УДК 539.3
С 1994

В. С. ТАРАСЮК

ДО ФОРМОУТВОРЕННЯ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ІЗ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

Прискорене вдосконалення конструкцій в авіа-, корабле-, автомобілебудівній та інших областях техніки, підвищення вимог до точності їх виготовлення за значного збільшення розмірів ставить нові спеціальні задачі в теорії формоутворення виробів. Суть їх полягає у виготовленні оболонкових конструкцій заданої форми шляхом операції обтягування (вигинання з розтягом). При цьому виникає потреба визначення контактного тиску при взаємодії оболонки з оснасткою (твердим тілом). Це приводить до необхідності постановки і розв'язання обернених задач (тобто вимагається знайти зовнішню дію при заданих вихідних фізико-механічних, геометричних та інших параметрах). У працях, присвячених цій проблемі, розглядаються, в основному, обернені задачі для конструкцій із ізотропних матеріалів [1—3].

Нижче дається постановка і методика розв'язку обернених осесиметричних задач стосовно оболонок із нелінійно-пружних композитних матеріалів із врахуванням геометричної нелінійності.

Розглянемо оболонку, виготовлену із ортотропного композитного матеріалу. Вона знаходиться під дією певної системи поверхневих і контурних сил, при якій в оболонці, що набуває заданої конфігурації, проявляються нелінійні деформації, пов'язані із зміною форми і нелінійними властивостями матеріалу. Приймається, що дотичні складові навантаження дорівнюють нулю, тертя відсутнє, відносні видовження є малими, а переміщення (прогини) є великими величинами порівняно з товщиною оболонки. Необхідно визначити напружено-деформований стан (НДС) і величини зовнішніх навантажень для оболонки.

Віднесемо оболонку в недеформованому стані до спряженої системи координат (α, β, γ). Використаємо такі співвідношення геометрично нелінійної теорії тонких оболонок у квадратичному наближенні [4]:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} u_{,\alpha} + k_\alpha w + \frac{1}{2}\Theta_\alpha^2; \quad \varepsilon_\beta = \frac{B_{,\alpha}}{AB} u + k_\beta w;$$
$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{A}(\Theta_\alpha)_{,\alpha}; \quad \varkappa_\beta = \frac{1}{AB} B_{,\alpha}\Theta_\alpha; \quad \Theta_\alpha = k_\alpha u - \frac{1}{A} w_{,\alpha}, \tag{1}$$

де ε_i — відносні видовження; k_i, $\varkappa_i$ $(i = \alpha, \beta)$ — кривизни та їх зміни; u, w — компоненти вектора переміщень; A, B — коефіцієнти першої квадратичної форми.

Фізичні співвідношення приймемо згідно з теорією нелінійної пружності та пластичності анізотропних середовищ [5]. Для випадку плоского напруженого стану вони набувають вигляду

$$e_\alpha = \frac{1}{E_\alpha}[\sigma_\alpha - \nu_{\alpha\beta}\sigma_\beta] + F(f)[q_{\alpha\alpha}\sigma_\alpha + q_{\alpha\beta}\sigma_\beta] \quad (\alpha \to \beta),$$
$$f = \frac{1}{2} q_{\alpha\alpha}\sigma_\alpha^2 + \frac{1}{2} q_{\beta\beta}\sigma_\beta^2 + q_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta, \tag{2}$$
$$e_\alpha = \varepsilon_\alpha + \gamma\varkappa_\alpha; \quad (\alpha \to \beta),$$

де σ_i — компоненти тензора напружень; q є деякий сталий (щодо напруженого стану) тензор, який враховує анізотропію нелінійних властивостей матеріалу, а $F(f)$ — функція, що визначає закон «зміцнення»; f — квадратична функція напружень.

Для визначення поверхневого навантаження (P_γ) скористаємось третім рівнянням рівноваги елемента оболонки [4], яке має вигляд

$$-AB[(k_\alpha + \varkappa_\alpha) T_\alpha + (k_\beta + \varkappa_\beta) T_\beta)] + (BQ_\alpha)_{,\alpha} + P_\gamma = 0, \tag{3}$$

де T_α, T_β — нормальні сили; Q_α — перерізуюча сила.

Методика розв'язку поставленої задачі базується на використанні методу послідовних наближень і варіаційно-різницевого підходу (ВРМ) [2, 6]. Приймемо, що необхідна форма серединної поверхні у деформованому стані задається неявним рівнянням $f(\alpha, \gamma) = 0$. Якщо серединна поверхня заготовки набуде заданої форми, то декартові координати вектора переміщення будуть задовольняти рівняння

$$f(\alpha + u, w) = 0. \tag{4}$$

За нечастим винятком умова (4), що забезпечує задану зміну форми оболонки, є нелінійним рівнянням стосовно компонентів вектора переміщення. При виготовленні оболонок основний внесок у зміну форми носить нормальне переміщення w. У межах прийнятих припущень стосовно величин деформацій і кутів повороту нормальне переміщення w може значно перевищувати дотичну складову u. Це дозволяє ефективно лінеаризувати умову (4) методом послідовних наближень [2] і задавати на кожній ітерації нормальне переміщення як відому функцію. Для n-го наближення маємо

$$w^n = w(\alpha, u^{n-1}). \tag{5}$$

У першому ($n=1$) наближенні у співвідношенні (5) дотична компонента вектора переміщення покладається рівною нулю, в наступних — визначається розв'язком крайової задачі в попередньому наближенні.

В загальному випадку згідно з принципом можливих переміщень дійсні переміщення перетворюють функцію Лагранжа у відносний мінімум [6], тобто $\delta\Pi = 0$, де $\Pi = E + A_п + A_к$, E — потенціальна енергія деформації оболонки, $A_п$, $A_к$ — робота зовнішніх поверхневих і крайових сил, що діють на оболонку.

Зазначимо, що при варіюванні $A_п$ і $A_к$ потрібно враховувати відсутність дотичних складових навантаження, задані граничні умови, рівність нулю варіації постійних величин. Таким чином, одержимо, що $\delta A_п = 0$.

Подаючи [7] повні деформації, напруження, зусилля і моменти у вигляді суми лінійних (залежних тільки від u) і нелінійних (включаючи лінійні, залежні від w) доданків (з індексами «л» і «н» відповідно), а варіацію потенціальної енергії у вигляді

$$\delta E = \delta(E^л + E^н), \tag{6}$$

та враховуючи, що прогини w і члени, які відповідають геометричній і фізичній нелінійностям у формулах (1)—(2), вважаються відомими із попереднього наближення і не варіюються, після деяких перетворень одержимо

$$E^л = \frac{1}{2}\iint_s [T_\alpha^л \varepsilon_\alpha + T_\beta^л \varepsilon_\beta + M_\alpha^л \varkappa_\alpha + M_\beta^л \varkappa_\beta]\, ds,$$

$$E^н = \iint_s [T_\alpha^н \varepsilon_\alpha^л + T_\beta^н \varepsilon_\beta^л + M_\alpha^н \varkappa_\alpha^л + M_\beta^н \varkappa_\beta^л + (T_\alpha \Theta_\alpha)^н \Theta_\alpha]\, ds, \tag{7}$$

де

$$T_i^н = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^н d\gamma; \quad M_i^н = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^н \gamma d\gamma \quad (i = \alpha, \beta). \tag{8}$$

Застосовуючи в подальшому процедуру ВРМ [6], після введення основного (i) і допоміжного ($i+1/2$) розбиття, чисельного інтегрування (8), заміни похідних відповідними скінченно-різницевими співвідношеннями із умови мінімуму потенціальної енергії приходимо до системи алгебраїчних рівнянь, яка у вузлі (i) має вигляд

$$\sum_{i} u_j^{n+1} a_{ij} = \Omega_i^n \quad (j = i-1, i, i+1), \tag{9}$$

де a_{ij} — змінні коефіцієнти; $\Omega_i{}^n$ — нелінійні члени, що обчислюються на основі розв'язку задачі в попередньому n-му наближенні.

З розв'язку системи (9) та обчислення величини u_j, із рівняння (3) одержуємо закон розподілу навантаження P_γ.

Як приклад [2] розглянемо задачу деформування циліндричної оболонки в конічну. Меридіан серединної поверхні задамо рівняннями $z=\alpha$, $r=\sqrt{x^2+y^2}=R$, $\alpha \in [0, l]$. Координати точок меридіана серединної поверхні конічної оболонки задовольняють співвідношення $\varphi * \alpha - \gamma = 0$, де φ — кут конусності. Кінематична умова можливості здійснення такої формозміни має вигляд $w = \varphi(\alpha + u)$. Система (9) доповнюється граничними умовами $u=0$ у $\alpha=0$, $T_\alpha=0$ у $\alpha=l$.

Таблиця 1.

α/l	u/h	w/h	$\Theta_\alpha \cdot 10^{-1}$	$(M_\alpha \cdot h^2/E_\alpha) \cdot 10^{-5}$
0,0	0	0	—1,0	0,270
0,2	—0,0638	1,99	—0,994	0,268
0,4	—0,255	3,97	—0,987	0,266
0,6	—0,572	5,94	—0,981	0,265
0,8	—1,02	7,90	—0,975	0,263
1,0	—1,58	9,84	—0,969	0,261

Таблиця 2.

α/l	u/h	w/h	$\Theta_\alpha \cdot 10^{-1}$	$(M_\alpha \cdot h^2/E_\alpha) \cdot 10^{-5}$
0,0	0	0	—0,995	0,242
0,2	—0,156	1,98	—0,989	0,102
0,4	—0,425	3,96	—0,983	0,0718
0,6	—0,808	5,92	—0,977	0,0577
0,8	—1,31	7,87	—0,972	0,0491
1,0	—1,93	9,80	—0,965	0,0434

Розрахунки виконувались для циліндричної оболонки ($R/h=30$), виготовленої з нелінійно-пружного склопластику ПН-1, T-1 із характеристиками [5] $E_\alpha=15$ ГПа; $E_\beta=12$ ГПа; $\nu_\alpha=0{,}12$. Результати розрахунків, одержані в п'ятій ітерації, для випадку $\varphi=0{,}1$; $l/h=100$ наведені в табл. 1 (лінійна задача) і табл. 2 (нелінійна задача) у вигляді розподілу переміщень u і w, кута повороту Θ_α та моменту M_α вздовж меридіана конічної оболонки.

Зазначимо, що для досягнення заданої форми окрім поверхневого тиску необхідно прикласти крайові моменти, що обумовлено [1, 2] постановкою задачі та прийнятими гіпотезами.

1. *Боголюбов В. С., Бурлаков А. В., Львов Г. И.* Методика определения давлений на оснастку при обтяжке листовых деталей // Проблемы машиностроения.— Киев : Наук. думка, 1983.— Вып. 18.— С. 38—41.
2. *Бурлаков А. В., Львов Г. И.* Об одном классе обратных задач упругопластического формоизменения оболочек // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела.— 1989.— № 5.— С. 116—123.
3. *Makinouchi A.* Finite element modeling of draw-bending process of sheet metal. «NUMINFORM 86: Numer. Meth. Ind. Form. Process.: Proc. 2nd Int. Conf., Gotheburg, 25—29 Aug., 1969». Rotterdam, Boston, 1986, 327—332.
4. *Теория* тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышен-

ко, В. Н. Чехов и др.— Киев : Наук. думка, 1980.— 636 с.— (Методы расчета оболочек : В 5 т.; Т. 1).
5. *Ломакин В. А., Юмашева М. А.* О зависимостях между напряжениями и деформациями при нелинейном деформировании ортотропных стеклопластиков // Механика полимеров.— 1965.— № 4.— С. 28 - 34.
6. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.— М. : Наука, 1978.— 288 с.
7. *Чернышенко И. С., Максимюк В. А.* Нелинейные задачи статики ортотропных оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига // Прикл. механика.— 1989.— 25, № 8.— С. 71 - 76.

Інститут механіки ім. П. С. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло 21.07.93

Изложен подход к решению обратных задач о нахождении контактного давления при формообразовании ортотропных оболочек вращения. Он основан на использовании геометрически нелинейной теории тонких оболочек, нелинейных физических уравнений для анизотропных сред, вариационного уравнения Лагранжа и численных методов. В численном примере рассмотрено формоизменение цилиндрической оболочки в коническую. Исследовано влияние нелинейных свойств материала на величины напряжений, контактного давления и краевых моментов.

An approach to solution of inverse problems about finding contact pressure during forming orthotropic shells of revolution is given. The geometrical non-linear theory of thin orthotropic shells and non-linear physical equations for an anisotropic medium, the variational equation of Lagrange and numerical methods are used. The reforming of a cylindrical shell into conic one is considered in a numerical example. The influence of nonlinear properties of the material on the stress values, contact pressure and boundary moments is investigated.