить на вопросы:

Свобода кого (чего)?

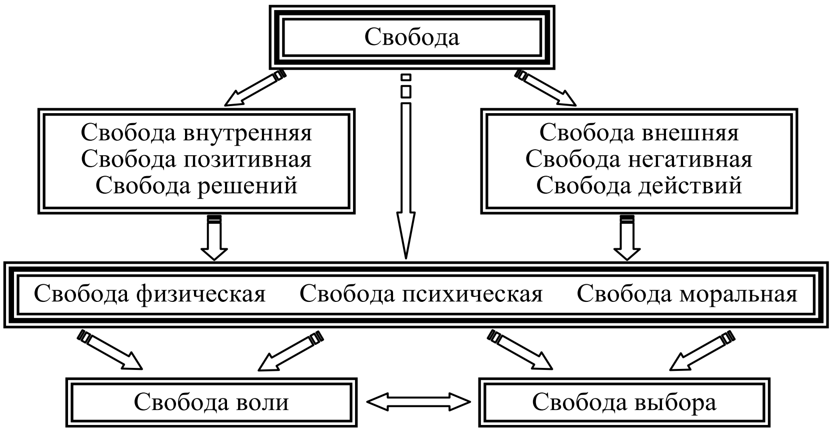
Свобода от кого (от чего)?

Свобода для чего, с какой целью?

Свобода — какими средствами?

Образно говоря, нужно «просклонять» слово «свобода». Какова связь между понятиями «свобода» и «право», где «граница» между «свободой» и «необходимостью», как связана «свобода воли» с внутриличностными и межличностными конфликтами, как выразить в терминах субъективного анализа различие между «свободой» и «демократией»? В заключение приведем просто перечень некоторых основных понятий «свободы», которые отражены в таблице.

Эта таблица не отражает логических связей между понятиями, хотя можно представить себе, например, следующую трактовку: если под «внутренней свободой» понимать «свободу выбора» тестируемых альтернатив (гипотез), право распределять предпочтения и право выбора определенной альтернативы, то к «внешней свободе» следует отнести наличие возможностей реализовать слетанный выбор.



Тогда «*внутренняя свобода*» характеризуется тем, насколько «этика» ограничивает возможности выбора, то есть соотношение утилитарных и этических предпочтений

$$\pi(\sigma_1), \pi(\sigma_2), \ldots, \pi(\sigma_N) \text{ и } \pi(I_1), \pi(I_2), \ldots, \pi(I_L)$$

а также прошлых предпочтений. «Внешнюю свободу» определяют финальное распределение предпочтений учитывающих этические ограничения и распределение объективных вероятностей разрешения проблем на множества альтернатив S_a:

$$\pi(\sigma_1, S_I), \pi(\sigma_2, S_I), \ldots, \pi(\sigma_N, S_I) \text{ и } p(\sigma_1), p(\sigma_2), \ldots, p(\sigma_N).$$

Здесь имеется аналогия с физическим пониманием «свободы», например, как «числа степеней свободы», как наличие физических ограничений.

«Абсолютной свободы» и «свободы воли» не существует. Свобода всегда ограничена, как ограничено движение механической системы естественными ограничениями на области изменения параметров, а также дополнительными ограничениями, налагаемыми в частной задаче. Сегодня мы практически на любую проблему смотрим как на проблему управления. Внешние управляющие воздействия имеют смысл принуждения.

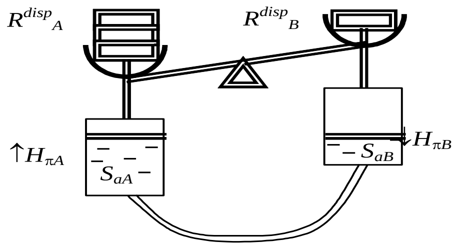
Мы уже упоминали о психической рекомпенсации понимаемой как восполнение недостатка внешней свободы (или выбора) физической, путем обретения внутренней «свободы», более точно — использование внутренней свободы для духовного переподчинения. Так раб «земного» хозяина, добровольно отдает свою «душу» хозяину «небесному» («раб божий») и, следовательно, отнимает нечто у первого и становится духовно свободным от него.

В заключение выскажем следующее соображение. Подходы субъективного анализа говорят о том, что размерность множества предметных альтернатив S_a тем шире, чем больше располагаемые ресурсы (R^{disp}). Это относится как к индивидууму, так и к группе индивидуумов. Чем шире множество S_a, тем большими возможностями (свободой) выбора располагает субъект. Можно образно сказать, что «количество свободы» пропорционально

количеству ресурсов (богатства), которое всегда, в любой группе, в любом социуме ограничено, следовательно, и *«количество свободы» всегда ограничено*. Если речь идет о социуме, то можно, например, говорить, что ограничена его «*свобода*» защищаться от воздействия неконтролируемых сил природы Если иметь в виду отдельного индивидуума, то «его богатство» определяет его «*внутреннюю*» и «*внешнюю свободу*» выбирать цели и достигать их.

Напрашивается максима: «*бедный не может быть свободным*», более того — обладать «*внешней свободой*».

Рис. 7.36 перераспределение «свободы» между двумя субъектами A и B представлено как следствие перераспределения ресурсов. Множества S_{aA} и S_{aB} изображены в виде сообщающихся сосудов, подвешенных к чашкам весов, на которых находятся располагаемые ресурсы. Увеличение ресурсов A за счет B ведет к увеличению *относительной* свободы A.



$$\boldsymbol{R^{disp} = R_A^{disp'} + R_A^{disp} = \mathrm{const}}$$

Рис. 7.36

Отсутствие «внешней свободы» с необходимостью ведет к сужению «*внутренней свободы*», причем осознание своей бедности не равносильно ощущению «свободы как познанной необходимости».

К проблеме распределения свободы тесно примыкает «теория коллективного благосостояния», которая обсуждалась выше [144]. Поскольку субъективный анализ позволяет связать теорию полезности с такими субъективными понятиями как «свобода», можно положения этой теории интерпретировать с точки зрения обеспечения «свободы» как коллективного выбора считая «свободу» существенным компонентом благосостояния. Например, можно к проблеме «распределения свободы» в социуме соотнести принцип Пигу-Дальтон, который обычно относят к задаче распределения полезностей:

Каждый акт передачи «свободы» от A и B не должен оставлять у A меньше «свободы» чем ожидается ее у B в результате передачи.

Это также есть составляющая социальной справедливости в смысле Пигу-Дальтона.

С точки зрения субъективного анализа представляется удобным говорить о «субъективной свободе» и «объективной свободе» — неточных аналогах «свободы внутренней» и «свободы внешней». Ясно в этом смысле, что характеризация «свободы» через предпочтения, субъективные энтропии и корреляции, открывает путь к анализу «свободы» как информационной категории.

Особый интерес представляет изучение понятия «свобода» в динамике.

Важной и исключительно интересной является задача дальнейшей формализации различных концепций свободы в терминах субъективного анализа.

7.7. Эволюция конфликтов

В этом параграфе рассматриваются примеры, продолжающие расчеты параграфа 7.5. При этом учитывается релаксационный эффект, описываемый уравнением (7.99). Приведены результаты моделирования эволюции межсубъектного конфликта при условии, что две альтернативы S_a: (σ_1, σ_2) и конфликт разыгрывается между двумя субъектами, то есть S_ξ: (Σ_1, Σ_2).

В качестве модели, описывающей динамику предпочтений используется релаксационная модель.

Предпочтения j-го субъекта, представляют собой решение системы уравнений

$$\frac{d\pi_j(\sigma_1)}{dt} = -k_j\left[\pi_j(\sigma_1) - \pi_{j\mathrm{opt}}(\sigma_1)\right]; \tag{7.99}$$

$$\pi_j(\sigma_2) = 1 - \pi_j(\sigma_1);\ (j \in \overline{1,2}).$$

Величины $\pi_{j\mathrm{opt}}(\sigma_i)$ определяются как канонические предпочтения и являются функциями ресурсов.

Пусть в начале канонические распределения зависят от отношений ожидаемых ресурсов $R_j^{exp}(\sigma_i)$ к потребным $R_j^{req}(\sigma_i)$, то есть к затратам:

$$\pi_j^+(\sigma_i) = \frac{e^{\beta_j \bar{r}_{ji}}}{e^{\beta_j \bar{r}_{j1}} + e^{\beta_j \bar{r}_{j2}}}, \tag{7.100}$$

где $\bar{r}_{ji} = \left(R_j^{\exp}(\sigma_i)\right)^{-1}\left(R_j^{req}(\sigma_i)\right)$ играет в данном случае роль полезности соответствующей альтернативы.

Кроме предпочтений $\pi_j(\sigma_i)$ ($j \in \overline{1,2}; i \in \overline{1,2}$) вычисляется относительная энтропия каждого субъекта

$$\bar{H}_j = -\frac{1}{\ln 2}\Big(\pi_j(\sigma_1)\ln\pi_j(\sigma_1) + \pi_j(\sigma_2)\ln\pi_j(\sigma_2)\Big), \tag{7.101}$$

коэффициент корреляции предпочтений субъектов

$$\rho_\Sigma = \frac{\big(\pi_1(\sigma_1)-0{,}5\big)\big(\pi_2(\sigma_1)-0{,}5\big) + \big(\pi_1(\sigma_2)-0{,}5\big)\big(\pi_2(\sigma_2)-0{,}5\big)}{\sqrt{\Big(\big(\pi_1(\sigma_1)-0{,}5\big)^2 + \big(\pi_1(\sigma_2)-0{,}5\big)^2\Big)\Big(\big(\pi_2(\sigma_1)-0{,}5\big)^2 + \big(\pi_2(\sigma_2)-0{,}5\big)^2\Big)}}, \tag{7.102}$$

а также величины

$$K_1 = \rho_\Sigma\left(1-\bar{H}_1\right)^\delta\left(1-\bar{H}_2\right)^\delta; \tag{7.103}$$

$$K_2 = \rho_\Sigma - K_1,$$

которые можно рассматривать как показатели «остроты» конфликта, если таковой имеет место, либо как показатели степени конкордации, если конфликт отсутствует. Показатель степени δ выбирается из условия, чтобы K_1 (и K_2) обладали достаточной чувствительностью к изменению энтропий.

Упомянутые величины изменяются в пределах

$$0 \le \bar{H}_j \le 1;\quad -1 \le \rho_\Sigma \le +1;\quad -1 \le K_1 \le +1;\quad -1 \le K_2 \le +1.$$

Если оба распределения предпочтений сингулярны и оба субъекта с полной определённостью предпочитают одну и ту же альтернативу, то

$$\bar{\boldsymbol{H}}_1 = \bar{\boldsymbol{H}}_2 = 0;\ \rho_\Sigma = +1;\ \boldsymbol{K_1} = +1.$$

В случае если предпочитаемая альтернатива «одноместна», имеет место максимально «острый» консонантный конфликт. Когда распределения предпочтений не сингулярны, но порядок предпочтений у обоих субъектов одинаковый, конфликт имеет место, но не является максимально напряженным ($K_1 > 0$):

$$\boldsymbol{\Sigma_1: \sigma_1 > \sigma_2;\ \Sigma_2: \sigma_1 > \sigma_2}.$$

Если в случае «одноместных» альтернатив порядок предпочтений оказывается противоположным:

$$\boldsymbol{\Sigma_1: \sigma_1 > \sigma_2;\ \Sigma_2: \sigma_1 < \sigma_2},$$

то $\rho_\Sigma = -1$, а $K_1 < 0$. При полном согласии (конкордации) $K_1 = -1$.

Показатель K_2 удобно использовать в случае, когда одна из альтернатив является корпоративной. Тогда близость энтропий $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ к единице означает высокую степень неуверенности субъектов и неопределенности в выборе альтернативы. Как было отмечено ранее, в состоянии близости к безразличию или неопределенности время для принятия решения может оказаться большим. Такую ситуацию можно трактовать как когнитивный диссонанс одного или обоих субъектов, соответственно внутренние конфликты, которые трансформируются в межсубъектный конфликт.

Если хотя бы один из субъектов испытывает колебания, нерешительность, то его энтропия $\bar{H}_j$ близка к 1, а K_2 соответственно приближается к +1, либо к –1 в зависимости от того, совпадают или нет порядки предпочтений мало отличающихся в количественном отношении. Показатель K_1 в этом случае близок к нулю. $K_2 \to +1$, если $\rho_\Sigma = +1$, а $\bar{H}_1$ либо $\bar{H}_2 \to 1$. В этом случае можно говорить о консонантном меж субъективном конфликте, в основе которого лежит диссонантный само-конфликт (внутренний) одного или обоих субъектов. Если $K_2 \to -1$, то при тех же условиях будем считать, что имеет место диссонантный межсубъектный конфликт, обусловленный внутренним диссонансным конфликтом.

Далее приведены некоторые результаты моделирования динамики конфликта при указанных выше предположениях.

На рис. 7.20 представлен случай, когда потребные ресурсы для первого субъекта медленно возрастают:

$$\boldsymbol{R}_1^{\boldsymbol{req}}(\sigma_1) = 8(1+0{,}001\boldsymbol{t});\quad \boldsymbol{R}_1^{\boldsymbol{req}}(\sigma_2) = 4(1+0{,}001\boldsymbol{t}),$$

а для второго остаются неизменными $R_2^{req}(\sigma_1) = 8, R_2^{req}(\sigma_2) = 4$. Ожидаемые ресурсы («призы») постоянны, но различны для первого и второго субъектов

$$\boldsymbol{R}_1^{\boldsymbol{exp}}(\sigma_1) = \boldsymbol{R}_1^{\boldsymbol{exp}}(\sigma_2) = 9;\quad \boldsymbol{R}_2^{\boldsymbol{exp}}(\sigma_1) = \boldsymbol{R}_2^{\boldsymbol{exp}}(\sigma_2) = 12.$$

Порядки предпочтений совпадают: для Σ_1 и Σ_2: $\sigma_2 > \sigma_1$, то есть предпочтительнее является альтернатива σ_2. Если она «одноместна», то имеет место конфликт. На рис. 7.37 введены обозначения $\pi_1^+(\sigma_1) = x_0$, $\pi_1^+(\sigma_2) = x_2$, $\pi_2^+(\sigma_1) = x_1$, $\pi_2^+(\sigma_2) = x_3$.

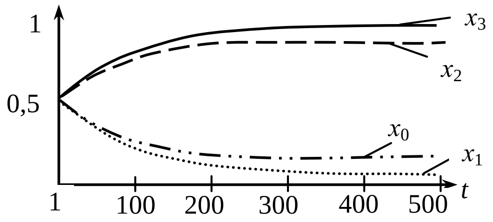
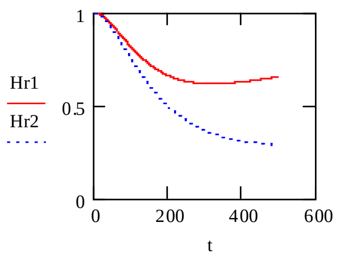
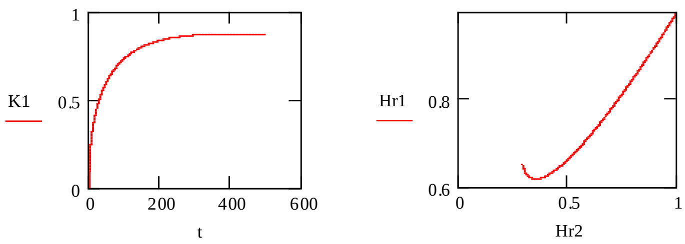


Рис.7.37

Процесс изменения предпочтений начинается из состояния полного безразличия: $\pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_1) = \pi_1(\sigma_2) = \pi_2(\sigma_2) = 0{,}5$. С течением времени предпочтения приближаются к теоретически оптимальным, которые в общем случае испытывают дрейф, обусловленный изменением ресурсов. В данном случае обе энтропии уменьшаются, определенность возрастет (рис.7.38).





а *б*

Рис. 7.38 Рис. 7.39

Очевидно, что ρ_Σ постоянно и равно +1, показатель K_1 увеличивается, что свидетельствует о нарастании остроты конфликта (рис.7.39, *а*). Энтропийная карта показана на рис.7.39, *б*.

Другой вариант представлен на рис. 7.40 (смысл тот же, что и на рис. 7.39,б). В этом случае ожидаемые ресурсы остаются неизменными и равны соответственно

$$\boldsymbol{R}_1^{exp}(\sigma_1) = 8;\ \ \boldsymbol{R}_1^{exp}(\sigma_2) = 6;\ \ \boldsymbol{R}_2^{exp}(\sigma_1) = 10;\ \ \boldsymbol{R}_2^{exp}(\sigma_2) = 10,$$

а потребные ресурсы изменяются со временем, причем для реализации σ_1 уменьшаются, а для σ_2 — увеличиваются

$$\boldsymbol{R}_1^{req}(\sigma_1) = 8(1 - 0{,}005\boldsymbol{t});\ \ \boldsymbol{R}_1^{req}(\sigma_2) = 4(1 + 0{,}005\boldsymbol{t});$$

$$\boldsymbol{R}_2^{req}(\sigma_1) = 8(1 - 0{,}005\boldsymbol{t});\ \ \boldsymbol{R}_2^{req}(\sigma_2) = 5(1 + 0{,}005\boldsymbol{t}).$$

Из рис.7.40 следует, что в моменты t_1 и t_2 происходит инверсия порядков предпочтений.

Энтропии $\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$, ρ_Σ, K_1, K_2 показаны на рис.7.41.

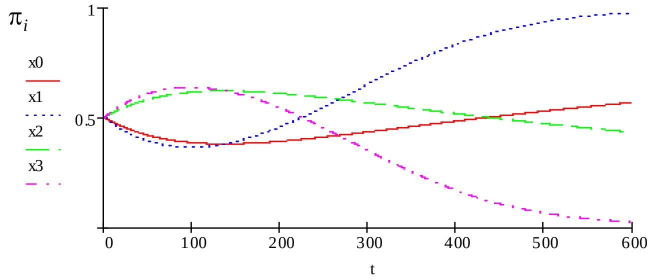


Рис. 7.40

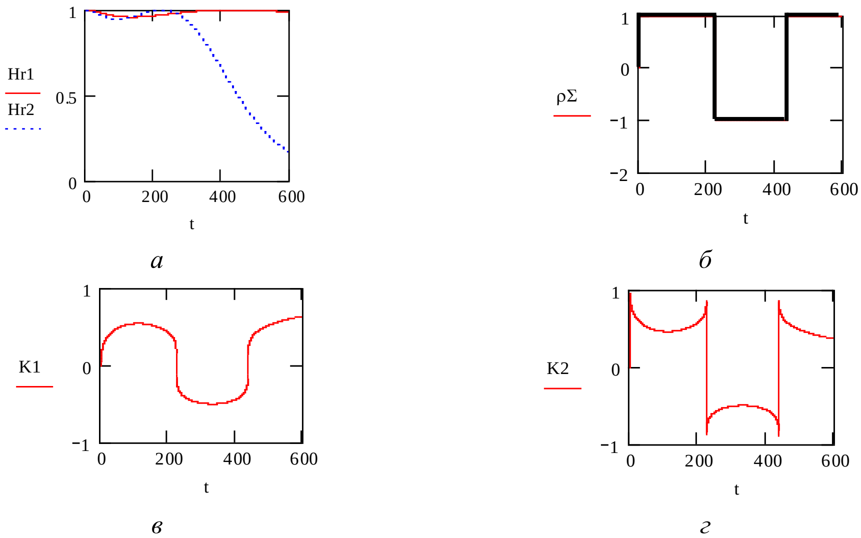


Рис. 7.41

В промежутке $t \in [0, t_1)$ $\rho_\Sigma = +1$ и, учитывая, что σ_2 «одноместна», заключаем, что имеет место консонантный конфликт. В дальнейшем в результате изменения потребных ресурсов и связанной с этим инверсией предпочтений второго субъекта возникает состояние конкордации, которое продолжается в интервале $t \in [t_1, t_2)$. Новая инверсия предпочтений теперь первого субъекта возвращает состояние конфликта при $t \geq t_2$. Рис. 7.41, *c* демонстрирует степень остроты конфликта при $t \in [0, t_1)$ и $t \geq t_2$ и степень конкордации при $t \in [t_1, t_2)$. Энтропийная карта показана на рис.7.42.

Следующий вариант представляет собой случай, когда одновременно возрастают все потребные ресурсы: для обеих альтернатив и обоих субъектов:

$$\boldsymbol{R}_1^{req}(\sigma_1) = 8(1+0{,}005\boldsymbol{t}); \quad \boldsymbol{R}_1^{req}(\sigma_2) = 4(1+0{,}005\boldsymbol{t});$$

$$\boldsymbol{R}_2^{req}(\sigma_1) = 8(1+0{,}005\boldsymbol{t}); \quad \boldsymbol{R}_2^{req}(\sigma_2) = 4(1+0{,}005\boldsymbol{t}).$$

Это можно трактовать как одновременное и пропорциональное возрастание цен на рынке. Ожидаемые ресурсы остаются постоянными. Из рис. 7.42 следует, что вначале из состояния безразличия предпочтения обоих субъектов расходятся и относительные энтропии уменьшаются. Затем, однако, дальнейший рост потребных ресурсов приводит к выравниванию предпочтений, а энтропии стремятся к максимальному значению.

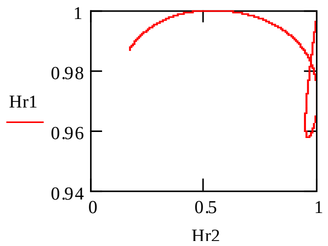


Рис.7.42

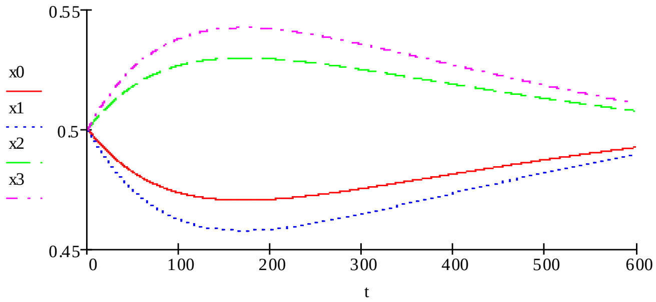
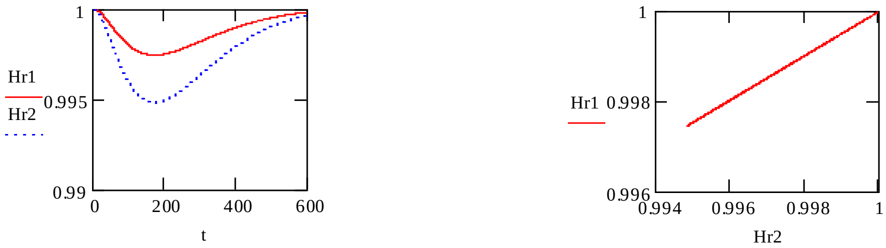


Рис.7.43

Из рис. 7.44, *б* видно, что острота конфликта вначале нарастает, а затем уменьшается.



а *б*

Рис.7.44

Предположим, что предпочтения определяются отношением потребных ресурсов к располагаемым:

$$\pi_j^-(\sigma_i) = \frac{e^{-\beta_j \bar{r}_{ji}}}{e^{-\beta_j \bar{r}_{j1}} + e^{-\beta_j \bar{r}_{j2}}}, \tag{7.104}$$

где $\bar{r}_{ji} = \left(R_j^{disp}(\sigma_i)\right)^{-1}\left(R_j^{req}(\sigma_i)\right)$.

На рис. 7.45 показан случай, когда потребные ресурсы для всех альтернатив и для всех субъектов одновременно возрастают в одинаковой пропорции, а располагаемые ресурсы обоих субъектов убывают также в одинаковой пропорции. Для модели (7.42) и одноместных альтернатив имеет место обостряющийся конфликт (рис. 7.45 и 7.46).

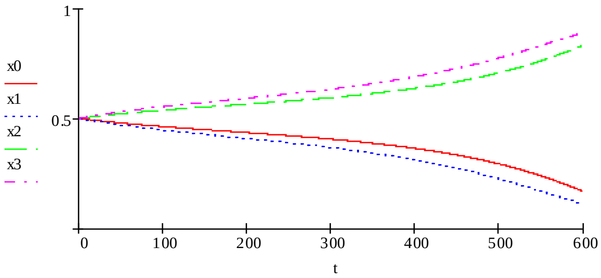
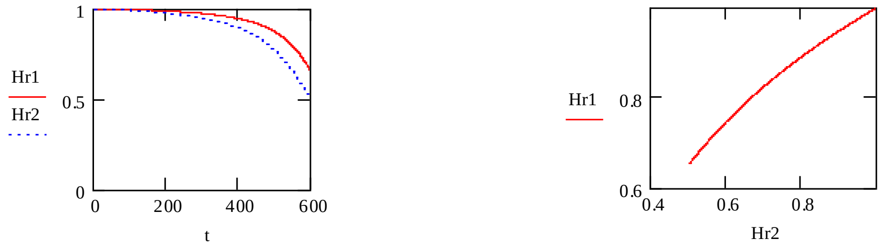


Рис. 7.45

Выше показаны в качестве примера результаты моделирования весьма узкого класса конфликтов. При этом мы ограничились случаем конфликта между двумя субъектами при наличии только двух альтернатив.



а *б*

Рис.7.46

Более полный анализ предполагает моделирование не только «подготовительной» стадии конфликта, но и процесса «разрешения» конфликта. Очевидно, что конфликт переходит в стадию «разрешения», когда определенный показатель остроты конфликта превышает критическое значение, например: $K_1 \geq K_1^*$. Ясно также, что пороговое значение K_1^* (или какого-нибудь другого критерия) индивидуально для каждого субъекта и является еще одним показателем индивидуальной психики. В данном случае важна связь этого показателя с каноническими распределениями предпочтений и, соответственно, возможностью количественных оценок. Формы разрешения конфликта могут быть различными в зависимости от типа бинарных отношений между конфликтующими сторонами, например, — отношений «антагонистических» или «конкурентных».

В настоящем параграфе мы совершенно не рассматриваем конфликты рейтинговых предпочтений, а также конфликты рейтинговых распределений с ранговыми распределениями. Вне рассмотрения остались возможные конфликты в иерархических системах.

Все эти вопросы требуют построения соответствующих моделей, путь к которым открывает технология, основанная на использовании канонических распределений, и, несомненно, представляют значительный самостоятельный интерес.

7.8. Динамика «живых точек»

Рассмотренные в этом разделе модели описывают поведение гипотетического субъекта, условно называемого «живой точкой». Они преобразуют внутренние побуждения, выраженные через предпочтения, в движение в пространстве экзогенных параметров, в качестве которых, в частном случае, могут выступать пространственные координаты x, y, … Предпочтения моделируются с помощью канонических распределений, следующих из энтропийного принципа оптимальности.

Предлагаемые модели можно рассматривать как попытку интерпретации движений субъекта, не подчиняющихся законам механики, точнее говоря, не обусловленных исключительно внешними силами.

Действительно, как описать движение игрока по футбольному полю или полет самолета, выполняющего фигуры высшего пилотажа. Движения самолета описываются незамкнутыми уравнениями динамики полета, поскольку каждый раз нужно доопределить силы, в том числе, управляющие воздействия пилота.

В определенном смысле можно считать, что представленный ниже анализ является попыткой моделирования экзогенных проявлений как внутриличностных, так и межличностных конфликтов. В предыдущем параграфе мы рассматривали изолированную динамику предпочтений в условиях зарождения и нарастания конфликта. Здесь одновременно моделируется как изменение предпочтений, так и влияние этих изменений на динамику субъекта в экзогенном пространстве.

Экзогенные проявления понимаются как движение, видимое поведение субъектов, под действием внутренних процессов перестройки предпочтений, которые, в свою очередь, зависят от того, что происходит с субъектом в экзогенном пространстве.

Мы не решаем задачу «внешнего», тем более, оптимального управления (например, через ресурсы). Однако, построенные модели содержат все необходимое для постановки и решения таких задач: управляемые и управляющие переменные, объект управления и соответствующие математические соотношения.

Конечно, приводимые ниже модели являются только первым шагом с большим числом упрощающих допущений и высоким уровнем идеализации. Основное, что следует здесь подчеркнуть, состоит в том, что управление активной системой осуществляется опосредствовано как управление предпочтениями субъекта активной системы, математические модели которых считаются известными.

Приведенная трактовка объясняет включение представленных в разделе материалов в главу, посвященную конфликтам.

Экзогенные параметры $x, y, \ldots$ субъекта могут иметь произвольный смысл, в том числе их можно считать пространственными координатами. Субъект в данной модели считается «точечным», то есть его положение в экзогенном пространстве определяется набором мгновенных значений параметров $x, y, \ldots$

Следует понимать, что законы механики в экзогенном пространстве выполняются в точности, и когда мы говорим о «внутренних» силах, мы имеет в виду причины, вынуждающие субъект выполнять те, или иные действия, в частности, механическое движение.

Предполагается, что канонические предпочтения формируют в сознании субъекта своеобразные «силы», которые преобразуются в скорости и ускорения изменения параметров состояния. В свою очередь, предпочтения изменяются в зависимости от экзогенных факторов, а также по другим причинам, в первую очередь релаксации (или адаптации) предпочтений, о которой уже говорилось ранее. Напомним, что речь идет о том, что, согласно сделанному предположению, психика не мгновенно «настраивается» на возникающую ситуацию — оптимальное распределение предпочтений возникает не мгновенно. Требуется определенное время адаптации, «настройки».

Термин «живая точка» или «одухотворенная точка», отражает условность и ограниченность модели. С другой стороны, он указывает на некоторую аналогию с материальной точкой в механике.

Существенное отличие состоит в том, что в данном случае вынуждающие «силы» возникают в сознании самого субъекта и в этом смысле имеют внутреннее происхождение.

Предположим, что движение «живой точки» происходит в плоскости и параметры x, y — это мгновенные координаты точки. Тогда $V_x = \dfrac{dx}{dt}$; $V_y = \dfrac{dy}{dt}$ — проекции скорости точки.

Определим альтернативы $\sigma_i \in S_a$ как «призы», расположенные на плоскости OXY в точках (x_i, y_i) и имеющие для субъекта ценность равную R_i^e. Например, это могут быть дополнительные ресурсы, которые получает субъект, достигнув позиции (x_i, y_i). В начале процесса субъект располагает определенными ресурсами, которые расходуются пропорционально проходимому расстоянию.

«Психическую силу» будем считать пропорциональной величине предпочтения $\pi(\sigma_i \mid \sigma)$, где σ определяется мгновенным (актуальным) положением субъекта, и направленной к точке расположения альтернативного «приза» (x_i, y_i) (рис.7.47).

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{ix} &= \boldsymbol{k}\pi(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{\sigma})\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}_i}; \\ \boldsymbol{f}_{iy} &= \boldsymbol{k}\pi(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{\sigma})\frac{\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{d}_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.105}$$

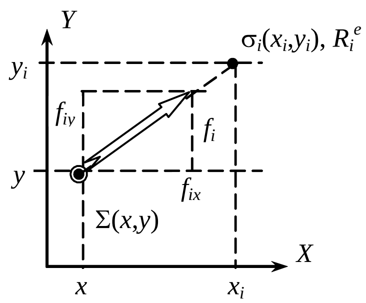


Рис. 7.47

Суммарные силы действующие вдоль осей OX и OY, равны соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_x &= \boldsymbol{k}\sum_{i=1}^{N}\pi(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{\sigma})\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}_i}; \\ \boldsymbol{f}_y &= \boldsymbol{k}\sum_{i=1}^{N}\pi(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{\sigma})\frac{\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{d}_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.106}$$

Здесь $d_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$.

С четом сказанного выше мы можем записать следующую модель динамики «живой точки»:

$$\frac{\boldsymbol{dV}_x}{\boldsymbol{dt}} + \frac{1}{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{k}\sum_{i=1}^{N}\pi(\boldsymbol{\sigma}_i \mid \boldsymbol{\sigma})\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}_i}; \tag{7.107}$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}_y}{d\boldsymbol{t}}+\frac{1}{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{V}_y=\boldsymbol{k}\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\sigma_i\mid\sigma\right)\frac{y_i-y}{d_i}; \tag{7.108}$$

$$\frac{d\pi\left(\sigma_i\mid\sigma\right)}{dt}=-\boldsymbol{m}\left(\pi\left(\sigma_i\mid\sigma\right)-\pi^{\circ}\left(\sigma_i\mid\sigma\right)\right);\ \left(\boldsymbol{i}\in\overline{1,\boldsymbol{N}}\right). \tag{7.109}$$

$$\frac{dx}{dt}=\boldsymbol{V}_x; \tag{7.110}$$

$$\frac{dy}{dt}=\boldsymbol{V}_y; \tag{7.111}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}^d}{dt}=-\boldsymbol{n}\sqrt{\boldsymbol{V}_x^2+\boldsymbol{V}_y^2}. \tag{7.112}$$

В уравнениях (7.107)—(7.112) k, s, m, n — постоянные структурные параметры.

Последнее уравнение описывает изменение располагаемых ресурсов и отражает допущение, что затрата ресурсов пропорциональна проходимому пути: $dR^d=-ndl=-n\sqrt{V_x^2+V_y^2}\,dt.$

Группа N уравнений (7.109) описывает процесс адаптации распределения предпочтений к оптимальному $\pi^{\circ}(\sigma_i\mid\sigma)$, которое изменяется с течением времени. Некоторые другие виды уравнений адаптации, в том числе, в случае переменной нормировки описаны ранее. Оптимальное (каноническое) распределение $\pi^{\circ}(\sigma_i\mid\sigma)$ зависит от выбора функции эффективности.

Предположим, что $\pi^{\circ}(\sigma_i\mid\sigma)$ имеет вид:

$$\pi^{\circ}\left(\sigma_i\mid\sigma\right)=\frac{\boldsymbol{R}_i^e\left(\boldsymbol{t}\right)\boldsymbol{e}^{-\beta\sqrt{\left(x_i-x\right)^2+\left(y_i-y\right)^2}\,\boldsymbol{R}^{d^{-1}}\left(x,y\right)}}{\sum\limits_{j=1}^{N}\boldsymbol{R}_j^e\left(\boldsymbol{t}\right)\boldsymbol{e}^{-\beta\sqrt{\left(x_i-x\right)^2+\left(y_i-y\right)^2}\,\boldsymbol{R}^{d^{-1}}\left(x,y\right)}}. \tag{7.113}$$

Здесь $R_i^e(t)$ «стоимость» (полезность «приза», находящегося в точке с координатами x_i, y_i и соответствующего альтернативе σ_i (рис.7.45), $R^d(x, y)$ — величина остаточных располагаемых ресурсов в тот момент, когда субъект находится в точке (x, y). Распределение (7.113) устроено так, что $\pi^{\circ}(\sigma_i\mid\sigma)$ увеличивается по мере приближения к точке (x_i, y_i), то есть к «призу» R_i^e и стремится к 1, если точка (x_i, y_i) является ближайшей. При этом другие предпочтения для более удаленных точек стремятся к нулю. Это означает, что по мере «выработки» располагаемых ресурсов (в данной модели) энтропия препочтений стремится к нулю.

В пределе, при $R_i^d\to 0$, субъект сохраняет ненулевое предпочтение к «ближайшей» альтернативе и теряет всякий интерес к остальным альтернативам. Это обстоятельство легко усмотреть из следующих рассуждений. Пусть имеется две альтернативы и предпочтения определяются формулами:

$$\boldsymbol{\pi}_1=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{-\beta x_1 y^{-1}}}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{-\beta x_1 y^{-1}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{-\beta x_2 y^{-1}}};\ \boldsymbol{\pi}_2=\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{-\beta x_2 y^{-1}}}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{-\beta x_1 y^{-1}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{-\beta x_2 y^{-1}}};\ \boldsymbol{x}_1\ge 0;\ \boldsymbol{x}_2\ge 0.$$

Запишем их в виде:

$$\pi_1 = \frac{1}{1+\bar{b}e^{-\beta(x_2-x_1)y^{-1}}};\ \pi_2 = \frac{1}{1+\bar{a}e^{-\beta(x_1-x_2)y^{-1}}};\ \bar{b}=\frac{b}{a};\bar{a}=\frac{a}{b}$$

Легко заметить, что, если $x_2 > x_1$, то

$$\lim_{y\to 0}\pi_1 = 1;\ \lim_{y\to 0}\pi_2 = 0$$

и, наоборот, если $x_2 < x_1$, то

$$\lim_{y\to 0}\pi_1 = 0;\ \lim_{y\to 0}\pi_2 = 1.$$

Предполагается также, что при полном исчерпании ресурсов движение «точки» прекращается. Таким образом, должна быть исключена «жизнь в кредит».

Моделирование было выполнено также для другого вида канонического распределения, а именно

$$\pi^{\circ}(\sigma_i\,|\,\sigma) = \frac{R_i^e(t)e^{-\beta\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}\right)^{-1}R^d}}{\sum_{j=1}^{N}R_j^e(t)e^{-\beta\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}\right)^{-1}R^d}}. \quad (7.\ 114)$$

Это распределение устроено так, что по мере приближения к одной из целей (при ненулевых остаточных ресурсах R^d), то есть при $d_i = \sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2} \to 0$, соответствующее предпочтение стремится к 1, а остальные предпочтения стремятся к 0. Это видно из следующего расчета.

$$\pi_1 = \frac{ae\beta^{\frac{y}{x_1}}}{ae\beta^{\frac{y}{x_1}}+be\beta^{\frac{y}{x_2}}};\ \pi_2 = \frac{be\beta^{\frac{y}{x_2}}}{ae\beta^{\frac{y}{x_1}}+be\beta^{\frac{y}{x_2}}}.$$

Преобразуя, находим:

$$\pi_1 = \frac{1}{1+\bar{b}e^{\beta\left(\frac{y}{x_2}-\frac{y}{x_1}\right)}};\ \pi_2 = \frac{1}{1+\bar{a}e^{\beta\left(\frac{y}{x_1}-\frac{y}{x_2}\right)}},$$

Если $x_1 \to 0$ при $x_2 \neq 0$; $x_2 > 0$, $x_1 > 0$ и $y \neq 0$

$$\lim_{x_1\to 0}\pi_1 = 1;\ \lim_{x_1\to 0}\pi_2 = 0,,$$

и наоборот при $x_2 \to 0$ при $x_1 \neq 0$; ; $y \neq 0$

$$\lim_{x_2\to 0}\pi_1 = 0;\ \lim_{x_2\to 0}\pi_2 = 1.$$

Из уравнений (7.107), (7.108) следует, что, если «силы» f_{ix} и f_{iy} не равны нулю, то «точка» имеет ненулевую скорость, с другой стороны «силы» f_{ix} и f_{iy} не могут быть равны нулю в силу условий нормировки распределения $\pi^{\circ}(\sigma_i\,|\,\sigma)$ и выше приведенных

рассуждений с предельными переходами. Таким образом, в модели исключается возможность наличия равновесных положений.

Модифицируем уравнения (7.107) и (7.108) включив в них «консервативную» составляющую. Следующие уравнения обеспечивают наличие точек равновесия:

$$\frac{dV_x}{dt}+\frac{1}{s}V_x+bx=k\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i\,|\,\sigma)\frac{x_i-x}{d_i}; \tag{7.115}$$

$$\frac{dV_y}{dt}+\frac{1}{s}V_y+bx=k\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i\,|\,\sigma)\frac{y_i-y}{d_i}; \tag{7.116}$$

Такая модель фактически совпадает с уравнениями движения материальной точки при наличии «упругого элемента» в среде с вязким сопротивлением.

Расчеты выполнены для случая, изображенного на рис. 7.46.

В начальном положении (x = 40, y = 40) имело место состояние безразличия:

$$\pi(\sigma_i\,|\,\sigma)=\frac{1}{3}\ \ (\forall i\in\overline{1,3}).$$

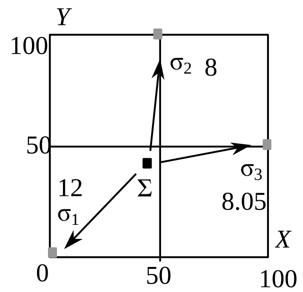


Рис. 7.48

На рис. 7.49, *а*, *б*, *в*, *г*, *д* представлен случай, когда субъект начиная движение в направлении σ_2 затем резко изменяет его и в конце концов достигает «приза» σ_3 в точке с координатами $x = y_5 = 100$; $y = y_6 = 50$ (рис. 7.49, *б*, *в*, *г*).

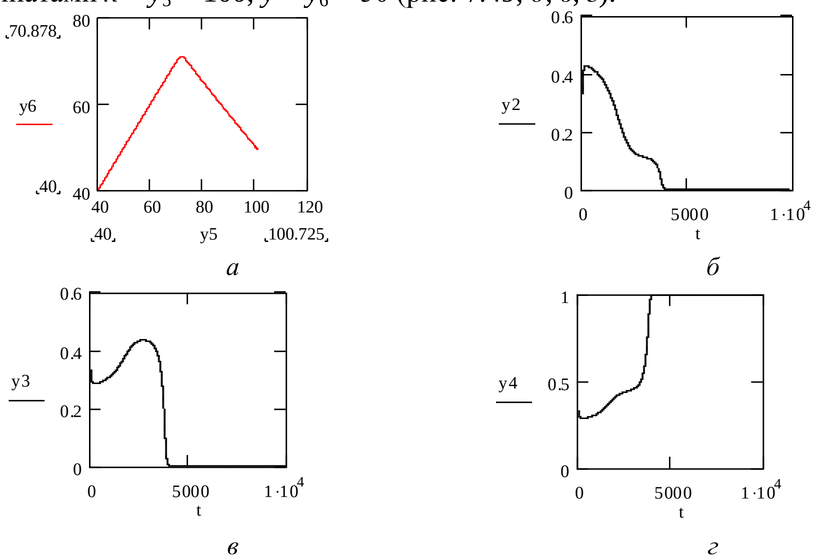


Рис. 7.49

Предпочтения $\pi(\sigma_1) = y_2$; $\pi(\sigma_2) = y_3$; $\pi(\sigma_3) = y_4$ в начальный момент считаются одинаковыми и равными, затем изменяются таким образом, что $\pi(\sigma_1) \to 0$; $\pi(\sigma_2) \to 0$; $\pi(\sigma_3) \to 1$, энтропия $H_\pi \to 0$ (рис. 7.49, *д*).

Другой вариант решения, соответствующий другим значениям структурных параметров показан на рис. 7.50, *а—и*.

План движения «точки» в координатах $x = y_5$, $y = y_6$ представлен на рис. 7.50, *а* и свидетельствует, что «точка» достигает первой цели (σ_1) после некоторых колебаний.

Изменение координат и скоростей $V_x = y_0$; $V_y = y_1$, а также $\pi(\sigma_1) = y_2$; $\pi(\sigma_2) = y_3$; $\pi(\sigma_3) = y_4$ показано на рис. 7.50, *б—и*.

Из рис.7.50 видно, что к моменту достижения σ_1 начальные ресурсы (100 у.е.) полностью исчерпаны.

Если на поле два субъекта — игрока (две «точки»), имеющих в качестве альтернатив одни и те же объекты (S_{a1} совпадает с S_{a2}), то появляется возможность каким-либо образом отразить в модели их взаимодействие между собой. Спектр взаимодействий весьма широк: от союза и взаимопомощи, до конфликта и противодействия.

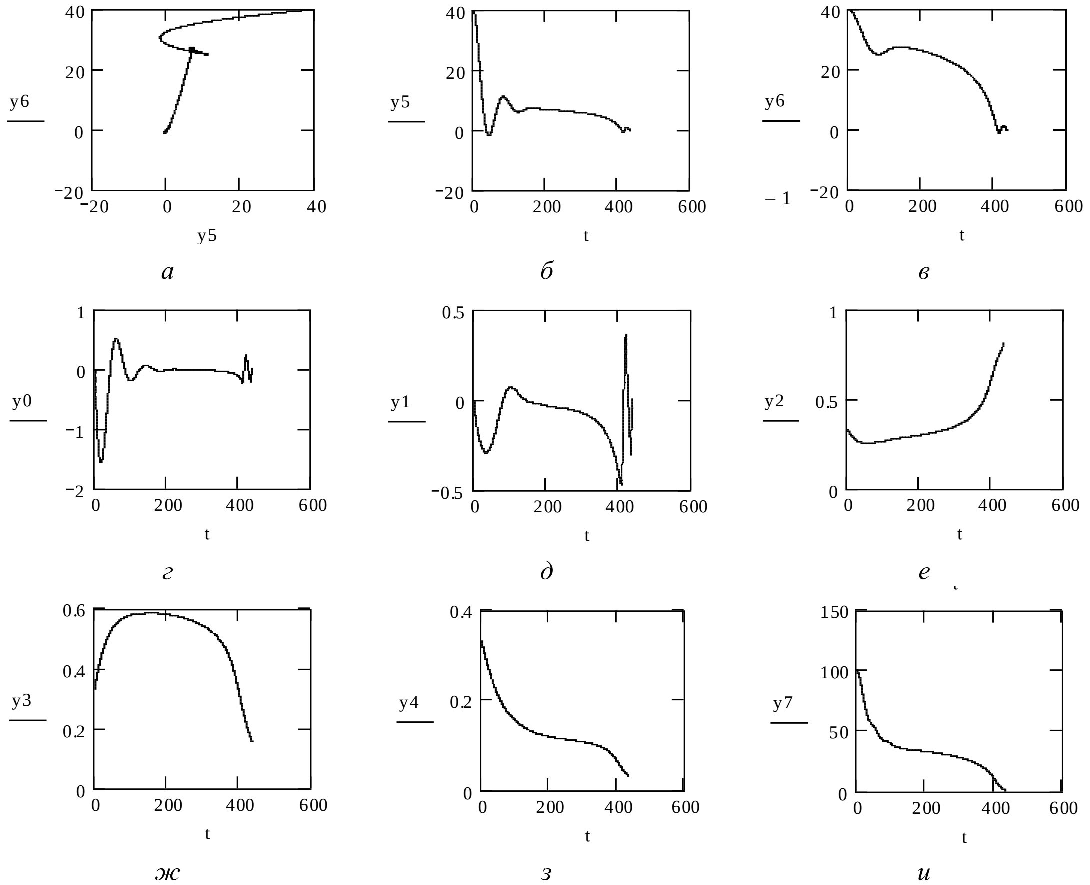


Рис. 7.50

Модель групповой динамики группы, состоящей из двух субъектов (M = 2) представляет собой объединение уравнений, описывающих поведение каждого из субъектов в одну систему уравнений. При этом в уравнение движения должны быть включены члены, обусловленные взаимодействием между субъектами. Говоря о групповой динамике, мы употребим обозначение, характеризующее размерность задачи: $M \times N$, где M число субъектов в группе, N — размерность расширенного множества альтернатив

$$\boldsymbol{S}_a = \bigcup_{j=1}^{M} \boldsymbol{S}_{aj}.$$

Рассмотрим вначале модель 2×3 группы из двух субъектов при наличии трех альтернатив, имеющих одинаковую «ценность» для обоих субъектов. Модель динамики в этом случае состоит из 16 дифференциальных уравнений первого порядка.

В качестве «силы» вызванной взаимодействием выберем следующее выражение:

$$\frac{\xi(j)-\xi(k)}{d_{jk}+\varepsilon}\frac{\vec{r}_k-\vec{r}_j}{d_{jk}+\varepsilon};\ (\varepsilon > 0). \tag{7.117}$$

Здесь $\xi(j)$ — интегральные рейтинговые предпочтения, $\vec{r}_j$ — радиус-векторы мгновенного положения субъектов-»точек», d_{12} — расстояние между «точками» в данный момент.

Смысл этого выражения сводится к следующему: чем больше различие в рейтингах, тем больше «сила», чем ближе расположены «точки», тем больше сила, причем при $d_{jk} \to 0$ сила не стремится к бесконечности ввиду наличия в знаменателе малой положительной постоянной ε. Если $\xi(j) > \xi(k)$, то «сила», действующая на субъект k, направлена в сторону от j (см. рис. 7.51).

В то же время «сила», действующая на j, направлена в сторону k. Таким образом, должна возникать своеобразная «погоня»: субъект с более высоким рейтингом преследует субъекта с более низким рейтингом. Это происходит на фоне обоюдного стремления к альтернативным целям «призам». Конечно, это лишь частное предположение. Можно представить себе такие взаимодействия, которые вызывают дополнительные затраты ресурсов каждой из сторон, или «отъем» ресурсов одним субъектом у другого субъекта при выполнении определенных условий.

Рейтинги в выражении (7.117) определяются по формуле

$$\xi(j) = \frac{e^{\alpha R_j^d}}{\sum_{q=1}^{M} e^{\alpha R_q^d}};\ (\boldsymbol{M} = 2), \tag{7.118}$$

то есть тем больше, чем большими ресурсами в данный момент располагает субъект. Поскольку располагаемые ресурсы в процессе движения изменяются, то изменяются и рейтинги, а, следовательно, и силы взаимодействия.

Схема первоначального размещения на «игровом поле» двух игроков-»точек» и трех альтернативных «призов» σ_1, σ_2, σ_3 показана на рис. 7.52.

Оба игрока имеют начальные распределения предпочтений, соответствующие полному безразличию. План движения обоих игроков на рис. 7.53, *а* свидетельствует о том, что, первый игрок, обладающий большими ресурсными возможностями (350 у.е. против 250 у.е. второго игрока), достигает третьей альтернативной «цели», одновременно «отталкивая» второго игрока то цели. На рис. 7.53 $y_5 = x_1$; $y_6 = y_1$; $y_{13} = x_2$; $y_{11} = y_2$. Из рис. 7.53, *б*, *в* усматриваем, что ресурсы первого и второго игроков ($R_1^d = y_7$, $R_2^d = y_{15}$) не исчерпаны. На рис. 7.54, *а* показан другой вариант, когда при тех же прочих условиях начальные ресурсы распределены иначе: $R_1^d(0) = y_7 = 150$ у.е., $R_2^d(0) = y_5 = 250$ у.е. Из плана движения следует, что второй игрок более богатый в большей степени увлечен борьбой с соперником, препятствует его движению к «цели», но при этом и сам «цели» не достигает. Первый игрок лишается возможности достичь какой-либо из «целей» (рис.7.54, *в* $R_1^d = y_7$, $R_2^d = y_{15}$).

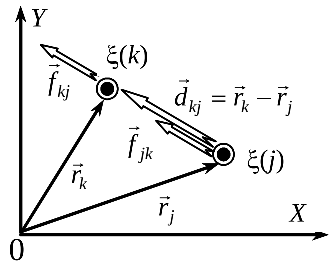


Рис. 7. 51

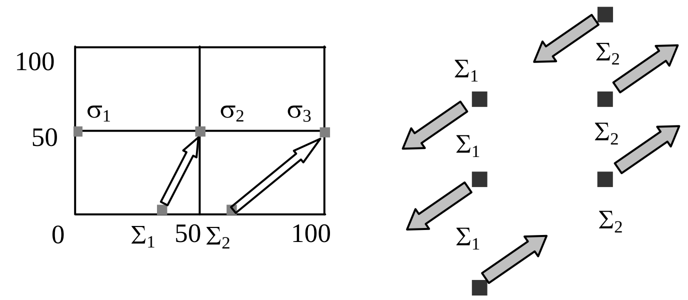
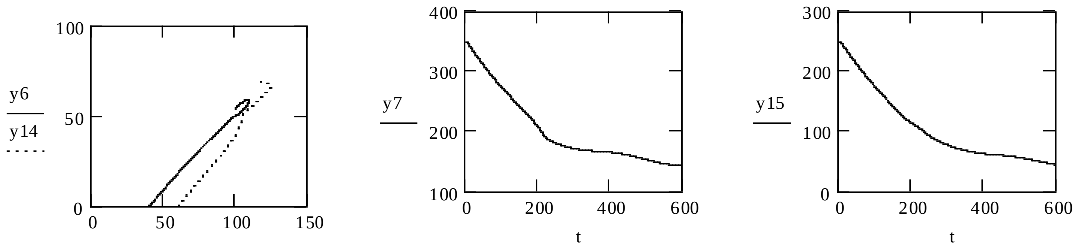


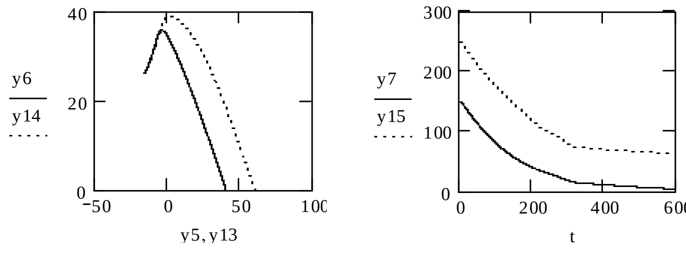
Рис. 7.52



а *в* *с*

Рис.7.53

На рис. 7.55 представлен еще более радикальный случай, когда «взаимоотношения» между игроками превалируют над стремлением к «цели» настолько, что оба практически к ней не продвигаются, оставаясь вблизи нулевого (начального) уровня.



а *в*

Рис. 7.54

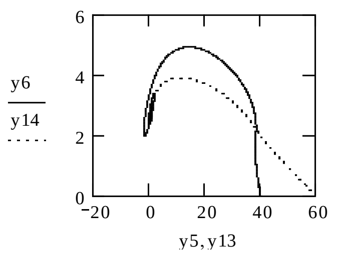


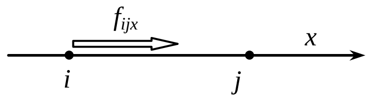
Рис. 7.55

Большее разнообразие вариантов развития ситуации и некоторые дополнительные эффекты возникают при моделировании динамики группы, состоящей из четырех субъектов. Есть основания предполагать, что в этом случае могут уже проявиться элементы корпоративного поведения.

Рассмотрим групповую динамику четырех субъектов при наличии трех альтернатив (систему «4×3»): S_ξ: ($j \in \overline{1,4}$), S_a: ($i \in \overline{1,3}$). Сделаем дополнительные предположения относительно «эндогенных» сил, вынуждающих каждую из «точек» двигаться. Кроме «сил» притяжения к заданным целевым объектам-»призам» на каждую из «точек» действуют «силы», обусловленные взаимодействием между ними.

В данном случае эти «силы» имеют характер сил притяжения или отталкивания. Все сообщество «точек»-субъектов делится на два класса «богатых» и «бедных» с помощью граничного рейтинга $\xi^*(R_*^d)$, определяемого соответствующим граничным значением располагаемых ресурсов. Если $\xi_j > \xi^*$, субъект относится к классу «богатых», и если $\xi_j < \xi^*$ — к классу «бедных».

Обозначим через $\vec{f}_{ij}$ «силу» действующую на субъект «i» со стороны субъекта j.



Пусть f_{ijx} — проекция «силы» $\vec{f}_{ij}$ на ось OX. Приведенные ниже формулы построены так, что субъекты, принадлежащие к одному классу взаимно притягиваются:

$$\boldsymbol{f_{ijx}} = \xi_j \frac{\left(\xi_i - \xi^*\right)\left(\xi_j - \xi^*\right)}{\left|\xi_i - \xi^*\right|\left|\xi_j - \xi^*\right|} \frac{\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{d_i^2} + \varepsilon} \left(\left|\xi_i - \xi_j\right| + \varepsilon\right)^{\varphi_{ij}}. \tag{7.119}$$

Видим, что «сила», действующая на «i» со стороны «j» пропорциональна величине рейтинга ξ_j. Направление «силы» определяется вторым сомножителем — дробью, которая принимает значения ±1.

Множитель $\dfrac{x_j - x_i}{d_i} = \cos\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i, VX\right)$, малый параметр $\varepsilon > 0$ имеет чисто вычислительный смысл и включен с целью «обойти» возможные нули в знаменателе, $d_i = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2}$. Множитель $(d_i + \varepsilon)^{-1}$ в любом случае обеспечивает увеличение «силы» взаимодействия при увеличении «геометрической» близости субъектов, наконец, последний сомножитель

$$\left(\left|\xi_i - \xi_j\right| + \varepsilon\right)^{\varphi_{ij}} \tag{7.120}$$

характеризует влияние рейтинговой близости. Показатель φ_{ij} выбран в виде:

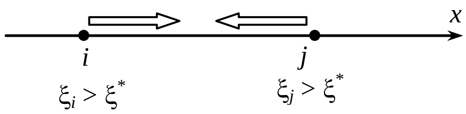
$$\varphi_{ij} = -\mu \frac{\left(\xi_i - \xi^*\right)\left(\xi_j - \xi^*\right)}{\left|\xi_i - \xi^*\right|\left|\xi_j - \xi^*\right|} = \begin{cases} +\mu; \\ -\mu, \end{cases} \quad \mu > 0 \tag{7.121}$$

и работает по следующему правилу:

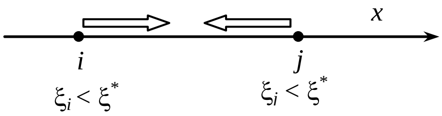
1. Оба субъекта «богатые» $\xi_i > \xi^*$, $\xi_j > \xi^*$, тогда $\varphi_{ij} = -\mu$ и последний сомножитель в (7.119) имеет вид:

$$\frac{1}{\left(\left|\xi_i - \xi j\right| + \varepsilon\right)^{\mu}} \tag{7.122}$$

и, следовательно, чем меньше различие рейтингов ξ_i и ξ_j, тем больше «притяжение»



2. Оба субъекта «бедные» $\xi_i < \xi^*$, $\xi_j < \xi^*$, тогда также $\varphi_{ij} = -\mu$ и снова имеет место «притяжение»



3. Субъекты принадлежат разным «классам»: один «бедный», другой «богатый», например, $\xi_i < \xi^*$, $\xi_j > \xi^*$, тогда также $\varphi_{ij} = \mu > 0$, и в выражение для силы входит сомножитель

$$\left(\left|\xi_i - \xi_j\right| + \varepsilon\right)^{\mu}. \tag{7.123}$$

Имеет место «отталкивание», причем, оно тем сильнее, чем больше разность рейтингов ξ_i и ξ_j и ≈ 0, если $\xi_i = \xi_j = \xi^*$. Рейтинги нормированы: $\sum_{j=1}^{M} \xi_j = 1$ и это условие выполняется для любого момента времени.

В модели как для предметных предпочтений $\pi_j(\sigma_k)$, так и для рейтинговых предпочтений применяются релаксационные схемы.

$$\frac{d\pi_j\left(\sigma_k\right)}{dt} = -m_j\left(\pi_j\left(\sigma_k\right) - \pi_j^{\circ}\left(\sigma_k\right)\right); \quad j \in \overline{1,4}; \quad k \in \overline{1,3}.. \tag{7.124}$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -p_j\left(\xi_j - \xi_j^{\circ}\left(R_j^d, ...\right)\right). \tag{7.125}$$

Здесь m_j и p_j — параметры, определяющие «скорость» релаксации. Уровень граничного рейтинга ξ^* разделяющего сообщество на два класса считается равным среднему рейтингу $\bar{\xi} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \xi_j = \frac{1}{M}$. Если все рейтинги $\xi_j = \xi^* = \frac{1}{M}$, то имеется полное рейтинговое равенство, а в соответствии с принятой формой распределения для рейтингов, и ресурсное равенство. $\pi_j^{\circ}(\sigma_k)$ и $\xi_j^{\circ}(R_j^d, ...)$ в данном случае — канонические распределения. Приняты следующие модели:

$$\xi_j^{\circ} = \frac{e^{\alpha_j R_j^d}}{\sum\limits_{q=1}^{M} e^{\alpha_q R_q^d}}; \tag{7.126}$$

$$\pi_j^{\circ}\left(\sigma_k\right) = \frac{R_k e^{-\beta_j \sqrt{\left(x_j - x_k\right)^2 + \left(y_i - y_k\right)^2}} \left(R_j^d\right)^{-1}}{\sum\limits_{s=1}^{N} R_s e^{-\beta_j \sqrt{\left(x_j - x_s\right)^2 + \left(y_i - y_s\right)^2}} \left(R_j^d\right)^{-1}}. \tag{7.127}$$

Последнее соотношение совпадает с принятым в предыдущих задачах.

Движение «живых» точек, как и ранее, происходит в плоскости *OXY*.

Пусть $\vec{V}_j = \left(V_{jx}, V_{jy}\right)$ — вектор скорости точки «*j*». Для координат скорости V_{jx} приняты следующие уравнения:

$$\frac{dV_{jx}}{dt} = -\frac{1}{\tau_j} V_{jx} - b_j x_j + k_j \sum_{r=1}^{3} \pi_j\left(\sigma_r\right) \frac{x_r - x_j}{\sqrt{\left(x_j - x_r\right)^2 + \left(y_j - y_r\right)^2}} +$$

$$+ n_i \sum_{i=1}^{4} \xi_i \frac{\left(\xi_j - \xi^*\right)\left(\xi_i - \xi^*\right)}{\left|\xi_j - \xi^*\right|\left|\xi_i - \xi^*\right|} \frac{x_i - x_j}{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \varepsilon} \left(\left|\xi_i - \xi_j\right| + \varepsilon\right)^{\varphi_{ij}}; \tag{7.128}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = V_{jx}. \tag{7.129}$$

Аналогичный вид имеют уравнения для координаты y_j и скорости V_{jy}.

Полная система уравнений для системы «4×3» содержит 52 дифференциальных уравнения первого порядка.

Результаты вычислений для различных вариантов численной реализации структурных параметров показаны на рис. 7.56. Явным образом проявляются две тенденции: стремление каждого субъекта достичь одной из альтернативных целей и стремление подавить конкурентов — соперников, помешать им достичь цели. В процессе движения, как и ранее, происходит выработка ресурсов пропорционально пройденному расстоянию. При полном истощении ресурсов движение должно быть приостановлено, при этом ни одна из целей не может быть достигнута.

Моделирование было проведено для начального состояния системы «4×3», представленного на рис. 7.56.

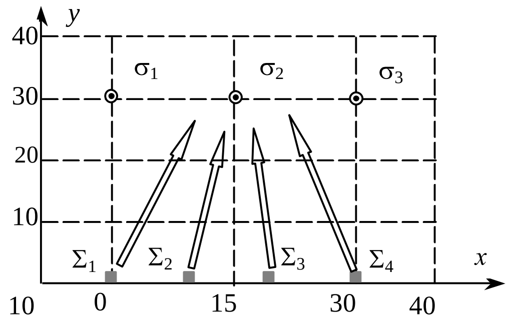


Рис. 7.56

Величины «призов» в точках σ_1, σ_2, σ_3 в различных вариантах были различными, начальные значения располагаемых ресурсов также варьировались от варианта к варианту. На рис. 7.57 показан план движения 4 «точек» в направлении к целям. Однако борьба друг с другом оказывается более привлекательной по сравнению с желанием получить приз. Этому случаю соответствует разбиение группы поровну на два класса: «бедных» и «богатых», при этом $R_1^d(0) > R^{d*}$; $R_2^d(0) > R^{d*}$; $R_3^d(0) < R^{d*}$; $R_4^d(0) < R^{d*}$. Принималось, что $R^{d*} = 10$ у. е, $R_1^d(0) = R_2^d(0) = 15$ у.е., $R_3^d(0) = R_4^d(0) = 5$ у. е.

На рис. 7.58 представлен случай, когда «богатыми» являются третий и четвертый субъекты. Структурные коэффициенты модели выбраны так, что побеждает стремление к цели. Продвижение «богатых» к цели σ_2 происходит с некоторой задержкой, при этом они в конце концов объединяются и отбрасывают «бедных», которые отступая также объединяются (их траектории сближаются).

Рис. 7.59 демонстрирует ситуацию, когда обе группы, и «богатые» и «бедные» достигают района цели σ_2, тенденции к объединению и борьба не столь сильны вдали от цели, однако в окрестности цели возникает интенсивная борьба, на которую затрачивается значительная часть располагаемых ресурсов.

На рис. 7.60 представлен случай, когда имеется только одна альтернативы σ_3 (призы в точках σ_1 и σ_2 равны нулю). Все субъекты достигают района расположения цели σ_3 и устраивают в окрестности цели интенсивную «потасовку».

В этом случае в качестве дополнительного фактора введена различная скорость расходования ресурсов, причем «богатые» расходуют ресурсы вдоль траектории в два раза быстрее, чем бедные, а также член, имитирующий эффект «пружины».

Вариант, показанный на рис. 7.61, отличается от предыдущих случаев тем, что три субъекта являются «бедными» (Σ_1, Σ_2, Σ_3) и один «богатым» (Σ_4) и только две «ненулевых» альтернативы σ_1 и σ_3. «Богатый» втягивается в борьбу, но проигрывает действующим согласовано ««бедным». Заметим, что в этом варианте проявляется корпоративность действий «бедных», траектории которых имеют качественно одинаковую форму. Вместе они отбрасывают «богатого» игрока за пределы игрового поля, в сторону от целей. Происходит маленькая виртуальная «революция». При этом, однако, никто не достигает цели.

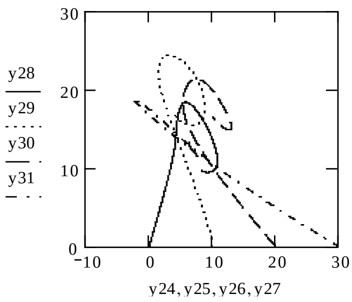


Рис. 7.57

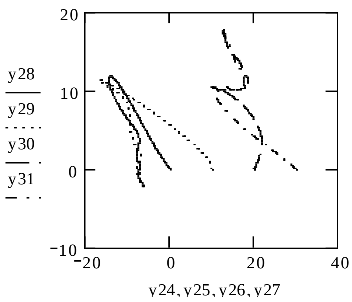


Рис. 7.58

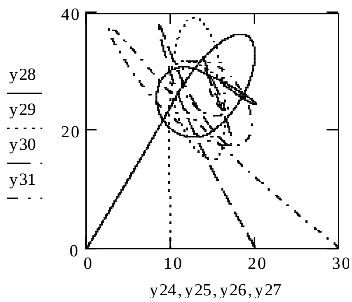


Рис. 7.59

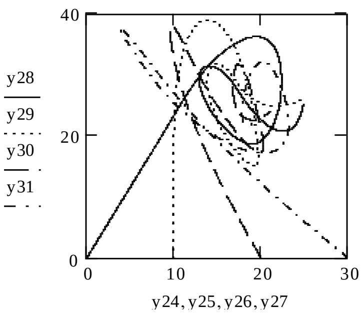


Рис. 7. 60

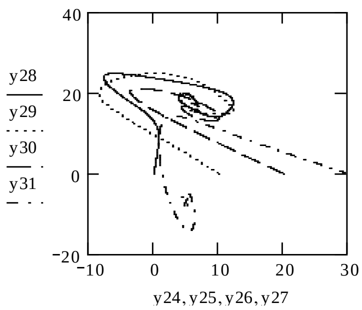


Рис. 7.61

Приведенные модели являются весьма частными, в них содержится большое число структурных параметров, идентификация которых на основе экспериментальных данных является, по крайней мере пока, нереальной задачей.

Выбором определенной величины этих параметров можно добиться, проявления тех или иных эффектов.

Роль подобных моделей автор видит в том, что они позволяют проводить качественный анализ поведения субъектов и групп субъектов и отыскивать эффекты, отвечающие здравому смыслу.

Очевидны пути дальнейшей модификации и обобщения моделей. Например, можно отказаться от «неподвижности» целей-альтернатив, использовать более сложные схемы расходования ресурсов, распределенное во времени получение доходов. Можно рассматривать схемы, в которых координаты субъектов имеют другой — не пространственный смысл. В частности, они могут быть экономическими показателями, а модели приобретут экономическое содержание.

Однако главные усовершенствования, по-видимому, должны относиться к конструкции «внутренних сил», в том числе, «сил взаимодействия». На этом пути имеется возможность тестировать разнообразные виды канонических распределений, представленных в предыдущих главах.

7.9 Динамика рейтингов в группе, решающей корпоративную проблему. Рейтинговое расслоение

Рассмотрим простой количественный пример динамики рейтинговых предпочтений. Предположим, что рейтинги в данный момент определяются исключительно индивидуальными располагаемыми ресурсами $R_j^{disp} = R_j^{d}$:

$$\xi(j) = \frac{e^{\beta R_j^d}}{\sum_{q=1}^{M} e^{\beta R_j^d}}. \tag{7.130}$$

Пусть имеется группа из трех субъектов: $M = 3$ и общее множество альтернатив S_a, содержащее две альтернативы $N = 2$. Обе альтернативы являються корпоративними и осуществляется консолидация ресурсов. Пусть «скорость» расходования располагаемых ресурсов (равная потребной «скорости»)

$$u(t) = u(\sigma_1) + u(\sigma_2),$$

где $u(\sigma_1)$ — потребная «скорость» инвестирования ресурсов в разрешение проблемы P_1: $\sigma_0 \to \sigma_1$; $u(\sigma_2)$ — в разрешение проблемы P_2: $\sigma_0 \to \sigma_2$. Обе проблемы разрешаются одновременно начиная с момента $t = 0$. В процессе разрешения проблем P_1 и P_2 практически сразу проявляется положительный эффект (доход), «скорость» поступления которого

$$\boldsymbol{b(t) = b(\sigma_1) + b(\sigma_2)}.$$

Приток новых ресурсов, которые увеличивают располагаемые, описывается уравнениями

$$\frac{db(\sigma_1)}{dt} = -\frac{1}{\tau_1} b(\sigma_1) + \frac{1}{\tau_1} f_1 u(\sigma_1), \tag{7.131}$$

$$\frac{db(\sigma_2)}{dt} = -\frac{1}{\tau_2} b(\sigma_2) + \frac{1}{\tau_2} f_2 u(\sigma_2). \tag{7.132}$$

Здесь τ_1 и τ_2 — постоянные времени возникновения «отдачи» ресурсов; f_1 и f_2 — технологические коэффициенты, определяющие эффективность вложения ресурсов в разрешения, соответственно, проблем P_1 и P_2: $\mathrm{f}_1 > 1$; $f_2 > 1$.

Если $\tau_1 = \tau_2 = 0$, преобразование ресурсов в результат (в новые ресурсы) происходит мгновенно:

$$\boldsymbol{b(\sigma_i) = f_i u(\sigma_i)}.$$

Примем, что доли ресурсов, вкладываемые в P_1 и P_2 постоянны, то есть

$$\boldsymbol{u(\sigma_1) = \mu u(t);\ u(\sigma_2) = (1 - \mu)u(t);\ \mu = \mathrm{const}}.$$

Пусть изменение располагаемых ресурсов субъектов описывается уравнениями

$$\frac{dR_j^d}{dt} = -\eta_j u(t) + \xi(j)\big(b(\sigma_1) + b(\sigma_2)\big), \tag{7.133}$$

где η_i — нормированные коэффициенты

$$\sum_{j=1}^{3} \eta_j = 1,$$

определяющие относительные доли субъектов в процессе консолидации ресурсов. Мы рассмотрим два случая:

$$1.\ \eta_j = \frac{1}{M} = \frac{1}{3} = \text{const}.$$

$$2.\ \eta_j = \frac{R_j^d}{\sum_{q=1}^{3} R_j^q} \neq \text{const}.$$

Во втором случае η_j — функция времени и определяется как удельная доля располагаемых ресурсов данного субъекта в общих располагаемых ресурсах группы. Из (7.130) видно, что $\xi(j)$ также функции времени. Смысл последнего члена в уравнениях (7.133) состоит в том, что вновь получаемые ресурсы делятся пропорционально рейтингам субъектов в данный текущий момент времени. Рейтинги экспотенциально усиливают влияние располагаемых ресурсов.

Рассматриваемый здесь вариант дележа прибыли (дохода) является весьма упрощенным и гипотетическим. Вполне законным является вопрос: в каком обществе возможен такой дележ — в обществе, которое живет «по закону» или «по понятиям». Может быть такой принцип существовал в доисторические времена.

Известны различные схемы дележа прибыли и распределения затрат при решении корпоративных проблем [144]. В данном случае автор преследует одну цель: на максимально простых примерах продемонстрировать как влияет на развитие экономической ситуации учет динамики рейтингов, для которых имеются канонические распределения, получаемые на основе постулирования вариационного принципа. Эта задача представляет первостепенный интерес.

Если M субъектов участвуют в разрешении корпоративной проблемы и суммарный ожидаемый доход $R^{exp} = b$, а затраты каждого $R_j^{req} = u_j$, то прибыль имеется, если

$$\boldsymbol{b} \geq \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{u}_j \tag{7.135}$$

и равна

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} - \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{u}_j. \tag{7.136}$$

«Эгалитарное» деление прибыли предполагает деление поровну так, что доля дохода субъекта j

$$\text{"доля } \boldsymbol{j}\text{"} = \boldsymbol{u}_j + \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{M}}. \tag{7.137}$$

Другая модель согласно [144] — «пропорциональное» деление дохода: отдача на единицу индивидуальных затрат одинакова:

$$\text{"доля } \boldsymbol{j}\text{"} = \boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{u}_j}{\Sigma \boldsymbol{u}_i}. \tag{7.138}$$

Рассмотрим следуя [144] модели распределения затрат на производство неделимого продукта с общей суммарной «скоростью» затрат. Пусть b_j — доход j-го субъекта. Разрешение проблемы эффективно, если

$$\boldsymbol{b} = \sum \boldsymbol{b}_j \geq \boldsymbol{u}. \tag{7.139}$$

«Пропорциональное» распределение затрат состоит в том, что субъект j «платит» сумму u_j пропорциональную его ожидаемому доходу b_i, то есть

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\boldsymbol{b}_j}{\Sigma \boldsymbol{b}_i};\ \boldsymbol{u}_j \geq 0. \tag{7.140}$$

При этом никто не платит больше своего дохода.

«Эгалитарная идея» состоит в уравнивании долей затрат и уравнивании чистой экономии на затратах.

Равномерное распределение затрат предполагает что

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{M}}.$$

Решение u_j с равной прибылью определяется формулой

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{b}_j - \frac{\Sigma \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{M}}. \tag{7.141}$$

Как видим, $b_i - u_j > 0$ одинаковы для $\forall i \in \overline{1,M}$.

Рассмотрим следующую модель: располагаемые ресурсы субъекта j в данный момент $R_j^{disp} = Y_j$, суммарный доход в единицу времени $b = \Sigma b_j$, где b_j — индивидуальные «скорости» получения дохода, затраты в единицу времени

$$\boldsymbol{u} = \Sigma \boldsymbol{u}_j,$$

где u_j — индивидуальные «скорости» затрат. Предположим, что u_j пропорциональны относительному богатству:

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{Y}_j}{\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{Y}_i}, \tag{7.142}$$

в тоже время доход от «разрешения корпоративной проблемы» в единицу времени пропорционален интегральному рейтингу субъекта

$$\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}\xi(\boldsymbol{j}), \tag{7.143}$$

где рейтинг $\xi(j)$ определяется по формуле

$$\xi(\boldsymbol{j}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\beta Y_j}}{\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{e}^{\beta Y_i}}.$$

Схему дележа дохода можно назвать элитарной. На рис.7.62 показаны результаты моделирования задачи разрешения двух корпоративных проблем группой из трех субъектов с «эгалитарной» схемой разделения затрат (поровну) и «элитарной» схемой дележа дохода, описываемой уравнениями.

$$D(t,Y)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_0}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\frac{1}{3}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_1}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\frac{1}{3}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_2}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\delta_1 Y_3+\delta_1 f_1\mu u(t) \\ -\delta_2 Y_4+\delta_2 f_2(1-\mu)u(t) \end{bmatrix} \qquad Y_0=\begin{pmatrix}1{,}028\\1{,}024\\1{,}020\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (7.144)$$

β = 1; δ_1 = 0,03; f_1 = 1,1; δ_2 = 0,02; f_2 = 1,2; μ = 0,6; b = 0,02;

a = 0,002; $u(t) = a\ln t + b$; t_0 = 1; t_1 = 500; N = 5000.

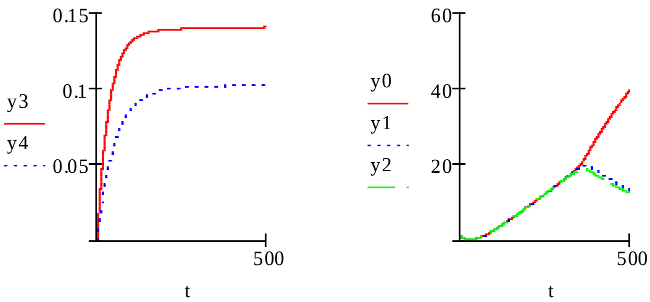


Рис. 7.62

$$\pi_i=\frac{e^{\beta Y_i}}{\sum\limits_{q=0}^{2}e^{\beta Y_q}},\ (j\in\overline{0,2}).$$

Два последних уравнения описывают определенный производственный процесс с постоянными времени $(\delta_1)^{-1}$, $(\delta_2)^{-1}$ и «технологическими» коэффициентами f_1 и f_2. Видим, что начальные условия для

$$Y_j = R_j^{disp}$$

очень мало отличаются друг от друга. Через определенное время происходит решительное «имущественное» расслоение и, соответственно расслоение рейтингов. При этом рейтинговая энтропия падает до нуля.

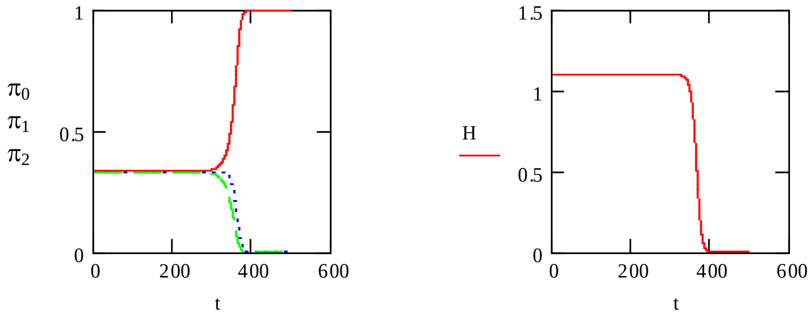


Рис. 7.63

$$H = -\sum_{j=0}^{2} \pi_j \ln \pi_j.$$

На рис.7.64 и рис.7.65 показан результат решения той же задачи с измененными схемами дележа затрат и доходов. Система уравнений имеет вид:

$$D(t,Y)=\begin{bmatrix} -\dfrac{Y_0}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_0}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\dfrac{Y_1}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_1}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\dfrac{Y_2}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_2}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\delta_1 Y_3+\delta_1 f_1 \mu u(t) \\ -\delta_2 Y_4+\delta_2 f_2 (1-\mu) u(t) \end{bmatrix} \qquad Y_0=\begin{pmatrix}1{,}028\\1{,}024\\1{,}020\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (7.145)$$

$\beta = 1$; $\delta_1 = 0{,}03$; $f_1 = 1{,}1$; $\delta_2 = 0{,}02$; $f_2 = 1{,}2$; $\mu = 0{,}6$; $b = 0{,}02$;

$a = 0{,}002$; $u(t) = at + b$; $t_0 = 1$; $t_1 = 500$; $\boldsymbol{N} = 5000$.

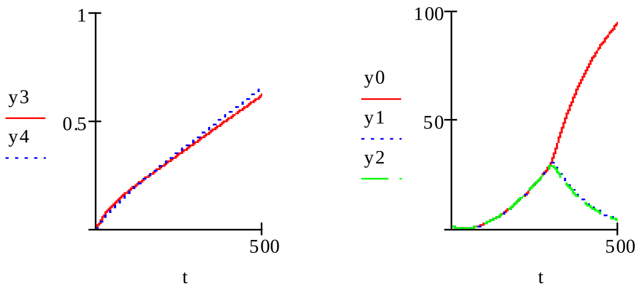


Рис. 7.64

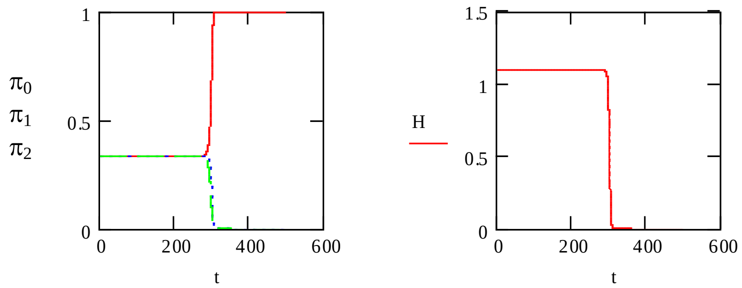


Рис.7.65

Затраты делятся пропорционально наличным располагаемым ресурсам, доходы делятся пропорционально корню квадратному из рейтингов (мягкий «элитарный» дележ). Соответствующая система уравнений (7.145) также содержит два «производственных» уравнения. Как и в предыдущем случае, при весьма малых отличиях в начальных условиях происходит резкое расслоение располагаемых ресурсов и рейтингов (но значительно позднее, чем в первой задаче).

Система уравнений (7.146) отличается тем, что в правые части производственных уравнений введены в качестве множителей предпочтения I рода каждой из альтернатив, которые зависят от «скоростей» получения дохода Y_3 и Y_4. Характер решения для Y_0, Y_1, Y_2 сохраняется в том смысле, что имеется ярко выраженный момент «имущественного» расслоения участников разрешения корпоративных задач.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{Y})=\begin{bmatrix} -\dfrac{Y_0}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_0}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\dfrac{Y_1}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_1}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\dfrac{Y_2}{Y_0+Y_1+Y_2}u(t)+(Y_3+Y_4)\sqrt{\dfrac{e^{\beta Y_2}}{e^{\beta Y_0}+e^{\beta Y_1}+e^{\beta Y_2}}} \\ -\delta_1 Y_3+\delta_1 f_1\dfrac{e^{-\delta_1 Y_3}}{e^{-\delta_1 Y_3}+e^{-\delta_1 Y_4}}u(t) \\ -\delta_2 Y_4+\delta_2 f_2\dfrac{e^{-\delta_1 Y_4}}{e^{-\delta_1 Y_3}+e^{-\delta_1 Y_4}}u(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Y}_0=\begin{pmatrix} 1{,}028 \\ 1{,}024 \\ 1{,}020 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.146)$$

δ₁ = 0,03; ***f*₁** = 1,1; **δ₂** = 0,02; ***f*₂** = 1,2; ***b*** = 0,02;

a = 0,002; *u*(*t*) = *at* + *b*.

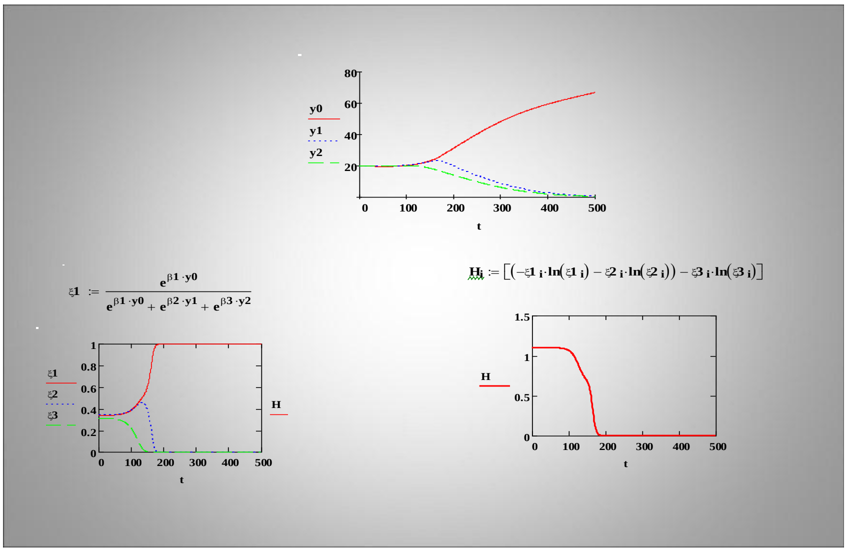


Рис. 7.66, Рис. 7.67.1, Рис. 7.67.2

Еще один вариант расчета для системы (7.146) представлен на рис.7.66. - 7.67.2. На рис 7.66 показана зависимость индивидуальных капиталов y_0, y_1, y_2 от времени, на рис.7.67.1 – зависимость рейтинговых показателей ξ_1, ξ_2, ξ_3, на рис. 7.67.2 - рейтинговая энтропия, на рис. 7.67.3 приведены значения показателя остроты конфликтов между субъектами группы $K, k, j(t)$, вычисленного по формуле:

$$K_{1,k,j} = \rho_{k,j}(1 - H_{\xi k})^{0,1} \cdot (1 - H_{\xi j})^{0,1}$$

где $\rho_{k,j}$ - коэффициент межсубъектной корреляции, $H_{\xi k}$ и $H_{\xi j}$ - энтропии рейтинговых распределений субъектов k и j.

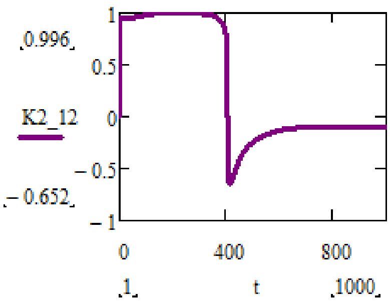


Рис.7.67.3

Заметим, что во всех случаях предполагалось, что уже выполнено агрегирование рейтингов и, что при этом эндогенные характеристики (α, β, …) всех субъектов одинаковы. Это существенное допущение, поскольку в случае, если эти параметры различны, это может отразиться на поведении решения.

На рис.7.68 и рис.7.69 показан результат моделирования процесса разрешения одной корпоративной задачи пятью субъектами. Принят принцип деления затрат пропорционально затраченным ресурсам и «элитарный» принцип деления дохода — система уравнений (7.147). Здесь также отмечается «имущественное» расслоение и расслоение в процессе решения корпоративной проблемы.

$$D(t,Y)=\begin{bmatrix} -\dfrac{Y_0}{Y_0+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}u(t)+Y_5\dfrac{e^{\beta_0Y_0}}{e^{\beta_0Y_0}+e^{\beta_1Y_1}+e^{\beta_2Y_2}+e^{\beta_3Y_3}+e^{\beta_4Y_4}} \\ -\dfrac{Y_1}{Y_0+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}u(t)+Y_5\dfrac{e^{\beta_1Y_1}}{e^{\beta_0Y_0}+e^{\beta_1Y_1}+e^{\beta_2Y_2}+e^{\beta_3Y_3}+e^{\beta_4Y_4}} \\ -\dfrac{Y_2}{Y_0+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}u(t)+Y_5\dfrac{e^{\beta_2Y_2}}{e^{\beta_0Y_0}+e^{\beta_1Y_1}+e^{\beta_2Y_2}+e^{\beta_3Y_3}+e^{\beta_4Y_4}} \\ -\dfrac{Y_3}{Y_0+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}u(t)+Y_5\dfrac{e^{\beta_3Y_3}}{e^{\beta_0Y_0}+e^{\beta_1Y_1}+e^{\beta_2Y_2}+e^{\beta_3Y_3}+e^{\beta_4Y_4}} \\ -\dfrac{Y_4}{Y_0+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}u(t)+Y_5\dfrac{e^{\beta_4Y_4}}{e^{\beta_0Y_0}+e^{\beta_1Y_1}+e^{\beta_2Y_2}+e^{\beta_3Y_3}+e^{\beta_4Y_4}} \end{bmatrix} \qquad Y_0=\begin{pmatrix} 1{,}14 \\ 1{,}139999 \\ 1{,}139995 \\ 1{,}05 \\ 1{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.147)$$

$\delta_1 = 0{,}1$; $f_1 = 1{,}1$; $\delta_2 = 0{,}1$; $f_2 = 1{,}2$; $b = 0{,}2$; $a = 0$; $u(t) = at + b$;

$\beta_0 = 0{,}5$; $\beta_1 = 0{,}505$; $\beta_2 = 0{,}5055$; $\beta_3 = 0{,}505$; $\beta_4 = 0{,}5$.

Рейтинговое расслоение ведет к рейтинговой энтропии до нуля.

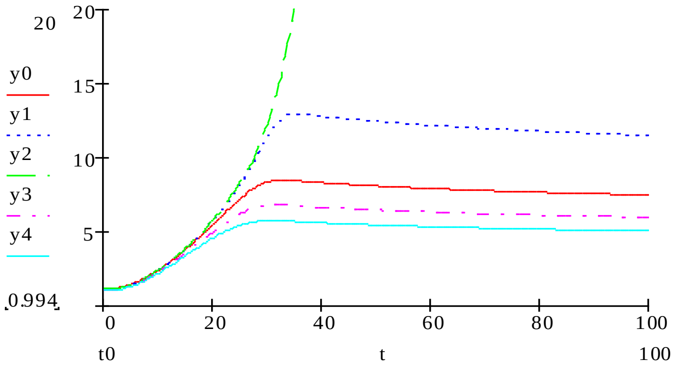


Рис. 7.68

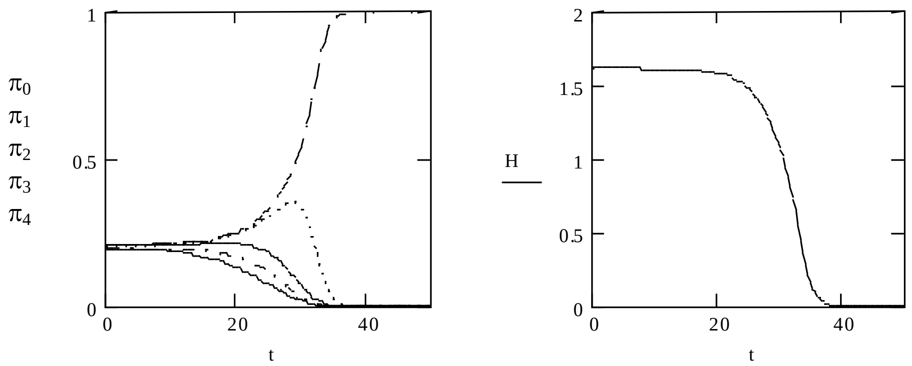


Рис. 7.69

На рис. 7.70 приведен результат решения той же задачи с незначительно измененными значениями параметров β_i ($i \in \overline{0,4}$). Видим, что расслоение также имеет место, однако картина существенно изменилась. Процесс расслоения растянулся на более длительный период. Это можно рассматривать как свидетельство того, что параметр β — некоторым образом связан с «деловой активностью» субъекта при решении данной корпоративной проблемы.

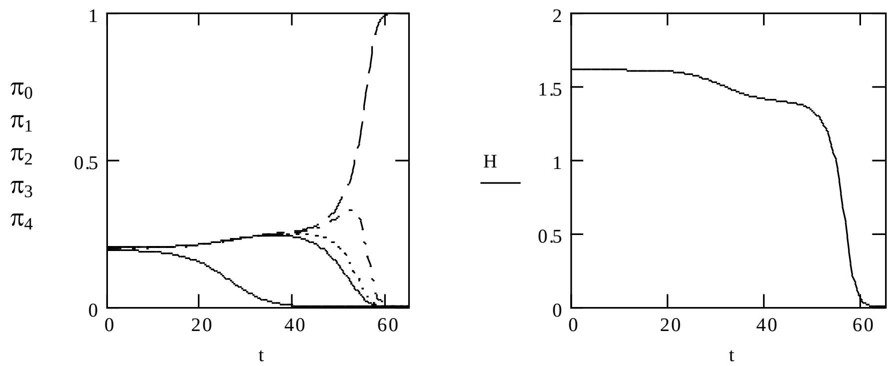


Рис.7.70

«плавное» расслоение группы

7.10. Эволюция активных изолированных систем

7.10.1. Постановка задачи

Принцип максимума субъективной энтропии, введенный в работах [83, 231], а также аналог принципа Линскера – максимума взаимной субъективной информации, позволяют получить модели функций распределения индивидуальных предпочтений субъектов, принимающих решения. При определенных условиях можно выделить класс систем, в которых при полной изолированности от энергетического обмена и обмена веществом с внешней средой и между субъектами системы энтропии предпочтений субъектов могут уменьшаться. Это обстоятельство можно рассматривать как фундаментальное свойство активных систем.

Изучение психических процессов, происходящих в замкнутых активных системах представляет как теоретический, так и практический интерес, в частности, с точки зрения проблемы построения принципов искусственного интеллекта.

Основные результаты исследований по принципу максимума субъективной энтропии были опубликованы в монографиях [82, 231]. Некоторым практическим приложениям этого принципа посвящены работы [51, 66, 82, 87, 88, 94] а также [215, 216, 217, 232-241]. В работе [89] изучается квазиизолированная система с одним субъектом.

Задача состоит в том, чтобы разработать рекурсивную модель информационного обмена ретроспективной информацией внутри материально и энергетически изолированной системы, состоящей из двух субъектов, выяснить условия: когда и как изменяются их индивидуальные предпочтения, предметные и рейтинговые, субъективные

энтропии, проследить возникновение и развитие конфликтной ситуации в соответствии с моделью конфликтной ситуации, предложенной в [82, 231, 234, 237].

Дальнейшее продвижение в этом направлении создает предпосылки для далекоидущих выводов о возникновении и развитии конфликтов внутри социумов, так сказать – спонтанных конфликтов. Все такого рода выводы верны, если допустить, что психика субъектов следует вариационным энтропийным принципам и что субъективная энтропия играет здесь фундаментальную роль, как это предполагается в работах [82, 231]. Схематически процесс обмена информацией и агрегирования изображен на рис. 7.71.

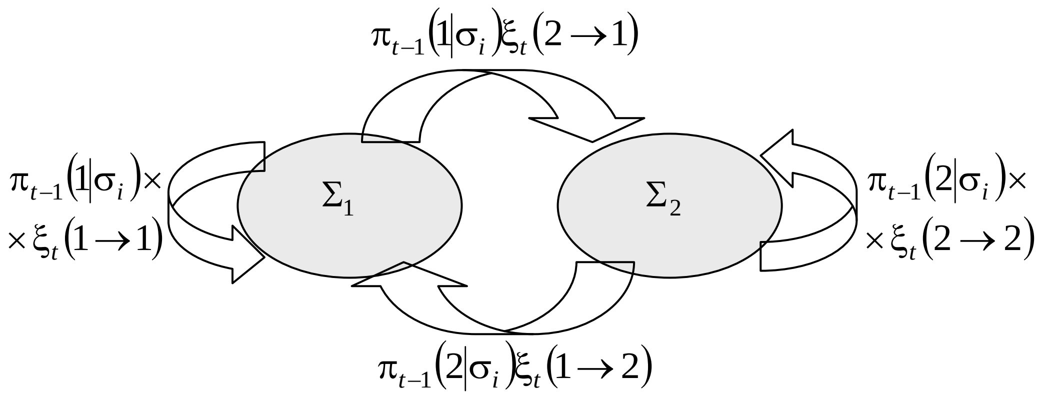


Рис. 7.71 – Схема обмена предметной и рейтинговой информацией между субъектами и схема агрегирования предметных предпочтений

Речь идет о «макроскопической» теории, которая позволяет построить модели функционирования психики при выработке распределения предпочтений. Эта теория основывается на постулате субъективной оптимальности, центральным утверждением которого является «Принцип Максимума Субъективной Энтропии» (ПМСЭ) и не занимается обоснованием существования соответствующего «механизма» на психофизиологическом уровне.

Однако, есть основания полагать, что принцип оптимальности «выбора» на множестве альтернатив появился как следствие естественного отбора: большая энтропия соответствовала большей вероятности выживания при возникновении новой, незнакомой и нестандартной экзогенной ситуации. Очевидно и обратное: раз реализованный удачный (безопасный) выбор, «протоптанная дорога», при повторении уже раз разрешенной ситуации сводил энтропию почти к нулю. Здесь мы усматриваем при последующем выборе влияние прошлой, ретроспективной информации и, следовательно, памяти.

Этот эффект проявляется в зависимости от величины «психологической температуры». Ранее говорилось, что понятие психологической или эмоциональной температуры возникает в связи с тем, что распределения, которые следуют из принципа максимума субъективной энтропии формально совпадают с распределением Гиббса, которое существенным образом зависит от параметра, определяемого как абсолютная термодинамическая температура. Как было показано в работе [82, 231], от аналогичного параметра зависит направление изменения энтропии.

Рассматривается активная система с двумя информационно взаимодействующими субъектами. Решаются аналогичные задачи о зависимости индивидуальных энтропий от времени.

Кроме предметных энтропий рассчитываются энтропии рейтинговых предпочтений, изучается динамика конфликта, который возникает между субъектами системы: межсубъектный конфликт (но внутренний конфликт для замкнутой системы).

7.10.2. Рекурсивная модель эволюции предпочтений изолированной системы с двумя субъектами

В основу модели положены следующие идеи и допущения:

1.Оба субъекта формируют свои предпочтения как предметные, так и рейтинговые на основе принципа максимума их субъективных энтропий. При этом вводятся функционалы, имеющие для обоих субъектов одинаковую структуру, но с различными конструктивными параметрами.

2.Оптимизация и агрегирование предпочтений объединены в едином алгоритме. При этом в процессе агрегирования предметные предпочтения на предыдущем шаге («вчера») учитываются с весом равным относительным рейтингам носителя предпочтений каждого из субъектов «в глазах» данного субъекта.

3.Рейтинги в данной модели определяются величиной предметной энтропии данного субъекта в глазах «носителя», формирующего свои предметные предпочтения на последующем шаге. Предлагается ряд моделей описывающих динамику рейтинговых показателей, в частности, с учетом величины рейтинговых коэффициентов на предыдущем шаге.

Допускается также, что

4.Имеет место полная, точная и правдивая информированность о предпочтениях друг друга в любой момент времени, причем информация передается от субъекта к субъекту практически мгновенно (без запаздывания).

5.Используется «операционное время» – фиксирующее моменты обмена информацией и значения функций. Символы … , $t-1$, t, $t+1$, … обозначают номера этих моментов.

6.Чем выше предметная энтропия (выше неопределенность), тем меньше рейтинг данного субъекта (в глазах другого).

7.Альтернатив две у каждого субъекта, причем для обоих они имеют одинаковый смысл.

Обозначим: $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_a^{(2)}$ – альтернативы первого и второго субъектов. Распределение предметных предпочтений первого субъекта – $\pi_t(1|\sigma_1)$; $\pi_t(1|\sigma_2)$, второго – $\pi_t(2|\sigma_1)$; $\pi_t(2|\sigma_2)$, в момент t. «Дифференциальные» рейтинговые показатели обозначаются $\xi_t(i \to j|\sigma_k)$: рейтинг субъекта "j" глазами "i" в отношении к альтернативе σ_k. Могут быть использованы «интегральные» рейтинги по отношению ко множеству альтернатив S_a. В нашем случае мы используем для этих рейтингов обо-

значения $\xi_t(i \to j)$. Если изучается система $(N \times M) = 2 \times 2$, то будем использовать обозначение

$$\xi_t(1 \to 1); \qquad \xi_t(1 \to 2); \qquad \xi_t(2 \to 1); \qquad \xi_t(2 \to 2).$$

Здесь первый и последний коэффициенты определяются как саморейтинги.

Условия нормировки предметных и рейтинговых предпочтений:

$$\pi_t(1|\sigma_1) + \pi_t(1|\sigma_2) = 1; \qquad \pi_t(2|\sigma_1) + \pi_t(2|\sigma_2) = 1;$$
$$\xi_t(1 \to 1) + \xi_t(1 \to 2) = 1; \qquad \xi_t(2 \to 1) + \xi_t(2 \to 2) = 1.$$

Для дифференциальных рейтингов условия нормировки выполняются для каждой альтернативы в отдельности:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_t(1 \to 1|\sigma_1) + \xi_t(1 \to 2|\sigma_1) = 1; \\ &\xi_t(1 \to 1|\sigma_2) + \xi_t(1 \to 2|\sigma_2) = 1; \\ &\xi_t(2 \to 1|\sigma_1) + \xi_t(2 \to 2|\sigma_1) = 1; \\ &\xi_t(2 \to 1|\sigma_2) + \xi_t(2 \to 2|\sigma_2) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.148)$$

В дальнейшем в модели будут использованы интегральные рейтинги. В рекурсивной модели используется схема агрегирования предметных предпочтений: предметные предпочтения каждого субъекта в момент t вычисляются как сумма предпочтений обеих субъектов, взятых с весами равными рейтинговым коэффициентам.

$$\left.\begin{aligned} &\pi_t^{\Sigma}(1|\sigma_1) = \pi_{t-1}(1|\sigma_1)\xi_t(1 \to 1) + \pi_{t-1}(2|\sigma_1)\xi_t(1 \to 2); \\ &\pi_t^{\Sigma}(1|\sigma_2) = \pi_{t-1}(1|\sigma_2)\xi_t(1 \to 1) + \pi_{t-1}(2|\sigma_2)\xi_t(1 \to 2); \\ &\pi_t^{\Sigma}(2|\sigma_1) = \pi_{t-1}(1|\sigma_1)\xi_t(2 \to 1) + \pi_{t-1}(2|\sigma_1)\xi_t(2 \to 2); \\ &\pi_t^{\Sigma}(2|\sigma_2) = \pi_{t-1}(1|\sigma_2)\xi_t(2 \to 1) + \pi_{t-1}(2|\sigma_2)\xi_t(2 \to 2). \end{aligned}\right\} \qquad (7.149)$$

Заметим, что рейтинговые коэффициенты-веса берутся в этих формулах в момент t, а предметные предпочтения в предыдущий момент $t-1$.

Распределения предметных предпочтений 1-го и 2-го субъектов найдем путем максимизации следующих функционалов: для j-го субъекта

$$\Phi_{\pi_t}(j) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_t(j|\sigma_i) \ln \pi_t(j|\sigma_i) - \beta_{\pi_j} \sum_{i=1}^{2} \pi_t(j|\sigma_i)\left[\pi_{t-1}(1|\sigma_i)\xi_t(j \to 1) + \right.$$
$$\left. + \pi_{t-1}(2|\sigma_i)\xi_t(j \to 2)\right] + \gamma_{\pi_j} \sum_{i=1}^{2} \pi_t(j|\sigma_i); \qquad \left(j \in \overline{1,2}\right). \qquad (7.150)$$

Здесь β_{π_j} и γ_{π_j} – конструктивные коэффициенты, γ_{π_j} – «коэффициент Лагранжа», так как изопериметрическое условие $\sum_{i=1}^{2}\pi_t\left(j|\sigma_i\right)=1$ задано заранее. Величина «функции эффективности» – второй член в формуле (7.86) заранее не известна. Величина $\beta_{\pi_j}=\dfrac{1}{T_{\pi_j}}$ – есть обратная психическая температура T_{π_j}, <u>«сопутствующая предметному выбору»</u>.

Рейтинговые веса $\xi_{t-1}(m)$ отыскиваются путем максимизации функционала

$$\Phi_{\xi_t}(m)=-\sum_{j=1}^{2}\xi_t(m\to j)\ln\xi_t(m\to j)-\beta_{\xi_m}\sum_{j=1}^{2}\xi_t(m\to j)\overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)+$$
$$+\gamma_{\xi_m}\sum_{j=1}^{2}\xi_t(m\to j);\qquad \left(m\in\overline{1,2}\right). \quad (7.151)$$

Коэффициенты β_{ξ_m} и γ_{ξ_m} – являются структурными параметрами. В данной схеме, как и при выборе β_{π_j} и γ_{π_j}, они считаются задаваемыми «извне».

Хотя нужно заметить, что при построении иерархических моделей эти коэффициенты могут определяться на другом уровне иерархии.

Второе слагаемое в этой формуле – функция эффективности – содержит предметную энтропию $\overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)$ субъекта j в момент $t-1$. По поводу выбора в качестве когнитивной функции энтропии нужно сделать определенные пояснения. Этот выбор в известной мере является произвольным, однако он опирается на соображения, которые кажутся естественными. В функционале (7.151) когнитивная функция зависит от относительной энтропии и не содержит рейтинговых коэффициентов, существовавших на предыдущем шаге. Чтобы расширить возможности модели, в дальнейшем рассматриваются когнитивные функции другой формы, которые одновременно учитывают, как степень неопределенности предпочтений субъектов, так и величину их предыдущих рейтингов.

Предполагается, что в сознании субъекта-«носителя» функционала (7.151) престиж, а, следовательно, и рейтинг другого субъекта тем выше, чем в большей степени он уверен в своих предпочтениях, другими словами, чем ниже его энтропия. Наоборот, субъект, который испытывает сомнения в выборе альтернативы (в данном случае – на множестве $S_a:(\sigma_1,\sigma_2)$, и имеет ввиду этого высокую энтропию не может высоко оцениваться. Его мнение учитывается с меньшим весом по сравнению с мнением субъекта, имеющего низкую энтропию.

Распределение $\pi_t\left(j|\sigma_i\right)$ определяется из условия

$$\frac{\partial \Phi_{\pi_t}(j)}{\partial \pi_t(j|\sigma_i)} = 0; \qquad \left(j \in \overline{1,2}\right). \tag{7.152}$$

С учетом нормировки:

$$\sum_{i=1}^{2} \pi_t(j|\sigma_i) = 1 \tag{7.153}$$

находим для $j = 1$:

$$\pi_t(1|\sigma_i) = \frac{e^{-\beta_{\pi_1}\left[\pi_{t-1}(1|\sigma_i)\xi_t(1\to 1)+\pi_{t-1}(2|\sigma_i)\xi_t(1\to 2)\right]}}{\sum_{q=1}^{2} e^{-\beta_{\pi_1}\left[\pi_{t-1}(1|\sigma_q)\xi_t(1\to 1)+\pi_{t-1}(2|\sigma_q)\xi_t(1\to 2)\right]}}; \tag{7.154}$$

для $j = 2$:

$$\pi_t(2|\sigma_i) = \frac{e^{-\beta_{\pi_2}\left[\pi_{t-1}(1|\sigma_i)\xi_t(2\to 1)+\pi_{t-1}(2|\sigma_i)\xi_t(2\to 2)\right]}}{\sum_{q=1}^{2} e^{-\beta_{\pi_2}\left[\pi_{t-1}(1|\sigma_q)\xi_t(2\to 1)+\pi_{t-1}(2|\sigma_q)\xi_t(2\to 2)\right]}}. \tag{7.155}$$

В показателях степени фигурируют агрегированные предпочтения субъекта-носителя.

Рейтинговые коэффициенты находятся из условия

$$\frac{\partial \Phi_{\xi_t}(m)}{\partial \xi_t(m \to j)} = 0; \qquad \left(m \in \overline{1,2}\right). \tag{7.156}$$

Учитывая нормирующее условие:

$$\sum_{j=1}^{2} \xi_t(m \to j) = 1; \qquad \left(m \in \overline{1,2}\right), \tag{7.157}$$

находим

$$\xi_t(m \to j) = \frac{e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)}}{\sum_{q=1}^{2} e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(q)}}. \tag{7.158}$$

Формула (7.158) учитывает только степень неопределенности распределения предпочтений субъекта j.

Распределения (7.154), (7.155), (7.158) назовем однопараметрическими.

В расчетах будем использовать также формулы.

$$\xi_t(m \to j) = \frac{\xi_{t-1}(m \to j)^{\alpha_\xi} e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)}}{\sum_{q=1}^{2} \xi_{t-1}(m \to q)^{\alpha_\xi} e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(q)}}. \tag{7.159}$$

$$\xi_t(m \to j) = \frac{\xi_{t-1}(m \to j)^{\alpha_\xi} + e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)}}{\sum_{q=1}^{2} \xi_{t-1}(m \to q)^{\alpha_\xi} + e^{-\beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(q)}}, \quad (7.160)$$

$$\xi_t(m \to j) = \frac{e^{\xi_{t-1}(m \to j)^{\alpha_\xi} - \beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(j)}}{\sum_{q=1}^{2} e^{\xi_{t-1}(m \to q)^{\alpha_\xi} - \beta_{\xi_m} \overline{H}_{\pi_{t-1}}(q)}}. \quad (7.161)$$

Коэффициенты β_{ξ_m} и α_ξ – являются структурными параметрами.

В формулах (7.159)-(7.161) учитываются оба фактора: и степень «предметной» неопределенности субъекта j и его рейтинг «в глазах субъекта m» существовавший на предыдущем шаге. В формулах (7.159)-(7.161) содержатся по два конструктивных параметра. Поэтому эти распределения можно назвать двухпараметрическими. Три выше приведенных варианта отражают представления психолога о влиянии двух факторов: степени неопределенности каждого из субъектов в предметной области и памяти о распределении рейтингов в прошлом. Недостатком модели (7.159) является то обстоятельство, что если в некоторый момент времени рейтинговый коэффициент $\xi_t(m \to j)$ оказывается равным нулю, то он остается равным нулю во все последующие моменты времени. Этого недостатка лишены модели (7.160), (7.161). Вообще, как было уже сказано, выбор вида когнитивной функции в значительной степени произволен. Имеют место математические ограничения относительно гладкости и дифференцируемости этих функций. В остальном выбор произволен. Смысл привлечения ПМСЭ состоит в том, что каждому выбору вида когнитивной функции, отражающему те или иные воззрения на действие законов психологии, ставится в соответствие вполне определенное распределение предпочтений для каждого заранее выбранного множества альтернатив. Таким образом, ПМСЭ является связующим звеном – «мостом» между представлениями психолога относительно роли различных факторов в процессе выбора и принятия решения и распределением предпочтений.

Когнитивные функции (7.159)-(7.161) учитывают при изучении динамики рейтингов «память» о прошлых рейтингах («память о прошлых заслугах»).

Предметные энтропии здесь вычисляются по формулам

$$H_{\pi_{t-1}}(m) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_{t-1}(m|\sigma_i) \ln \pi_{t-1}(m|\sigma_i). \quad (7.162)$$

Коэффициенты $\beta_{\xi m}$ и $\gamma_{\xi m}$ – являются структурными параметрами.

7.10.3. О межсубъектных конфликтах в изолированной системе с двумя субъектами

Мы имеем в виду конфликт на предметном множестве $\sigma_i \in S_a$; $\left(i \in \overline{1,N}\right)$ и рейтинговый конфликт $\xi_k \in S_\xi$; $\left(k \in \overline{1,M}\right)$ в группе $(M = 2)$, который по определению является конфликтом между распределениями предпочтений. Мерой интенсивности конфликта и его направленности является коэффициент корреляции ρ_Σ, а также частные энтропии субъектов $H_{\pi_t}(m)$.

Удобно использовать относительную энтропию:

$$\overline{H}_{\pi_t}(m) = (\ln 2)^{-1} H_{\pi_t}(m)$$

$$H_{\pi_t}(m) = -\sum_{i=1}^{N} \pi_t(m|\sigma_i) \ln \pi_t(m|\sigma_i) \quad (7.163)$$

Коэффициент корреляции между субъектами j и k вычисляется по формуле

$$\rho_{\Sigma_t}(j,k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi_t(j|\sigma_i) - \frac{1}{N}\right)\left(\pi_t(k|\sigma_i) - \frac{1}{N}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi_t(j|\sigma_i) - \frac{1}{N}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{N}\left(\pi_t(k|\sigma_i) - \frac{1}{N}\right)^2}}. \quad (7.164)$$

Если альтернативы только две: $N = 2$, то коэффициент корреляции принимает только два значения: ± 1. Поэтому, для характеристики не только направленности конфликта, но и его интенсивности необходимо ввести другие показатели, например,

$$\mathrm{K}_{1_t} = \rho_{\Sigma_t}\left(1 - \overline{H}_{j_t}\right)^\delta \left(1 - \overline{H}_{k_t}\right)^\delta \quad (7.165)$$

и

$$\mathrm{K}_{2_t} = \rho_{\Sigma_t} - \mathrm{K}_{1_t}. \quad (7.166)$$

Если в случае «одноместных» альтернатив порядок предпочтений оказывается противоположным

$$\Sigma_1 : \sigma_1 \succ \sigma_2; \qquad \Sigma_2 : \sigma_1 \prec \sigma_2, \quad (7.167)$$

то $\rho_{\Sigma_t} = -1$; $\mathrm{K}_{1_t} < 0$. При полном согласии (конкордации) $\mathrm{K}_{1_t} = -1$.

Если $\mathrm{K}_{2_t} \to -1$, то при тех же условиях будем считать, что имеет место диссонансный межсубъектный конфликт, обусловленный внутренним диссонансным конфликтом.

Показатель K_{1_t} в этом случае близок к нулю, $\mathrm{K}_{2_t} \to +1$, если $\rho_{\Sigma_t} = +1$, а $\overline{H}_{1_t}$, либо $\overline{H}_{2_t} \to 1$. В этом случае можно говорить о консонантном межсубъектном конфликте, в основе которого лежит внутренний диссонансный конфликт одного или обоих субъектов.

Показатель K_{2_t} удобно использовать в случае, когда одна из альтернатив является корпоративной. Тогда близость энтропий $\overline{H}_{1_t}$ и $\overline{H}_{2_t}$ к единице означает высокую степень неуверенности субъектов и неопределенности в выборе альтернативы. В состоянии близости к безразличию или неопределенности время для принятия решения может оказаться большим. Такую ситуацию можно трактовать как когнитивный диссонанс одного или обоих субъектов, соответственно внутрисубъектные конфликты трансформируются в межсубъектный конфликт.

Если хотя бы один из субъектов испытывает колебания, нерешительность, то его энтропия $\overline{H}_{j_t}$ близка к единице, а K_{2_t} соответственно, приближается к $+1$, либо к -1 в зависимости от того совпадают или нет порядки предпочтений малоотличающихся в количественном отношении.

Упомянутые показатели изменяются в пределах (при $N > 2$):

$$0 \le \overline{H}_{j_t} \le 1; \qquad -1 \le \rho_{\Sigma_t} \le 1; \qquad -1 \le K_{1_t} \le 1; \qquad -1 \le K_{2_t} \le 1. \tag{7.168}$$

Показатель δ выбирается «экспериментально» из условия, чтобы K_{1_t} и K_{2_t} обладали достаточной чувствительностью к изменению энтропий.

Если оба распределения предпочтений сингулярны и оба субъекта с полной определенностью предпочитают одну и ту же альтернативу, то

$$\overline{H}_{1_t} = \overline{H}_{2_t} = 0; \qquad \rho_{\Sigma_t} = \pm 1; \qquad K_{1_t} = +1. \tag{7.169}$$

В случае, если предпочитаемая альтернатива «одноместна», имеет место максимально «острый» консонантный конфликт. Когда распределения предпочтений не сингулярны, но порядок предпочтений у обоих субъектов одинаков, конфликт имеет место, но не является максимально напряженным $(K_1 > 0)$:

$$\Sigma_1 : \sigma_1 \succ \sigma_2; \qquad \Sigma_2 : \sigma_1 \succ \sigma_2. \tag{7.170}$$

7.10.4. Некоторые результаты численного моделирования

Для однопараметрических распределений (типа (7), (8)) критические значения параметров $\beta^*_{\pi_j}$ и $\beta^*_{\xi_m}$, соответствующие условиям изменения знака приращения энтропии могут быть найдены из уравнений $\overline{H}_{\pi_t}\left(j|\beta^*_{\pi_j}\right) = \overline{H}_{\pi_{t-1}}\left(j|\beta^*_{\pi_j}\right)$, $\overline{H}_{\xi_t}\left(j|\beta^*_{\xi_m}\right) = \overline{H}_{\xi_{t-1}}\left(j|\beta^*_{\xi_m}\right)$. Для двухпараметрических распределений (типа (7.159-(7.161)) соответствующие уравнения для определения критических значений параметров имеют вид: $\overline{H}_{\pi_t}\left(j|\alpha^*_{\pi_j}\beta^*_{\pi_j}\right) = \overline{H}_{\pi_{t-1}}\left(j|\alpha^*_{\pi_j}\beta^*_{\pi_j}\right)$, $\overline{H}_{\xi_t}\left(j|\alpha^*_{\xi_m}\beta^*_{\xi_m}\right) = \overline{H}_{\xi_{t-1}}\left(j|\alpha^*_{\xi_m}\beta^*_{\xi_m}\right)$.

Ниже приведены результаты численного моделирования поведения основных характеристик системы и ее субъектов. Исходные данные для случая (7.159) представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1 – Исходные данные для моделирования

t	$\pi_t(1\|\sigma_1)$	$\pi_t(1\|\sigma_2)$	$\pi_t(2\|\sigma_1)$	$\pi_t(2\|\sigma_2)$
0	0,2	0,8	0,55	0,45
δ	1			
$\beta_{\pi1}$	1,8			
$\beta_{\pi2}$	3			
$\beta_{\xi1}$	2			
$\beta_{\xi2}$	1			

Результаты моделирования представлены на рис. 7.72, 7.73.

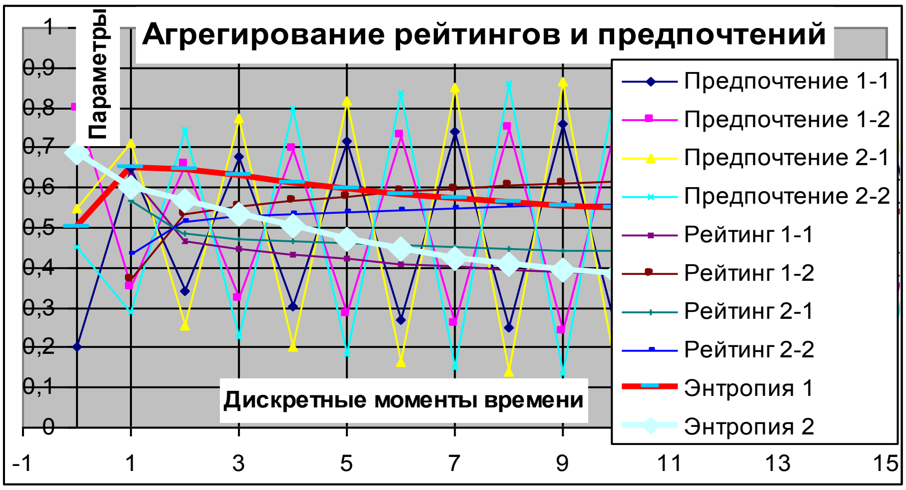


Рис. 7.72 – Параметры системы с двумя субъектами при наличии двух альтернатив

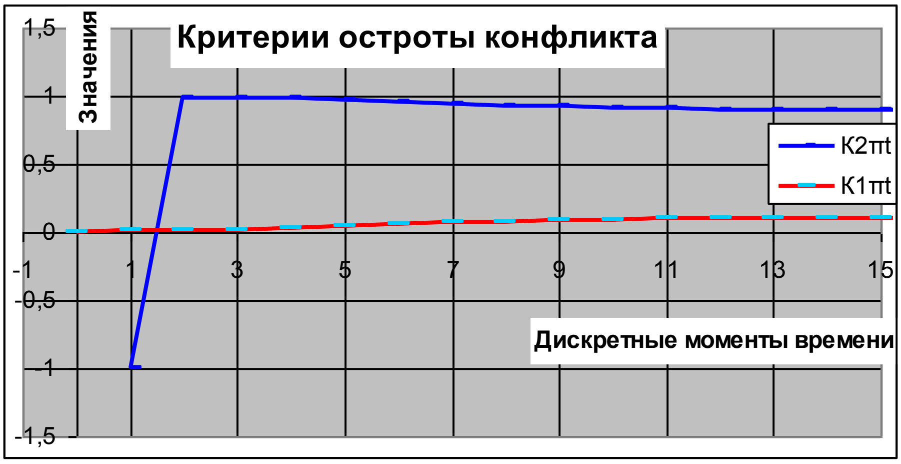


Рис. 7.73 – Динамика конфликта с двумя субъектами при двух альтернативах

Видим, что имеет место «колебательный» режим изменения предпочтений. Предметные энтропии субъектов стремятся к различным предельным уровням. Критерий конфликта K_{2_t} меняет знак и со временем он стабилизируется на уровне близком к единице.

Результаты выборочного моделирования с использованием двухпараметрических распределений (7.159-7.161) показаны на рис. 7.73-7.77.

В случае (7.159) начальные данные приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2 – Исходные данные для моделирования

t	$\pi_t(1\|\sigma_1)$	$\pi_t(1\|\sigma_2)$	$\pi_t(2\|\sigma_1)$	$\pi_t(2\|\sigma_2)$	$\xi_t(1\to1)$	$\xi_t(1\to2)$	$\xi_t(2\to1)$	$\xi_t(2\to2)$
0	0,3	0,7	0,6	0,4	0,4	0,6	0,5	0,5

α	1,368884
δ	1
$\beta_{\pi1}$	-2,6
$\beta_{\pi2}$	6
$\beta_{\xi1}$	0,5
$\beta_{\xi2}$	0,2

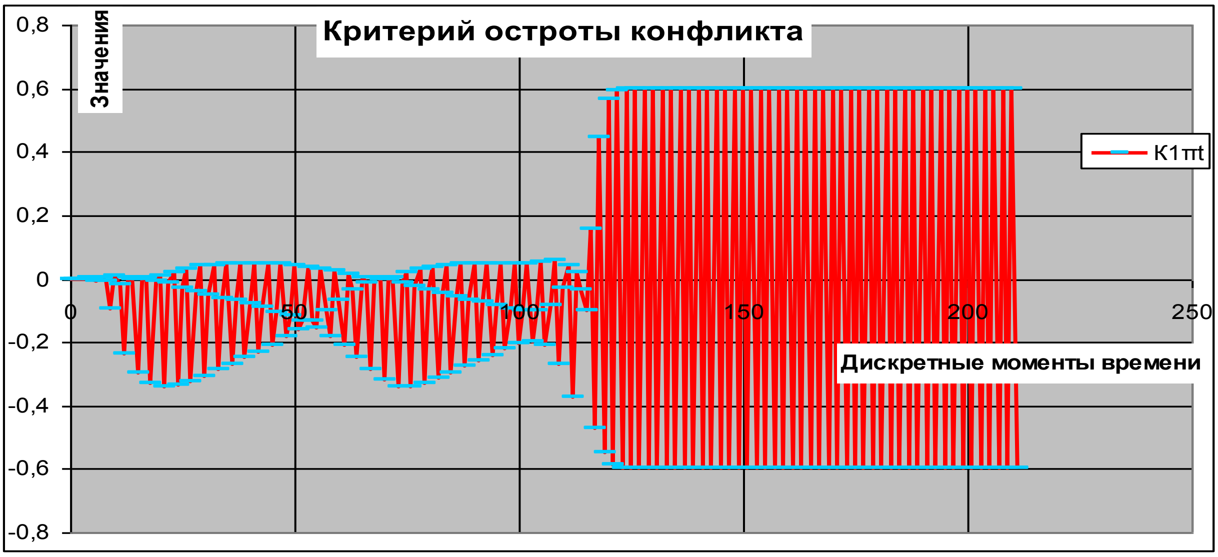


Рис. 7.74 – Динамика конфликта с двумя субъектами при двух альтернативах

Видно, что в определенный момент времени имеет место скачкообразное нарастание интенсивности конфликта. При этом, как и выше имеет место знакопеременный «периодический» процесс (см. рис. 7.74).

На диаграмме энтропий (см. рис. 7.75) также отмечается скачкообразное изменение поведения энтропий как функций времени, что согласуется с поведением критериев остроты конфликта (см. рис. 7.74). Это явление обусловлено тем, что в соответствующий момент времени происходит стабилизация предпочтений, либо пошаговая

нормировка предпочтений относительно избранных альтернатив. Вследствие того, что коэффициент корреляции меняет свое значение на противоположное на каждом шаге, конфликт не стабилизируется на каком-то определенном уровне.

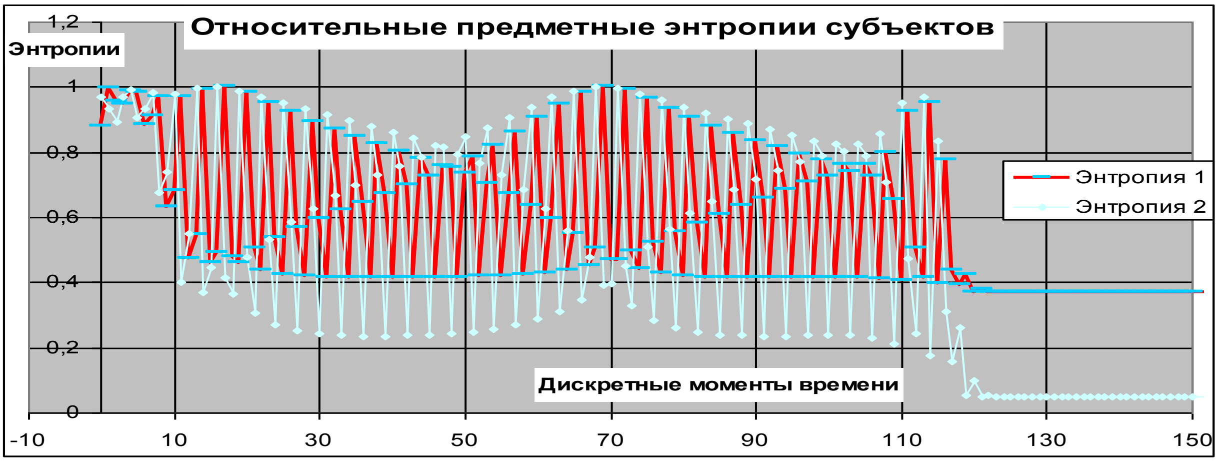


Рис. 7.75 – Динамика относительных предметных энтропий при двух субъектах и двух альтернативах

Предпочтения субъектов имеют сдвиг пошаговых пропусков нормировок по соответствующим альтернативам.

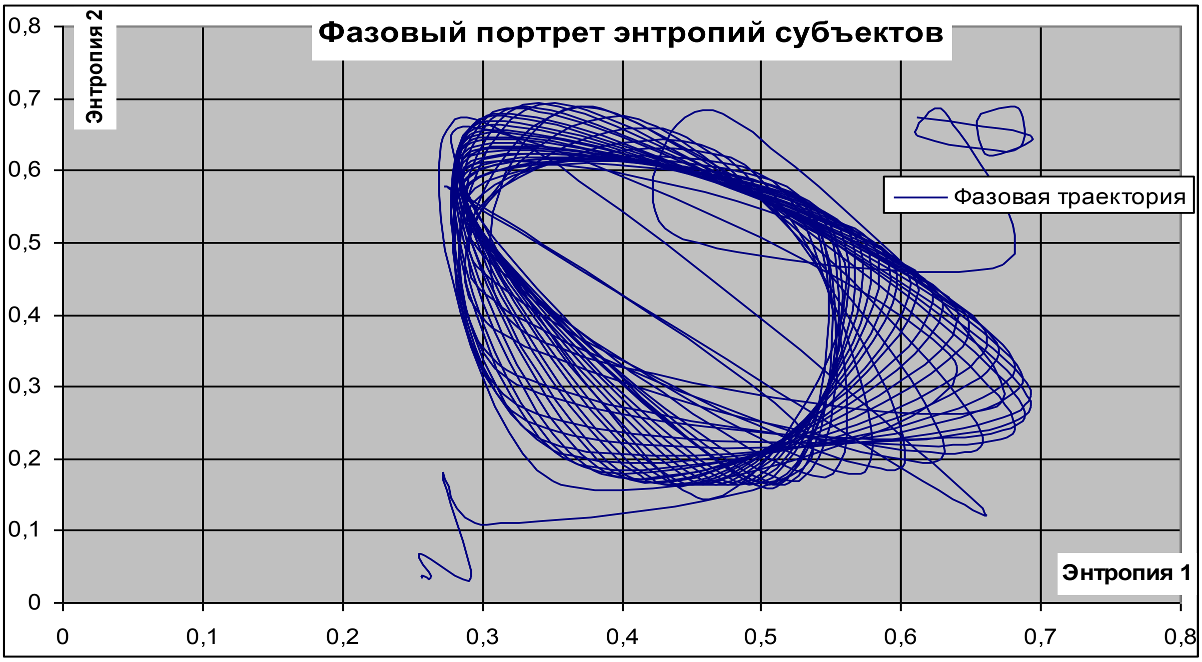


Рис. 7.76 – Визуальный эффект «поверхности Мебиуса»

Фазовый портрет изменения предметных энтропий двух субъектов напоминает «поверхность Мебиуса» (см. рис. 7.76). Эта картина представляет собой плоское изображение огибающей множества линий перехода из состояния в состояние.

Рис. 7.77 – Динамика агрегированных параметров

Для случая (7.160) начальные данные для расчета приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3 – Исходные данные

t	$\pi_t(1\|\sigma_1)$	$\pi_t(1\|\sigma_2)$	$\pi_t(2\|\sigma_1)$	$\pi_t(2\|\sigma_2)$	$\xi_t(1\to1)$	$\xi_t(1\to2)$	$\xi_t(2\to1)$	$\xi_t(2\to2)$
0	0,2	0,8	0,7	0,3	0,01	0,99	0,5	0,5

α	2,7
δ	1
$\beta_{\pi1}$	2
$\beta_{\pi2}$	3
$\beta_{\xi1}$	0,5
$\beta_{\xi2}$	1,8

Результаты расчетов показаны на рис. 7.78.

Рис. 7.78 – Динамика агрегированных параметров

Как видно из рис. 7.78, данный случай характеризуется наличием, как и в предыдущих случаях, «колебательного» режима для предпочтений, плавным изменением энтропий и рейтингов первого и второго субъекта, причем для второго субъекта имеет место инверсия рейтингов.

Во всех случаях имеет место начальный участок «приспособления» системы к выбранным произвольно исходным данным, в том числе к начальным значениям предпочтений.

Дальнейшие эксперименты проделаем для модели (7.161). Начальные данные для расчета приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4 – Исходные данные

t	$\pi_t(1\mid\sigma_1)$	$\pi_t(1\mid\sigma_2)$	$\pi_t(2\mid\sigma_1)$	$\pi_t(2\mid\sigma_2)$	$\xi_t(1\to1)$	$\xi_t(1\to2)$	$\xi_t(2\to1)$	$\xi_t(2\to2)$
0	0,6	0,4	0,2	0,8	0,4	0,6	0,8	0,2

α	1
δ	1
$\beta_{\pi 1}$	4,5
$\beta_{\pi 2}$	1,5
$\beta_{\xi 1}$	2
$\beta_{\xi 2}$	0,5

Результаты расчетов показаны на рис. 7.79.

Рис. 7.79 – Динамика агрегированных параметров

Приведенные рассуждения без принципиальных затруднений распространяются на группы из 3-х и более субъектов $(M > 2)$ и, в конечном счете, на любые социальные группы, а также на количество альтернатив $N > 2$.

Заметим, что в этом случае коэффициент корреляции ρ_{Σ_t} может принимать любые значения в диапазоне $[-1, +1]$.

Таким образом, выявлена способность активной системы изолированной в материальном плане снижать индивидуальную энтропию предметных предпочтений субъектов за счет информации накопленной («законсервированной») в памяти субъекта на предыдущих шагах динамического анализа ситуаций.

7.11. Некоторые условия выделения лидера

Здесь мы приводим в основном на описательном уровне задачу формализации процессов, приводящих к выделению неформального (и исчезновении) лидера. В главе 4 введены рейтинговые предпочтения абсолютные, условные, интегральные и дифференциальные, рассмотрены некоторые характерные иерархически структурированные группы. Начиная со структуры, созданной Моисеем в группе беглецов (refugees) из Египта. Далее в гл.7 рассмотрим рекурсивные модели, которые описывают рост и убывание энтропии в материально и энергетически изолированных системах.

Ранее введена температура на множестве предметных альтернатив и температура на множестве рейтинговых альтернатив – социальная температура. Таким образом, создана система модельных представлений, позволяющая поставить задачу о модели-

ровании процесса выделения лидера. Напомним, что наряду с рейтингами мы рассматриваем ранги и называем «хорошо организованными» группы такие, в которых порядок рейтингов соответствует порядку рангов.

Если формальный лидер определяется голосованием, то это относится к области коллективных решений, где существуют различные схемы (Кондерсе, Борда и др.) выявления победителя имеют, в том числе место условия, когда эта задача неразрешима. Однако распределение голосов определяется заранее сформированными рейтингами.

Пусть $\xi(j|i)$ – абсолютный рейтинг субъекта j, сложившийся у «избирателя» i и T_ξ – рейтинговая (социальная температура), входящая в распределение рейтингов. При T_ξ +0 имеет место социальное переохлаждение, а при $T_\xi \to \infty$ – социальный перегрев. Если $H_\xi\,(i)$ – рейтинговая энтропия субъекта i и $H_\xi^*\,(i)$ – пороговые значения этой энтропии, то субъект i готов сделать выбор, если выполняется условие $H_\xi\,(i) < H_\xi^*\,(i)$, при дополнительном условии, что в этот момент имеет место неравенство

$$\left.\frac{dH_\xi(i)}{dt}\right|_{T_\xi = T_\xi^*} < 0$$

Это означает, что пересечение порога $H_\xi^*\,(i)$ происходит «сверху вниз».

Проблема выделения лидера уже затрагивалась в п.5.1.1. Все необходимые теоретические основания описаны в гл. 4, гл. 5 и в настоящей главе в разделе касающимся иерархических систем и иерархических конфликтов. В настоящем параграфе только отметим некоторые дополнительные соображения.

Сделаем следующие дополнительные замечания о факторах, которые связаны с выделением лидера. В терминах, излагаемых в книге теории, мы можем излагать, что лидер:

1. Обладает видением большего числа альтернатив, как в предметной, так и в ранговой области, то есть, если $S_a\,(L)$ и $S_\xi\,(L)$ множества допустимых альтернатив в упомянутых областях, то

$$S_a(L) \supset S_{ai};\, S_\xi(L) \subset S_{\xi i};\, (i \in \overline{1,M})$$

где S_{ai}, $S_{\xi i}$ – соответствующие множества субъекта i.

2. Имеет более высокие энтропийные барьеры $H_\pi^*\,(L)$ и $H_\xi^*\,(L)$, а, следовательно, способны принимать решения, как в предметной области, так и в области организационных проблем на более высоком уровне неопределенности, что можно рассматривать как один из компонентов «воли».

$$H_\pi^*(L) > H_\pi^*(i);\, H_\xi^*(L) > H_\xi^*(i);\, (i \in \overline{1,M})$$

3. Обладает способностью более эффективного поиска и накопления нужной информации и большей предельной скоростью ее переработки

$$|q_\pi^*(L)| > |q_\pi^*(i)| : |q_\xi^*(L)| > |q_\xi^*(i)|;\, (i \in \overline{1,M})$$

4. Важным свойством лидера является способность его после принятия решений не поддаваться большому когнитивному диссонансу, способностью отбрасывать оставшиеся альтернативы и тем самым уменьшать соответствующую энтропию (проявлять «упорство при достижении цели»).

5. Имея в виду предложенную в гл.4 модель «взаимных полезностей», изложенную в гл.4, скажем, что лидер, по-видимому, способен обеспечивать большую полезность для других членов группы.

6. Пороги рангов у лидера также отличаются в меньшую сторону, по сравнению с порогами рангов у других членов группы, то есть лидер раньше других видит опасность и соответствующим образом реагирует.

8 СИНТЕЗ ВЕРОЯТНОСТНОГО АНАЛИЗА И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА СУБЪЕКТИВНОЙ ЭНТРОПИИ

8.1. О гибридных моделях

Под «гибридными моделями» в данном случае мы понимаем здесь такие математические конструкции, которые основаны на объединении разнородных «унитарных» теорий, выработанных и апробированных в различных предметных областях, с моделями, которые следуют из энтропийных принципов. В основном – это принцип максимума энтропии, приписываемый Джейнсу и иногда называемый принципом Джейнса-Гиббса, а также принципа «инфо-мах» Линскера [190]. Поскольку эти принципы и их модификации в работах [83, 231] формулируются в терминах предпочтений и аффектов, в общую теорию и соответствующие гибридные модели включается элементы анализа, осуществляемого субъектом. Все эти модели могут быть отнесены к теории активных систем. В главе 6 уже рассмотрена гибридная модель синтеза вариационного исчисления и принципа максимума субъективной энтропии.

Естественно, что при слиянии разнородных моделей возникают логические и математические проблемы, разрешение которых часто возможно лишь путем введения дополнительных априорных допущений, что делает результат весьма уязвимым. И только сравнение выводов с результатами наблюдений может свидетельствовать о приемлемости сделанных допущений.

Провозглашенный вначале как самый общий «принцип оптимальности» любых процессов в духе Эйлера, здесь нарушается, так как часть гибридной модели, предназначенная для описания поведения экзогенной компоненты активной системы может быть не связана с каким–либо вариационным принципом.

Это может быть следствием нашей неспособности предложить соответствующий вариационый принцип. В некоторых случаях такие принципы установлены, например, модели движения консервативных систем в механике, квантовой механике, электронике и могут быть получены на основе принципа Гамильтона. В других случаях подобные вариационные принципы неизвестны. Здесь можно упомянуть кинетическое уравнение Больцмана, модель движения вязкой жидкости Навье-Стокса. Хотя мы знаем, что уравнения Навье-Стокса могут быть выведены из уравнения Больцмана путем осреднения уравнения Больцмана, в свою очередь, полученного на основе модели газа, состоящего из классических частиц, не испытывающих диссипации энергии при движении, при упругих соударениях, описываемых уравнениями Гамильтона для консервативной системы. Отмеченный парадокс, скорее всего, есть следствие процедуры осреднения при формировании столкновительного члена в уравнении Больцмана и потерей консервативности при обрыве цепочки Боголюбова на пути от уравнения Лиувилля для N – частной функции распределения к уравнению Больцмана для одночастичной функции распределения.

Существует подозрение, что для «невариационных» задач при их генезисе на достаточной «глубине» все же существует определенный вариационный принцип. Так,

например, в работах автора [81, 85] было показано, что для неконсервативных систем с диссипацией пропорциональной первой или второй степени скорости частицы относительно несущей среды может быть предложен аналог вариационного принципа Гамильтона.

Высказываются предположения, что имеет место иерархия вариационных принципов, например, на условиях иерархии Хакена [191, 192] или иерархии, предложенной Кулишом [244, 245].

Мы рассмотрим несколько гибридных моделей, в которых «невариационная» экзогенная часть модели компонуется с «вариационной» частью, моделирующей функционирование психики в части выработки распределений предпочтений.

8.2. Объединение вероятностной модели Феллера – Колмогорова и принципа максимума субъективной энтропии

В работах [82, 83, 215, 216, 217, 231, 232-241], где рассмотрены вопросы безопасности активных систем, было введено пространство «ситуаций» и понятие «ситуационной динамики».

Движение в пространстве ситуаций рассматривается как случайный процесс. Во многих случаях достаточно адекватной является модель разрывных марковских процессов. Такая модель обладает относительной простотой и, в то же время, содержит необходимый арсенал средств для учета технических, природных и субъективных факторов. До недавнего времени последнее обстоятельство не было в явном виде реализовано. Следуя [10], опишем модель, определяющую динамику переходных вероятностей. Пусть C – множество ситуаций и $E \subset C$ – его подмножество, если c(t) – ситуация и $c(t) \in E$, то имеет место событие E. На множестве C определена вероятностная мера P(E) такая, что

$$0 \le \boldsymbol{P(E < C)} \le 1; \boldsymbol{P(C)} = 1; \boldsymbol{P(\varnothing)} = 0$$

и переходная вероятность

$$\boldsymbol{P(E(t);\xi(t_1)) = P\Big(c(t) \in E \,\Big|\, c(t_1) \equiv \xi(t_1)\Big); t > t_1} \tag{8.1}$$

Предполагается, что переход из одной ситуации в другую происходит в результате мгновенного изменения параметров, определяющих ситуацию, имеет место ординарность потока событий. Скачкообразные переходы обусловлены ошибками субъекта системы (пилота, например) быстрым изменением внешних условий, «быстрыми» отказами. Хотя реальные изменения происходят за конечное время, мы рассматриваем случай, когда это время мало по сравнению с характерным временем переходного процесса (продолжительность полета, временем реакции системы,…).

Переходные вероятности удовлетворяют уравнению Колмогорова – Чепмена.

$$\boldsymbol{P(E(t);\xi(t_1)) = \int_{(C)} P\Big(E(t);\eta(s)\Big) P(d\eta(s);\xi(t_1))} \tag{8.2}$$

при $\boldsymbol{\forall t \ge t_1; S \in (t_1, t)}$.

Здесь $\boldsymbol{q(\xi(t_1))\Delta t}$ - вероятность того, что в интервале [t_1, $t_1+\Delta t$] происходит скачкообразное изменение одного из определяющих факторов, тогда $\boldsymbol{q(\xi(t_1))}$ есть плотность вероятности перехода.

Плотность $q(\xi(t_1))$ определяется путем исследования надежности функциональных систем объекта (управляемого субъектом), вероятностей ошибок, допускаемых субъектом, вероятностей возникновения экстремальных атмосферных условий и других факторов, которые могут повлиять на уровень безопасности активной системы. Вероятность $Q(E,\xi(t_1))$ того, что в результате «инициирующего скачка» система окажется в одной из ситуаций, принадлежащих подмножеству E < C, определяются путем исследования стохастической динамики системы после «скачка», построения множества управляемости или достижимости (с размытыми границами в условиях стохастичности), относительно терминального множества. «Скачок» может реализоваться как существенное изменение в действиях субъекта, когда происходит распознавание ситуации и начинаются действия по разрешению возникшей проблемы. Так, например, при заходе на посадку момент обнаружения значительных отклонений от курсовой плоскости может считаться моментом «скачка», поскольку после этого начинается выполнение интенсивного маневра для исправления положения. Функции $q(\xi(t_1))$ и $Q(E,\xi(t_1))$ удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned}
&q(\xi(t_1)) \geq 0; \xi(t_1) \in C,\\
&0 \leq Q\big(E,\xi(t_1)\big) \leq 1; E \in C,\\
&Q\big(\varnothing,\xi(t_1)\big) = 0; t \geq 0; \int_C Q(dE,\xi(t)) = 1
\end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

Переходные вероятности удовлетворяют «прямому» и «обратному» уравнениям Феллера [107] …:

$$\frac{\partial P\big(E(t),\xi(t_1)\big)}{\partial t} = -\int_{(E)} q(\eta(t)P\big(d(\eta(t),\xi(t_1)\big) + \int_{(E)} Q(E\eta((t))P\big(d\eta(t),\xi(t_1)\big);$$

$$\frac{\partial P\big(E(t),\xi(t_1)\big)}{\partial t_1} = q\xi(t_1)\left[E\big(E(t),\xi(t_1)\big) - \int_{(C)} P(E(t),\eta(t_1))Q\big(d\eta(t),\xi(t_1)\big)\right]$$

В практических задачах принято делать множество С на основе эвристических соображений на подмножества E_i так, что принадлежность ситуации к определенному подмножеству E_i квалифицируется как принадлежность к определенному типу ситуаций. Внутри каждого подмножества E_i частные ситуации считаются условно неразличимыми. Таким образом, происходит «загрубление» теории и, в то же время приближает ее к возможности практического применения.

Так, в авиации принято делить множество полетных ситуаций на пять подмножеств: E_0 – нормальные ситуации, E_1 – усложненные ситуации, E_2 – опасные ситуации, E_3 – аварийные ситуации, E_3 – катастрофические ситуации.

Разделение множества ситуаций С на непересекающиеся подмножества и определение соответствующей градации типов ситуаций применительно к каждой активной системе есть в значительной мере результат соглашения между специалистами, что уже на этом этапе построения теории вносят элемент субъективизма. Вероятностный анализ позволяет уточнить эту градацию и дать количественные признаки отнесе-

ния ситуации к тому или иному типу. Одна из задач нормирования состоит в определении границ Г (i) подмножеств E_i.

Одной из важных прикладных проблем, которая решается с использованием рассматриваемой модели есть проблема безопасности функционирования системы. Переходные вероятности Р (E_i (t), $\xi(t_1)$ где $\xi(t_1) \in E_0$, можно рассматривать как показатели степени опасности перехода: $E_0 \rightarrow E_i$, если принять, что чем больше номер i, тем опаснее ситуация $c \in E_i \ \ (\boldsymbol{i} \in \overline{0,\boldsymbol{n}})$. Более того, если считать, что E_n есть подмножество наиболее опасных – катастрофических ситуаций и определить катастрофические ситуации как ситуации без выхода, то процесс, описываемый переходными вероятностями, становится нетранзитивным.

Пусть P_{ij} – вероятность перехода $E_i \rightarrow E_j$. Согласно сделанному выше предположению, если $i \rightarrow j$, то переход осуществляется из менее опасной ситуации в более опасную. Вероятности перехода нормированы:

$$\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{P_{ij}} = 1; (\forall \boldsymbol{i} \in \overline{1,\boldsymbol{n}}) \tag{8.4}$$

Вероятности P_{ij} ($i < j$) характеризуют степень «опасности» для системы, вероятности $P_{ij}(i > j)$ перехода в менее опасную ситуацию характеризуют способность системы возвращаться в более безопасную ситуацию, то есть ее «живучесть», наконец вероятности P_{ii} характеризуют «сопротивляемость» системы изменениям ситуации (резистентность).

Таким образом, в матрице переходных вероятностей Р ее верхняя треугольная часть содержит характеристики опасности, нижняя треугольная часть - характеристики «живучести», диагональные элементы – характеристики «сопротивляемости» (резистентности) – надежность.

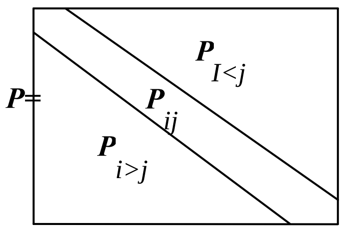


Рис. 8.1

Матрица *P* в технических задачах является инструментом нормирования и сертификации.

Дискретизация множества С на E_i приводит к тому, что уравнения Феллера заменяются на уравнения Колмогорова [10].

$$\frac{\partial \boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)}}{\partial \boldsymbol{t}} = -\boldsymbol{q_j(t)P_{ij}(t,t_1)} + \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{q_k(t)Q_{kj}(t)P_{ij}(t,t_1)} \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)}}{\partial \boldsymbol{t_1}} = -\boldsymbol{q_i(t_1)}\left[\boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)} - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{Q_{ki}(t_1)P_{kj}(t,t_1)}\right] \tag{8.6}$$

Здесь $q_i(t)$ – плотность вероятности случайных событий, приводящих к изменению ситуации, если исходной является ситуация с номером «i» в момент t, $Q_{ij}(t)$ -

условная вероятность того, что система, которая находится в момент t в ситуации «i», в результате «скачка» перейдет в ситуацию «*j*».

Переходные вероятности $Pij(t, t_1)$ удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &0 \le \boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)} \le 1; \forall(\boldsymbol{i,j,t,t_1});\\ &\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P_j(t,t_1)} \le 1; \forall(\boldsymbol{i,j,t,t_1}), \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

а также уравнению Колмогорова-Чепмена:

$$\boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{P_{i,k}(t,s)P_{j,k}(t_1,s)} \qquad (8.8)$$

и начальным условиям:

$$\boldsymbol{P_{ij}(t,t_1)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \boldsymbol{i = j;} \\ 0 \boldsymbol{i \ne j.} \end{cases} \qquad (8.9)$$

Построение гибридной «вероятностно-субъективной» модели ситуационной динамики можно осуществить следующим образом.

Пусть при возникновении «стимулирующего» изменение ситуации события «i» существует некоторое множество стратегий поведения субъекта $\boldsymbol{\sigma_{mi}(t) \in S_{a,}(m \in \overline{1,L})}$. Здесь $\boldsymbol{\sigma_{mi}(t)}$ - альтернативная стратегия разрешения возникающей проблемы, S_a – множество допустимых стратегий. События, состоящие в выборе той или иной стратегии, несовместны и одна из стратегий должна быть обязательно выбрана (например, σ_{1i} - «продолжение захода на посадку и посадка», σ_{2i} – «уход на второй круг»). Тогда условная вероятность Qij(t) может быть вычислена с помощью формулы полной вероятности (рис.8.2).

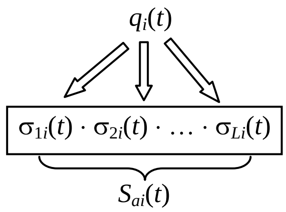


Рис. 8.2

$$\boldsymbol{Q_{i,j}(t)} = \sum_{m=1}^{L} \boldsymbol{P\big(\sigma_{m,i}(t) \mid i\big) Q_{i,j}\big(t \mid \sigma_{m,i}(t)\big)} \qquad (8.10)$$

Здесь $P(\sigma_{m,i}| i)$ — вероятность того, что в результате возникновения инициирующего события субъект выберет стратегию $\sigma_{m,i}(t)$, $Q_{i,j}(t| \sigma_{m,i}(t))$ — условная вероятность перехода системы «i → j», если будет использована стратегия $\sigma_{m,i}(t)$. Вероятности $P(\sigma_{m,i}(t)| i)$ нормируются условием:

$$\sum_{m=1}^{L} \boldsymbol{P\big(\sigma_{m,i}(t) | i\big)} = 1, \ (\forall \mathbf{i}). \qquad (8.11)$$

Эти вероятности определяются не только объективными факторами, но и субъективной оценкой полетной ситуации и эффективности каждой из стратегий. Выбор стратегии является прерогативой субъекта. Решения о выборе определенной стратегии

$\sigma_{m,i}(t)$ принимаются на основе анализа потребных и располагаемых ресурсов, знаний и навыков, полученных при обучении, в результате практического опыта, а также таких факторов, как личные психофизические данные, уровень интеллекта, воспитания (этического базиса), уровня культуры.

Одним из способов отразить эти факторы на формальном уровне и обеспечить возможность количественного анализа их влияния, является введение в модель субъективных предпочтений, комбинация вероятностного и субъективного анализа. Под субъективным анализом подразумевается, как и выше использование энтропийной парадигмы, в частности, принципа максимума субъективной энтропии.

Более того, следует говорить об анализе, осуществляемом субъектом, а о «субъективном анализе» - как о принципах и способах моделирования этого процесса.

Предположим, что между вероятностями выбора стратегий $P(\sigma_{m,i}(t)|\, i)$ и предпочтениями $\pi(\sigma_{m,i}(t)|\, i)$ существует монотонная зависимость. Как частный случай это может быть прямая пропорциональность.

$$\mathbf{P}(\sigma_{m,i}(t)|\, i) \to \pi(\sigma_{m,i}(t)|\, i)$$

Вместо соотношения (8.10) воспользуемся соотношением

$$Q_{i,j}(t) = \sum_{m=1}^{L} \pi\left(\sigma_{m,i}(t)\,|\,t\right) Q_{i,j}\left(t\,|\,\sigma_{m,i}(t)\right) \tag{8.12}$$

Тогда в модель Колмогорова включаются канонические функции предпочтения, которые, в свою очередь, являются результатом решения одной из вариационный задач, описанных выше. Таким образом, мы получаем комбинированную вероятностно-субъективную модель ситуационной динамики.

Так, например, если формула предпочтения имеет вид

$$\pi\left(\sigma_{m,i}(t)\,|\,i\right) = C_i e^{-\beta_i Q_{i,j}\left(\sigma_{m,i}(t)|i\right)}, \tag{8.13}$$

где C_1 — нормировочный коэффициент, а $\hat{Q}_{i,j}(\sigma_{mi}(t)|i)$ — субъективная оценка условной вероятности перехода $i \to j$, то следует предположить, что такая оценка в том или ином виде доступна субъекту. Она может быть основана на собственных априорных оценках, результатах экспертизы, сведениях, содержащихся в технических документах...

Ответ на вопрос о способе выбора оценок $\hat{Q}_{i,j}$ лежит, скорее всего, в рамках модели субъективной вероятности [60] М. де Гроот.

Оценки $\hat{Q}_{i,j}$ могут быть выражены через субъективные оценки «полезности» $U_{i,j}(\sigma_{m,i}(t)|\, i)$, либо «вредности» $L_{i,j}(\sigma_{m,i}(t)|\, i)$ данной стратегии, в которых учитываются располагаемые и потребные ресурсы.

Модифицированные уравнения Колмогорова принимают вид:

$$\frac{\partial P_{i,j}(t,t_1)}{\partial t} = -q_j(t) P_{i,j}(t,t_1) + \tag{8.14}$$

$$+\sum_{k=0}^{N(\infty)} q_k(t) \sum_{m=1}^{L_k} \pi\left(\sigma_{m,k}(t)\,|\,t\right) Q_{k,j}\left(t\,|\,\sigma_{m,k}(t)\right) P_{j,k}(t,t_1);$$

$$\frac{\partial P_{i,j}(t,t_1)}{\partial t_1} = -q_j(t_1)\Big[P_{i,j}(t,t_1) - \tag{8.15}$$

$$-\sum_{k=0}^{N(\infty)}\sum_{m=1}^{L_i}\pi\big(\sigma_{m,i}(t_1)\,|\,i\big)Q_{i,k}\big(t_1\,|\,\sigma_{m,i}(t)\big)P_{k,j}(t,t_1)\Big].$$

Здесь n – число выделенных подмножеств ситуаций $E_n \in C$.

В качестве примера мы рассмотрим упрощенный граф, изображенный на рис.8.3, когда имеется только два подмножества E_1 — «нормальных ситуаций» и E_2 — «неблагоприятных ситуаций».

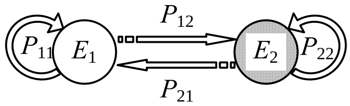


Рис. 8.3

Пусть в начальный момент система находится в ситуации, принадлежащей подмножеству «нормальных» ситуаций E_1.

Инициирующее событие происходит с вероятностью $q_1\Delta t$, в результате чего система либо может остаться в множестве E_1, либо перейти в множество неблагоприятных ситуаций E_2. Соответствующие переходные вероятности P_{11} и P_{12}. Вероятности P_{22} и P_{21} характеризуют сохранение ситуации в E_2 и обратный переход в E_1.

Ниже представлены результаты моделирования в предположении, что подмножество E_2 есть подмножество катастрофических ситуаций (подмножество «без выхода»), и при возникновении инициирующего события с вероятностью $q_1\Delta t$ имеются две альтернативных стратегии: σ_1, σ_2.

Предположим что, инициирующие события, вызывающие переходы могут возникать только в нормальных ситуациях. Пусть условные вероятности $Q_{11}(\sigma_1) = Q_{111}$ и $Q_{11}(\sigma_2) = Q_{112}$ (вероятности сохранить исходное положение $c(t) \in E_1$) изменяются во времени по закону

$$Q_{11i} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i t},\ \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,$$

то есть с течением времени уменьшаются. α_i и β_i зависят от кого, какая стратегия парирования возможного перехода будет выбрана. В соответствии с (8.12) условная вероятность $Q_{11}(t)$ задается формулой

$$Q_{11}(t) = \pi(\sigma_1)Q_{11,1}(t) + \pi(\sigma_2)Q_{11,2}(t).$$

В связи со сделанными предположениями

$\mathbf{Q_{22}} = 1$; $\mathbf{Q_{21}} = 0$; $\mathbf{q_2} = 0$; $\mathbf{P_{21}} = 0$.

Расчеты выполнены для случая, когда $\alpha_1 = 5\cdot10^3$; $\alpha_2 = 5\cdot10^2$. Вероятность $Q_{12}(t)$ рассчитывается по формуле $Q_{12}(t) = 1 - Q_{11}(t)$, а предпочтения по формулам:

$$\pi(\sigma_1) = \frac{e^{\beta R_1(t)}}{e^{\beta R_1(t)} + e^{\beta R_2(t)}};\ \pi(\sigma_2) = 1 - \pi(\sigma_1), \tag{8.16}$$

где $R_1(t)=\dfrac{R_d-\delta_1-V_1t}{\delta_1+V_1t}$; $R_2(t)=\dfrac{R_d-\delta_2-V_2t}{\delta_2+V_2t}$; R_d — располагаемые ресурсы; V_1 и V_2 — «скорости» расходования ресурсов при использовании, соответственно стратегий σ_1 и σ_2, δ_1 и δ_2 — начальные затраты, связанные с выбором той или иной стратегии (принято $\delta_1 = 0{,}35$; $\delta_2 = 0{,}35$; $V_1 = 0{,}0002$; $V_2 = 0{,}00005$). Алгоритм выбора стратегии таков: определяется субъективная энтропия

$$\overline{H}_\pi = -\frac{1}{\ln 2}\left(\pi(\sigma_1)\ln\pi(\sigma_1)+\pi(\sigma_2)\ln\pi(\sigma_2)\right). \tag{8.17}$$

Устанавливается критическое значение энтропии $\overline{H}^* = 0{,}5$. В момент, когда впервые выполняется условие $\overline{H}_\pi \le \overline{H}^*$ субъект принимает решение — выбирает одну из стратегий. Зависимость $\pi(\sigma_1)$ и $\pi(\sigma_2)$ от времени показана на рис. 8.4, энтропия монотонно уменьшается. Указанное выше неравенство выполняется при $t \ge t^* = 2213$.

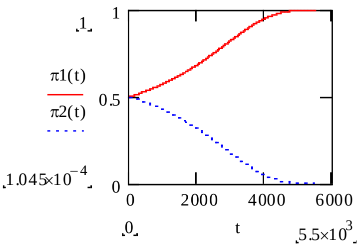


Рис. 8.4

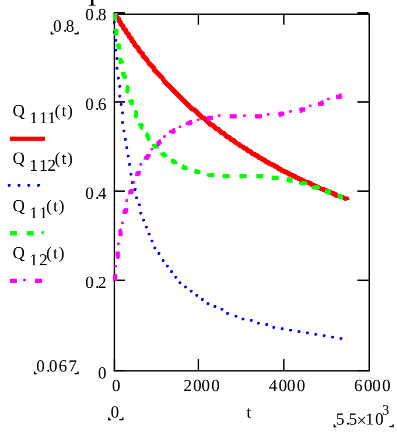


Рис. 8.5

На рис. 8.5 показаны вероятности $Q_{11,1}(t)$; $Q_{11,2}(t)$; $Q_{11}(t)$; $Q_{12}(t)$, а на рис. 8.6 и 8.7 изменение вероятности $Q_{11}(t)$ при условии, что в момент t^* выбирается одна из стратегий. При этом предпочтения перераспределяются таким образом, что при выборе σ_1 $\pi(\sigma_1) = 1$; $\pi(\sigma_2) = 0$, и наоборот, при выборе σ_2 $\pi(\sigma_1) = 0$; $\pi(\sigma_2) = 1$. Функция $Q_{11}(t)$ в момент t^* претерпевает скачок, и дальнейший ее ход зависит гот выбранной стратегии.

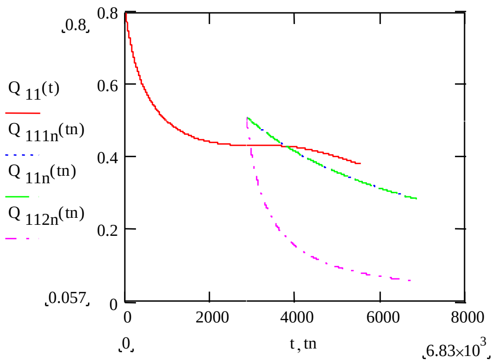


Рис. 8.6

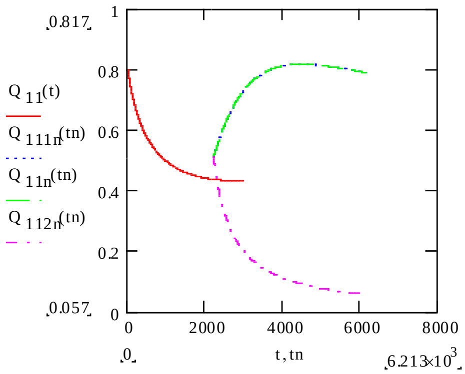


Рис. 8.7

Из рис.8.8 видно, что, начиная с момента t^* изменяются зависимости переходных вероятностей от времени. Рис.8.7 соответствует случаю, когда для переходных вероятностей $Q_{11,i}$ принимается несколько отличный закон их зависимости от времени. В этом случае также имеет место скачок вероятности Q_{11} в момент времени t^*. Дальнейший ход зависимости $Q_{11}(t)$ существенно зависит от того, какая альтернатива выбрана: σ_1 или σ_2. Лучшей оказывается альтернатива σ_1.

Еще одна модель, более простая, основана на предположении о специальном характере потоков событий (например, пуассоновский).

Приспосабливая вероятностную модель к принятой в настоящее время в авиации градации ситуаций, рассмотрим граф, изображенный а рис.8.9.

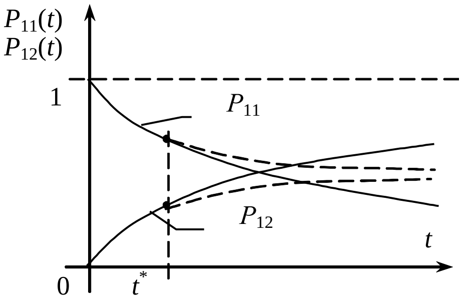


Рис. 8.8

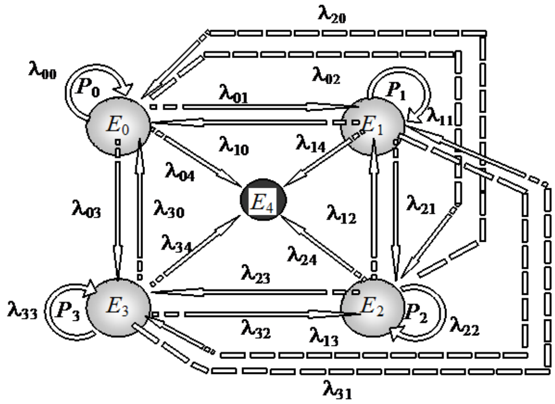


Рис. 8.9

Здесь λ_{ij} интенсивности переходов, $p_i\left(i \in \overline{0,4}\right)$ — вероятности пребывания в соответствующих подмножествах E_i. По предположению подмножество E_4 есть подмножество «без выхода» — подмножество катастрофических ситуаций. Система нетранзитивна. Переходы из подмножества в подмножество носят скачкообразный характер.

Система уравнений для p_i, соответствующая графу, имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{P}_0}{dt} = -\left(\lambda_{01}+\lambda_{02}+\lambda_{03}+\lambda_{04}\right)\boldsymbol{P}_0+\lambda_{10}\boldsymbol{P}_1+\lambda_{20}\boldsymbol{P}_2+\lambda_{30}\boldsymbol{P}_3; \qquad (8.18)$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}_1}{dt} = -\left(\lambda_{10}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14}\right)\boldsymbol{P}_1+\lambda_{01}\boldsymbol{P}_0+\lambda_{21}\boldsymbol{P}_2+\lambda_{31}\boldsymbol{P}_3;$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}_2}{dt} = -\left(\lambda_{20}+\lambda_{21}+\lambda_{23}+\lambda_{24}\right)\boldsymbol{P}_2+\lambda_{02}\boldsymbol{P}_0+\lambda_{12}\boldsymbol{P}_1+\lambda_{32}\boldsymbol{P}_3;$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}_3}{dt} = -\left(\lambda_{30}+\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{34}\right)\boldsymbol{P}_3+\lambda_{03}\boldsymbol{P}_0+\lambda_{13}\boldsymbol{P}_1+\lambda_{23}\boldsymbol{P}_2;$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}_4}{dt} = \lambda_{04}\boldsymbol{P}_0++\lambda_{14}\boldsymbol{P}_1+\lambda_{24}\boldsymbol{P}_2+\lambda_{34}\boldsymbol{P}_3.$$

8.3. Модифицированная теория массового обслуживания

Более простая модель основана на предположении о специальном характере потока событий. Пусть, например, поток событий пуассоновский. Если обозначить через

$P_i(t)$ вероятность пребывания системы в множестве E_i (в ситуации определенного типа), то уравнения модели можно записать в виде:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{N}\sum_{m=1}^{L_j} P\left(\sigma_m^j\right) P\left(i \to j \mid \sigma_m^j\right) P_i(t) + \sum_{q=0}^{N}\sum_{m=1}^{L_q} P\left(\sigma_m^q\right) P\left(q \to i \mid \sigma_m^q\right) P_q(t). \tag{8.19}$$

Интенсивность перехода $j \to q$ в чисто вероятностной постановке выражается формулой:

$$\lambda_{jq} = \sum_{m=1}^{I_j} P\left(\sigma_m^j\right) P\left(j \to q \mid \sigma_m^j\right), \tag{8.20}$$

где $P(\sigma_m^j)$ — вероятность выбора стратегии σ_m^y. Как и ранее, предполагается, что $P(\sigma_m^j)$ пропорциональны $\pi(\sigma_m^j)$. Неформальная замена $P(\sigma_m^j) \to \pi(\sigma_m^j)$ приводит к комбинированной модели:

$$\begin{gathered}\frac{dP_i(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{N}\sum_{m=1}^{L_j} \pi\left(\sigma_m^j\right) \hat{P}\left(i \to j \mid \sigma_m^j\right) P_i(t) + \\ + \sum_{q=0}^{N}\sum_{m=1}^{L_q} \pi\left(\sigma_m^q\right) \hat{P}\left(q \to i \mid \sigma_m^q\right) P_q(t).\end{gathered} \tag{8.21}$$

К этим условиям следует добавить уравнения, описывающие динамику распределения предпочтений.

Как относится к вероятностям $P\left(j \to j \mid \sigma_m^j\right)$? Это зависит от того, каким методом они определяются. Если для их определения используются методы статистической динамики расчета поведения системы при перемещении из положения i в положение j, с использованием объективных данных о свойствах систем, то их следует считать объективными вероятностями, если же их определение базируется на субъективных оценках, то их можно считать субъективными вероятностями [60] Гроот и обозначать $\hat{P}\left(j \to j \mid \sigma_m^j\right)$.

Распределение предпочтений, нормированных на единицу, имеет вид:

$$\pi(\sigma_m^j) = \frac{f(\sigma_m^j)}{\sum_{q=1}^{N} f(\sigma_q^j)} \tag{8.22}$$

Отсюда следует, что $\pi(\sigma_m^j)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\pi(\sigma_m^j)}{dt} = \pi(\sigma_m^j)\left[\frac{f'(\sigma_m^j)}{f(\sigma_m^j)} \cdot \frac{d\sigma_m^j}{dt} - \sum_{q=1}^{N} \pi(\sigma_q^j) \frac{f'(\sigma_q^j)}{f(\sigma_q^j)} \cdot \frac{d\sigma_q^j}{dt}\right] \tag{8.23}$$

Как будет видно из дальнейшего, функция $f(\sigma_m^j)$ в свою очередь могут зависеть от вероятностей $\hat{P}\left(j \to j \mid \sigma_m^j\right)$. Здесь σ_m^j понимается не только как «номер» альтернативной стратегии, но также как параметр, характеризующий содержание альтернативы. Отбросим для простоты верхний индекс. Если $f(\sigma_m) = e^{\pm\beta x_m}$, где x_m - параметр,

зависящий от времени (может быть, векторный), в частности, x_m может быть функцией от $\hat{P}\left(j \to j \mid \sigma_m^j\right)$, то

$$\frac{d\pi_m}{dt} = \pm\beta\left(\dot{x}_m - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q \pi_q\right)\pi_m \tag{8.24}$$

если $f(x_m) = x_m^{\alpha} \cdot e^{\pm\beta x_m}$, то

$$\frac{d\pi_m}{dt} = \alpha\left(\dot{x}_m \cdot x_m^{-1} - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q x_q^{-1} \pi_q\right)\pi_m \pm \beta\left(\dot{x}_m - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q \pi_q\right)\pi_m \tag{8.25}$$

Наконец, если α и β - функции времени, соответственно получаем:

$$\frac{d\pi_m}{dt} = \pm\beta\left(\dot{x}_m - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q \pi_q\right)\pi_m \pm \dot{\beta}\left(x_m - \sum_{q=1}^{N} x_m \pi_q\right)\pi_m \tag{8.26}$$

и
$$\frac{d\pi_m}{dt} = \begin{bmatrix} \left(\ln x_m - \sum_{q=1}^{N} \ln x_q \pi_q\right)\dot{\alpha} + \left(\dot{x}_m x_m^{-1} - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q \dot{x}_q^{-1} \pi_q\right)\alpha \pm \\ \pm\left(x_m - \sum_{q=1}^{N} x_q \pi_q\right)\dot{\beta} \pm \left(\beta \dot{x}_m - \sum_{q=1}^{N} \dot{x}_q \pi_q\right)\pi_m \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

Экзогенные параметры x_m могут описываться определенной системой уравнений, например

$$\frac{dx_m}{dt} = g_m(x_1, x_2, \ldots x_n, \pi_1, \ldots \pi_n, t) \tag{8.28}$$

Наличие уравнений (8.28), правая часть которых в свою очередь, может быть функцией от $\pi_1 \ldots \pi_n$, делает представление изменения предпочтений с помощью дифференциальных уравнений нетривиальным.

«Физический смысл» переменных параметров x_m, как уже говорилось, различен в том числе, они могут быть связаны с субъективными вероятностями.

Аналогичным образом введем гипотетические уравнения для эндогенных параметров α и β:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= h_\alpha(\alpha, \beta, \pi_1, \ldots \pi_n, t \\ \frac{d\beta}{dt} &= h_\beta(\alpha, \beta, \pi_1, \ldots \pi_n, t \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

Предполагается, что функции h_α и h_β — достаточно «хорошие», например, они могут иметь разрывы только I-го рода по своим аргументам.

Поскольку параметры α^{-1} и β^{-1} играют роль эмоциональных «температур», то естественно допустить, что они могут испытывать быстрые переходы, хорошо моделируемые разрывами I-го рода.

Расширенная модель «теории массового обслуживания» с явным учетом динамики предпочтений предоставляет возможности исследования различных вариантов и частных случаев. Отметим, в частности, что использование аттракторов, например, аттракторов Лоренца для моделирования психической напряженности, позволяет изу-

чить «работу» системы массового обслуживания в условиях проявления стрессовых явлений.

Модель, приведенная ниже, связана со следующим обстоятельством: при применении принципа Джейнса к синтезу предпочтений в чистом виде предполагалось, что психика реагирует «мгновенно» на любое изменение экзогенной ситуации. В действительности, однако, по-видимому, имеется переходный процесс «подстройки» распределения предпочтений к новым экзогенным условиям, причем в некоторых случаях «подстройка» может не поспевать за быстро изменяющимися условиями. «Подстройка» происходит в направлении «оптимального» распределения, которое следует непосредственно из принципа максимума субъективной энтропии. В рассматриваемой модели это идеальное распределение является как бы «путеводной звездой». Очевидно, что при определенных условиях достаточно близкая подстройка может оказаться вообще невозможной и, таким образом, в каждый момент распределение предпочтений будет отличаться от канонического распределения.

Все дополнительные инструменты энтропийной теории предпочтений, энтропийные пороги, стоимостные эквиваленты информации, предельные скорости передачи и усвоения субъективной информации должны быть теперь отнесены к этим «текущим» предпочтениям.

В работе [82] авторелаксационными названы модели, которые учитывают этот факт. В простейшем случае принимается, что «текущее» предпочтение определяется из уравнения:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = -k_i(t)(\pi_i - \pi_{icon}); k_i(t) > 0,$$

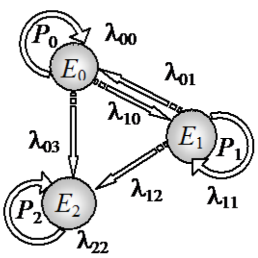
где π_{icon} - «каноническое» распределение, получаемое непосредственно из вариационного принципа, $k_i(t)$ - адаптационный коэффициент, относимый к эндогенным индивидуальным характеристикам. В первом приближении будем считать k - постоянным.

В этом случае, если нормировка для π_i не является постоянной:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \varphi(t); \varphi(t) \geq 0 \tag{8.30}$$

соответствующее релаксационное уравнение имеет вид:

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \frac{1}{N}\frac{d\varphi}{dt} - k(t)(\pi_i - \pi_{icon}); i \in \overline{1, N}; k(t) > 0 \tag{8.31}$$



Как уже упоминалось, введение нестационарной и неединичной нормировки равносильно тому, что предпочтения π_i приобретают оттенок «желаний». При этом сумма предпочтений – желаний может быть меньшей или большей и эта суммарная «сила» предпочтений может изменяться во времени.

Решение уравнения (8.31) легко записывается в конечном виде. Боле подробно модели, описывающие релаксацию предпочтений, представлены в [85].

Рис. 8.10

Рассмотрим пример моделирования на основе модифицированной теории массового обслуживания (8.21) для графа, представленного на (рис.8.10).

Имеется три подмножества ситуаций: E_0, E_1, E_2. Причем внутри каждого подмножества ситуации «неразличимы» (или «плохо различимы»). Подмножество E_2 есть подмножество катастрофических ситуаций или подмножество «без выхода». Так что система является нетранзитивной .

Кроме того, допускаем, что альтернативная ситуация возникает только тогда когда система попадает в подмножества «опасных ситуаций» E_1 и, в этом случае, каждый раз имеется только две альтернативные стратегии: $S_A \to (\sigma_1, \sigma_2)$. Этот случай часто встречается в задачах безопасности полетов, например, σ_1 – совершить посадку, σ_2 – уйти на второй круг, или σ_1 – продолжить взлет при отказе одного двигателя, σ_2 – прекратить взлет.

Обозначим через $\pi(I_i)$ рейтинг императива $I_i \in S_I$ — некоторую количественную меру значимости императива. Пусть система императивов по отношению к множеству S_a является биективной (имеет место взаимно-однозначное соответствие между S_a и S_I: $S_a \leftrightarrow S_I$, рис.8.11).

Примем следующую модель предпочтений:

$$\pi(\sigma_i) = \frac{\pi(I_i)^\alpha e^{-\beta\bar{r}(\sigma_i)}}{\sum\limits_{q=1}^{N} \pi(I_q)^\alpha e^{-\beta\bar{r}(\sigma_q)}}, \tag{8.32}$$

где $\bar{r}(\sigma_i) = \dfrac{\bar{t}_i}{1-\bar{t}_i}$, $\bar{t}_i = \dfrac{t_i^{req}}{r^{disp}}$, и пусть

$$\lambda_{1,0} = \pi(\sigma_1)\hat{P}(1 \to 0 | \sigma_1) + \pi(\sigma_2)\hat{P}(1 \to 0 | \sigma_2);$$
$$\lambda_{1,2} = \pi(\sigma_1)\hat{P}(1 \to 2 | \sigma_1) + \pi(\sigma_2)\hat{P}(1 \to 2 | \sigma_2).$$

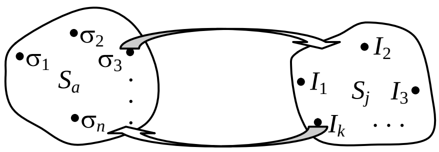


Рис.8.11

В зависимости от соотношения между t^{req} и t^{disp} величина $\bar{r}(\sigma_i) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

С учетом сделанных предположений можем для схемы на (рис. 8.10) записать следующую систему уравнений для вероятностей пребывания в состояниях 1,2,3,→ $P_i(t)$ ($i \in \overline{0,2}$):

$$\frac{dP_0}{dt} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0 + (\pi(\sigma_1)P(1 \to 0 | \sigma_1) + \pi(\sigma_2)P(1 \to 0 | \sigma_2))P_1; \tag{8.33}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0 - (\pi(\sigma_1)P(1 \to 0 | \sigma_1) + \pi(\sigma_2)P(1 \to 0 | \sigma_2))P_1 -$$
$$-(\pi(\sigma_1)P(1 \to 2 | \sigma_1) + \pi(\sigma_2)P(1 \to 2 | \sigma_2))P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt}=\lambda_{02}P_0+\left(\pi(\sigma_1)P(1\to 2\mid\sigma_1)+\pi(\sigma_2)P(1\to 2\mid\sigma_2)\right)P_1.$$

Расчет произведен для начальных условий: при t = 0; $P_0 = 1$; $P_1 = P_2 = 0$.

Обозначим:

$$\eta=\frac{\pi(I_2)}{\pi(I_1)};\quad (\pi(\mathbf{I_1})+\pi(\mathbf{I_2})=1),\quad Z=\bar r(\sigma_2)-\bar r(\sigma_1).$$

Тогда $\pi(\sigma_1)=\dfrac{1}{1+\eta^{\alpha}e^{-\beta Z(t)}}$; $\pi(\sigma_2)=\dfrac{\eta^{\alpha}\cdot e^{-\beta Z(t)}}{1+\eta^{\alpha}e^{\beta Z(t)}}$.

Полагая, что с течением времени приведенные ресурсы убывают по закону

$$\bar r(\sigma_i)=a_i-b_i t;\ \mathbf{a_i}>0;\ \mathbf{b_i}>0,$$

Величины a_i, b_i, а также время t удовлетворяет тому условию, что ресурсы остаются положительными в течении всего процесса. Процесс «останавливается» в момент t_i^*, когда $\bar r(\sigma_i)$ становится отрицательным, т.е. $t_t\le\min t_i^*$.

Выясним, какая субъективная информация «выделяется» при изменении отношения рейтингов императивов, точнее – отношения η.

Энтропия предпочтений

$$H_\pi=-\left(\pi_1\ln\pi_1+\pi_2\ln\pi_2\right)=\left(\pi_1\ln\pi_1+(1-\pi_1)\ln(1-\pi_1)\right);\ \pi_i=\pi(\sigma_i) \tag{8.34}$$

Поток информации, связанный с изменением отношения η, определяется соотношением:

$$I_{\pi\eta}=\frac{dH_\pi}{d\eta}=\frac{\alpha}{\eta}\pi_1\pi_2\ln\frac{\pi_1}{\pi_2}=\frac{\alpha}{\eta}\pi_1(1-\pi_1)\left[\ln\pi_1-\ln(1-\pi_1)\right] \tag{8.35}$$

Уравнения модели (8.33) в новых обозначениях принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP_0}{dt}&=-\left(\lambda_{01}+\lambda_{02}\right)P_0+\frac{\hat P_{101}+\eta^{\alpha}e^{-\beta Z}\hat P_{102}}{1+\eta^{\alpha}e^{\beta Z}}P_1;\\
\frac{dP_1}{dt}&=-\lambda_{01}P_0-\frac{\hat P_{101}+\hat P_{121}\eta^{\alpha}e^{-\beta Z}(\hat P_{102}+\hat P_{122})}{1+\eta^{\alpha}e^{\beta Z}}P_1;\\
\frac{dP_2}{dt}&=-\lambda_{02}P_0+\frac{\hat P_{121}+\eta^{\alpha}e^{-\beta Z}\hat P_{122}}{1+\eta^{\alpha}e^{\beta Z}}P_1.
\end{aligned}\right\} \tag{8.36}$$

На рис. 8.12, 8.13, 8.14 приведены результаты расчетов для следующих исходных данных:

$\lambda_{01} = 0{,}001$; $\lambda_{02} = 0{,}000001$; $\hat P\,(1\to 0|\sigma_1) = \hat P_{101} = 0{,}001$;

$P(1\to 2|\sigma_1) = P_{121} = 0{,}0004$; $P(1\to 2|\sigma_2) = P_{122} = 0{,}00001$.

Были просчитаны варианты:

$\eta = 0{,}05$; $\eta = 0{,}5$; $\eta = 5$; $\eta = 50$,

$Z_0 = 0$; $Z_0 = 0{,}5$; и $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 2$; $b = 0{,}0003$.

Время счета и параметры a_i и b_i выбраны так, что ресурсы ни в одном случае не становятся отрицательными.

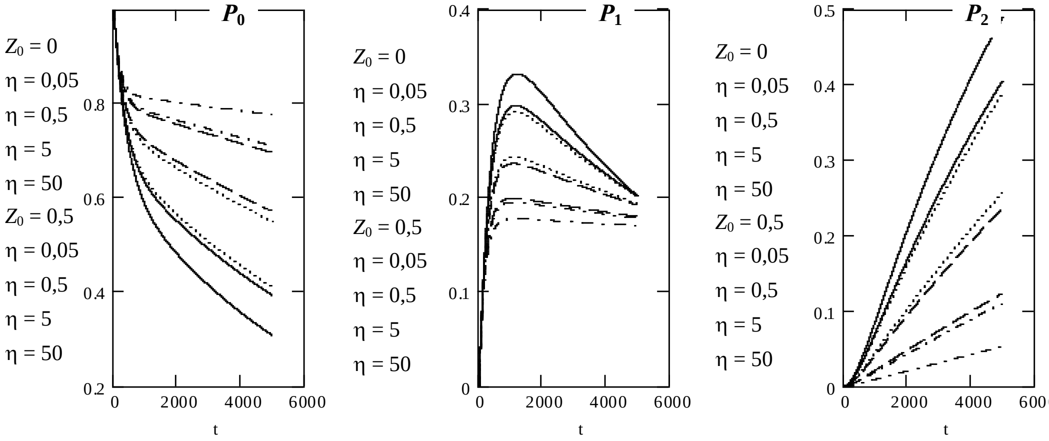


Рис.8.12

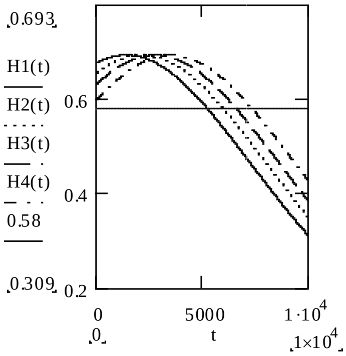


Рис. 8.13

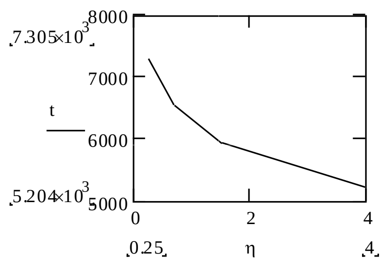


Рис. 8.14

Соотношение рейтингов влияет на «время принятия решения» t^*(если его отождествлять со временем пересечения границы H^* сверху вниз).

Предполагается, что Z(t) изменяется линейно по времени, α = 0,2; β = 0,8; $\bar{r}(\sigma_1)=a_1+b_1t;\ \bar{r}(\sigma_2)=a_2-b_2t;\ Z(t)=\bar{r}(\sigma_2)-\bar{r}(\sigma_1).$ На рис. 8.13 показаны результаты расчета энтропии для значений a_1 = 1,2; a_2 = 2; b_1 = 0,0003; b_2 = 0,00003 и различных значений η: 4,0; 1,5; 0.667; 0,25. Критическое значение H^* = 0,58. Ряд значений критического времени t^* позволяет построить зависимость критического значения t^* от отношения η (рис.8.14). Каждый раз $t^*(\eta_i)$ определяется условием $H_\pi(\eta_i) = H^*$.

Приведенные теоретические схемы содержат значительный произвол в величине структурных коэффициентов моделей, выборе типа аттрактора, назначенных численных величинах некоторых вероятностей.

Структура функций предпочтения, как это видно из предыдущих глав, определяется не единственным образом, имеется неопределенность в выборе эндогенных параметров и, особенно, в истолковании их смысла.

В качестве оправдания выбора моделей, как и ранее, можно сослаться на то обстоятельство что, при отсутствии достаточной информации о «физическом» содержании некоторого процесса моделирование осуществляется путем выбора модели из определенного класса, причем модель должна иметь параметрический либо структур-

ный произвол, ликвидация которого затем является задачей параметрической либо структурной идентификации.

В качестве моделей функций предпочтения выбираются канонические распределения предпочтений, содержащие неопределенные эндогенные параметры. Как показано ранее, для моделирования явления психологического стресса могут быть использованы аттракторы, например, аттрактор Лоренца. Выбор аттрактора Лоренца является в значительной мере произвольным, уравнения аттрактора содержат большое число неопределенных параметров, которые следует оценить на основе обработки экспериментальной информации. Дело сводится к решению специфической задачи идентификации. Одна из возможностей состоит в определении по данным бортовой системы регистрации технических параметров и речевых сигналов фактических моментов принятия решения t^*_k последующей оценке эндогенных параметров с учетом этих данных.

8.4. *Модифицированная формула Байеса*

Пусть A – событие, происходящее совместно с одним из событий $\boldsymbol{B_k(k \in \overline{1,N})}$, составляющих полную группу $\left(\boldsymbol{B_i \cap B_j = \varnothing; \bigcup_{i=1}^{N} B_i = E}\right)$. Имеет место соотношение:

$$\boldsymbol{P(B_k)\cdot P(A|B_k) = P(A)\cdot P(B_k|A)},$$

где $\boldsymbol{P(\cdot)}$ – вероятности. Формула Байеса:

$$\boldsymbol{P(B_k|A) = \frac{P(B_k)\cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B_i)P(A|B_i)}} \qquad (8.37)$$

Здесь используется формула полной вероятности

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Модификация формулы (8.37) путем включения предпочтений не является очевидной.

Пусть вместо событий B_k рассматриваются альтернативы (или стратегии) $\boldsymbol{\sigma_k \in S_A}$, причем они независимы и составляют «полную группу» стратегий.

Постулируем формулу полной субъективной вероятности

$$\boldsymbol{P_{subj}(A) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\sigma_i)P(A|\sigma_i)} \qquad (8.38)$$

где $\boldsymbol{\pi(\sigma_i)}$ – априорные предпочтения альтернатив $\boldsymbol{\sigma_i \in S_A, P(A|\sigma_i)}$ – объективная вероятность события А при выборе стратегии σ_i. Определим апостериорные предпочтения стратегии σ_k при условии осуществления события А следующей формулой:

$$\boldsymbol{\pi(\sigma_k|A) \equiv \frac{\pi(\sigma_k)\cdot P(A|\sigma_k)}{P_{subj}(A)} = \frac{\pi(\sigma_k)\cdot P(A|\sigma_k)}{\sum_{q=1}^{N} \pi(\sigma_q)P(A|\sigma_q)}} \qquad (8.39)$$

Заметим, что выполняется нормировка

$$\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k|A)=1$$

Можно ли совместить определение условного предпочтения по формуле (8.39) с постулатом об образовании всех канонических распределений на основе вариационного принципа? Как должен выглядеть такой принцип для $\pi(\sigma_k|A)$? Пусть

$$\Phi_{\pi(A)}=-\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k|A)\ln\pi(\sigma_k|A)+\beta\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k|A)\times$$
$$\times\ln\left(\pi(\sigma_k)p(A|\sigma_k)\right)+\gamma\sum\pi(\sigma_k|A) \tag{8.40}$$

Очевидно, что в этом случае мы получаем в качестве канонического условного распределения (8.39).

Аналог формулы Байеса, таким образом, следует из вариационного принципа.

Вообще заметим, что распределение

$$P(B_k|A)\equiv\frac{P(B_k|\cdot P(A|B_k)}{P(B_q)P(A|B_q)} \tag{8.41}$$

можно получить из вариационного принципа, если в качестве функционала взять величину:

$$\Phi_{P(B_k|A)}=-\sum_{i=1}^{N}P(B_i|A)\ln P(B_i|A)+\beta\sum_{i=1}^{N}P(B_i|A)\times$$
$$\times\ln\left(P(B_i)P(A|B_i)\right)+\gamma\sum_{i=1}^{N}P(B_i|A) \tag{8.42}$$

Пусть $\beta = 1$:

$$-\ln P(B_i|A)-1+\ln\left(P(B_i)P(A|B_i)\right)+\gamma=0$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{q=1}^{N}P(B_q)P(A|B_q)} \tag{8.41}$$

т.е. формула Бейеса есть следствие специфического вариационного принципа.

8.5. Субъективный риск для предметных и рейтинговых предпочтений

8.5.1. Субъективный риск и энтропийная парадигма

Рассматриваемая проблема в определенном смысле ориентирована на развитие принципа максимума субъективной энтропии [79, 83, 231].

Функция эффективности, входящая линейно в основной функционал и, в свою очередь линейная относительно показателей предпочтений на множестве альтернатив, в данном случае представляет собой по форме байесовский риск, с заменой априорных вероятностей показателями предпочтений.

Предлагается два варианта субъективного риска: для предметных альтернатив и, соответственно, предметных предпочтений и рейтинговых альтернатив и, соответственно, рейтинговых предпочтений. В обоих случаях все субъективные категории от-

носятся к определенному «индивидуальному носителю»: множества альтернатив, распределения предпочтений, максимизируемые функционалы…

Введено дополнительное предположение о структурированности энтропийного пространства: энтропийные пороги делят конечную область изменения энтропии на подобласти таким образом, что переход энтропии из одной области в другую радикально меняет поведение субъекта «принимающего решение». Вводятся также пороги для субъективных рисков.

Предлагаемая теория может служить основой для совершенствования методов управления активными системами анализа процессов самоуправления. Она продолжает развитие моделей, основанных на использовании субъктивной энтропии, в рамках энтропийной парадигмы.

Модель «субъективного риска» и в этом смысле она является развитием идей, лежащих в основе «субъективного анализа».

«Субъективный риск» используется в качестве «функции потерь» в вариационных задачах, предназначенных для получения распределения предпочтений I и II рода (предметных предпочтений и рейтинговых предпочтений).

Наряду с введенными ранее [83, 231] энтропийными порогами, предлагается ввести в рассмотрение пороги функции субъективного риска, которые, по мнению автора, могут быть связаны с достаточными условиями принятия решений на множествах S_a и S_ξ.

Не затрагиваются все возможные постановки и теоретические схемы, которые возникают в связи с многообразием представления предметных и рейтинговых энтропий, в частности, с большим кругом нестационарных задач, использующих рекурсивные схемы.

8.5.2. Субъективный байесовский риск для предметных предпочтений

Переформулируем теорию байесовского риска таким образом, чтобы соединить её с основным принципом субъективного анализа – <u>принципом максимума субъективной энтропии предпочтений</u> и, тем самым ввести <u>«субъективный байесовский риск» (SBR)</u>.

Рассмотрим критерий байесовского риска в простейшем случае, когда имеется две стратегии (или две альтернативы) σ_1 и σ_2, соответственно первая гипотеза состоит в том, что принимается стратегия σ_1, вторая – в том, что принимается стратегия σ_2. Пусть a – существенный параметр, который определяет тип ситуации, C – множество ситуаций и пусть подмножества A_1 и A_2 таковы, что $A_1 \subset C; A_2 \subset C; A_1 \cap A_2 = \varnothing; A_1 \cup A_2 = C$.

Пусть $p(\sigma_1)$ – априорная вероятность принятия стратегии σ_1, $p(\sigma_2)$ – априорная вероятность принятия стратегии σ_2.

$p(a \in A_1 | \sigma_1)$ – вероятность попадания значения параметра a в A_1 при условии принятия гипотезы (стратегии) σ_1, $p(a \in A_1 | \sigma_1)$ – вероятность попадания a в A_1 при условии принятия гипотезы (стратегии) σ_2. Вероятности $p(a \in A_2 | \sigma_1)$ и $p(a \in A_2 | \sigma_2)$ определяются аналогично.

Положим что c_{11} есть «штраф» или плата при выборе гипотезы σ_1 и попадании a в A_1, аналогично определим c_{12}, c_{21}, c_{22}.

Определим байесовский риск формулой:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{12}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_2) + \\ &+\boldsymbol{c}_{21}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{22}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_2)\end{aligned} \tag{8.42}$$

Сделаем теперь неформальный шаг: заменим априорные вероятности $p(\sigma_1)$ и $p(\sigma_2)$ на показатели предпочтений (или проще – на «предпочтения») $\pi(\sigma_1)$ и $\pi(\sigma_2)$.

Эти предпочтения выбираются как решение вариационной задачи с функционалом:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}_\pi = -\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\ln\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\ln\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\right) \\ &\pm\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{\sigma}_2)\right) + \boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\right)\end{aligned} \tag{8.43}$$

Вводится субъективный байесовский риск:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R_{SB}} = \boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{12}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_2) + \\ &+\boldsymbol{c}_{21}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{22}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_2)\end{aligned} \tag{8.44}$$

В формуле (8.43) $F_i(\sigma_i)$ «когнитивные функции». Последний член, как обычно, в этой формуле отражает условие нормировки:

$\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2) = 1$

8.5.3. Вариационная задача для предметных предпочтений

Функционал (8.43) в частном случае может быть выбран в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}_\pi = -\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\ln\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\ln\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\right)\pm \\ &\pm\boldsymbol{\beta}\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{12}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{\sigma}_2) + \\ &+\boldsymbol{c}_{21}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{c}_{22}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{\sigma}_2) +\end{aligned}\right\} \\ &+\boldsymbol{\gamma}\sum\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_2)\right)\end{aligned} \tag{8.45}$$

Возникает вопрос: откуда брать условные вероятности $p(a\in A_S|\sigma_k); S\in\overline{1,L}; k\in\overline{1,N}$?

Если сформулирована соответствующая стохастическая задача (например, задача стохастической управляемости или достижимости) и известно описание всех процессов, то они могут быть получены расчетом. Но, если такие расчеты с достаточной достоверностью сделать невозможно, то условные вероятности можно считать субъективными вероятностями, понимаемыми так, как это сделано, например, в монографии М де Гроота [60]. Такие условные субъективные вероятности будем обозначать: $\hat{p}(a\in A_S|\sigma_k)$. Принимая это обозначение в функционале (8.45), найдем модели предпочтений из уравнений

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_\pi}{\partial\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}_k)} = 0; \qquad (\boldsymbol{k}\in\overline{1,N}) \tag{8.46}$$

Из (8.46) находим:

$$-\ln\pi(\sigma_1)-1\pm\beta(c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1))+\gamma=0$$
$$-\ln\pi(\sigma_1)-1\pm\beta(c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_2)+c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2))-\gamma=0$$

Отсюда

$$\pi(\sigma_1)=\frac{e^{\pm\beta(c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1))}}{e^{\pm\beta(c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1))}+e^{\pm\beta^1(c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_2)+c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2))}};\pi(\sigma_2)=1-\pi(\sigma_1) \quad (8.47)$$

Сравнивая (8.43) и (8.45) мы видим, что в качестве когнитивных функций выступают величины

$$\left.\begin{aligned}F_1(\sigma_1)&=c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1);\\ F_2(\sigma_2)&=c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_2)+c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2)\end{aligned}\right\} \quad (8.48)$$

Заметим, что условные вероятности удовлетворяют условиям нормировки:

$$\left.\begin{aligned}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1)+\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1)&=1;\\ \hat{p}(a\in A_1|\sigma_2)+\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2)&=1\end{aligned}\right\} \quad (8.49)$$

8.5.4. Субъективный рейтинговый риск

По аналогии с тем, как это было сделано выше для предметных предпочтений $\pi(\sigma_i)$ (I-го рода) введем байесовский риск, связанный с выбором «исполнителя». Стратегия в данном случае состоит в выборе «исполнителя» Σ_m из определенной группы субъектов S_ξ.

Положим, что Σ_m – обозначение субъекта из «группы» S_ξ. Априорная вероятность выбора Σ_m есть $p(\Sigma_m)$ и $\hat{p}(a\in A_j q|\Sigma_m)$ – условная вероятность попадания а в A_j, ($a\in A_j$), если в качестве исполнителя задачи будет выбран субъект Σ_m, наконец c_{mj} – цена (риск) связанная с выбором Σ_m. c_{mj} может быть, например, связана с вознаграждениями субъекта Σ_m – исполнителя. Объективный байесовский риск должен быть представлен в форме:

$$\begin{aligned}R_B&=c_{11}p(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+c_{12}p(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_2)+\\ &+c_{21}p(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1)+c_{22}p(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_2)\end{aligned} \quad (8.50)$$

Тогда субъективный риск такого выбора есть:

$$\begin{aligned}R_{SB}&=c_{11}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+c_{12}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_2)+\\ &+c_{21}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1)+c_{22}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_2)\end{aligned} \quad (8.51)$$

Здесь $\xi(\Sigma_m)$ – рейтинговый коэффициент субъекта Σ_m.

Введем рейтинговые когнитивные функции:

$$\begin{aligned}G_1(\Sigma_1)&=c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1);\\ G_2(\Sigma_2)&=c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_2)+c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2)\end{aligned} \quad (8.52$$

8.5.5. Вариационная задача для рейтинговых предпочтений

Распределения $\xi(\Sigma_j)\,j$ подчинены, как и предметные распределения, определенному вариационному принципу. Соответствующий функционал запишем в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_\xi &= -\xi(\Sigma_1)\ln\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)\ln\alpha(\Sigma_2)-\\ &-\beta_\xi(c_{11}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+c_{12}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_2)+\\ &+c_{21}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1)+c_{22}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_2)+\gamma_\xi\big(\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)\big)\end{aligned} \tag{8.53}$$

Условие нормировки рейтинговых коэффициентов:

$$\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)=1$$

Из условия:

$$\frac{\partial\Phi_\xi}{\partial\xi(\Sigma_m)}=0;$$

имеем:

$$\boldsymbol{\xi(\Sigma_m)=\frac{e^{-\beta_\xi(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m))}}{e^{-\beta_\xi(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m))}+e^{-\beta_\xi(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m))}}} \tag{8.54}$$

В общей форме функционал над множеством S_a имеет вид:

$$\Phi_\pi = H_\pi+\beta_\pi R_{SB_\pi}+\gamma_\pi N_\pi \to \max(\pi\in\hbar) \tag{8.55}$$

Здесь H_π – субъективная энтропия, $R_{SB\pi}$ – субъективный риск, зависящий от распределения предметных предпочтений, $\gamma_\pi N_\pi$ – член, обусловленный наличием условия нормировки, ħ – постоянная Планка.

Функционал для рейтинговых предпочтений (над множеством S_ξ) представляется так:

$$\boldsymbol{\Phi_\xi = H_\xi+\beta_\xi R_{SB\xi}+\gamma_\xi N_\xi \to \max(\xi\in Z)} \tag{8.56}$$

Здесь в (8.55) и (8.56) предполагается, что все функции, содержащиеся в функционалах (8.53) и (8.56) определены в один и тот же момент времени. Таким образом, принципы (8.51) и (8.56) являются статическими в том смысле, что изменение эндогенной и экзогенной обстановки мгновенно отражается на величине предпочтений и их распределений.

Пусть теперь количество предметных альтернатив равно N: $k\in\overline{1,N}$; а количество подмножеств A_j равно L, тогда

$$\boldsymbol{\Phi_\pi = -\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k)\ln\pi(\sigma_k)-\beta\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_n)\sum_{j=1}^{L}c_{kj}\,p(a\in A_j|\sigma_n)+\gamma\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k)} \tag{8.57}$$

и соответственно:

$$\boldsymbol{\Phi_\xi = -\sum_{m=1}^{M}\xi(\Sigma_m)\ln\xi(\Sigma_m)-\beta_\xi\sum_{m=1}^{M}\sum_{S=1}^{L}c_{ms}\xi(\Sigma_m)\hat{p}(A_s|\Sigma_m)+\gamma_\xi\sum_{m=1}^{M}\xi(\Sigma_m)} \tag{8.58}$$

Подразумевается, что рейтинги $\xi(\Sigma_m)$ сформированы в сознании некоего субъекта «q».

Если рассматриваются дифференциальные предпочтения – рейтинги, отнесенные к определенной альтернативе $\sigma_k \in S_a$, то можно воспользоваться подобным функционалом относительно распределения $\xi\left(\Sigma_m \middle| \sigma_k\right)$ и, соответственно, вероятностью $\hat{p}\left(A_s \middle| \Sigma_m, \sigma_k\right)$.

Функционалы (8.57) и (8.58)порождают распределения

$$\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{\sigma}_k\right) = \frac{e^{-\beta_\pi \sum_{s=1}^{L} c_{kj} \hat{p}\left(A_j | \sigma_k\right)}}{\sum_{q=1}^{N} e^{-\beta_\pi \sum_{j=1}^{L} c_{qj} \hat{p}\left(A_j | \sigma_q\right)}} \tag{8.59}$$

$$\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{\Sigma}_m \middle| \boldsymbol{\sigma}_k\right) = \frac{e^{-\beta_\xi \sum_{s=1}^{L} c_{ms} \hat{p}\left(A_s | \Sigma_m, \sigma_k\right)}}{\sum_{q=1}^{M} e^{-\beta_\xi \sum_{s=1}^{L} c_{qs} \hat{p}\left(A_s | \Sigma_q, \sigma_k\right)}} \tag{8.60}$$

Заметим, что если использовать байесовский риск, выраженный через априорные вероятности $p(\sigma_k)$ и вероятностную энтропию

$$\boldsymbol{H}_p = -\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_k) \ln \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_k), \tag{8.61}$$

то получаются формально в точности такие же формулы как в случае (8.57), (8.58) с теми же численными значениями при прочих равных условиях с той лишь разницей, что условные вероятности не считаются субъективными.

При этом, однако, необходимо сделать предположение о применимости принципа Джейнса к психическим процессам, в том числе, о свойствах множества альтернатив.

8.5.6. Пороги для энтропии и пороги для риска

Ранее в [231] в рассмотрение были введены характерные значения энтропии: пороги $H_\pi^*, H_\pi^{**}, H_{*\pi}$.

Под H* понималось такое значение предметной энтропии, что выполнение неравенства $H_\pi < H_\pi^*$ являлось необходимым условием, «принятия решения» – выбора на S_a.

Считалось, что если $H_\pi > H_\pi^*$, то альтернативы плохо различимы. При этом дополнительнь H_π эвием было пересечение энтропийного порога H_π^* «сверху вниз», то есть $\dot{H}_\pi^* \big| t^* < 0$, где t^* – момент пересечения энтропийного порога, H_π^* - (рис.8.15)

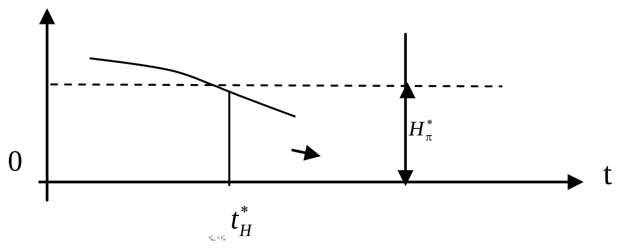


Рис. 8.15

Под H_π^{**} подразумевается такое пороговое значение $H_\pi^{**} > H_\pi^{*}$, что при выполнении условия $H_\pi > H_\pi^{**}$ невозможна никакая разумная деятельность: психика находится в состоянии стресса (истерики) $H_\pi^{**} < H_{\pi\max} = \ln N$.

$H_{\pi\max}$ – это такая энтропия, которая не может быть для данного субъекта достигнута.

Область $H_\pi \in \left[H_{*\pi}, 0\right]$ считается «областью Зомби»: не существует метода и ресурсов способных вернуть субъекта в область продуктивной производственной и рассудочной психической деятельности.

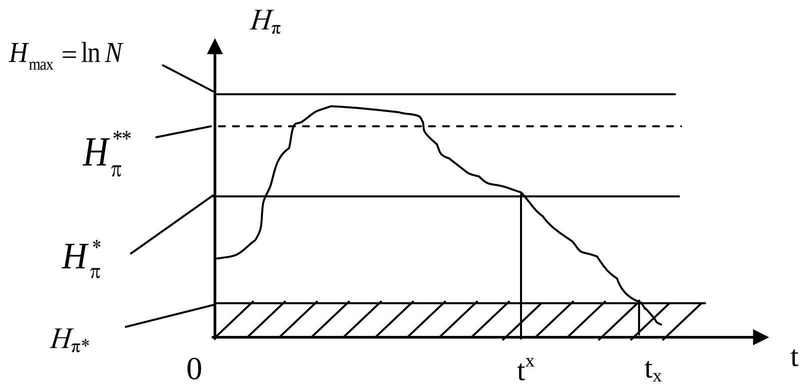


Рис. 8.16

Напомним, что была предложена в [83, 231] схема оценки стоимости субъективной информации, в частности, затрат, связанных с переводом системы с одной энтропийной границы к другой:

$$H_{\max} \to H_\pi^{**}; H_\pi^{**} \to H_\pi^{*}; H_\pi^{*} \to H_{\pi*}; H_{\pi*} \to 0$$

Существующие формулы носят формальный характер, так как тип ресурсов каждый раз необходимо определить. Наличие в явном виде количественных соотношений, связывающих величину предпочтений с ресурсами, позволяет вычислить изменения предпочтений при изменении ресурсной ситуации и, тем самым, решить задачу определения (оценки) потребных ресурсов для изменения предпочтений (может быть – ориентации субъекта на множестве S_a).

При этом, конечно, необходимо учитывать эффект множественного информационного и ресурсного взаимодействия между субъектами в группе.

Решение этой последней задачи можно будет получить, если удастся предложить модель информационного взаимодействия субъектов в группе (эффекты кумуляции, демпфирования и т.д.)

Энтропийные пороги, как пороги субъективного риска, служат важными показателями индивидуальной психики.

Существует очевидная задача – задача управления порогами, так как они могут изменяться со временем, и их величина определяет поведение субъектов и группы субъектов. Поэтому необходимо располагать моделями динамики порогов.

Если построить для функции риска график (рис. 8.17), аналогичный графику на (рис. 8.15),

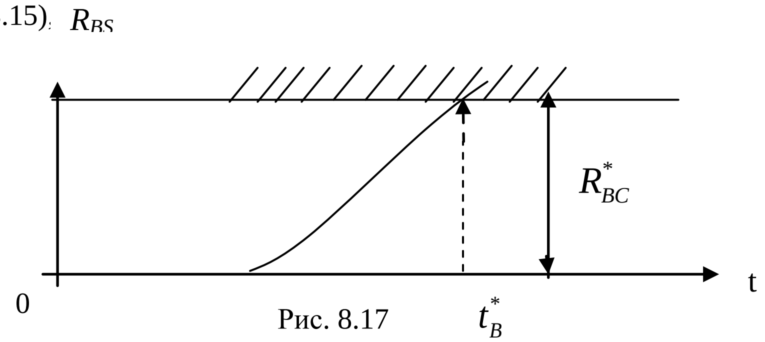


Рис. 8.17

то заметим, что если выполняется условие $R_{BS} > R_{BC}^{*}$, то это служит достаточным условием для выбора альтернативы (стратегии) σ_k.

Время t_R^* – есть момент наступления события $R_{BS} > R_{BS}^{*}$. В качестве дополнительного условия возьмем, что в момент t_B^* $\dot{R}_{BC} > 0$, т.е. риск возрастает.

Итак, рис. 8.15 демонстрирует необходимое условие выбора, а рис. 8.17 – достаточное условие выбора.

Рассмотрим совмещенный график, на котором изобразим обе зависимости: $H_\pi(t)$ и $R_{SB}(t)$.

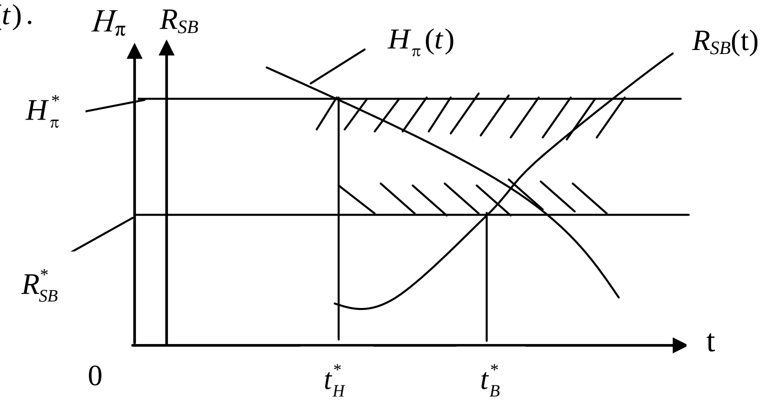


Рис. 8.18

На этой диаграмме показана ситуация, когда $t_H^* < t_{R_{SB}}^*$, т.е. условие для распознавания ситуации складываются раньше, чем возникло условие, вынуждающее принять решение (сделать выбор на S_a).

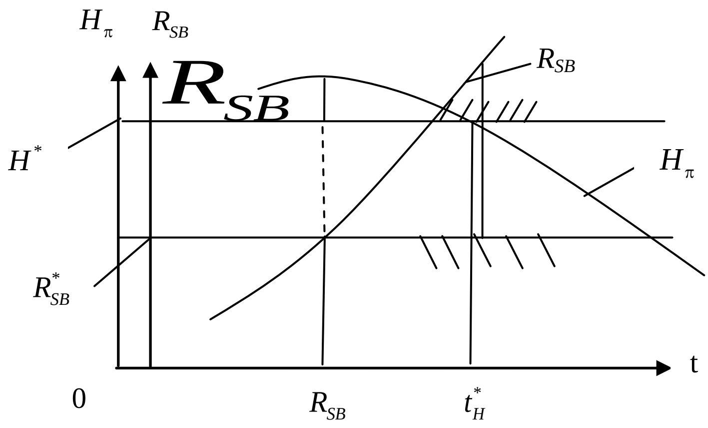


Рис. 8.19

На рис. 8.19 изображена другая ситуация. Здесь

$$t^*_{R_{SB}} < t^*_H$$

т.е. условия, вынуждающие принять решение: $R_{SB} > R^*_{SB}$ возникают раньше, чем появляется такая возможность, т.е. достаточная различимость альтернатив: (выполняется неравенство $H \le H^*_\pi$).

Если решение принимается в момент t^*, то избыточная неопределенность определяется величиной $\Delta H^* = H_\pi - H^*_\pi$. Если решение принимается в момент t^*_H, то в момент принятия решения степень избыточной неопределенности равна $H^{(t)}_\pi - H^*_\pi = 0$, а риск превышает порог на величину

$R_{SB} - R^*_{SB} > 0$

Предполагается, что пороги H^*_π и R^*_{SB} являются подвижными и зависят в первую очередь от мгновенных значений H_π и R_{SB}.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H^*_\pi} &= \boldsymbol{f\left(H_\pi, R_{SB}\right)} \\ \boldsymbol{R^*_{SB}} &= \boldsymbol{g\left(H_\pi, R_{SB}\right)} \end{aligned} \tag{8.62}$$

Отсюда получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{dH^*}}{\boldsymbol{dt}} &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{H_\pi}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}_\pi + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{R_{SB}}} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{SB}} \\ \frac{\boldsymbol{dR^*}}{\boldsymbol{dt}} &= \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{H_\pi}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}_\pi + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{R_{SB}}} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{SB}} \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

Заметим, что все энтропийные пороги лежат в пределе $[0, H\max = \ln N]$. Риск имеет размерность ресурсов (c_{ij}) и соответствующие пороги принадлежат области $\left[0, R^{disp}_{\max}\right]$.

8.5.7. Модели с комбинированной энтропией и распределениями, зависящими от времени

В этом разделе мы рассматриваем системы, ориентированные на агрегированные распределения. В качестве такого распределения выберем следующее:

$$\pi_j^{\Sigma}\left(\sigma_k,t\right)=\sum_{i=1}^{M}\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\cdot\xi\left(j-i\middle|\sigma_k,t\right) \tag{8.64}$$

Здесь $\pi_j^{\Sigma}\left(\sigma_k,t\right)$ – агрегированное предпочтение σ_k субъекта j. $\pi_i\left(\sigma_k,t\right)$ – индивидуальное предпочтение.

Составим функционал:

$$\begin{aligned}\Phi_{j,k,t,t-1}&=-\sum_{i=1}^{M}\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\cdot\xi(j\to i|\sigma_k,t)\ln\pi_i(\sigma_k,t)\xi(j\to i|\sigma_k,t)+\\&+\sum_{i=1}^{M}\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\cdot\xi(j\to i)|\sigma_k,t)\times\\&\times\ln\left[\alpha_s\left(\pi_i(\sigma_k,t-1)\cdot\xi(g\to i|\sigma_k,t-1)\right)+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_j(A_s|\sigma_k,t-1)\right)\right]+\\&+\gamma_j\sum_{i=1}^{M}\xi(j\to i)|\sigma_k,t)\end{aligned} \tag{8.65}$$

Здесь $\xi(j\to i|\sigma_k,t)$ – «профессиональный» рейтинг (относительно σ_k) субъекта «i в глазах j», L – количество областей $A_s\subset S_a$. Используя этот функционал, «принадлежащий j» найти предметное распределение $\pi_i(\sigma_k,t)$, «принадлежащее i» невозможно, так как «j не управляет i», «j агрегирует предпочтение i» если они уже сложились к моменту t-1, и подстраивает свои предпочтения к предпочтениям $i\in S_{\xi}$ с помощью процедуры агрегирования.

Таким образом, функционал (8.65) можно использовать для определения рейтинговых дифференциальных предпочтений $\xi(j\to i|\sigma_k,t)$ в момент t. При этом обеспечивается рекурсивная процедура.

Вычислим условие экстремума функционала (8.65):

$$\frac{\partial\Phi_{j,k,t,t-1}}{\partial\xi(j\to i|\sigma_k,t)}=0;\quad \begin{matrix}j\in\overline{1,M}\\ k\in\overline{1,N}\end{matrix} \tag{8.66}$$

Далее по (8.65)

$$\begin{aligned}&-\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\ln\pi_i(\sigma_k,t)\xi(j\to i|\sigma_k,t)-\pi_i\left(\sigma_k,t\right)+\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\cdot\\&\cdot\ln\left[\alpha_j\pi(\sigma_k,t-1)\cdot\xi(j\to i|\sigma_k,t-1)+\exp\beta_j\left(\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k,t-1)\right)\right]+\\&+\gamma_j=0\end{aligned}$$

Отсюда:

$$-\ln\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\xi(j\to i\left|\sigma_k,t\right.)-1+$$
$$+\ln\left[\alpha_j\pi(\sigma_k,t-1)\cdot\xi(j\to i\left|\sigma_k,t-1\right.)+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s\left|\sigma_k,t-1\right.)\right)\right]+$$
$$+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}=0$$

или:

$$\pi_i\left(\sigma_k,t\right)\xi(j\to i\left|\sigma_k,t\right.)=$$
$$=\left[\alpha_j\pi_i(\sigma_k,t-1)\xi(j\to i\left|\sigma_k,t-1\right.)+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s\left|\sigma_k,t-1\right.)\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)$$

Поделив на $\pi_i\left(\sigma_k,t\right)$, найдем:

$$\boldsymbol{\xi(j\to i\left|\sigma_k,t\right.)=\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}\times}$$
$$\boldsymbol{\times\left[\alpha_j\pi_i(\sigma_k,t-1)\xi(j\to i\left|\sigma_k,t-1\right.)+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s\left|\sigma_k,t-1\right.)\right)\right].}\qquad(8.67)$$

(8.67) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\xi(j\to i\left|\sigma_k,t\right.)=\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}\cdot V_{j,i,k,t-1}}\qquad(8.68)$$

где $V_{j,i,k,t-1}$ - выражение в квадратных скобках не содержащее $\pi_i(\sigma_k,t)$

Находим:

$$-\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}+\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot\left(-\frac{\gamma_j}{\pi_i^2(\sigma_k,t)}\right)\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}=0$$

и, следовательно:

$$-1-\frac{\gamma_j}{\pi_i^*(t)}=0\quad\text{или}\quad\gamma_j=-\pi_i^*(t).$$

Величину γ_j можно определить из условия нормировки:

$$\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\xi(j\to i\left|\sigma_k,t\right.)=}1\qquad(8.69)$$

при условии, что известны все другие параметры, входящие в распределение (8.67), в частности функции $\pi_i(\sigma_k,t)$. Из (8.67) с учетом (8.69) получаем:

$$1=\sum_{q=1}^{M}\left(\pi_q(\sigma_k,t0)\right)^{-1}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_q(\sigma_k,t)}\right)}\times$$
$$\times\left[\alpha_j\pi_q(\sigma_k,t-1)\xi(i\to q|\sigma_k,t-1)+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_q(A_s|\sigma_k,t-1)\right)\right] \qquad (8.70)$$

Если мы поделим (8.67) на (8.70), то получим соотношение:

$$\xi(j\to i|\sigma_k,t)=\frac{\left(\pi_i(\sigma_k,t)^{-1}\right)\cdot\exp\left(\frac{\pi^*_\xi(t)}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)V_{j,i,k,t-1}}{\sum_{q=1}^{M}\left(\pi_q(\sigma_k,t)^{-1}\right)\cdot\exp\left(\frac{\pi^*_q(t)}{\pi_q(\sigma_k,t)}\right)V_{j,q,k,t-1}} \qquad (8.71)$$

Дальнейшее развитие теории субъективного риска представляется актуальной задачей, применимой в тех областях, где роль «человеческого фактора» является определяющей. Субъективный риск является основой теории безопасности активных систем, в задачах социальной и экономической динамики.

Многие авторы говорят об исключительной роли энтропии. У Льва Гумилева [53], например, читаем: «…походы монголов 1201-1260 22 есть история пассионарного толчка или, точнее, энергетического взрыва, погашенного энтропией». Автор не конкретизирует понятие энтропии: энтропия чего, каких распределений, имеется в виду. Аналогично, в экономике неравномерное развитие, которое отражается в так называемых «волнах Эллиота» также имеет, скорее всего, в основе энтропийную динамику. Весьма продуктивной оказывается энтропийная концепция в задачах обучения. Принцип максимума субъективной энтропии во всех этих проявлениях играет фундаментальную роль, а субъективный риск позволяет записать в наиболее последовательной форме критерий оптимальности.

8.6. *Кинетическое уравнение социодинамики*

8.6.1. Модели кинетических уравнений в физике

Одна из физических аналогий, которая может быть принята в субъективном анализе, состоит в использовании основной схемы построения функции распределения в кинетической теории газов (например – уравнение Больцмана), а также уравнения Голдмана в теории коагуляции.

Проведем краткий экскурс в указанные области. Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения координат и импульсов молекул однокомпонентного газа имеет вид:

$$\frac{\partial f(\vec{q}_1\vec{p}_1 t)}{\partial t}=-\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{q}}-\vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}+S_{(2)}(\vec{q}',\vec{q}-\vec{q}',\vec{p}',\vec{p}-\vec{p}') \qquad (8.72)$$

где $f\left(\vec{q},\vec{p},t\right)$ – одночастичная функция распределения, $\vec{q}$ – векторная координата частицы, $\vec{p}$ – импульс частицы, $\vec{F}$ – сила, приложенная к частице. Потенциал взаимодействия учитывается в «столкновительном члене» $S_{(2)}$. В простейшем случае в уравнении (8.72) учитываются только парные взаимодействия. Кроме того, при столк-

новении двух частиц (упругих шаров) сохраняются суммарная масса, суммарный импульс и суммарная кинетическая енергия. В случае неупругих столкновений кинетическая энергия не сохраняется. Тройные столкновения и столкновения большего числа частиц в модели (8.72) игнорируются как чрезвычайно редкие. Применительно к социодинамике, к взаимодействию субъектов такое допущение излишне обременительно, так как априорно ясно, что коллективные взаимодействия играют существенную роль.

Кроме того очевидно, что подобные «механическому» случаю условия сохранения в применении к предпочтениям отсутствуют и должны быть заменены другими условиями, которые, как будет видно из дальнейшего, имеют вид неравенств.

Итак, наиболее существенные отличия кинетической теории газов сводятся к следующему:

– кроме «парных» взаимодействий существенную роль должны играть «тройные» («соображение на троих») … «n-ичные» коллективные взаимодействия;

– «эффект толпы». Каким-то образом должны быть учтены «законы толпы»;

– даже при парных взаимодействиях отсутствуют сохраняющиеся величины («масса», «импульс», «энергия»). Взаимодействия носят «неупругий характер» и должны быть найдены модели информационного взаимодействия субъектов.

– существуют как «близкодействующие» так и «дальнодействующие» взаимодействия с учетом существующих средств коммуникации, информационных средств и т.д.

При этом следует учитывать, что в данном случае взаимодействия носят как материальный, так и, в первую очередь информационный характер.

$$(\vec{\pi}_i, \vec{\xi}_i)_{befor} \to (\vec{\pi}_i, \vec{\xi}_i)_{aftor}$$

– не может быть применен принцип «детального равновесия». Он должен быть заменен другой моделью.

Одно из обобщений уравнения Больцмана относится к случаю, когда частицы «газа» имеют различные массы, т.е. существует также распределение по массам и функция распределения имеет еще один аргумент – массу частицы:

$$f = f\left(\vec{q}, \vec{p}, m, t\right).$$

Соответствующая теория возникла в связи с изучением кинетики аэрозольных систем, капельных облаков, в астрофизике туманностей.

Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f\left(\vec{q},\vec{p},m,t\right)}{\partial t}=-\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{q}}-\vec{F}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}+\xi\left(m\right)\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left[\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}+\beta\cdot\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{U}_r\right)\cdot f\right]+$$
$$+\left(\frac{3}{4\vec{n}\rho_o}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\int_0^m\ldots\int f_n\left(\vec{q},\vec{p}',m',t\right)f\left(\vec{q},\vec{p}-\vec{p},m-m',t\right)\cdot$$
$$\cdot\left|\frac{\vec{p}'}{m'}-\frac{\vec{p}-\vec{p}'}{m-m'}\right|\cdot\left[m'^{\frac{1}{3}}+\left(m-m'\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 d\vec{p}'dm'-\left(\frac{3}{4\vec{n}_{\rho o}}\right)^{\frac{2}{3}}\iint_0^{\infty} f\left(\vec{q},\vec{p},m,t\right)\cdot \tag{8.73}$$
$$\cdot f\left(\vec{q},\vec{p}',m',t\right)\left|\frac{\vec{p}}{m}-\frac{\vec{p}'}{m'}\right|\cdot\left[m^{\frac{1}{3}}+m'^{\frac{1}{3}}\right]^2 d\vec{p}'dm'$$

Третий член справа описывает эффект, обусловленный релеевской диссипацией и диффузией, четвертый член описывает пополнение фракции частиц с параметрами ($\vec{f},\vec{p},m$), точнее, в малой окрестности этих параметров в результате парных столкновений, пятый член описывает «скорость» покидания частицами данной фракции также в результате парных столкновений.

Приведенное обобщенное уравнения Больцмана может быть свернуто, если предположить, что

$$f'=\nu\left(m,t\right)\cdot\varphi^{(0)}\left(\vec{p},m,t\right),$$

где $\varphi^{(0)}\left(\vec{p},m,t\right)$ – распределение Максвелла по импульсам. Это допущение соответствует случаю броуновской коагуляции. Из уравнения (8) в этом случае получается уравнение коагуляции Голдмана:

$$\frac{\partial\nu\left(m,t\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\int_0^m K\left(m',m-m'\right)\cdot\nu\left(m',t\right)\nu\left(m-m',t\right)dm'-$$
$$-\int_0^{\infty}K\left(m,m'\right)\nu\left(m,t\right)\cdot\nu\left(m',t\right)dm' \tag{8.74}$$

где ядро $K(m_1,m_2)$ представляется формулой:

$$K(m_1,m_2)=2\pi\left(\frac{3}{4\pi_{\rho o}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\left[m_1^{\frac{1}{3}}+m_2^{\frac{1}{3}}\right]^2}{{}^3m_1^{\frac{3}{2}}\cdot m_2^{\frac{3}{2}}}\cdot\iint_{\vec{p}_1\,\vec{p}_2}\exp\left[-\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1\theta_r}-\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2\theta_r}\right]\cdot\left|\frac{\vec{p}_1}{m_1}-\frac{\vec{p}_2}{m_2}\right|\cdot d\vec{p}_1d\vec{p}_2$$

Первый интеграл в правой части представляет собой секундный вклад коагуляцитивного процесса во фракцию частиц с массой в диапазоне $\left(m,m+dm\right)$, второй – убыль числа частиц из фракции с массой в указанном диапазоне в результате «соединения с частицами с другой массой m'».

Заметим еще, что при достаточно строгом выводе уравнение Больцмана получается как последний шаг свертывания «цепочки Боголюбова», в начале которой находится уравнение Лиувилля (для системы с фиксированным числом частиц). С переходом к уравнениям типа (8.73), в котором допускается изменение числа частиц в

результате коагуляции, возникают чисто теоретические трудности. В этом случае, более адекватными были бы схемы, подобные схемам квантовой электродинамики, где число частиц может не сохраняться.

8.6.2. Кинетическое уравнение социодинамики

Аналогия, которую мы хотим применить, состоит в следующем. Имеется социум, общее число субъектов – M, $\pi_j(\sigma_i)$ - распределение предпочтений у j-го субъекта, или $\vec{\pi}_j$ – вектор распределения предпочтений на S_{aj} – множестве альтернатив j-го субъекта, $S_a = \bigcup_{j=1}^{M} S_{aj} (j \in \overrightarrow{1,m})$ – мажорирующее множество альтернатив. Введем функцию плотности распределения числа субъектов на множестве векторов $\vec{\pi}_i$:

$$v(t,\vec{\pi}_i)$$

Это означает, что во фракции $\vec{\pi}, \vec{\pi} + d\vec{\pi}$ содержатся $dn(t,\vec{\pi})$ субъектов и

$$\boldsymbol{dn(t,\vec{\pi}) = v(t,\vec{\pi})d\vec{\pi}} \tag{8.75}$$

Здесь $\vec{\pi}_j, (\sigma_i)$ играют роль координат и могут изменяться в определенных пределах. В соответствии с условиями нормировки $\sum_{i=1}^{N} \pi_j(\sigma_i) = 1 (\forall j \in 1, M)$, откуда следует, что $\forall i \in \overrightarrow{1,N}$ и $\forall j \in \overrightarrow{1,m}$

$$0 \le \pi_j(\sigma_i) \le 1$$

При «встрече» субъектов j и k происходит изменение распределения предпочтений обеих субъектов в большей или меньшей степени.

Пусть имеется некоторый закон взаимодействия субъектов при встрече

$$Int_{ik}\left(\vec{\pi}_j, \vec{\pi}_k\right) \Rightarrow \vec{\pi}$$

такой, что в результате «столкновения» распределений $\vec{\pi}_j$ и $\vec{\pi}_k$ у одного из субъектов или у обеих возникает распределение $\vec{\pi}$.

Если принять допущение ординарности, то следует считать, что только у одного из субъектов в результате «столкновения» возникает распределение $\vec{\pi}$. В отличие от физической задачи коагуляции в случае «обмена» предпочтениями сумма предпочтений не сохраняется. Выполняется только условие, что $0 \le \pi_j(\sigma_k) \le 1$, как до, так и после «столкновения» и, соответственно

$$0 \le \pi_i(\sigma_k) + \pi_j(\sigma_k) \le 2$$

Аналог уравнения Голдмана можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t},\vec{\boldsymbol{\pi}})}{\partial \boldsymbol{t}} + \dot{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \cdot \left(\overrightarrow{\underset{\pi}{\boldsymbol{grad}\, \boldsymbol{v}}}\right) = \frac{1}{2} \int\limits_{(\vec{\pi}_1,\vec{\pi}_2)}^{1} \int\limits_{0}^{1} \boldsymbol{K}^{+}\left(\boldsymbol{Int}_1(\vec{\boldsymbol{\pi}}_1, \vec{\boldsymbol{\pi}}_2) = \vec{\boldsymbol{\pi}}\right)\boldsymbol{v}\left(\vec{\boldsymbol{\pi}}_1, \boldsymbol{t}\right) \cdot \\ \cdot \boldsymbol{v}\left(\vec{\boldsymbol{\pi}}_2, \boldsymbol{t}\right) \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\pi}}_1 \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\pi}}_2 - \int\limits_{\substack{0 \\ (\pi')}}^{1} \boldsymbol{K}^{-}(\boldsymbol{Int}_2(\vec{\boldsymbol{\pi}}, \vec{\boldsymbol{\pi}}') = \vec{\boldsymbol{\pi}}'' \ne \vec{\boldsymbol{\pi}}) \cdot \boldsymbol{v}(\vec{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{v}(\vec{\boldsymbol{\pi}}', \boldsymbol{t}) \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\pi}}'\end{gathered} \tag{8.76}$$

В этом уравнении $\dot{\vec{\pi}}_1 = \left(\dot{\pi}_t(\sigma_1), \dot{\pi}(\sigma_2), ..., \dot{\pi}\left(\sigma_N\right)\right)$,

$d\vec{\pi}_i = d\pi_i(\sigma_1)d\pi_i(\sigma_2)...d\pi_i(\sigma_N); (i \in \overrightarrow{1,2})$

$d\vec{\pi}' = d\pi'(\sigma_1)d\pi'(\sigma_2)...d\pi'(\sigma_N)$,

В случае если предпочтения не изменяются во времени в результате изменения эндогенных и экзогенных факторов: $\bar{\pi} \equiv 0$, то функция распределения $v(t,\pi)$ меняется только в результате взаимодействий субъектов («встреч», «столкновений»):

$$\frac{\partial v\left(\vec{\pi}, t\right)}{\partial t} = S$$

K_1^+ и K^- ядра, представляющие собой вероятности «столкновения» двух субъектов и отражающие механизм преобразования предпочтений в результате «информационной» встречи субъектов.

Этот механизм можно связать с правилами агрегирования предметных предпочтений [83, 231], в которых существенную роль играют рейтинговые предпочтения (или просто – рейтинги). В [83, 231] рассматриваются абсолютные рейтинги $\xi\left(j\right)$, где j – номер субъекта в «социуме» и условные рейтинги $\xi\left(j|k\right)$. В первом случае мы имеем дело с рейтингами, признаваемыми всеми членами «социума» – все субъекты имеют одинаковое распределение рейтингових предпочтений на множестве S_ξ субъектов. Во втором случае каждый субъект $k \in 1\vec{M}$ имеет свое индивидуальное «мнение» относительно остальных членов «социума» – группы, включая и саморейтинг. Можно сказать, что $\xi\left(j|k\right)$ представляет собой рейтинг **субъекта “*j* глазами субъекта *k*”,** а весь набор. $\xi\left(j|k\right)$ – распределение условных рейтингов.

В обоих случаях вводятся условия нормировки

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j) = 1; \sum_{j=1}^{M} \xi(j|k) = 1(\forall k \in \overrightarrow{1,m}) \tag{8.77}$$

Механизмы агрегирования могут быть различными, и требуется ряд допущений для принятия определенного правила. В качестве наиболее простого правила агрегирования рассмотрим следующее:

$$\pi_k^{(a)}\left(\sigma_i\right) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j(\sigma_i) \cdot \xi(j|k) \tag{8.78}$$

где $\pi_k^{(a)}\left(\sigma_i\right)$ – агрегированное предпочтение альтернативы $\left(\sigma_i\right)$ субъекта «k». Правило (8.78) означает, что субъект «k» при формировании «своего» предпочтения σ_i учитывает предпочтения других членов группы с весами равными условным рейтингам. Определенные таким образом агрегированные предпочтения нормированы на множестве альтернатив S_a.

$$\sum_{n=1}^{M} \pi_j^{(a)}(\sigma_k) = 1 \tag{8.79}$$

Если при агрегировании используются абсолютные рейтинги, то формула (8.78) приводит к одинаковым агрегированным предпочтениям для всех субъектов, то есть, агрегирование выравнивает предметные предпочтения.

Возникновение агрегированных предпочтений не есть мгновенный акт, но является процессом, развивающимся во времени. Поэтому приведенные ниже модели ядер K^{+} и K^{-} соответствуют еще одному допущению:

– процесс агрегирования протекает достаточно быстро, характерное время выработки агрегированных предпочтений много меньше характерного времени изменения функции распределения $v(\vec{\pi},t)$.

Возвращаясь к уравнению (8.76) и рассматривая, соответственно, лишь парные взаимодействия, представим ядра K^{+} и K^{-} соответствующим образом:

$$K^{+}=\alpha\cdot S\left(\vec{\pi}-\left(\vec{\pi}_1\cdot\xi(1|1)\right)+\vec{\pi}_2\cdot\xi(2|1)\right) \tag{8.80}$$

где α вероятность встречи двух субъектов (речь идет об информационном обмене). $\delta(\cdot)-\delta$ – формула Дирака. Если нет перекрестного влияния предпочтений, то

$$\boldsymbol{K}^{+}=\alpha\cdot\prod_{j=1}^{N}\delta\Big(\pi(\sigma_k)-(\pi_1(\sigma_i)\xi(1|j)+\pi_2(\sigma_i)\xi(2|j)\Big) \tag{8.81}$$

Во фракцию с распределением $\vec{\pi}$ попадают в результате «встречи» только те субъекты, для которых выполняется условие

$$\pi(\sigma_i)=\pi_1(\sigma_i)\xi_1+\pi_2(\sigma_i)\xi_2;\left(\forall_i\in 1,\bar{N}\right) \tag{8.82}$$

Фракцию покинут субъекты, для которых будет выполняться условие

$$\pi_1(\sigma_i)=\pi(\sigma_i)\xi+\pi_2(\sigma_i)\xi_2;\left(\forall i\in 1,\bar{N}\right) \tag{8.83}$$

Это соответствует ядру в виде

$$\boldsymbol{K}^{-}(\vec{\pi}_1\vec{\pi}_2)=\alpha\prod_{i=1}^{N}\delta\Big(\pi_1(\sigma_i)-(\pi(\sigma_i)\xi+\pi_2(\sigma_i)\xi_2)\Big) \tag{8.84}$$

а соответствующий член в правой части принимает вид:

$$\begin{aligned}&\ldots\underset{(\pi_1)}{\int_0^1}\underset{(\pi_2)}{\int_0^1}\alpha\prod_{I=1}^{N}\delta(\pi_1(\sigma_i)-(\pi(\sigma_i)\xi+\pi_2(\sigma_i)\xi_2))\cdot\\&\cdot v(\vec{\pi},\xi,t)v(\vec{\pi}_2,\xi_2 t)d\vec{\pi}_2,d\xi\cdot d\xi_2\end{aligned} \tag{8.85}$$

Множитель $\dfrac{1}{2}$ в уравнении (8.76) обусловлен симметрией ядра K^{+} относительно $\vec{\pi}_1,\xi_1$ и $\vec{\pi}_2,\xi_2$. Соответствующая δ функция обращается в бесконечность при перестановке индексов «1» и «2».

Приведенное уравнение (8.76) требует определенных комментариев.

1. В модели предполагается, что число субъектов в группе достаточно велико, так, что приближенно можно дискретное распределение заменить непрерывным

$$n_k(\vec{\pi}_k,\xi_k,t)\Rightarrow v(\vec{\pi},\xi,t)$$

2. Учитываются только парные взаимодействия, тройные взаимодействия и одновременные встречи большего числа субъектов игнорируются. Приближенно их роль можно учесть в левой части, через производную $\dot{\pi}_i$. При этом предполагается «ординарность» процесса: в течении короткого времени Δt может произойти только

одна «результативная встреча» – такая встреча, когда обмен информацией между субъектами приводит к изменению распределения предпочтений и, соответственно, переходу субъекта из одной фракции в другую. Понятно, что это допущение весьма обременительно. Действительно, влияние агитации, пропаганды, рекламы через средства массовой информации, влияние преподавателя в аудитории и пр. – примеры коллективного взаимодействия. В данной модели эти эффекты через столкновительный член не учитываются.

Все, что происходит в процессе взаимодействия, характер и форма взаимодействия скрыто в коэффициенте – α (8.80). Соответствующие модели требуют детализации. α есть вероятность «встречи» и эффективность обмена информацией. «Встреча» в данном случае понимается не как пространственное сближение, хотя и это обстоятельство должно играть определенную роль, но, прежде всего, как информационная «встреча». Мы можем говорить о встрече в буквальном смысле, когда два субъекта встречаются «геометрически» и обмениваются информации, но «встреча» может иметь характер «дальнодействия», когда обмен информацией происходит на расстоянии, может быть значительном с помощью электронных или других средств.

При этом можно рассматривать:

а). Полный взаимный обмен информацией о предпочтениях обеих сторон (без «манипуляций» и утайки) – будем говорить о «детерминированном» обмене.

б). Обмен с качественным (не количественным) описанием предпочтений.

в). Обмен с умышленным искажением (с «манипуляцией»).

г). Неполный обмен (не по всему спектру предпочтений относительно некоторого подмножества $S_a' \subset S_a$).

д). Обмен с различным уровнем полноты и достоверности информаций с каждой из сторон.

Построение соответствующих моделей представляет важную задачу.

Выше мы говорим об «информационном» взаимодействии, «информационной» встрече. В монографиях [76, 83] рассмотрены примеры, когда обмен располагаемыми ресурсами между двумя субъектами приводит к одновременному изменению распределений их предпочтений. Поэтому при построении ядер «столкновительного» члена в кинетическом уравнении социодинамики (8.76) следует учитывать и этот фактор. Другими словами, можно утверждать, что изменение индивидуальных распределений предпочтений обусловлено как «информационным» так и «материальным» (точнее – «ресурсным») обменом.

Продолжим сравнительный анализ развиваемой аналогии и, главным образом, существенных отличий от кинетической теории газа. Справедливость модели Больцмана требует достаточно высокой температуры (т.е. кинетической энергии хаотического движения молекул) и достаточно низкой плотности так, чтобы локализованные волновые пакеты, соответствующие молекулам были много меньше среднего расстояния между молекулами (необходимо, чтобы длина волны т.н. волны де Бройля была много меньше, чем среднее расстояние между частицами):

$$\frac{\bar{h}}{2\pi kT}\cdot\left(\frac{M}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \langle\langle 1 \qquad (8.86)$$

где V – объем сосуда, в котором находится газ, M – число молекул.

Каким образом можно было бы определить степень «разреженности» субъектов – индивидуумов в их фазовом информационном пространстве, которое мы определяем как пространство П векторов $\vec{\pi}$ индивидуальных предпочтений?

Следующий вопрос состоит в существовании или несуществовании аналога Н – теоремы Больцмана.

Если ввести энтропию для распределения $\nu(\vec{\pi},t)$:

$$\boldsymbol{H_\nu = -\int ... \int_{(\vec{\pi})} \nu(\vec{\pi},t) \ln \nu(\vec{\pi},t) d\vec{\pi},}, \tag{8.87}$$

то H – теорема Больцмана в данном случае обозначала бы что

$$\frac{\boldsymbol{dH_\nu}}{\boldsymbol{dt}} \geq 0 \tag{8.88}$$

т.е. в утверждении, что на основании уравнения для $\nu(\vec{\pi},t)$ энтропия распределения индивидуальных распределений всегда возрастает.

В данный момент точного ответа на этот вопрос нет. Больше того, из общих соображений следует, что таким свойством социум не обладает и энтропия в определенные промежутки времени может уменьшиться, то есть $\nu(\vec{\pi},t)$ может приближаться к сингулярному распределению, а социум при этом повышает свою самоорганизацию. Случай системы с убывающей энтропией, изолированной в материальном и энергетическом смысле рассмотрена в статье [232].

С Н – теоремой Больцмана в свое время были связаны два парадокса «парадокс обратимости» и «парадокс возврата». Последний связан с теоремой Пуанкаре о возвращении системы через достаточно большой промежуток времени в сколь угодно малую окрестность точки фазового пространства, которую она уже посетила ранее. В свою очередь эта теорема базируется на теореме Лиувилля о сохранении фазового объема консервативной системы.

Естественно говорить о «парадоксе возврата» в нашем случае невозможно, поскольку речь идет об открытой системе с несохраняющимся фазовым объемом, однако с сохраняющимся числом субъектов – «частиц»:

$$\boldsymbol{\int ... \int \nu(\vec{\pi},t) d\vec{\pi}} = 1 \tag{8.89}$$

Из теоремы Пуанкаре следует, что имеют место очень редкие большие флуктуации энтропии и время «цикла Пуанкаре» оценивается величиной $\tau = e^M$, где М – число частиц в системе.

В качественном смысле можно предполагать, что и в социальных процессах в больших социумах могут иметь место редкие большие флуктуации энтропии H_ν и некоторое подобие «циклов Пуанкаре». Во всяком случае, нечто подобное в действительности наблюдается: социальные потрясения, революции, войны… и было бы весьма заманчивым выяснить возможность прогнозировать большие социальные флуктуации, глубинной причиной которых являются циклы типа Пуанкаре.

Следующее существенное отличие нашей системы от однокомпонентного газа состоит в том, что мы фактически имеем дело с многокомпонентным «газом», когда характеристикой индивидуума является его рейтинг.

В схеме, предложенной выше, функция плотности $\nu(\vec{\pi},t)$ зависит только от вектора $\vec{\pi}$, рейтинговые распределения существуют отдельно и считаются заданными.

Более общий вариант – рассмотрение функции $v\left(\pi_i;\xi(j|i)\right)$, где $\vec{\xi}(j|i)$ – рейтинговые предпочтения субъекта i в отношении членов группы j (социума). Данный субъект «i» имеет два типа предпочтений: предметные $\vec{\pi}_i$ и рейтинговые $\vec{\xi}(j|i)$.

При парных взаимодействиях субъекты формируют агрегированные предпочтения по формулам, показанным выше. Соответствующее «кинетическое уравнение» имеет вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{v}(\vec{\pi},(\cdot)\vec{\xi}(\cdot|\cdot)\cdot \boldsymbol{t}}{\partial \boldsymbol{t}}+\dot{\vec{\pi}}\frac{(\cdot)\partial \boldsymbol{v}}{\partial\vec{\pi}(\cdot)}+\dot{\vec{\xi}}(\cdot|\cdot)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial\xi}=\\&=\boldsymbol{S}\left(\vec{\pi}_1(\cdot),\vec{\pi}_2(\cdot),\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot)\xi_2(\cdot|\cdot)\right)\end{aligned} \tag{8.90}$$

В частности, мы можем рассмотреть случай, когда v зависит от рейтинговых предпочтений и не зависит от предметных предпочтений, то есть

$$v=v(\vec{\xi}(\cdot|\cdot),t)$$

«Кинетическое уравнение» в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\vec{\xi}(\cdot|\cdot),\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}}+\dot{\vec{\xi}}(\cdot|\cdot)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial\xi(\cdot|\cdot)}=\boldsymbol{S}\left(\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot),\vec{\xi}_2(\cdot|\cdot)\right) \tag{8.91}$$

Расшифровка столкновительного члена $S\left(\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot),\vec{\xi}_2(\cdot|\cdot)\right)$ требует дополнительных гипотез.

Возможная схема агрегирования рейтинговых предпочтений такова: относительный рейтинг “j в глазах i” тем выше, чем ближе распределения их предметных предпочтений (два субъекта «единомышленники», если коэффициент кореляции $\rho(\pi_i,\pi_{vj})=1$ и наоборот, «разномышленники», если $\rho(\pi_i,\pi_j)=-1$). Положим, что если у изолированных субъектов распределение относительных рейтингов есть $\vec{\xi}(j|i)$, то распределение агрегированных рейтингов

$$\xi^{(a)}(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})=\frac{\xi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})\frac{1}{2}(1+\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}))}{\sum_{\boldsymbol{q}=1}^{\boldsymbol{M}}\xi(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{i})\frac{1}{2}(1+\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}))} \tag{8.92}$$

Функция

$$\varphi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})=\frac{1}{2}\left(1+\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\right)=\begin{cases}1-\textbf{åñëè}\,\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})=1\\ \in\left[0,1\right],\textbf{åñëè}\,\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\in\left[-1,+1\right]\\ 0-\textbf{åñëè}\,\rho(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})=-1\end{cases} \tag{8.93}$$

Трудно представить себе, что субъект способен произвести вычисления в соответствии с формулой (8.92) и тем самым определить свое собственное распределение рейтингов между остальными членами группы, однако он по-прежнему в состоянии дать нечеткую оценку систем «единомыслия» или «идейной конфронтации».

Другие схемы агрегирования приведены в [83, 231]. Одна из них названная «схемой круговой поруки» приводит к абсолютному выравниванию рейтинговых предпочтений.

$$\xi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})=\frac{1}{\boldsymbol{N}};\forall(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\in\overline{1,\boldsymbol{M}} \tag{8.94}$$

Это означает, что исчезает различие между относительными и абсолютными предпочтениями:

$$\xi(\boldsymbol{j}|\boldsymbol{i})=\xi(\boldsymbol{j})=\frac{1}{\boldsymbol{N}} \tag{8.95}$$

Вспомним, что в кинетической теории газов в качестве одной из самых простых моделей принимается кинетическое уравнение в приближении Греда:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial t}{\partial\vec{v}}+\vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}=\alpha(f^{*}-f) \tag{8.96}$$

где f^* – некоторая равновесная функция, к которой со временем стремится функция f .

Аналог этого приближения в нашем случае выглядит так, если предполагать, что $\vec{F}=0$:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},t)}{\partial t}+\dot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\vec{\pi}}=\alpha(v^{*}-v) \tag{8.97}$$

Предположим далее, что $\dot{\vec{\pi}}\equiv 0$, тогда имеем

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},t)}{\partial t}=\alpha(v^{*}-v) \tag{8.98}$$

Легко проверить, что решение этого уравнения есть

$$v=(v_0-v^{*})e^{-\alpha t}+v^{*} \tag{8.99}$$

где v^* – некоторое «равновесное» распределение, независящее явно от t. Мы видим, что при $t\to\infty; v\to v^*$.

Рассмотрим вариант:

$$v(...)=v(\vec{\pi},\dot{\vec{\pi}},t) \tag{8.100}$$

Тогда аналог кинетического уравнения есть

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\dot{\vec{\pi}}_2\frac{\partial v}{\vec{\pi}_1}+\ddot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\dot{\vec{\pi}}}=S(...) \tag{8.101}$$

В работе было показано, что для смеси, состоящей из молекул двух типов сильно отличающимися массами, кинетическое уравнение для функции распределения «тяжелых» молекул можно приближенно представить уравнением, в котором больцмановский столкновительный член заменен оператором типа Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}+\vec{F}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}=\beta\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left[(\vec{v}-\vec{u})f\right]+\xi\frac{\partial^2 t}{\partial\vec{v}^2} \tag{8.102}$$

где $\vec{F}$ – внешняя сила, приложенная к тяжелой частице; $\beta=km^{-1}$; k – коэффициент стоксовского сопротивления частицы, ξ – коэффициент диффузии в простран-

стве скоростей. При получении уравнения (8.102) было сделано много предположений, большинство из которых не могут быть разумно сформулированы и, тем более, обоснованы, когда речь идет о распределении предпочтений и в качестве переменных выступают предпочтения $\vec{\pi}$ и их скорости изменения $\dot{\vec{\pi}}$.

Тем не менее, можно представить себе, что предпочтения субъекта, имеющего высокий рейтинг («общественный вес») будут подвергаться флуктуациям под действием большого числа «соударений» с малыми «частицами» – субъектами со значительно меньшим весом – рейтингом. При этом может возникать явление флуктуаций предпочтений – нечто подобное броуновскому движению и, следовательно, фоккер-планковское приближение может служить моделью таких психических флуктаций, обусловленных взаимодействием с «несущей компонентой» (с «народом»). При этом базовым распределением предпочтений является каноническое распределение, которое получается на основе энтропийного вариационного принципа.

Приходится предположить, что предпочтения складываются из «консервативной» канонической составляющей и из ремнантной составляющей, которая не подчиняется вариационному принципу $\pi'(\sigma_i)$:

$$\pi'(\sigma_i) = \pi_o(\sigma_i) + \pi'(\sigma_i) \tag{8.103}$$

Пусть $\vec{C}_\pi = \dfrac{d\vec{\pi}}{dt}$; и пусть имеет место уравнение

$$\frac{d\vec{C}_\pi}{dt} = -\beta\vec{C}_\pi + \vec{F}_\pi + \beta\vec{u} \tag{8.104}$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},\vec{C}_\pi,t)}{\partial t} + \dot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\vec{\pi}} + \vec{F}_\pi\frac{\partial v}{\partial\vec{C}_\pi} = \beta\frac{\partial}{\partial\vec{C}_\pi}\left[(\vec{C}_\pi - \vec{u})\cdot v\right] + \xi\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{C}_\pi^2} \tag{8.105}$$

где $\vec{u}$ – постоянный дрейф всех скоростей изменения предпочтений.

Рассмотрим случай $\vec{F}_\pi = const; \vec{u} = 0.$

Формальное решение дополнительной системы Лагранжа имеет вид:

$$\vec{C}_\pi = \vec{C}_0\cdot e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta}\vec{F}_\pi\cdot(1 - e^{-\beta t}) \tag{8.106}$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_0 + \frac{1}{\beta}\vec{C}_0 - \frac{1}{\beta}\vec{C}_\pi + \frac{1}{\beta}\cdot t\vec{F}_\pi \tag{8.107}$$

Перейдем к новым переменным – интегралам движения:

$$\vec{\rho} = \vec{C}_0 = \vec{C}_\pi\cdot e^{\beta t} - \frac{1}{\beta}\vec{F}(e^{\beta t} - 1):$$

$$\vec{\sigma} = \vec{\pi}_0 + \frac{1}{\beta}\vec{C}_0 = \vec{\pi} + \frac{1}{\beta}\vec{C} - \frac{1}{\beta}\vec{F}: \tag{8.108}$$

$$t^* = t$$

В новых переменных уравнение (8.105) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{t}} - 3\beta\boldsymbol{v} - \xi\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \vec{\sigma}^2} - 2\frac{\xi}{\beta}\boldsymbol{e}^{\beta t}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \vec{\sigma}\partial \vec{\rho}} - \xi\boldsymbol{e}^{\beta t}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \vec{\rho}^2} = 0 \qquad (8.109)$$

Новая подстановка : $W = v \cdot \exp(-3\rho t)$ приводит это уравнение к виду:

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{t}} = \xi\left\{\boldsymbol{e}^{2\beta t}\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial \vec{\boldsymbol{p}}^2} + \frac{2}{\beta}\cdot\boldsymbol{e}^{\beta t}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial \vec{\sigma}\partial \vec{\boldsymbol{p}}} + \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{\partial^3 \boldsymbol{W}}{\partial \vec{\sigma}^2}\right\} \qquad (8.110)$$

8.6.3. Случай Чандрасекхара

К этому уравнению применима вторая лемма Чандрасекхара [320]. Используя эту лемму, найдем решение типа мгновенного источника при t=0 в точке $(\vec{\rho}_0, \vec{\sigma}_0)$. Если $\vec{\pi}$ имеет 3 компонента $\left(\pi(\sigma_1), \pi(\sigma_2), \pi(\sigma_3)\right)$, то

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\vec{\pi}, \boldsymbol{t}) = {} & \frac{1}{8\pi^3\Delta^{\frac{3}{2}}}\cdot \\ & \cdot\mathbf{exp}\left\{-\frac{\boldsymbol{a}(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)^2 + 2\boldsymbol{h}(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}_0) + 8(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}_0)^2}{2\Delta} + 3\beta\boldsymbol{t}\right\}\end{aligned} \qquad (8.111)$$

где

$$\Delta = 2\xi^2\beta^{-3}t(e^{2\beta t}-1) - 4\xi^2\beta^{-4}(e^{2\beta t}-2e^{\beta t}+1);$$
$$a = 2\xi\beta^{-2}t; b = \xi\beta^{-1}(e^{2\beta t}-1);$$
$$h = 2\xi\beta^{-2}(e^{\beta t}-1).$$

Асимптотическаяформула при $t \to \infty$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{h\to\infty} = {} & \frac{1}{8\pi^3\cdot(2\xi^2\beta^{-3}\boldsymbol{t})^{\frac{3}{2}}}\cdot \\ & \cdot\mathbf{exp}\left\{-\left[\vec{\boldsymbol{c}}_\pi + \beta^{-2}\vec{\boldsymbol{F}}^2 - (\frac{\xi}{2}\beta\vec{\boldsymbol{c}}_\pi + \frac{1}{2}\vec{\pi} - \frac{1}{2}\vec{\pi}_0 - \frac{1}{2\beta}\vec{\boldsymbol{c}}_0)\vec{\boldsymbol{F}}\right]\cdot(2\xi\beta^{-1})^{-1}\right\}\end{aligned} \qquad (8.112)$$

В настоящей работе по существу только ставится задача построения теории социодинамики по аналогии с кинетической теорией газов. Как показано, полная аналогия отсутствует, и трудности сводятся к учету ряда существенных различий и особенностей, отмеченных ранее.

Очевидно также, что избранный путь может быть весьма продуктивным. Вцелом развиваемая модель является гибридной, так как она использует идеи статистической механики, в частности, уравнения типа Больцмана и энтропийный принцип оптимальности Джейнса, примененный к распределениям предпочтений первого и второго рода.

Существует большое количество других моделей, в частности, моделей, представленных в работе [103], где автор также вводит в рассмотрение «мнения» и «предпочтения», а также скорости их изменения, связанные с полезностями.

Предлагаемый в настоящей работе подход к построению моделей социодинамики имеет существенные отличия и может рассматриваться как альтернативный.

На этом пути важнейшей задачей является построение моделей информационного и ресурсного взаимодействия субъектов, парного и коллективного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акофф Р., Эмери Ф.* О целеустремленных системах. — М.: Сов. радио, 1974. — 272 с.
2. *Акофф Р.* Планирование в больших экономических системах. — М.: Сов. радио, 1972. — 220 с.
3. *Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов. — М.: ИПУ, 1980.
4. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. — М.: Мир, 1969. — 339 с.
5. *Анурриева Н.М., Зелинская Т.Н., Зелинский Н.Е.* Социальная психология. — К.: МАУП, 2003. — 133 с.
6. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 367 с.
7. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 223 с.
8. *Адрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Ассимптотическая математика и синергетика. — М.: УРСС, 2004. — 304 с.
9. *Астафьева О.Н.* и др. Отв. ред. КиященкоЛ.П. Синергетическая парадигма, когнитивно-коммуникативные стратегии современного научного познания. РАН Ин-т философии. — М.: Прогресс-традиция, 2004. — 560 с.
10. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1969. — 551 с.
11. *Бевзенко Л.Д.* Сінергетичні передумови інтеграції макро- та мікро соціологічних підходів. Автореф. докт. дисс. — К.: 1993. — 18 с.
12. *Бевзенко Л.Д.* Соціальна самоорганізація. Синергетична парадигма. Можливості соціальних інтеграцій. — К.: НАНУ, Іт-т соціології, 2002. — 436 с.
13. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М. Мир, 1969. — 238 с.
14. *Баранцев Р.Г.* Синергетика в современном естествознании. — М.: УРСС, 2003. — 144 с.
15. *Безпека* авіації. Під ред. Бабака В.П. — К.: Техніка, 2004. — 583 с.
16. *Босов А.А., Кирпа Г.Н.* Формирование вариантов региональной сети линий высокоскоростного движения поездов в Украине. — Днепропетровск, 2004. — 142 с.
17. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — М.: Наука, 1984. — 472 с.
18. *Боярский Г.Н., Бондаренко Р.В., Терещенко М.М.* Анализ влияния стереотипа управления захода на посадку по результатам статистического моделирования. — М.: ПБП, 1990, №5.
19. *Боярский Г.Н.* Об одном методе пилотирования с целью устранения отклонений от плоскости глиссады при заходе на посадку ВС ГА // Лаб. моделир. полета и индент. характ. ВС ГА. — К.: КИИГА, 1990. — С.16-31.
20. *Боярский Г.Н., Белинский А.С.* Метод определения критического профиля вертикального сдвига ветра при автоматическом заходе на посадку самолетов ГА // Сб. Моделир. полета в задачах летн. экспл. ВС ГА. — К.: КИИГА, 1985. — С.45-54.
21. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. — М.: Физматгиз, 1960. — 392 с.
22. *Буданов В.Г.* Синергетические механизмы роста научного знания и культуры. // Философия науки. Вып. 2. Ран. — М.: 1996.
23. *Бондарчук О.І.* Конфліктологія: навч.-метод. комплекс/ АПНУ. — К.: Міленіум, 2004. — 32 с.
24. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972. — 367 с.
25. *Бермант М.А.* Математические модели и планирование образования. — М.: Наука, 1972. — 112 с.

26. *Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.* Экспертные оценки. — М.: Наука, 1973. — 158 с.

26.1 *Бердяев Н.А.* Источник и смысл русского коммунизма. — М.: Наука, 1995. — 224с.

26.2 *Броневич А.Г., Каркищенко А.Н***.** Теоретико-множественный подход к классификации статистических классов. – М.: Автоматика и телемеханика, - 12.: 1997, № 2. – с.78 – 87.

27. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.*, Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтез. 1999. – 448 с.

28. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.*, Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН. 1996. – 125 с.

29. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Модели и механизмы теории активных систем управления качеством подготовки специалистов. М.: ИЦ. 1998. – 158 с.

30. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1970. – 255с.

31. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика, 1991.№ 3.–с.3-25.

32. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М.*, Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука. 1984. – 172 с.

33. *Виноградская Г.М., Макаров И.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б.* Теория выбора и принятия решений. — М.: Наука, 1982. — 325 с.

34. *Виноградская Г.М., Рубчинский А.А.* Логические формы функций выбора. — М.: НАН СССР, 1980, №6. — 254 с.

35. *Вітлінський В.В.* Моделювання економіки. Навч. посіб. – К.:КНЕУ, 2007. – 408 с.

36. *Валовой Д.В.* и др. Популярный словарь-справочник. Эффективность, качество. — М.: Знание, 1977. — 298 с.

37. *Василькова В.В.* Порядок и хаос в развитии социальных систем. Синергетика и теория социальной самоорганизации. — С.Пб.: Лань, 1999. — 480 с.

38. *Відкриті* еволюційні системи. І міжнародна конференція. Відкритий ун-т розвитку людини "Україна". — 170 с.

39. *Волик Б.Г., Гладкова Г.А.* Математические модели человека-оператора, работающего в замкнутом контуре управления // Приборы и системы управления, № 2. — М. — С.9-12.

40. *Вильсон А.Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М. Наука, 1978. — 246 с.

41. *Ващенко И.В.* и др. Общая конфликтология. Уч. пос. — Харьков, 2000. — 512 с.

42. *Гаек Я., Шидак Э.* Теория ранговых критериев. — М.: Наука, 1971. — 375 с.

43. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Мир, 1971.

44. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 с.

45. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.

46. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем управления // Сб. Проблемы прикладной математики и механики. — М.: Наука, 1971.

47. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 327 с.

48. *Голицын Г.А., Петров В.М.* Социальная и культурная динамика: долговременные тенденции (информационный подход). – М.: Кап. книга. 2005.

49. *Голицын Г.А., Петров В.М.* Информация и биологические принципы оптимальности. Гармония и алгебра живого. – М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ». 2010. – 121 с.

50. *Голицын Г.А., Левич А.П.* Вариационные принципы в научном знании // Философские науки. – 2004. - № 1. с. 105-136.

51. *Гончаренко А.В.* Вибір оптимальної комерційної швидкості транспортного судна. Наук. вісник. ХМДІ: наук. журн. Херсон, 2010. - № 1(2) – с. 41-49.

52. *Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д.* Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. — М.: Сов. радио, 1968. — 463 с.

53. *Гумилев Л.Н.* Этногенез и биосфера Земли. — Л.: ЛГУ, 1989.

54. *Гроот М., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.

55. *Гірник А., Бобро А*. Конфлікти: структура, ескалація, злагодження, УАДУ. — К.: Основи, 2003. — 172 с.

56. *Гнєушев В.О*. Основи конфліктології для менеджера. — Ровенський ДТУ, 2002. — 137 с.

57. *Грушевська С*. Етико-психологічний аналіз. — К.: Наукові вісті, 2000. — 214 с.

58. *Гришина Н.В*. Психология конфликта. — С.Пб.: Питер, 2003. — 464 с.

59. *Голего Н.Л., Игнатов В.А., Касьянов В.А*. Оценка эффективности и прогнозирование деятельности вузов гражданской авиации // Сб. Актуальные вопросы обучения и воспитания. Вып.2. — Рига: РИИГА, 1975. — С.3-7.

60. *Гроот М*. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. — 491 с.

61. *Голдман С*. Теория информации. — М.: ИЛ, 1957. — 446 с.

62. *Демидович Б.П*. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

63. *Дмитриев А.В*. Конфликтология. Уч. пос. — М.: 2003. — 320 с.

64. *Дружинина В.В., Конторов Д.С., Конторов М.Д*. Введение в теорию конфликтов. — М.: Ралио и связь, 1989. — 288 с.

65. *Данилов В.И., Ланг К*. Кусочно-линейные функции полезности, удовлетворяющие условию валовой заменимости // Экономика и математические методы. Т.36, вып. 4. — М.: 2001.

66. *Делас Н.И., В.А. Касьянов* Предельно гиперболический закон распределения в самоорганизованных системах // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Том 4, № 4 (58). – С. 13-18.

67. *Ефремов А.В., Оглоблин А.В. Предтеченская А.И., Радченко В.В*. Летчик как динамическая система. — М.: Машиностроение, 1992. — 336 с.

68. *Эбелинг В. Энгель А, Файстель Р*. Физика процессов эволюции. — М.: УРСС, 2001. — 328 с.

69. *Евстигнеева Л, Евстигнеев Р*. От стандартной экономической модели к экономическиой синергетике // Вопросы экономики, №10. — М.: 2001.

70. *Журавлев В.И*. Синерго-квантовые представления о хаосе и физическом вакууме // Практична філософія/ К.: 2005. с.195-210 с.

71. *Зюко А.Г*. Элементы теории передачи информации. — К.: Техника, 1969. — 300 с.

72. *Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Костановский В.В*. Оптимизация обслуживания технических изделий. – Минск.: Наука и техника, 1974. – 192 с.

73. *Ильичев В.Г., Задорожный А.Л*. К моделированию динамики групп // Математическое моделирование, Т.14, №12. — М.: 2002. — с.72-84.

74. *Інформоенергетика*. III тисячоліття. Соціолого-синергетичний та медико-екологічній підходи. Між нар. н.-пр. конф. — Кривий Ріг: ДПУ, 2003.

75. *Интрилигатор М*. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975. — 606 с.

76. *Ивахненко А.Г*. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. — К.: Техника, 1971.

77. *Иваненко В.И., Лобковский В*. Проблемы неопределенности в задачах принятия решений. – Киев.: Наук. Думка, 1990. – 136 с.

78. *Касьянов В.А., Войстрик С.В*. Свет и тень, двухкомпонентная экономика. — К.: КМУГА, 1997. — 24 с.

79. *Касьянов В.А*. Элементы субъективного анализа. — К.: 2003. — 224 с.

80. *Касьянов В.А*. Моделирование полета. — К.: НАУ, 2004. — 400 с.

81. *Касьянов В.А*. Аналог теоремы Нетер для диссипативных систем // Вісник НАУ, №1. — К.: 2002. — С.233-239.

82. *Касьянов В.О*. Суб’єктивний аналіз і безпека активних систем. Кібернетика і обчислювальна техніка: – К.: – Вип.142. – 2004. с. 41-56.

83. *Касьянов В.О*. Субъективный анализ. — К.: НАУ, 2007. — 512 с.

84. *Касьянов В.А*. Структура достижимых и управляемых множеств для систем айзермановского типа // Сб. тр. Имитаторы и тренажеры. — К.: КИИГА, 1976. — С.13-17.

85. *Касьянов В.А., Ткаченко Н.Е.* Описание диссипативных систем с помощью формализма Гамильтона // Прикладная механика, Т.4, вып.2. — К.: 1970.

86. *Касьянов В.А., Войстрик С.В.* До питання про використання проблемно-ресурсного методу в задачах мікроекономічного моделювання //Сб. Економічні, проблеми розвитку транспорту. — К.: КМУГА, 1996.

87. *Касьянов В.А., Гончаренко А.В.* Субъективный анализ и безопасность активных систем // Кибернетическая и вычислительная техника в ИК НАНУ. Вып.142. — К.: 2004. — С.41-56.

88. *Касьянов В.А., Гончаренко А.В***.** Свет и тень. – К.: Кафедра, 2013. – 86 с.

89. *Касьянов В.А., Гончаренко А.В***.** Рекурсивные модели психодинамики для прогнозирования поведения активных систем управления с памятью // Science Rise. – 2014. – № 2 (2). – С. 72-78.

90. *Касьянов В.А., Ударцев Е.П.* Определение характеристики воздушных судов методами идентификации. — М.: Машиностроение, 1988. — 170 с.

91. *Касьянов В.А.* Субъективный риск для предметных и рейтинговых предпочтений. Восточноевропейский журнал передовых технологий Харьков, 2014. – № 2. – С. 17 – 21.

92. *Касьянов В.А., Гончаренко А.В.* Вариационный принцип субъективного анализа. – К.: ДПНВЦ «Приорітети», 2015. – 112 с.

93. *Касьянов В.А., Пахненко В.В***.** Развитие вариационного принципа Джейнса применительно к задачам субъективного анализа (Энтропийный ресурс). Математика, компьютер, образование: Материалы XVI Международной конференции – М.: MCE. SU. – 1998-2012. *www.url:http//www.nce.su* /archive/ doc 32720 /doc. pdf.-10.10.2012.

94. *Касьянов В.А.*, *Гончаренко А.В.* Эволюция активных изолированных систем с точки зрения принципа максимума субъективной энтропии. Міжнародний науковий форум. Вип. 17/ Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. К.: Інтерсервіс, 2015. – С. 207-226.

95. *Климонтович Ю.Л.* Критерии относительной степени упорядоченности открытых систем. УФН. Т.166, № 11. 1996 г. – С. 1231-1243.

96. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. МГУ. Физика, 1996 г.

97. *Мурза С.Г.* Евроцентризм. Эдипов комплекс интеллигенции. — М.: Алгоритм, 2002. — 255 с.

98. *Кара-Мурза С.Г.* Манипуляция сознанием. — К.: Орияни, 2003. — 500 с.

99. *Катренко А.В., Пасічник В.В., Пасько В.П.* Теорія прийняття рішень. – К.:Вид. Гр. BHV, 2009. – 448 с.

100. *Киричук О.В., Романець В.А*. та ін. Основи психології. — К.: Либідь, 2002. — 552 с.

101. *Коваленко И.Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980.

102. *Колесников А.А***.** Синергетическая теория управления. – Таганрог:ТРТУ, М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

103. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.

104. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.Мир, 1975. — 648 с.

105. *Крапивин В.Ф.* Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. — М.: Сов. Радио, 1972. — 117 с.

106. *Козер Л.* Функции социального конфликта. — М.: Идея Пресс, 2000. — 205 с.

107. *Кузьмин В.Б.* Построение групповых решений в пространстве четких и нечетких отношений. — М.: Наука, 1982. — 186 С.

108. *Кузьмин Е.С.* и др. Социальная психология. — Л.: ЛГУ, 1979. — 288 с.

109. *Краснощеков П.С.* Построение математической модели поведения. Психология конформизма // Математическое моделирование. Т.10, №7. — М.: 1998. — С.76-92.

110. *Колмогоров А.Н., Новикова С.П.* Странные аттракторы // Сб. работ. — М.: Мир, 1981. — 253 с.

111. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. — М.: УРСС, 2003. — 288 с.

112. *Копцик В.А.* Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искустве. – М.: Прозисс – Традиция, 2002. – 495 с.

113. *Котельников Г.А.* Теоретические основы синергетики. — Белгород: 1998. — 125 с.

114. *Киященко Л.П., Киященко Н.И.* Современная картина мира и синергетика художественных языков // Практичні філософія, №1. — К.: 2005. — С.179-195.

115. *Качанова Т.Л. Фомин Б.Ф.* Основания системологии феноменального. — С.Пб.: ГЭГУ "ЛЕТИ", 1999. — 179 с.

116. *Качуровський М.О.* Синергетика. Нове мислення. — Суми: Сумський ДПУ, 2004. — 128 с.

117. *Князева Е.Н.* Одиссея научного разума: Синергетическое видение научного прогресса. — М.: РАН, Ит-т философии, 1995. — 228 с.

118. *Колесниченко А.В.* Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности // Математическое моделирование, Т.10, №1. — М.: 2004. — С.91.

119. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Мир, 1982. — 432 с.

120. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. — М.: Наука, 1975.

121. *Клыков Ю.И.* Ситуационное управление большими системами. — М.: Энергия, 1974.

122. *Касьянов В.А., Войстрик С.В.* Моделирование влияния налоговой политики на динамические характеристики макроэкономического объекта // Сб. Проблемы автоматизации и управления. — К.: КМУГА, 1997.

123. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.

124. *Королев О.Л., Куссый М.Ю., Сигал А.В.* Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений. Изд. «Таврия» ун-та, Симферополь изд. «Оджан», 2013.

125. *Левич А.П.* Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической билогии. — М.: МГУ, 1981. — 189 с.

126. *Лукьяненко Н.Д.* Конфликтология. — Донецк: ДОНУ, 2002. — 211 с.

127. *Леонов Н.И.* Основы конфликтологии: Рос. психологическое общество УГУ. — Ижевск: УГУ, 2001. — 121 с.

128. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также хорошие события в волшебных странах. — М.: Логос, 2000. — 295 с.

129. *Лесков Л.В.* Неблинейная вселенная: новый дом для человечества. — М.: Экономика, 2003. — 446 с.

130. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. — М.: Наука, 1980. — 270 с.

131. *Лотто Д.С.* Основы построения научно-технической терминологии. — М.: Изд. АН СССР, 1961.

132. *Луценко Е.В.* Универсальный информационный вариационный принцип развития систем. – Квантовая магия, 2008. Т. 5. – с. 4201-4267.

133. *Ляпунов А.А.* Проблемы теоретической и прикладной кибернетики. — М.: Наука, 1980. — 330 с.

134. *Лисички В.А.* Теория и практика прогностики. — М.: Наука, 1972. — 224 с.

135. *Макаров М.Г.* Категория "цель". — Л.: Наука, 1974. — 185 с.

136. *Моррис У.* Наука об управлении. Байесовский подход. — М.: Мир, 1970. — 304 с.

137. *Мидлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1961.

138. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. – М.: Мир, 1950. – с.427.

139. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. — М.: Наука, 1972. — 279 с.

140. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975. — 526 с.

141. *Моисеев Н.Н.* Информационная теория иерархических систем // I все-союзная кон-я по исследованию операций. — Минск: 1972.

142. *Месарович М.* и др. Теория иерархических многоуровневых систем. — М.: Мир, 1973. — 345 с.

143. *Моррисей Дж.* Целевое управление организацией. — М.: Сов радио, 1979. — 144 с.

144. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. — 463 с.

145. *Месарович М., Такахара Я*. Общая теория систем. Математические основы. — М.: Мир, 1978. — 311 с.

146. *Михлин С.Г.* Прямые методы в математической физике. — М.: 1950. — 427 с.

147. *Михайлов А.П*. Модель координированных властных иерархий // Математическое моделирование, Т.11, №1. — 1999. — С13-17.

148. *Майерс Д*. Социальная психология. — С.Пб.: Питер, 1999. — 684 с.

149. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.

150. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. — М.: Наука, 1982. — 286 с.

151. *Мельник Л.Г.* Фундаментальные основы развития — Сумы: 2003. — 288 с.

152. *Макаров И.М*. и др. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие // РАН. — М.: Наука, 2002. — 480 с.

153. *Міжнародні* синергетичні читання пам'яті І. Пригожина. — К.: Знания, 2003. — 64 с.

154. *Мельник В.В*. Очерки концепции социокультурной бифуркации // Гомельский ГУ. — Гомель: Вектор, 2001. — 145 с.

155. *Нейман Дж*. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1968. — 448 с.

156. *Нейман Дж, Моргенштерн О*. Теория игр и экономическое поведение. — М.: наука, 1970. — 707 с.

157. *Назаретян А.П*. Агрессия, мораль и кризисы в развитии мировой культуры: Синергетика исторического процесса. — М.: Наследие, 1996. — 184 с.

158. *Назаретян А.П*. Цивилизационные кризисы в контексте универсальной истории (синергетика, психология, прогнозирование). — М.: Мир, 2004. — 367 с.

159. *Николис Г., Пригожин И*. Познание сложного. — М.: УРСС, 2003. — 344 с.

160. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. – РАН ИПУ. М.: Синтек, 1999. – 104 с.

161. *Панченков А.И*. Энтропийная механика. — Йошкар-Ола, ГУП "МПИК", 2005. — 576 с.

162. *Панченков А.Н*. Энтропия 1. — Н. Новгород: Интелсервис, 1999. — 592 с.

163. *Панченков А.Н*. Энтропия 2. — Н. Новгород: Интелсервис, 2002. — 713 с.

164. *Петров В.М.* Научное мировоззрение XXI века // Вестник РФФИ. 1999 № 2 (16). с. 62-70.

165. *Петров В.М., Яблонский А.И.* Математика и социальные процессы. Гиперболические распределения и их применение. – М.: Знание, 1980.

166. *Петров В.М.* Информационная парадигма в науках о человеке // Психология. Журнал высшей школы экономики, 2007 г. Т. 4, № 1. – с. 95-110.

167. *Пригожин И*. От существующего к возникающему. — М.: УРСС, 2002. — 288 с.

168. *Плохотников Р.А*. Нормативная модель глобальной истории. — М.: МГУ, 1996. — 63 с.

169. *Плохотников К.Э.* Эсхатологическая стратегическая инициатива. — М.: МГУ, 2001. — 182 с.

170. *Пенроуз Р*. Новый ум короля. — М.: УРСС. — 400 с.

171. *Под редакцией Поспелова* ___. Нечеткие множества в моделях уравнения и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. — с.____.

172. *Расторгуев С.П.* Философия информационной войны / С.П. Расторгуев. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2003. – 496 с.

173. *Рыбаков Л.А*. Эволюция организаций. — К.: ОАО, Ин-т прикладной информатики, 1999. — 84 с.

174. *Стратонович Р.Л*. Теория информации. — М.: Сов. радио, 1975. — 424 с.

175. *Стратонович Р.Л., Гришанин Б.А*. Ценность информации при невозможности наблюдения оцениваемой случайной величины // Техническая кибернетика. №3. — М.: АН СССР, 1966.

176. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1985. – 478 с.

177. *Справочник* по надежности. — М.: Физматгиз. — 310 с.

178. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. Идеи, методы, примеры. — М.: Наука, 1997. — 320 с.

179. *Самохвалов Ю.Я.* Групповой учет относительного превосходства альтернатив в задачах принятия решений // Кибернетика и системный анализ. №6. — К.: Ин-т кибернетики НАНУ. — С.141-145.

180. *Сена А.* Коллективный выбор и коллективное благосостояние. — 1970.

181. *Саати Т.Л.* Математические модели конфликтных ситуаций. — М.: Сов. радио, 1977. — 320 с.

182. *Синегретика*: процеси самоорганізації технічних, технологічних та соціальних систем // I Всеукраїнська наукова конференція. Ін-т вищої освіти АПНУ. — Житомир, 2003. — 136 с.

183. *Старіш О.Г.* Теорія вікритих систем як парадигма процесів глобального розвитку / Нац. ун-т "Острозька акад." — Сімферополь: Універсам, 2003. — 240 с.

184. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. — М.: УРСС, 2002.

185. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. — М.: УРСС, 2004. — 235 с.

186. *Уилсон Р.* Квантовая психология. — М.: Софія, 2005. — 206 с.

187. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 351 с.

188. *Уткин В.Ф., Крючков Ю.В.* и др. Надежность и эффективность в технике. Справочник ТЗ. — М.: Машиностроение, 1988.

189. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974. — 364 с.

190. *Хайкин С.Ш.* Нейтронные сети. Полный курс. 2-е изд. – «Вильямс», 2005. – 1104 с.

191. *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.

192. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. — М.: Мир, 1991. — 240 с.

193. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга. — М.: Мир, 2001. — 351 с.

194. *Харрис Л.* Денежная теория. — М.: Прогресс, 1990.

195. *Царев О.П.* Энтропия, технология, экономика. — С.Пб.: Политехник, 1993. — 31 с.

196. *Цикин В.А.* Философские проблемы синергетики. — Сумы: Слобожанщина, 1997. — 144 с.

197. *Ципкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

198. *Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов / – М.: Энергия, 1975. – 448 с.

199. *Чалий О.В.* Синергетичні принципи освіти та науки. — К.: АПНУ НМУ, 2000. — 253 с.

200. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. — М.: УРСС, 2004. — 287 с.

201. *Шаров А.А.* Понятие информации в теории категорий / Семиотика и информатика. — М.: Наука, 1977. — С.167-175.

202. *Шалов Г.Е., Геревич Б.Л.* Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967. — 219 с.

203. *Шенон К.* Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Ил., 1963. — 667 с.

204. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1958. – 162 с.

205. *Aumann R.* Utility Theory without the Completeness. Econometria, 30, 1962. — H.445-462.

206. *Auscombe F.I., Aumann P.I.* A Definition of Subjective Probability, Ann of mach. Statistics, 34, 199, — 2005.1963.

207. *Bhandari P., Pal N.* Some new information measures for fuzzy sets. Int. Sei, 1993. Vol.67. p. 201-218.

208. *Brethren M.* The contribution of Shapley L. to the Theory of Cooperative Game and transferable utility. Princeton Press. M.2013.

209. *Brzezinski I.* Metodologia badan psychologicznych PWN, Waszawa, 1966, — 679 st.

210. *Bomze D.I.M.* A note on Aspiration in Non-Transferable Utility Games. Int. Journ. of Game Theory. Vol. 1-7.___ 3. – p. 193-200.

211. *Chardiyle L., Mutes D.* Bram de Rook is utility transferable. A revealed preference analysis. Tilburg, № 2. 2011.

212. *Chiappori P*. Testable application of transferable utility. Jan. 2007.

213. *Ghirardato P., Marinacci M*. The impossibility of compromise: Some uniqueness properties of expected utility preferences / Econ. Theor. B. — 2000.V-16. №2. — P.245-258.

214. *Dubra I., Maccheroni F., Efe F*. Expected Utility without the Completeness Axiom, Cowles foundation discution. — Paper №1294.

215. *Goncharenko A.V.* A particular case of a variation problem of control in an active aviation system. Trans. of the institute of aviation. – Warsaw, 2013. – № 228. – P. 3-12.

216. *Goncharenko A.V.* Measures for estimating transport vessels operators' subjective preferences uncertainty. Warsaw.: Institute of Aviation Scientific Publications, 2013. – № 228. – P. 13-21.

217. *Goncharenko A.V.* Control of flight safety with the use of preferences functions // Electronics and control systems. – 2013. – № 3 (37). – P. 113-119.

218. *Gao X.* Some properties of continuous uncertain measure / X. Gao // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 2009. – Vol. 17, № 3. – P. 419-426.

219. *Green I., Jallien B*. Ordinal Independens in Nonlinear Utility Theary. J of Risk and Uncertainty. 1.1989. — P.355-388.

220. *Fraser J*. Utility function based on net present worth. Eur. J. Oper. Res, 1990.48.№2.

221. *Ferguson G., Takane Y*. Statistical Analysis in Psychology and Education. Mac Grow Hill. 1989. 607 p.

222. *Festinger L.* A theory of cognitive dissonance, Stanford Univ. Press. 1957.

223. *Hayek F*. The Constitution of liberty. — London, 1976. — 407 p.

224. *Hausmann D.M*. Revealed preferences, belief and game theory, Econ. and Phil. — Cambrige, 2000. V16.№1. — P.99-115.

225. *Caplin F., Lehy J*. Anticipatory Feelings. Research Report. 97-37C.V. Stars Center, N.Y.U. 1997.

226. *Elster J., Loewenstein G*. Utility from Memory and from Anticipation in "Choice over Time", New York. Russell, Sage Foundatim, 1992.

227. *Janis J*. Psychologist Stress. New York, Willey, 1958.

228. *Kai Yax, Hua Re.* Entropy Operator for Membership Function of Unser aim Set.

1. School of Management. Un. of Chinese Acad. of sei. Beijing 100120. China.

229. School of Ebon and Man. Tingyi Un. Shanghai 200092. China.

230. *Karni E*. Axiomatic Foundations of Expected utility and subjective probability, in book "Economies of Risk and Uncertainty" V.1 North Holland, - 2014. – p.1-39.

231. *Kasyanov V.O.* Subjective entropy of preferences Subjective analysis. Warszawa. Institute of Aviation. 2013. p. 644.

232. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V*. Quantitative models of influence of subjective factors on flight Safety, Kiev, 2005.

233. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V*. Connection of subjective entropy maximum principle to the main laws of psych. Research in Psychology and Behavioral Sciences. –2014. –Vol.2, №3. – P.59-65.

234. *Kasjanov V.A., Shafran K., Goncharenko A.V., Shypitiak T.V***.** Entropy paradigm in the theory of hierarchical active systems. Elements of conflict theory. Transactions of the institute of aviation, 2014. – № 231. – P. 24 – 37.

235. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V*. Approach to flight safety in terms of the subjective analysis. Proc. Of the Fourth World Gugr "Aviation in the XXI-st century". Kyiv.

236. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V.* Quantitative models of influence of subjective factors on flight Safety.// Proc. Of the Fourth World Gugr "Aviation in the XXI-st century". Kyiv. NAU. 2005. – P. 638-642.

237. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V., Shafran K.* Modeling of conflict in a Hierarchical active system on the basis of entropy paradigm of subjective analysis. Trans of the Inst of aviation, Warsaw. № 4 (237), 2014. – str. 39-49.

238. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V., Shafran K.* Zarzadzani hieparrhicznym actywnym systemiem na podatawie paradygnatu entropii analizy subiektywnei. Trans of the Institute of aviation, Warsaw. № 4 (237), 2014. – str. 30-38.

239. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V*. Invariants and first integrals for a special case of a controlled process in an active aviation system // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 3, № 3 (63). – С. 10-13.

240. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V.* Light and shadow economy proportions and entropy approach to principal laws of psychodynamics // Україна, 28-31 травня 2014 р.: матеріали конф. – Херсон: ХНТУ, 2014. – С. 9-11.

241. *Kasjanov V.A., Goncharenko A.V.* Modelling of technical and economical aspects of flight safety // The World Congress “Aviation in the XXI-st Century” press-release. K, Ukraine: NAU, 2003. – P. 2.63-2.66.

242. *Kosko B.* Fuzzy entropy and conditioning / B. Kosko // Information Sciences. – 1986. – Vol. 40. – P. 165-174.

243. *Kovalczyk St*. Filozofia Wolnosci. KUL Lublin, 1999. — 276 st.

244. *Kulish V*. Hierarchical Methods. V.1, Kluwer. Acad. Pabl. 2002. — 380 p.

245. *Kulish V*. Hierarchical Methods. V.2, Kluwer. Acad. Pabl. 2002. — 377 p.

246. *Jorgensen D.W*. Welfare — Cambridge (Mass) L.M.T., press. 1997. V1.

247. *Kaller L.R*. The role of generalized Uitlty theories in descriptive decision analysis. Ins. and Decis. Technol.15. №4. 1989.

248. *Karni E*. Subjective Expected Utility Theory without states of the world. Johns Hopkins. Univ. Econometrical. V 81. N 1. 2013. – p. 255-284.

249. *Lazarus R*. Psychological Stress and Coping Process. New York, Mc Graw-Hill.

250. *Kolstad Ch.D*. Environmental Economics, New York. Oxford. Univ. Press. 2000. — 400 p.

251. *Luce R., Krautz D*. Conditional expected Utility, Econometrica. 39. 1971. — P.253-371.

252. *Luca R., Termini S.* A definition of nonprobabilitistic entropy in the setting of fuzzy sets theory // Information and Control. – 1972. – Vol. 20. – P. 301-312.

253. *Luce R.D.* Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis / R.D. Luce. – Mineola, N.Y: Dover Publications, 2014. – 153 p.

254. *Lapidus D., Sigot N*. Individual Utility in a context of asymmetric sensitivity of pleasure and pain an interpretation of Bent ham's facility calculus. Eur. J of the hist. of econ. Thought. Vol. 7. №1, 2000.

255. *Linsker R.* Self organization a perceptual met work (Электронный ресурс) //R.. Linsker // IBM Rosenrch. indiana.edu. – USA.: INDIANA. EDO.2012.

256. *Ma F.C., Lv P.H. , Ye M.* **.** Study on Global Science and Social Science Entropy Research Trend // 2012 IEEE fifth international conference on advanced computational intelligence (ICACI), October 18-20, 2012. – Nanjing, Jiangsu, China, 2012. – P. 238-242.

257. *Marchand B*. Information theory and geography. Geographical Annals 1972.4.

258. *Mechra R.K.* Optimal input of for linear system identification. IEEE Bans Automat Control, 1974. № 3. – p. 192-199.

259. *Mechra R.K., Gupta N.K.* Status of input dosing for Aircraft Parameter Identification. AGARD conf. Pros. № 172, 1974. – p. 12-21.

260. *Murphy R.E.* Adaptive processes in economic systems, Acad. Press, New York, 1965.

261. *Narahati Y***.** Cooperative Game theory of the two Persons. Bargaining theory. Dep. of Computer Sei and Automation. Ins. Just of Sei Bangalore, October 2012.

262. *Otrok C*. Spectral welfare cost functions. Int. econ. rev. Philadelphia, 2001. V.92.№2.

263. *Quiggin J*. A Theory of Anticipated Utility. J. of Econ. Behavior and Organization. 3.1982. —. P.323-343.

264. *Prigogine I.* The Die is Not Cast // Futures. Bulletin of the Word Futures Studies Federation. Jan. 2000. – Vol. – 25, № 4, p. 17-19.

265. *Robson A.J*. Why would nature give individual utility function, J, of polit Econ. Chicago, 2001. V.109, №4.

266. *Rabin M*. Psychology and Economics. J. of Econ. literature.36.1998. — P.11-46.

267. *Skousen Cl. W*. The making of America. — Washington D.C. The Nat. Cent. for Coust. st. 1985. — 888 p.

268. *Samuelson P.A*. Foundation of economics analysis. — Harvard Univ. Press. Cambridge. Mass. 1947.

269. *Shapley L., Brucells M*. Multiperson Utility, UCLA Working Pap.779, 1984.

270. *Strotz R*. Theory and Inconsistency in Dynamic Utility maximization, Rev. of Econ. Studics.23, 1995. — P.165-180.

271. *Samuelson P.A*. Probability, Utility and the Independence Axiom, Econometrica, 20. 1952. — P.670-678.

272. *Samuelson P.A., Henderson J.M., Quandt R.E*. Microeconomic Theory. Mc. Graw Hill. New York. 1958.

273. *Silberger E., Suen W*. The structure of economics (a mathematical analysis). New York. 2000. — 668 p.

274. *C.B. Zamfirescu, L. Duta, B. Iantovic***s** On Investigating the Cognitive Complexity of Designing the Group Decision Process // Studies in Informatics and Control. – 2010. – Vol. 19, № 3. – P. 263-270.

275. *C.B. Zamfirescu, L. Duta, B. Iantovics***.** The cognitive complexity in modeling the group decision process [Online]. Available: http://ssd.valahia.ro/UICS.pdf. [Accessed Sept. 27, 2014].

276. *Turner J.H*. Sociology. Concepts and uses. Me Grew Hill. 1994. — 263 p.

277. *Warke T*. Mathematical fitness in the evolution of the utility concept from Bentham to J. Marshall. Eur. J. of the history of Econ. thought. 2000. V.22. №1.

278. *Weil P*. Non-Expected Utility in macroeconomics, Quarterly J. of Econ. 1990. 105. H.29-42.

279. *Xinowei Chen.* Gross Entropy of uncertain Variables Tsinghai Vn. Beijing, 10084.China.

280. *Wai Dai.* Maximum Entropy Principle for Quadratic entropy of uncertain Variables Tsinghai Vn. Beijing, 10084.China.

281. *Xinowei Chen., Wai Dai***.** Maximum geranial for uncertain Variables. Inf. Journal of fussy syst. Vol. 13.№ 3. Sept. 2011.

282. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistics mechanics I. // Phys. Rev. — 1957 № 2. — P.171—190.

283. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistics mechanics II. // Phys. Rev. — 1957 № 4. — P.620—630.

284. Психологический словарь./Под ред. А.В. Петровского, М.Г. Ярошевского. – М.: Политиздат. 1990. – 494 с.

285. *Kleiman D.L., Benon S., Lewison W.N.* An Optimal Control Model of Human Response. Part 1. Theory and Validation, Automatica, Vol. 6. 1970. — P.357—365.

286. *Расторгуев С.П.* Философия информационной войны. — М.: Московский психосоциальный ин-т, 2003. — 496 с.

287. *Смолян Г., Ципочко В., Черемкин Д.* Оружие, которое может быть опаснее ядерного. // Защита информации // Независимая газета от 18.11.1995.

288. *Смолян Г., Ципочко В., Черемкин Д.* Новости информационной войны. // Защита информации // Конфликт, № 6, 1996.

289. *Шаповалов В.И.* Энтропийный мир. — Волгоград: Перемена. — 1995.

290. *Вейдлих В.* Социодинамика. Пер. с англ. / Под ред. Ю.С. Попова, А.Е. Семечкина. Изд. 2-е. — М.: УТСС, 2005. — 480 с.

291. *Ципко А*. Идея социализма. – М.: Молодая гвардия, 1976. – 274 с.

292. *Касьянов В.А., Гончаренко А.В.* Эволюция активных изолированных систем с точки зрения принципа максимума субъективной энтропии. – К.: Зб. наук. праць НПУ ім. Драгоманова, 2015. – с. 207-226.

293. *Панченков А.Н.* Виртуальная сингулярность.: Н. Новгород, 2011 – 367 с.

294. *Эбелина В., Энгель А., Фейстель Р.* Физика процессов эволюции. – М.: УССР, 2001. 328 с.

295. *Theil H*. Economics and information theory / H. Theil. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1967. – 488 p.

296. *Delas N., Kasyanov V.O.* Entropy-energy model of Fatigue Defects. Warszawa. Institute of Aviation. 2014. p. 233, s. 9-23.

297. *Делас Н.И.* Максимум производства энтропии как способ эволюции апросистем ____

298. *Делас Н.И.* Эволюция сложных систем с гиперболическим распределением. Харьков: Восточно-европейский журнал передовых технологий, – 2013. Т.3 № 4 (63). – с. 67-73.

299. *Sugeno M.,* Fuzzy Measure and Fuzzy Integral. // Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers, Tokyo, - 1972, № 8, № 2. pp. 85-90.

300. *Sugeno M.,* Fuzzy Decision Making Problems. // Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers, Tokyo, - 1975, VII № 6. pp. 218-226.

301. Нечеткие множества в моделях уравнения и искусственного интеллекта. /*Под ред. Д.А. Поспелова.* М. «Наука». 1986 г. – 396 с.

302. *Бочарников В.П.* Fuzzy-технология: Математические основы. практика моделирования в экономике. С-Петерб.: «Наука». РАН, 2001 г. – 328 с.

303. *Каркищенко А.Н., Броневич А.Г., Лепский А.Е.*, Неаддитивные меры приложения к обработке информации с высокой неопределенностью. – Вестник Южного научного центра РАН. – 2005. Т.1 № 3. – с. 90-95.

304. *Denneberg D.*, Non-additive measure and integral. Dozdeln: Knower, 1997.

305. *Choquet G.* Theory of capacities. Arm. Inet. Fourier. 1954. V. 5. pp. 131-295.

306. *Гусев А.Н.* Ощущение и восприятие. – М.: Академия. 2007. – 416 с.

307. *Панченков А.Н.* Эконофизика. – Н. Новгород. «Типография Поволжье», 2007.–528 с.

308. *Романовский М.Ю., Романовский Ю.М.* Введение в эконофизику. – М.: 2003.

309. *Yakovenko V.* Classical Econophysics. PDF Ronctfedge. – 2009. 336 p.

310. *Монтега Р.Н., Стерни Г.Ю.* Введение в эконофизику. – М.: URSS. 2009.

311. *Montega R., Stanley H.* Aniutroduction to econophyaics, Correlation and complexity in Finance. Cambridge Un. Press. 2000. P.vii – ix.

312. *Dragulescu A., Yakovenko V.* Statistical mechanics of money. Enr. Phays I. – 2000. B.17. p. 723-729.

313. *Керол Е. Изард.* Психология эмоций. – С. П-г. «Питер». – 1998. – 408 с.

314. *Ильин Е.П.* Механизм возникновения эмоций. – С. П-г. «Питер». – 2007. – 784 с.

315. *Дронов Б.*И. В мире эмоций. – К.:Полит. издат. Украины. – Симферопольский ГУ. 1987.

316. *Роберт И.* Психология влияния. – С. П-г. «Питер». – 2000. – 272 с.

317. *Винтонес В.* Психология эмоций. – С. П-г. «Питер». – 2007. – 495 с.

318. *Симонов П.В.* Эмоциональный мозг. – М.: 1981.

319. *Касьянов В.А.* По поводу приближения интеграла столкновений Больцмана оператором типа Фоккера - Планка. – Киев. УФЖ. – 1970. № 3.

320. *Чандрасекхар С.Ш.* Принципы звездной динамики. – М.: Ил. – 1947.