Н.П. Муранова, В.Г. Бевз,
П.П. Баришовець

ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2008

УДК 514.11 (075.8)
ББК В151. я7
М 91

Рецензенти:

М.Ф. Кузенний, д-р фіз.-мат. наук, професор
(Інститут математики НАН України)

В.О. Дубко, д-р фіз.-мат. наук, професор
(Національний авіаційний університет)

М.М. Білоцький, канд. фіз.-мат. наук, доцент
(Київський національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова)

Видання друкується за рішенням
науково-методично-редакційної ради ІДП
Протокол № 2 від 13.11.2006

Н. П. Муранова, В. Г. Бевз, П. П. Баришовець
М 91 Геометрія: Навч. посібник. — К.: Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2008. — 176 с.

ISBN 966–598–372–5

Посібник створено для навчальної роботи з геометрії на підготовчих курсах. У ньому розглянуто властивості основних геометричних фігур на площині та у просторі, зокрема питання вимірювання площ та об'ємів. На початку наведені означення найпростіших фігур та аксіоми планіметрії. Теоретичний матеріал викладено просто й доступно, із необхідним рівнем строгості. Більшість теорем подано з доведенням, для решти намічено ідею доведення.

Посібник містить достатню кількість вправ, які можна використати під час самостійної роботи слухачів, так і під час роботи з викладачем.

УДК 514.11(075.8)
ББК В151.я7

ISBN 966–598–372–5

РОЗДІЛ 1 НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Точка і пряма

Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур. Точка, пряма, площина, трикутник, коло – приклади геометричних фігур.

Геометричною фігурою називається будь-яка множина точок. Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості геометричних фігур на площині, називається ***планіметрією***. Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур у просторі, називається ***стереометрією.***

Властивості фігур виражаються аксіомами і теоремами.

Аксіома – це твердження, яке приймають без доведення. ***Теорема*** – це твердження, правильність якого доводять. Доведення використовує аксіоми, означення і теореми, доведені раніше.

Аксіоми виражають основні властивості найпростіших фігур: точки, прямої, площини. Наприклад, до аксіом геометрії відносять основні властивості належності точок і прямих на площині.

Аксіома I_1. Для будь-якої прямої існують точки, які належать цій прямій, і точки, що їй не належать (рис. 1.1).

Аксіома I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну (рис. 1.2).

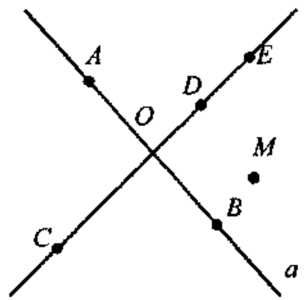


Рис. 1.1

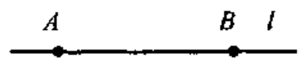


Рис. 1.2

Речення, в якому пояснюється зміст назви або виразу, називається ***означенням***. Дати означення будь-чого – означає пояснити, що це таке.

Поняття точки і прямої не означуються. Це ***основні геометричні поняття.***

Точки позначають великими латинськими літерами: $A, B, C, \ldots$.

Прямі позначають малими латинськими літерами: $a, b, c, \ldots$.

Пряму можна позначити також двома точками, що лежать на ній, наприклад AB. На рис. 1.1 пряма a проходить через точку A (точка A лежить на прямій a або точка A належить прямій a, $A \in a$). Точка M не лежить на прямій a (M не належить прямій a, $M \notin a$).

Для будь-яких двох різних точок A і B існує, причому єдина, пряма l, яка проходить через ці точки (рис. 1.2).

Прямі AB і CD на рис. 1.1 перетинаються в точці O.

На прямій a (рис. 1.3) дано точки A, B і C. Точка B лежить між точками A і C (точки A і B лежать по один бік від точки C або точки A і C лежать по різні боки від точки B).

Сформулюємо основну властивість розміщення точок на прямій (аксіому II_1).

Аксіома II_1. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Означення. ***Відрізок*** *– це частина прямої, яка складається з точок A і B і всіх точок, що лежать між ними. Точки A і B називаються* ***кінцями відрізка*** *AB* (рис. 1.4).

Довжиною відрізка називається відстань між його кінцями. Основну властивість вимірювання відрізків виражає така аксіома:

Аксіома III_1. Кожний відрізок має довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин.

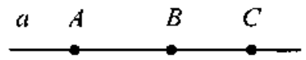


Рис. 1.3

Рис. 1.4

Наприклад, на рис. 1.3 відрізок AB складається з частин AB і BC. Тому $AC=AB+BC$.

Два відрізки називаються ***рівними***, якщо вони мають однакову довжину.

1.2. Промінь і півплощина

Означення. ***Променем (півпрямою)*** *називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, які лежать з одного боку від даної точки. Ця точка називається* ***початком променя.***

Промінь позначають малими латинськими літерами або двома точками: початком і ще однією точкою, що належить променю. На рис. 1.5 зображено промені BA і BC (точка B – їхній початок) і промінь α .

Рис. 1.5

Сформулюємо основну властивість відкладання відрізків (аксіому IV_1).

Аксіома IV_1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один.

Наступна аксіома характеризує розміщення точок на площині відносно даної прямої.

Аксіома II_2. Будь-яка пряма розбиває площину на дві півплощини.

На рис. 1.1 пряма a розбиває площину на дві півплощини. Це розбиття має такі властивості: *якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинається з прямою (на рис. 1.1 – це відрізок ED). Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинається з прямою* (на рис. 1.1 – це відрізок CD).

1.3. Кут. Градусна міра

Два промені зі спільним початком розбивають площину на дві частини.

Означення. *Частину площини, обмежену двома променями зі спільним початком, називають **кутом**.* Спільний початок променів називається ***вершиною кута***, промені – ***сторонами кута***.

Кут позначається вказуванням його вершини або сторін. На рис. 1.6 B – вершина, BA і BC – сторони кута ABC (або $\angle B$, або $\angle(a, b)$.

Кут, сторони якого утворюють пряму, називається ***розгорнутим***. На рис. 1.7 кут ABC – розгорнутий.

Основні властивості вимірювання кутів наведено в такій аксіомі:

Аксіома III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір його частин.

На рис. 1.8 кут AOC складається з двох частин: $\angle AOB$ і $\angle BOC$. Градусна міра кута AOC дорівнює сумі градусних мір кутів AOB і BOC.

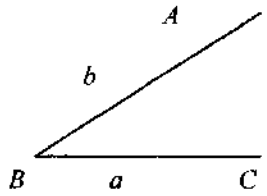


Рис. 1.6

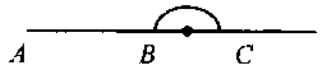


Рис. 1.7

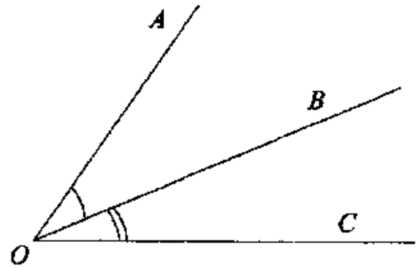


Рис. 1.8

Два кути називаються ***рівними***, якщо рівні їхні градусні міри. Кут, що дорівнює 90°, називається ***прямим кутом***. Кут, менший за 90°, називається ***гострим кутом***. Кут, більший ніж 90°, але менший за 180°, називається ***тупим***.

Сформулюємо основну властивість відкладання кутів (аксіому IV_2).

Аксіома IV_2. Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою за 180 , і тільки один (рис. 1.9).

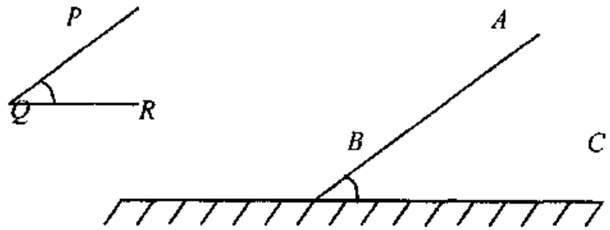


Рис. 1.9

1.4. Суміжні і вертикальні кути

Означення. *Два кути називаються **суміжними**, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші утворюють пряму лінію.*

На рис. 1.10 кути $\angle ABC$ і $\angle CBD$ суміжні. Основна властивість суміжних кутів випливає з аксіоми III_2.

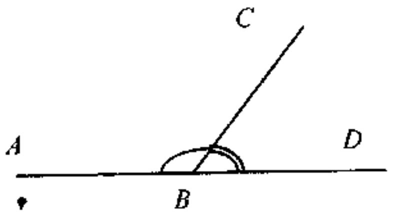


Рис. 1.10

Теорема 1.1. *Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.

Задача 1. Знайти суміжні кути, якщо один із них у три рази більший, ніж другий.

Р о з в ' я з а н н я . Позначимо градусну міру меншого з кутів через x. Тоді градусна міра більшого кута буде $3x$. Сума кутів дорівнює 180°. Отже, $x + 3x = 180°$. Звідси $x = 45°$. Таким чином, суміжні кути дорівнюють 135° і 45°.

Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного є продовженням сторін іншого.

На рис. 1.11 кути AOB і COD – вертикальні. Кути AOC і BOD також вертикальні.

Вертикальні кути мають таку властивість.

Теорема 1.2. *Вертикальні кути рівні.*

Д о в е д е н н я . Покажемо, наприклад, що $\angle AOB = \angle COD$ (див. рис. 1.11).Справді, $\angle AOB + \angle BOD = 180° = \angle BOD + \angle DOC$.

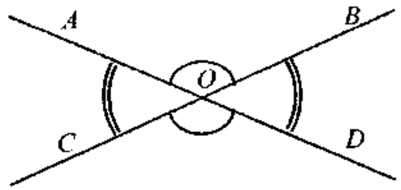


Рис. 1.11

Отже, $\angle AOB = \angle COD$, що й потрібно було довести.

Задача 2. Сума двох кутів, які утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 50°. Знайти ці кути.

Р о з в ' я з а н н я . Два кути, які утворюються при перетині двох прямих, або суміжні, або вертикальні. Ці кути не можуть бути суміжними, оскільки їхня сума дорівнює 50°, а сума суміжних кутів дорівнює 180°. Отже, вони вертикальні. Оскільки вертикальні кути рівні і за умовою їхня сума дорівнює 50°, то кожний із кутів дорівнює 25°.

Промінь, який виходить із вершини кута і поділяє кут навпіл, називається ***бісектрисою кута***.

На рис. 1.12 OX – бісектриса $\angle AOC$, а OY – бісектриса $\angle COB$.

Задача 3. Знайти кут між бісектрисами суміжних кутів.

Р о з в ' я з а н н я . Нехай AOC і COB – суміжні кути, OX і OY – їхні бісектриси (рис. 1.12). Позначимо: $\angle XOC = x$, $\angle COY = y$. Тоді $\angle AOC = 2x$, $\angle COB = 2y$. За властивістю суміжних кутів $2x + 2y = 180°$. Отже, $\angle XOY = \angle XOC + \angle COY = x + y = 180° : 2 = 90°$.

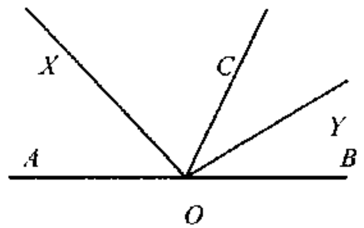


Рис. 1.12

Означення. *Прямі a і b називаються* ***взаємно перпендикулярними***, *якщо* $\angle(a, b) = 90°$ (рис. 1.13).

За властивістю вертикальних і суміжних кутів кожний із чотирьох кутів, утворених взаємно перпендикулярними прямими, дорівнює 90°. Позначення взаємної перпендикулярності прямих a і b: $a \perp b$.

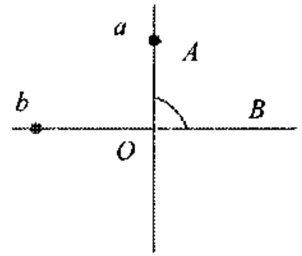


Рис. 1.13

Через точку на даній прямій можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної. Справді, в одній півплощині можна відкласти від даної прямої тільки один кут, що дорівнює 90°.

Відрізок AO прямої a, перпендикулярної до прямої b, кінцем якого є точка O їх перетину, називається ***перпендикуляром до прямої b, проведеним з точки A***. Точка O ***називається основою перпендикуляра*** (або ***проекцією точки A на пряму b***). Довжина перпендикуляра AO називається ***відстанню від точки A до прямої b.***

1.5. Коло і круг. Многокутники

Означення. ***Колом*** *називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається* ***центром кола.***

Відстань від точок кола до його центра називається ***радіусом кола***. Радіусом називається також будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається ***хордою***. Хорда, що проходить через центр кола, називається ***діаметром***.

На рис. 1.14 O – центр кола, OA – радіус, AB – хорда, AC – діаметр кола. Коло ділить площину на дві частини (області).

Кругом називається об'єднання кола з його внутрішньою областю. Коло є межею круга. ***Центром, радіусом, хордою, діаметром круга*** називають відповідно центр, радіус, хорду, діаметр кола, що є межею даного ***круга*** (рис. 1.15).

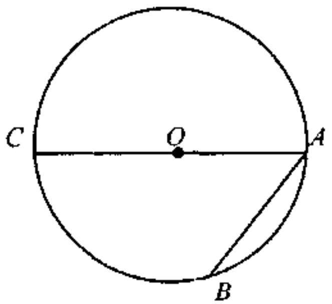


Рис. 1.14

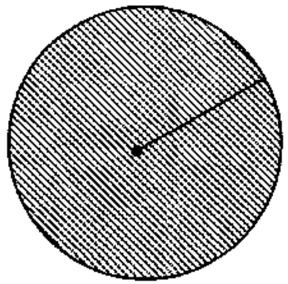


Рис. 1.15

Ламаною $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається фігура, що складається з відрізків $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, причому будь-які два відрізки, що мають спільний кінець, не належать одній прямій.

Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються ***вершинами ламаної***, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ – ***ланками ламаної***. На рис. 1.16 зображено ламану $A_1 A_2 \dots A_5$.

Ламана називається ***замкненою***, якщо її кінці збігаються.

Фігура, утворена замкненою ламаною лінією, називається ***многокутником***. Многокутником називається також частина площини, обмежена цією лінією (рис. 1.17).

Многокутник називають ***опуклим***, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону.

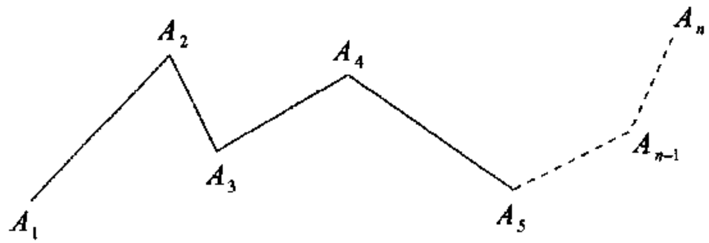


Рис. 1.16


Рис. 1.17

На рис. 1.18 зображено опуклий многокутник, а на рис. 1.19 – неопуклий.

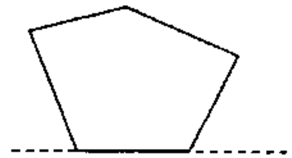


Рис. 1.18

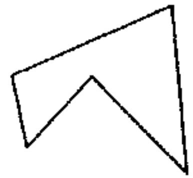


Рис. 1.19

Сума довжин усіх сторін многокутника називається його ***периметром***. Периметр зазвичай позначають буквою P.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Проведіть пряму a. Позначте на ній дві точки M і N. Позначте точку X так, щоб вона лежала між точками M і N.

2. Точки A, B, і C лежать на одній прямій. Чи належить точка B відрізку AC, якщо: 1) $AC = 15$ см, $BC = 27$ см; 2) $AC = 15$ см, $AB = 5$ см? Відповідь поясніть.

3. Чи можуть точки M, N, K лежати на одній прямій, якщо $MN = 3{,}5$ см, $MK = 5{,}3$ см, $KN = 2{,}7$ см?

4. На відрізку AB візьміть точку C ($C \neq A$, $C \neq B$). Який відрізок довший: AB чи AC? Чому?

5. На відрізку AB завдовжки 16 см позначено точку C. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо: 1) відрізок AC на 2 см коротший за відрізок BC; 2) довжини відрізків AC і BC відносяться як, 5 : 3.

6. Знайдіть кути, суміжні з кутами: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

7. Чи можуть обидва суміжних кути бути: 1) гострими; 2) тупими; 3) прямими? Чому?

8. Знайдіть суміжні кути, якщо: 1) один із них на 40° більший, ніж другий; 2) їхня різниця дорівнює 30°; 3) один із них у 2 рази менший, ніж другий; 4) їхні градусні міри відносяться, як 2 : 3.

9. Один із кутів, що утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 45°. Знайдіть решту кутів.

10. Прямі AB і CD перетинаються в точці O. Сума величин кутів AOD і COB дорівнює 220°. Знайдіть величину кута AOC.

11. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути становлять у сумі 100°?

12. Чому дорівнює кут між бісектрисою і стороною даного кута, що дорівнює: 1) 45°; 2) 36°; 3) 168°?

13. Знайдіть кут, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут, що дорівнює: 1) 30°; 2) 52°; 3) 72°.

РОЗДІЛ 2

ТРИКУТНИКИ

2.1. Основні поняття

Якщо три довільні точки, що не лежать на одній прямій, сполучити відрізками, дістанемо ***трикутник***.

На рис. 2.1 зображено трикутник ABC: точки A, B і C – його вершини; відрізки AB, AC, BC – сторони трикутника. Замість слова «трикутник» використовують символ Δ.

Кутом (або внутрішнім кутом) ΔABC при вершині A називається кут, утворений променями AB і AC. Так само означуються кути при інших вершинах трикутника.

Якщо продовжимо сторону трикутника за вершину, то дістанемо *зовнішній кут* трикутника.

На рис. 2.2 $\angle BCD$ – зовнішній кут ΔABC з вершиною C.

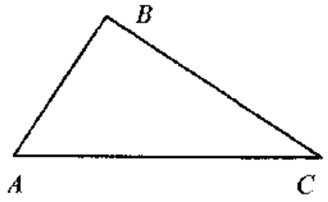


Рис. 2.1

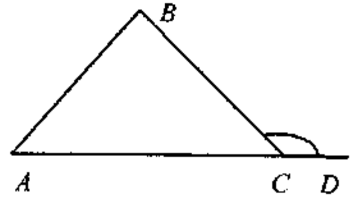


Рис. 2.2

Будь-який зовнішній кут трикутника є суміжним з одним із внутрішніх кутів.

Бісектриса трикутника – це відрізок бісектриси кута трикутника від вершини до точки перетину з протилежною стороною. На рис. 2.3 AK – бісектриса кута BAC трикутника ABC.

Медіана трикутника – це відрізок, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони. На рис. 2.4 BM – медіана ΔABC.

Висота трикутника – це перпендикуляр, проведений з вершини трикутника на протилежну сторону, або її продовження. На рис. 2.5 AK і BL – висоти ΔABC.

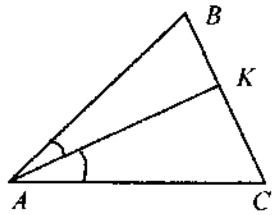


Рис. 2.3

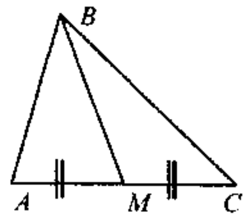


Рис. 2.4

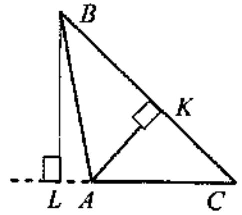


Рис. 2.5

Кожний трикутник має три бісектриси, три медіани і три висоти.

Трикутник називається: а) ***різностороннім***, якщо всі сторони мають різну довжину (рис. 2.6); б) ***рівнобедреним***, якщо дві сторони рівні (рис. 2.7; AC називається ***основою***, B – вершиною рівнобедреного трикутника ABC з AB=BC) і в) ***рівностороннім***, або ***правильним***, якщо всі три сторони рівні (рис. 2.8).

Залежно від величини кутів трикутник називається:

а) ***гострокутним***, якщо всі його кути гострі; б) ***прямокутним*** або ***тупокутним***, якщо серед кутів трикутника є прямий, або тупий кут. Сторону прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, дві інші його сторони – ***катетами***.

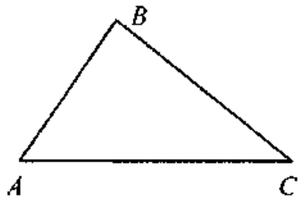


Рис. 2.6

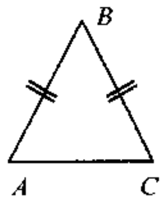


Рис. 2.7

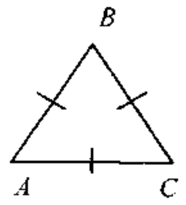


Рис. 2.8

Трикутник поділяє площину на дві області: ***внутрішню*** і ***зовнішню.*** Фігуру, яка складається з трикутника і його внутрішньої області, також називають трикутником.

2.2. Ознаки рівності трикутників

Означення. *Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ називаються **рівними**, якщо в них $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ і $BC=B_1C_1$.*

Отже, трикутники рівні, якщо в них рівні відповідні кути і відповідні сторони (рис. 2.9).

Наведена далі аксіома дає змогу будувати трикутники, що дорівнюють даному.

Аксіома IV_3. Для променя OA в будь–якій півплощині існує трикутник, що дорівнює даному, з вершиною O і стороною, що лежить на OA (рис. 2.10).

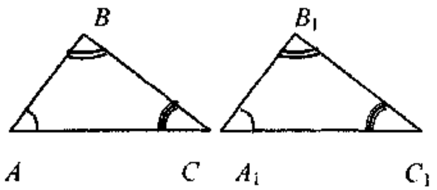


Рис. 2.9

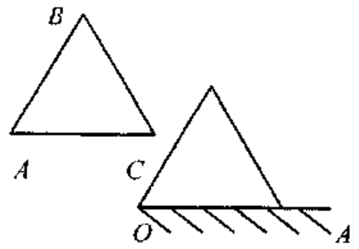


Рис. 2.10

Існують три ознаки рівності трикутників.

Теорема 2.1. (Перша ознака рівності трикутників). *Якщо у двох трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то ці трикутники рівні, тобто $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ і $BC=B_1C_1$* (рис. 2.11).

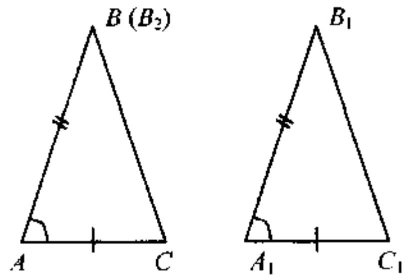


Рис. 2.11

Тобто, якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Оскільки $AC=A_1C_1$, то існує ΔAB_2C, що дорівнює $\Delta A_1B_1C_1$, і розміщений з ΔABC в одній півплощині відносно прямої AC. Кут B_2AC дорівнює куту $B_1A_1C_1$ з $\Delta A_1B_1C_1$. Оскільки $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC$, то кути BAC і B_2AC рівні. Тому промені AB і AB_2 збігаються. Але $AB_2=A_1B_1$, $A_1B_1=AB$. Отже, $AB_2=AB$ і точки B і B_2 збігаються. Тому $BC=B_2C$. Оскільки $B_2C=B_1C_1$, то $BC=B_1C_1$. Промені BC і B_2C, CB і CB_2 також збігаються. Звідси, $\angle B=\angle B_2$, $\angle C=\angle ACB_2$. Але $\angle B_2=\angle B_1$, $\angle ACB_2=\angle C_1$. Отже, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$.

Теорему доведено.

Задача 1. Довести, що в рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Розв'язання. Нехай у ΔABC $AB=BC$ (рис. 2.12). Тоді $\Delta ABC=\Delta CBA$ за першою властивістю рівності трикутників. Справді, $AB=CB$, $BC=BA$, $\angle B$ – спільний. Отже, $\angle A=\angle C$, що й потрібно було довести.

Задача 2. Довести, що у рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.

Розв'язання. Нехай у ΔABC $AB=BC$ і BK – медіана (рис. 2.13). У трикутниках ABK і CBK: $AB=CB$ і $AK=KC$ (за умовою), $\angle A=\angle C$ за попередньою задачею. Отже, $\Delta ABK=\Delta CBK$ і $\angle ABK=\angle CBK$, тобто BK – бісектриса. Далі маємо: $\angle AKB=\angle CKB$, і ці кути суміжні. Тому вони прямі і BK – висота.

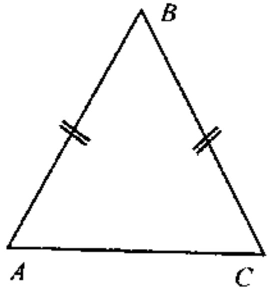


Рис. 2.12

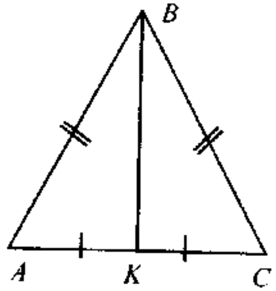


Рис. 2.13

Теорема 2.2. (Друга ознака рівності трикутників). *Якщо у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то трикутники рівні* (рис. 2.14).

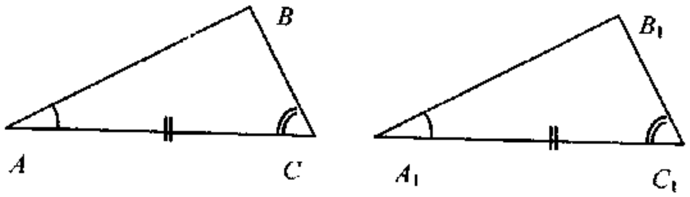


Рис. 2.14

Інакше, якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Д о в е д е н н я. Накладемо ΔA_1B_1C на ΔABC *так, щоб вершини* A_1 і B_1 сумістилися відповідно з *A* і *B*. *Оскільки* $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то промені A_1C_1 і B_1C_1 при цьому можна сумістити відповідно з променями *AC* і *BC*. Точки C_1 і *C* як точки перетину зазначених пар променів також сумістяться. Отже, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C$.

Теорему доведено.

Задача 3. Довести, що коли в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай в ΔABC $\angle A=\angle C$ (рис. 2.15). У трикутниках *ABC* і *CBA*: $\angle A=\angle C$, $AC=CA$ і $\angle C=\angle A$. За другою ознакою рівності трикутників $\Delta ABC=\Delta CBA$. Тому $AB=BC$.

Теорема 2.3. (Третя ознака рівності трикутників). *Якщо у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, то трикутники рівні* (рис. 2.16).

Інакше, якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Довести самостійно.

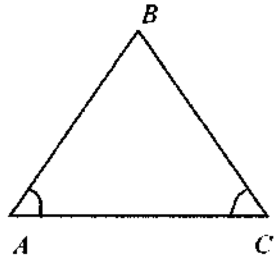


Рис. 2.15

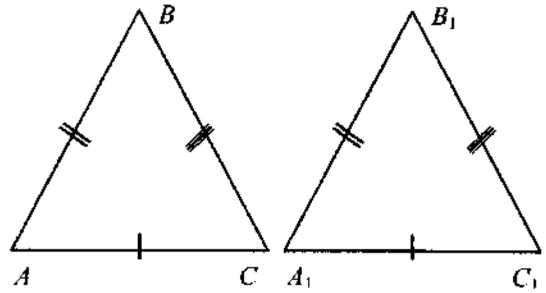


Рис. 2.16

Задача 4. Відрізки однакової довжини *AB* і *CD* перетинаються в точці *O* так, що $AO=OD$. Довести рівність трикутників *ABC* і *DCB* (рис. 2.17).

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $AB=CD$ і $AO=OD$, то відрізки $CO=CD-OD$ і $BO=BA-AO$ також рівні. Кути *AOC* і *DOB* рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AOC=\Delta DOB$ і $AC=DB$. Тоді *AC* і *DB* у трикутниках *ABC* і *DCB* рівні за доведеним, *DC* і *AB* – за умовою, а *BC* – спільна сторона. Тому $\Delta ABC=\Delta DCB$, що й потрібно було довести.

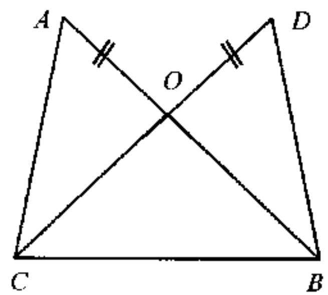


Рис. 2.17

Задача 5. Два відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O*, яка є серединою кожного з них. Довести рівність трикутників *ACD* і *BDC*.

Розв'язати самостійно.

2.3. Паралельні прямі

Означення. *Дві прямі називаються* ***паралельними****, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільної точки* (прямі a і b на рис. 2.18).

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності).

Аксіома V. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині паралельну їй пряму і тільки одну.

Паралельні прямі проводяться за допомогою трикутника і лінійки (рис. 2.18).

Рис. 2.18

Якщо прямі a і b паралельні, то записують $a||b$.

Якщо дві прямі перетнуто третьою (рис. 2.19), то при цьому утворюється вісім кутів, які називаються так:

а) внутрішні різносторонні: 3 і 6, 4 і 5;
б) зовнішні різносторонні: 1 і 8, 2 і 7;
в) відповідні: 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8;
г) внутрішні односторонні: 3 і 5, 4 і 6;
д) зовнішні односторонні: 1 і 7, 2 і 8.

Теорема 2.4. (Ознаки паралельності двох прямих). *Якщо при перетині двох прямих третьою:*

1) *внутрішні різносторонні кути рівні, або*
2) *відповідні кути рівні, або*
3) *сума односторонніх кутів дорівнює* 180°, *то прямі паралельні.*

Доведення. 1. Нехай a і b – дані прямі, AB – їхня січна (рис. 2.20). Нехай рівні внутрішні різносторонні кути CAB і ABD.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні і C – точка їх перетину. На прямій b відкладемо відрізок BD, що дорівнює відрізку AC. Трикутники CAB і DBA рівні за першою ознакою. У них сторона AB – спільна, $AC=BD$ за побудовою, а $\angle CAB=\angle ABD$ за умовою. З рівності трикутників випливає рівність кутів CBA і DAB.

Сума суміжних кутів CBA і DBA дорівнює 180°. А сума кутів DAB і CAB, що їм дорівнюють, тобто кут CAD менше ніж 180°. Дістали суперечність. Отже, прямі a і b паралельні.

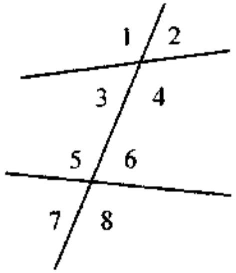


Рис. 2.19

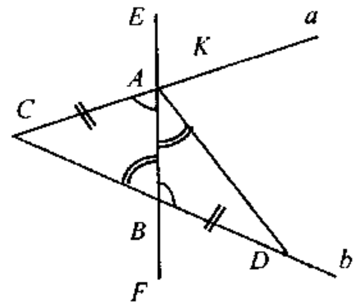


Рис. 2.20

Якщо кути KAB і CBA рівні, то кути $\angle CAB=180°-\angle KAB$ і $\angle ABD=180°-\angle CBA$ також рівні і $a||b$. Якщо рівні зовнішні різносторонні кути (наприклад, $\angle EAK$ і $\angle FBD$), то за властивістю вертикальних кутів рівні і внутрішні різносторонні кути. Отже, і в цьому випадку прямі паралельні.

Випадки 2 і 3 розглянути самостійно.

Теорема 2.5. *Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то:*

1) *різносторонні кути рівні;*
2) *відповідні кути рівні;*
3) *сума односторонніх кутів дорівнює* 180°.

Доведення. 1) Нехай прямі a і b паралельні, AB – їх січна (рис. 2.21). Проведемо через точку A пряму a_1 так, щоб внутрішні різносторонні кути, утворені січною AB з прямими a_1 і b, були рівні. Тоді за теоремою 2.4 прямі a_1 і b паралельні. Але через точку A проходить тільки одна пряма, паралельна b. Отже, прямі a і a_1 збігаються, і внутрішні різносторонні кути, утворені прямими a і b та їхньою січною AB, рівні. Рівність зовнішніх різносторонніх кутів випливає із властивості вертикальних кутів.

Випадки 2 і 3 розглянути самостійно.

Теорему доведено.

Задача 6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O (рис. 2.22). $AO=OB$, $CO=OD$. Чи є паралельними прямі AC і DB?

Розв'язання. У трикутниках AOC і OBD $AO=OB$, $CO=OD$ за умовою, $\angle AOC=\angle DOB$ (вертикальні кути). Отже, $\Delta AOC=\Delta OBD$ і $\angle ACO=\angle ODB$. Але ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих AC і DB та їхні січній CD.

Отже, $AC||DB$.

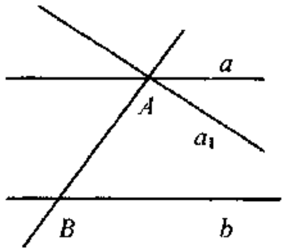


Рис. 2.21

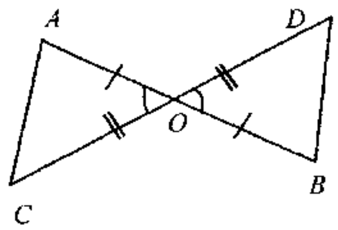


Рис. 2.22

2.4. Сума кутів трикутника

Теорема 2.6. *Сума кутів трикутника дорівнює* 180°.

Доведення. Нехай ΔABC – довільний (рис. 2.23).

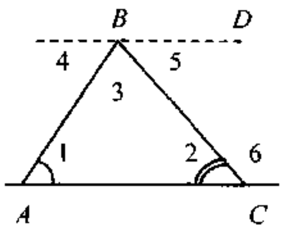


Рис. 2.23

Проведемо через вершину B пряму BD, паралельну протилежній стороні AC. Кути 1 і 4 рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BD і AC та їхній січній AB. Аналогічно, кути 2 і 5 рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BD і AC та їхній січній BC. Тоді $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 3+\angle 5=180°$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним.*

Доведення. Нехай $\angle 6$ – зовнішній кут ΔABC (рис. 2.23), суміжний з $\angle 2$. Тоді $\angle 1+\angle 3=180°-\angle 2=\angle 6$.

Задача 7. Визначити кути трикутника, якщо вони відносяться, як 1:2:3.

Розв'язання. Позначимо через x найменший кут, тоді два інших дорівнюють $2x$ і $3x$. За теоремою про суму кутів трикутника $x+2x+3x=180°$, або $6x=180°$, $x=30°$. Отже, $2x=60°$, $3x=90°$.

Відповідь. 30° ; 60° ; 90°.

Задача 8. Два кути трикутника відносяться, як 2:3, а третій кут на 20° більший, ніж другий. Знайти третій кут.

Розв'язати самостійно.

Відповідь. 40° ; 60° ; 80°.

Задача 9. Довести, що в прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання. Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом B, що дорівнює 30° (рис. 2.24).

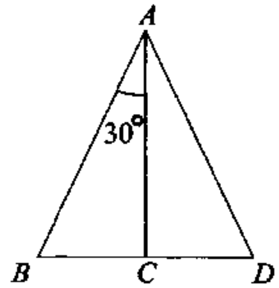


Рис. 2.24

Відкладемо на продовженні сторони BC відрізок CD, що дорівнює BC. Трикутники ABC і ADC рівні за першою ознакою. У них кути при вершині C прямі, сторона AC спільна, а $BC=CD$ за побудовою.

З рівності трикутників випливає, що $\angle D=\angle B=60°$, $\angle CAD=\angle CAB=30°$, а отже, $\angle BAD=60°$. Тоді трикутник ABD рівносторонній. Тому $BC=BD:2=AB:2$, що й потрібно було довести.

Задача 10. У прямокутному трикутнику сума гіпотенузи і катета дорівнює 2,7 м. Знайти довжину гіпотенузи, якщо кут, який лежить навпроти другого катета, дорівнює 60°.

Розв'язати самостійно.

Відповідь. 1,8 м.

2.5. Вписаний кут

Означення. *Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається вписаним у коло.*

На рис. 2.25 кут ABC вписаний у коло, його вершина B лежить на колі, а сторони BA і BC перетинають її. Кажуть, що *кут ABC спирається на дугу AC.*

Кут з вершиною в центрі кола називається *центральним*. На рис. 2.25 дузі AC відповідає центральний кут AOC. Якщо центральний кут більший, ніж розгорнутий, то його внутрішня частина позначається дугою, наприклад кут MpN на рис. 2.25.

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

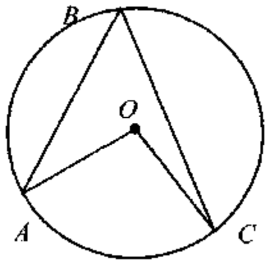


Рис. 2.25

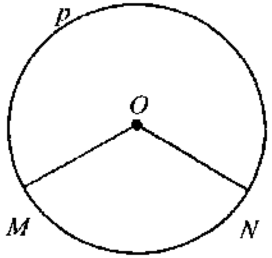
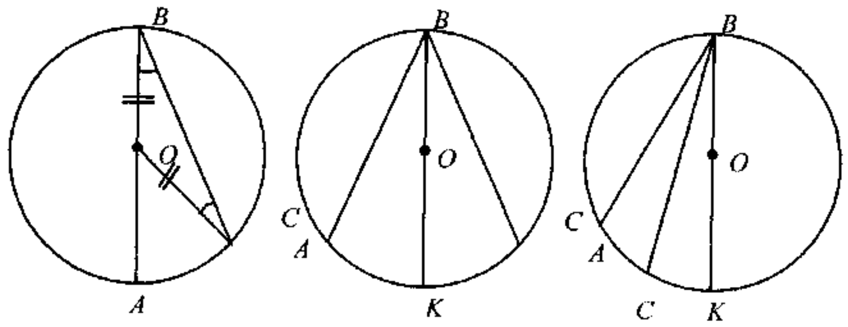


Рис. 2.26

Теорема 2.7. *Кут, вписаний в коло, вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.*

Доведення. Розглянемо три випадки.

1. Одна зі сторін кута проходить через центр кола (рис. 2.27, *а*). Проведемо радіус OC. Тоді ΔOBC – рівнобедрений, оскільки $OB=OC$. Отже, $\angle OBC=\angle OCB$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC=\angle OBC+\angle OCB=2\angle ABC$. Отже, $\angle ABC=2:\angle AOC$.



а б в

Рис. 2.27

2. Центр кола лежить усередині заданого кута (рис. 2.27, *б*). Проведемо діаметр BK. Для кутів ABK і CBK теорему вже доведено. Тому ці кути вимірюються половинами дуг AK і KC. Оскільки $\angle ABC=\angle ABK+\angle CBK$, то $\angle ABC$ вимірюється половиною дуги AKC ($\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AKC$).

3. Центр кола лежить поза кутом ABC (рис. 2.27, *в*). Проведемо діаметр BK і розглянемо $\angle ABC$ як різницю кутів KBA і KBC.

Теорему доведено.

Задача 11. Довести, що вписаний кут, який спирається на діаметр прямий.

Розв'язання. Справді, якщо дуга є півколом, то їй відповідає розгорнутий центральний кут. Його градусна міра 180°. Тоді градусна міра вписаного кута дорівнює 180°:2=90°.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 21 см. Знайдіть його сторони, якщо: а) бічна сторона дорівнює 8 см; б) основа менша за бічну сторону на 3 см.

2. Доведіть, що у рівностороннього трикутника всі кути рівні.

3. Доведіть, що у рівнобедреного трикутника: 1) бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні; 2) медіани, проведені з тих самих вершин, рівні.

4. У рівносторонньому трикутнику проведено дві медіани. Знайдіть величину меншого кута між ними.

5. Відрізки рівної довжини AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO=OD$. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB.

6. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює 62°.

7. Чи може бути кут при основі рівнобедреного трикутника тупим?

8. Два зовнішні кути трикутника дорівнюють 100° і 150°. Знайдіть третій зовнішній кут.

9. Доведіть, що бісектриса рівнобедреного трикутника є його медіаною і висотою.

10. Чи може медіана рівнобедреного трикутника дорівнювати половині бічної сторони, до якої її проведено?

11. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику бісектриса зовнішнього кута при вершині паралельна основі.

12. Доведіть, що коли медіана дорівнює половині сторони, до якої її проведено, то трикутник прямокутний.

13. Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то він рівнобедрений.

14. Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то він рівнобедрений.

15. Доведіть, що коли дві бісектриси трикутника рівні, то він рівнобедрений.

16. Доведіть, що у рівнобедреному прямокутному трикутнику висота, опущена на гіпотенузу, дорівнює її половині.

17. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. На бічну сторону опущено висоту. Знайдіть кут між цією висотою і основою.

18. Коло поділено у співвідношенні 7:11:6 і точки поділу сполучено між собою. Визначте кути утвореного трикутника.

РОЗДІЛ 3

ЧОТИРИКУТНИКИ

3.1. Сума кутів чотирикутника

Розглянемо довільний опуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 3.1). Відрізки AC і BD, що сполучають його протилежні вершини, називаються ***діагоналями***. Сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі кутів трикутників ABC і ACD, тобто 180°+180°=360°. Отже, сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°.

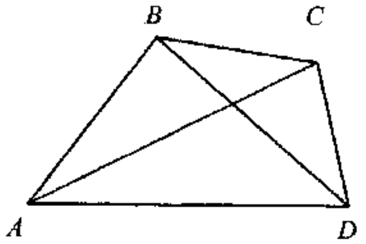


Рис. 3.1

3.2. Паралелограм

Означення. ***Паралелограмом*** *називається чотирикутник, в якого кожна сторона паралельна протилежній стороні* (рис. 3.2).

Будь-який паралелограм має такі властивості.

Теорема 3.1. *У паралелограмі:*

1) *протилежні сторони рівні;*
2) *протилежні кути рівні;*
3) *сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює* 180°;
4) *діагоналі в точці перетину діляться навпіл;*
5) *кожна діагональ поділяє його на два рівні трикутники.*

Доведення. 1. У паралелограмі $ABCD$ проведемо діагональ AC (рис. 3.2). У трикутниках ACD і ABC сторона AC спільна, кути CAB і ACD, ACB і DAC рівні як різносторонні кути, утворені січною AC при паралельних прямих AB і CD, AD і BC. Отже, $\Delta ACD=\Delta ACB$ і $AB=CD$, $BC=AD$ як сторони рівних трикутників, що лежать навпроти рівних кутів, що й потрібно було довести.

Решту властивостей довести самостійно.

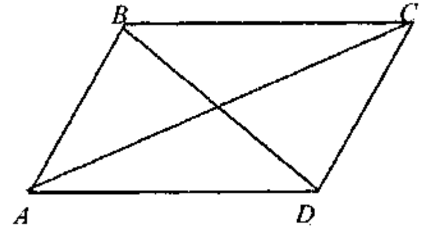


Рис. 3.2

Задача 1. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено пряму. Довести, що її відрізок, розміщений між паралельними сторонами, поділяється в цій точці навпіл.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – даний паралелограм і MN – пряма, що перетинає паралельні сторони AD і BC (рис. 3.3). Трикутники OAN і OCM рівні за другою ознакою. У них сторони OA і OC рівні, оскільки O – середина діагоналі AC. Кути при вершині O рівні як вертикальні, а кути NAO і MCO рівні як внутрішні різносторонні при паралельних AD, CB і січній AC. Із рівності трикутників випливає рівність сторін $ON=OM$, що й потрібно було довести.

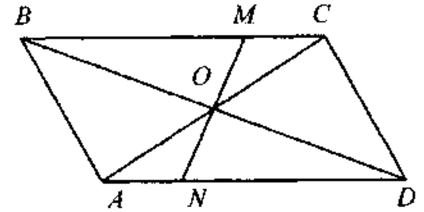


Рис. 3.3

Теорема 3.2. (Ознаки паралелограма). *Якщо у чотирикутнику:*

1) *протилежні сторони попарно рівні або*
2) *дві пари протилежних кутів рівні, або*
3) *сума кутів, прилеглих до кожної з двох суміжних сторін, дорівнює* 180°, *або*

4) *діагоналі в точці перетину діляться навпіл, або*
5) *дві сторони рівні і паралельні, то він є паралелограмом.*

Доведення. Доведемо випадок 5.

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ (див. рис. 3.2) $BC=AD$ і $BC||AD$. Розглянемо трикутники ABC і CDA. Маємо $BC=AD$, AC – спільна сторона, $\angle BAC=\angle DAC$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC і їхній січній AC. Отже, $\Delta ABC=\Delta CDA$. Тому $\angle BAC=\angle ACD$. Оскільки це внутрішні різносторонні кути при прямих AB і CD і їхній січній AC, то прямі AB і CD паралельні. Отже, чотирикутник $ABCD$ – паралелограм, що й потрібно було довести.

Задача 2. Довести, що коли в чотирикутника сума кожних двох сторін зі спільною вершиною дорівнює сумі інших двох сторін, то він є паралелограмом.

Розв'язання. Позначимо сторони даного чотирикутника через a, b, c, d (рис. 3.4). За умовою $a+b=c+d$ і $b+c=a+d$.

Рис. 3.4

Віднімемо від першої рівності другу:
$a+b-b-c=c+d-a-d$ або $a-c=c-a$, $2a=2c$, $2(a-c)=0$. Отже, $a=c$.

Підставимо a замість c в перше рівняння: $a+b=a+d$ або $b=d$. У даного чотирикутника протилежні сторони попарно рівні. За теоремою 3.2 він є паралелограмом, що й потрібно було довести.

Прямокутник.

Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі (рис. 3.5).

Прямокутник має всі властивості паралелограма; наприклад, діагоналі прямокутника в точці перетину поділяються навпіл. Крім того, прямокутник має таку властивість.

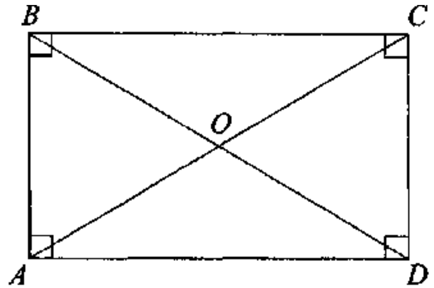


Рис. 3.5

Теорема 3.3. *Діагоналі прямокутника рівні.*

Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 3.5). Розглянемо трикутники BAD і CDA. Маємо $BA=CD$ – як протилежні сторони паралелограма; AD – спільна сторона, а $\angle BAD=\angle CDA=90°$. Отже, $\Delta BAD=\Delta CDA$ і $BD=AC$.

Теорему доведено.

Задача 3. У прямокутнику діагональ утворює зі стороною кут величиною 70°. Знайти величини кутів між діагоналями.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – прямокутник (рис. 3.5) і $\angle ACD=70°$. Розглянемо ΔCOD: $OC=OD$ як половини рівних діагоналей. Тому трикутник COD рівнобедрений. Отже, $\angle DCO=\angle ODC=70°$, а $\angle COD=180°-(70°+70°)=40°$. Тоді $\angle BOC=180°-40°=140°$.

Задача 4. Сума відстаней від точки перетину діагоналей прямокутника до його сторін дорівнює 21 см. Знайти периметр прямокутника. Розв'язати самостійно.

Відповідь. 42 см.

Ромб. ***Ромбом*** називається паралелограм, в якого всі сторони рівні (рис. 3.6). Ромб має всі властивості паралелограма, а також дві нові властивості.

Теорема 3.4. *Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і поділяють кути ромба навпіл.*

Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (див. рис. 3.6), O – точка їх перетину. Розглянемо трикутники ABO і CBO. За властивістю паралелограма $AO=OC$; OB – спільна сторона і $AB=BC$. Отже, $\Delta ABO=\Delta CBO$. Тому $\angle ABO=\angle CBO$ і DB – бісектриса кута ABC. Кути AOB і COB суміжні і рівні. Отже, $\angle AOB=\angle BOC=90°$ і $AC\perp BD$. Аналогічно можна довести, що BD поділяє навпіл $\angle D$, а AC – кути ABD і BCD.

Теорему доведено.

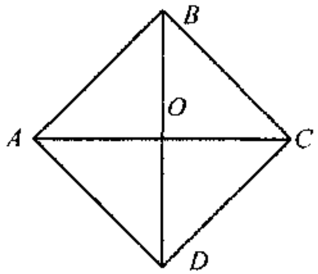


Рис. 3.6

Задача 5. Висота і діагональ ромба, проведені з вершини тупого кута, утворюють між собою кут величиною 30°. Знайти периметр ромба, якщо діагональ дорівнює 13 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай BK – висота ромба $ABCD$, а BD – його діагональ (рис. 3.7). Тоді $\angle KBD=30°$, а $\angle KDB=90°–30°=60°$. Оскільки діагональ ромба поділяє його кути навпіл, то $\angle BDC=60°$. Трикутник BDC рівнобедрений ($BC=CD$), і тому $\angle CBD=60°$. Але тоді і $\angle BDC=180°–60–60°$. Отже, ΔBCD – рівносторонній і $BC=BD=13$ см. Периметр ромба дорівнює $13{\cdot}4=52$ см.

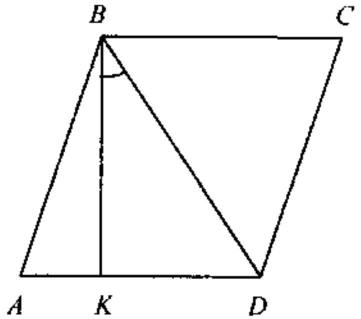


Рис. 3.7

Задача 6. Висота і діагональ ромба, проведені з вершини тупого кута, утворюють між собою кут величиною 15°. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80 см.

Розв'язати самостійно.

Відповідь. 10 см.

Квадрат

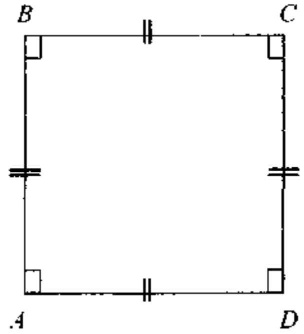
Квадратом називається прямокутник, усі сторони якого рівні (або ромб, в якого всі кути прямі) (рис. 3.8).

Квадрат має всі властивості прямокутника і ромба.

Задача 7. У рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом 2 см вписано квадрат. Знайти периметр квадрата, якщо трикутник і квадрат мають спільний кут.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай ABC – даний трикутник зі вписаним квадратом $CKMN$ (рис. 3.9). Тоді $AC=CB=2$ см, $\angle A=\angle B=45°$. Діагональ квадрата є бісектрисою кута C. Отже, $\angle MCB=45°$. Звідси випливає, що ΔCMB рівнобедрений. Тому висота MK трикутника є його медіаною. Отже, $CK=KB=\dfrac{1}{2}CB=1$ см.

Периметр квадрата дорівнює $4{\cdot}1=4$ см.



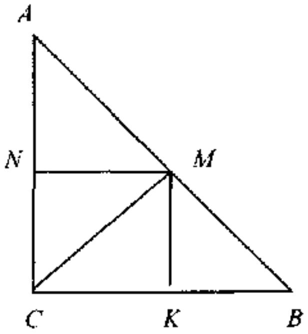


Рис. 3.8

Рис. 3.9

3.3. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

Теорема 3.5. (Фалеса). *Якщо на одній з двох прямих l_1 і l_2 відкласти рівні відрізки ($AB=BC=...$) і через їхні кінці провести паралельні прямі ($AM\|BN\|...$) до перетину з другою прямою, то і на ній відкладуться рівні між собою відрізки ($MN=NP=...$).*

Д о в е д е н н я. Нехай l_1 і l_2 – дані прямі. Якщо вони паралельні (рис. 3.10), то твердження теореми випливає із властивостей паралелограма: протилежні сторони паралелограма рівні.

Нехай прямі l_1 і l_2 не паралельні (рис. 3.11).

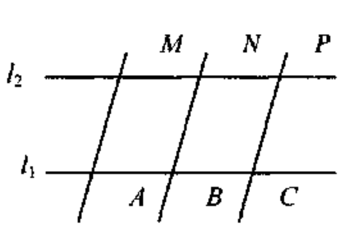


Рис. 3.10

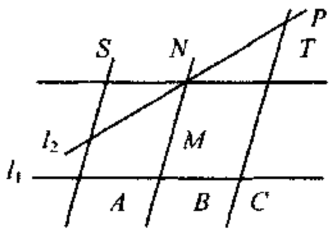


Рис. 3.11

Проведемо пряму ST через точку N паралельно l_1. У трикутниках MSN і PTN: $\angle SNM = \angle TNP$ як вертикальні, $SN=AB$ і $NT=BC$ за властивістю паралелограма, отже, $SN=NT$. $\angle SMN = \angle TPN$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AS і PC і їхній січній l_2. Отже, $\Delta SMN = \Delta TPN$ і $MN=NP$. Аналогічно доводиться рівність інших відрізків на прямій l_2, якщо рівні відповідні їм відрізки на прямій l_1.

Теорему доведено.

Задача 8. Поділити даний відрізок AB на п'ять рівних частин.

Р о з в ' я з а н н я. Проведемо з точки A промінь AC, що не належить прямій AB. Від точки A на промені AC відкладемо рівні відрізки: $AA_1=AA_2=...=A_4A_5$ (рис. 3.12). Проведемо пряму A_5B і прямі, що проходять через точки A_1, A_2, …, A_4, паралельно A_5B. Здобуті точки B_1, B_2, ... , B_4 згідно з теоремою Фалеса поділяють відрізок AB на п'ять рівних частин.

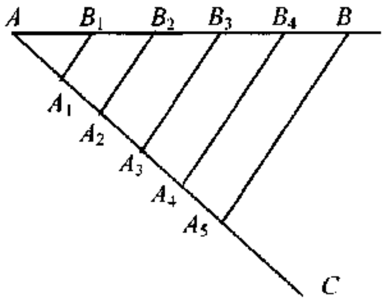


Рис. 3.12

Аналогічно розв'язується задача про поділ відрізка на 2, 3, … , n рівних частин (n – будь-яке натуральне число).

Задача 9. Середини E і F паралельних сторін BC і AD паралелограма $ABCD$ сполучено прямими з вершинами D і B (рис. 3.13). Довести, що ці прямі поділяють діагональ на три рівні частини.

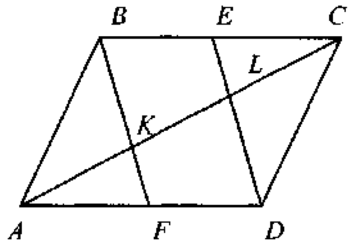


Рис. 3.13

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки BC і AD – протилежні сторони паралелограма, то $BC=AD$. Тоді $BE=FD$, оскільки E і F- середини цих сторін. Отже, BE і FD рівні і паралельні, а чотирикутник $BEDF$ є паралелограмом (див. теорему 3.2). Тому $BF \parallel ED$. За теоремою Фалеса прямі BF і ED відтинають на стороні CA кута BCA рівні відрізки $CL=LK$. За тією самою теоремою ці прямі відтинають на стороні AC кута CAD рівні відрізки $AK=KL$. Отже, $AK=KL=LC$, що й потрібно було довести.

Означення. ***Середньою лінією трикутника*** *називається відрізок, що з'єднує середини двох його сторін.*

Теорема 3.6. (Про середню лінію трикутника). *Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.*

Д о в е д е н н я. Нехай ABC – даний трикутник (рис. 3.14) і $AM=MB$ і $BN=NC$. Тоді MN – середня лінія трикутника. Проведемо через точку M пряму m, паралельну прямій AC. За теоремою Фалеса пряма m проходить через середину N відрізка BC. Тому m збігається з MN, тобто $MN \parallel AC$. Отже, середня лінія трикутника паралельна його третій стороні.

Нехай K – середина сторони AC, тобто $AK=KC$. Тоді KN – середня лінія ΔABC і згідно з доведеним $KN \parallel AB$. Отже, $AMNK$ – паралелограм і $MN=AK$. Аналогічно, MK – також середня лінія ΔABC, $MK \parallel BC$ і $MNCK$ – паралелограм. Отже, $MN=KC$. Тоді $KC=MN=AK$, тобто $MN = \frac{1}{2} AC$.

Теорему доведено.

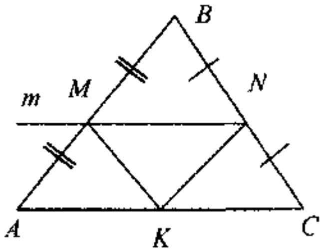


Рис. 3.14

Задача 10. Периметр трикутника дорівнює 18 см.

Середини сторін сполучено послідовно. Знайти периметр утвореного трикутника.

Р о з в ' я з а н н я . Нехай ABC – даний трикутник, M, N, K – середини його сторін (рис. 3.14). Тоді KN, MN і MK – середні лінії ΔABC.

Тому $MN=\frac{1}{2}AC$, $KN=\frac{1}{2}AB$, $KM=\frac{1}{2}BC$. Додамо почленно ці рівності:

$$MN+KN+KM=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\ (AC+AB+BC).$$

Отже, $P_{\Delta KMN}=\frac{1}{2}P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 18=9$ см.

Задача 11. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120°. Висота трикутника, опущена з вершини, дорівнює 3 см. Знайти довжину відрізка, що сполучає середини бічної сторони і основи.

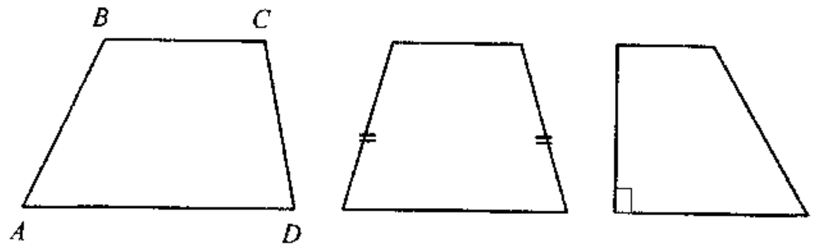
Розв'язати самостійно.

Відповідь. 3 см.

3.4. Трапеція. Середня лінія трапеції

Означення. ***Трапецією*** *називається чотирикутник, в якого тільки дві протилежні сторони паралельні* (рис. 3.15, *а*). Паралельні сторони трапеції (AD і BC) називаються ***основами***, а непаралельні (AB і CD) – ***бічними сторонами***. Трапеція називається ***рівнобічною*** (або рівнобедреною), якщо бічні сторони рівні (рис. 3.15, *б*). Трапеція, у якої один з кутів прямий, називається *прямокутною* (рис. 3.15, *в*).

У рівнобічній трапеції кути при основі рівні. У будь-якій трапеції сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.



а б в

Рис. 3.15

Означення. ***Середньою лінією трапеції*** *називається відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.*

Теорема 3.7. (Про середню лінію трапеції). *Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.*

Д о в е д е н н я . Нехай $ABCD$ – дана трапеція, MN – її середня лінія (рис. 3.16). Проведемо через середину M сторони AB пряму m, паралельну основам BC і AD. Пряма m за теоремою Фалеса проходить через середину відрізка CD, тобто через точку N. Отже, прямі m і MN збігаються, тобто $MN||AD$.

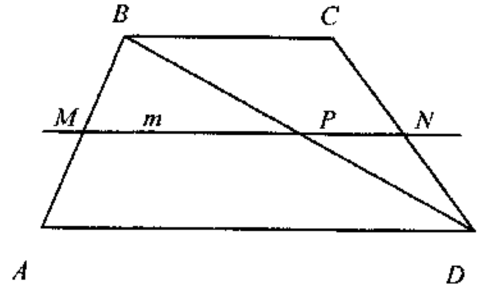


Рис. 3.16

Проведемо діагональ BD. Якщо P – точка перетину BD і MN, то за теоремою Фалеса P – середина відрізка BD. Але тоді MP і PN – середні лінії трикутників ABD і BCD. За теоремою 3.6

$$MP=\frac{AD}{2},\ PN=\frac{BC}{2}.$$

Отже, $MN=MP+PN=\frac{AD}{2}+\frac{BC}{2}=\frac{AD+BC}{2}$.

Теорему доведено.

Задача 12 Середня лінія трапеції дорівнює 8 см і поділяється діагоналлю на два відрізки, різниця між якими дорівнює 2 см. Знайти основи трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція (рис. 3.16), MN – середня лінія і $MP-PN=2$ см. Тоді $MP+PN=8$ см. Звідси випливає, що $2MP=2+8=10$ см, $MP=5$ см. За теоремою Фалеса $BP=PD$, тобто MP – середня лінія трикутника ABD. За теоремою 3.6 маємо $AD=2MP=2\cdot5=10$ см. Оскільки $PN=8-5=3$ см і PN – середня лінія ΔBCD, то $BC=2PN=2\cdot3=6$ см.

Задача 13. Діагоналі трапеції поділяють її середню лінію на три частини, кожна з яких дорівнює 6 см. Знайти основи трапеції.

Розв'язати самостійно.

Відповідь. 24 і 12 см.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Довжини двох сторін паралелограма відносяться, як 3:4, а його периметр дорівнює 28 см. Знайдіть довжини сторін.

2. Один із кутів паралелограма більший, ніж другий, на 60°. Знайдіть кути паралелограма.

3. Чи може один кут паралелограма дорівнювати 40°, а інший 60°?

4. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина сторони BC, а K – середина сторони AD. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

5. Діагональ паралелограма поділяє його кут на частини, що дорівнюють 90° і 30°. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює $P = 48$ см.

6. Бісектриса одного з кутів прямокутника поділяє сторону прямокутника навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 10 см.

7. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, одна сторона більша за іншу на 2 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до сторін.

8. Чи існує в прямокутнику точка, яка однаково віддалена: а) від усіх його сторін; б) від усіх його вершин?

9. Один із кутів, утворений перетином діагоналей прямокутника, дорівнює 50°. Знайдіть кути, які діагоналі утворюють зі сторонами.

10. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що його дві вершини містяться на гіпотенузі, а дві інших – на катетах. Чому дорівнюють сторони прямокутника, коли відомо, що вони відносяться, як 5:2, а гіпотенуза трикутника дорівнює 45 см?

11. У ромбі одна з діагоналей дорівнює стороні. Знайдіть кути ромба.

12. Знайдіть кути ромба, якщо висота поділяє сторону на дві рівні частини.

13. Знайдіть кути ромба, якщо: а) їхні величини відносяться, як 7:11; б) величини кутів, утворених діагоналями і стороною, відносяться, як 14:16.

14. Доведіть, що паралелограм, в якого всі висоти рівні, є ромбом.

15. $ABCD$ – ромб. Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів BAC і BDC?

16. Через вершини прямокутника проведено прямі, відповідно паралельні його діагоналям. Яку форму має чотирикутник, обмежений цими прямими?

17. Висота ромба $ABCD$ лежить на бісектрисі кута ABD. Знайдіть кути ромба.

18. Чи існує в ромбі точка, яка однаково віддалена: а) від усіх його сторін; б) від усіх його вершин?

19. Діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні і рівні між собою. Чи є він квадратом?

20. Бісектриси кутів прямокутника перетинаються в точках H, K, M, P. Доведіть, що $HKMP$ – квадрат.

21. Дано квадрат, довжина сторони якого дорівнює 1 см. Його діагональ є стороною іншого квадрата. Знайдіть довжину діагоналі другого квадрата.

22. Дано квадрат, довжина діагоналі якого дорівнює 1 м. Його сторона є діагоналлю іншого квадрата. Знайдіть довжину сторони другого квадрата.

23. Знайдіть довжину сторони квадрата, якщо відстань від точки перетину діагоналей до однієї з його сторін дорівнює 5,3 м.

24. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні між собою.

25. Кут при основі рівнобічної трапеції дорівнює 60°. Бічна сторона дорівнює 11 см і перпендикулярна до однієї з діагоналей. Знайдіть периметр трапеції.

26. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 2,7 м, бічна сторона 1 м, кут між ними 60°. Знайдіть меншу основу.

РОЗДІЛ 4 КОЛО. МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В МНОГОКУТНИКАХ

4.1. Пропорційні відрізки

Означення. *Відрізки AB і CD називаються* ***пропорційними відрізкам*** *A_1B_1 і C_1D_1, якщо пропорційні їхні довжини: $AB:A_1B_1=CD:C_1D_1$.*

Теорема 4.1. *Відрізки, що відтинаються паралельними прямими на сторонах кута, починаючи від його вершини, пропорційні.*

Доведення. Нехай паралельні прямі NM і AB перетинають сторони кута AOB (рис. 4.1).

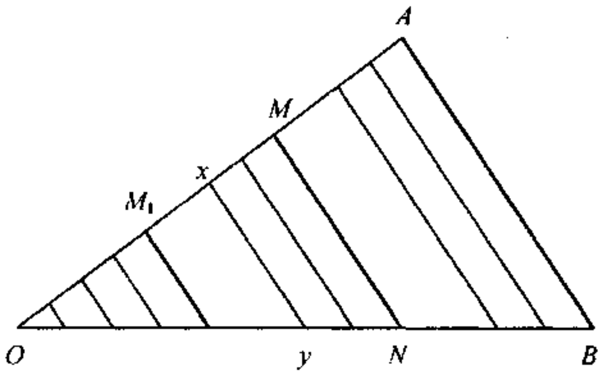


Рис. 4.1

Покажемо, що $\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OB}$. Припустимо, що $\frac{OM}{ON}\neq\frac{OA}{OB}$, наприклад $\frac{OM}{ON}>\frac{OA}{OB}$. Візьмемо на відрізку OM точку M_1 так, щоб $\frac{OM_1}{ON}=\frac{OA}{OB}$. Поділимо відрізок OA на велику кількість (наприклад, n) рівних частин і проведемо через точки поділу прямі, паралельні прямій AB. За теоремою Фалеса ці прямі поділяють відрізок OB також на n рівних частин. При достатньо великому n на відрізку M_1M будуть точки поділу. Нехай x – одна з них, а y – відповідна точка на

стороні OB. Тоді $OX:OY=OA:OB$, оскільки OX і OY (а також OA і OB) мають однакову кількість рівних відрізків. Замінимо в дробі $\frac{OX}{OY}$ величину OX величиною OM_1, а величину OY – величиною ON. Оскільки $OM_1<OX$, $ON>OY$, то $\frac{OM_1}{ON}<\frac{OA}{OB}$. Але згідно з вибором точки M_1 має бути: $\frac{OM_1}{ON}=\frac{OA}{OB}$. Дістали супротивне.

Теорему доведено.

Наслідок. *Відрізки, що відтинаються паралельними прямими на сторонах кута, пропорційні*

Доведення. Потрібно довести, що $\frac{OM}{ON}=\frac{MA}{NB}$ або $\frac{OM}{MA}=\frac{ON}{NB}$ (рис. 4.1). За теоремою 4.1 $\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OB}$ або $\frac{OM}{OA}=\frac{ON}{OB}$. За властивістю пропорції $\frac{OM}{OA-OM}=\frac{ON}{OB-ON}$, тобто $\frac{OM}{MA}=\frac{ON}{NB}$, що й потрібно було довести.

Задача 3. Знайти відрізок, що утворює з трьома даними пропорцію.

Розв'язання. Нехай a, b, c – дані відрізки (рис. 4.2). На стороні довільного кута з вершиною O відкладемо відрізки $OA=a$ і $AB=b$, а на другій стороні – відрізок OC, що дорівнює відрізку c. Проведемо пряму AC і побудуємо пряму BD, що проходить через точку B, паралельну AC. Відрізок $CD=x$ буде шуканим. Справді, згідно з наслідком теореми 4.1 $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$ або $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

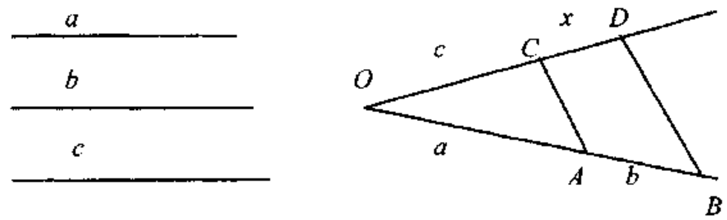


Рис. 4.2

4.2. Подібні трикутники

Означення. *Трикутники називаються* ***подібними****, якщо кути одного трикутника дорівнюють кутам другого трикутника, а їхні відповідні сторони пропорційні.*

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, то пишуть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. У подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$; $\angle B=\angle B_1$; $\angle C=\angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$.

Лема 1. *Пряма, що паралельна одній стороні трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від нього трикутник, подібний до даного.*

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник, $MN \| AC$, (рис. 4.3). Тоді кут B спільний для ΔABC і ΔMBN, а $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ як відповідні кути при паралельних прямих MN, AC та їхніх січних AB та BC відповідно . Через точку N проведемо пряму NK, паралельну BA. За теоремою 4.1 (про пропорційні відрізки) $\frac{CN}{CK}=\frac{CB}{CA}$ або $\frac{CB}{CN}=\frac{CA}{CK}$. За властивістю пропорції $\frac{BC}{BC-CN}=\frac{AC}{AC-CK}$, тобто $BC:BN=AC:AK$. Оскільки $MNKA$ – паралелограм, то $AK=MN$ і, отже, $\frac{BC}{BN}=\frac{AC}{MN}$. За теоремою 4.1 $\frac{BC}{BN}=\frac{BA}{BM}$. Тому $\frac{AC}{MN}=\frac{BC}{BN}=\frac{BA}{BM}$. Лему доведено.

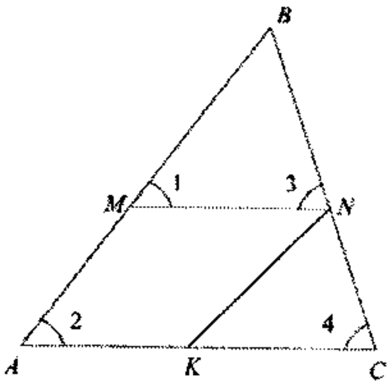


Рис. 4.3

Теорема 4.2. (Перша ознака подібності трикутників). *Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то трикутники подібні.*

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – трикутники, в яких $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. Тоді $\angle C=\angle C_1$ (рис. 4.4). Відкладемо на промені BA від точки B відрізок BA_2, що дорівнює відрізку A_1B_1, і через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну AC. Ця пряма перетне сторону BC в точці C_2. Трикутники $A_1B_1C_1$ і A_2BC_2 рівні. $A_1B_1=A_2B$ за побудовою, $\angle B=\angle B_1$ за умовою, $\angle BA_2C_2=\angle A=\angle A_1$ за умовою і властивістю відповідних кутів. Згідно з лемою про подібні трикутники $\Delta A_2BC_2 \sim \Delta ABC$, а отже, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Теорему доведено.

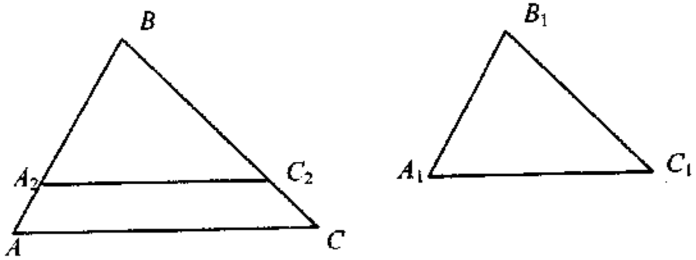


Рис. 4.4

Теорема 4.3. (Друга ознака подібності трикутників). *Якщо дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути між цими сторонами рівні, то трикутники подібні.*

Довести самостійно.

Вказівка. Використати лему 1.

Теорема 4.4. (Третя ознака подібності трикутників). *Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.*

Довести самостійно.

Вказівка. Використати лему 1.

Задача 2. Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Довести.

Розв'язання. Нехай BL – бісектриса $\angle ABC$ трикутника ABC (рис. 4.5). Проведемо через точку C пряму CM, паралельну бісектрисі BL, до її перетину з продовженням сторони AB в точці M, а через точку B – пряму BK, паралельну AC, до її перетину з CM у точці K. Із властивостей кутів, утворених паралельними прямими і їхніми січними, випливає рівність пар кутів: $\angle ABL$ і $\angle AMC$, $\angle LBC$ і $\angle BCK$, а оскільки $\angle ABL=\angle LBC$, то й рівність кутів $\angle BMC$ і $\angle BCM$. Отже, ΔCBM – рівнобедрений і $BM=BC$. Тоді з подібності трикутників ABL і BMK дістаємо відношення $\frac{AL}{BK}=\frac{AB}{BM}$.

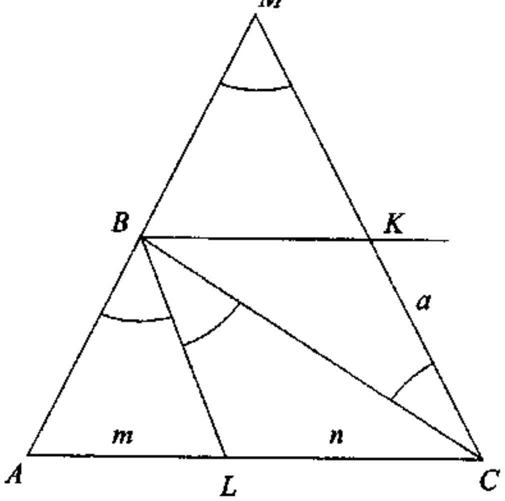


Рис. 4.5

Оскільки $BKCL$ – паралелограм, то $BK=LC$, а раніше було доведено, що $BM=BC$. Отже, $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}$. Що й потрібно було довести.

4.3. Теорема Піфагора

Означення. *Відрізок x називається **середнім пропорційним** (або **середнім геометричним**) **між відрізками a і b**, якщо для їхніх довжин виконується рівність $a:x=x:b$, тобто $x=\sqrt{ab}$.*

Теорема 4.5. *Якщо у прямокутному трикутнику проведено висоту з вершини прямого кута, то: 1) висота є середнє пропорційне між відрізками, на які вона поділяє гіпотенузу; 2) катет є середнє пропорційне між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.*

Доведення. Розглянемо прямокутний трикутник ABC (рис. 4.6). Проведемо висоту CD з вершини прямого кута C і позначимо її довжину через h. Потрібно довести, що $h^2=c_1c_2$, $b^2=cc_1$, $a^2=cc_2$. Маємо три пари подібних трикутників: $\Delta ADC\sim\Delta ACB$ (кут A спільний, $\angle D=\angle C$). Звідси $c_1:b=b:c$, тобто $b^2=cc_1$. $\Delta ACB\sim\Delta CDB$ (кут B – спільний, $\angle C=\angle D$). Тому $c:a=a:c_2$, тобто $a^2=cc_2$. $\Delta ADC\sim\Delta CDB$ ($\angle ACD=90°-\angle A=\angle B$, $\angle A=90°-\angle B=\angle DCB$).

Отже, $c_1:h=h:c_2$, тобто $h^2=c_1c_2$. Теорему доведено.

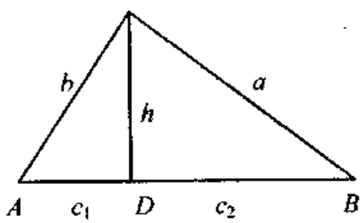


Рис. 4.6

Теорема 4.6. (Піфагора). *У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.*

Доведення. У прямокутному трикутнику ABC проведемо з вершини прямого кута C висоту CD (рис. 4.6). За теоремою 4.5 $b^2=cc_1$ і $a^2=cc_2$. Тому $b^2+a^2=cc_1+cc_2=c(c_1+c_2)=c^2$, що й потрібно було довести.

Теорема 4.7. (Обернена до теореми Піфагора). *Якщо в трикутнику ABC квадрат сторони AB дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то кут C – прямий.*

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник, в якого $AB^2=AC^2+BC^2$. Розглянемо допоміжний прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$, в якого катети A_1C_1 і B_1C_1 дорівнюють сторонам даного ΔABC. За теоремою Піфагора $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$. Отже, $A_1B_1=AB$. Тому $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ і ΔABC – прямокутний із прямим кутом при вершині C.

Теорему доведено.

Задача 3. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а один із катетів дорівнює 20 см. Знайти проекцію другого катета на гіпотенузу.

Розв'язання. Нехай c=25 см, b=20 (рис. 4.6). Тоді за теоремою Піфагора $a^2=c^2-b^2=625-400=225$.

За теоремою 4.5 $a^2=cc_2$, де c_2 – проекція катета a на гіпотенузу.

Звідси $c_2=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{225}{25}=9$ см.

Відповідь. 9 см.

Задача 4. Довести, що в рівнобічної трапеції квадрат діагоналі дорівнює квадратові бічної сторони, доданому до добутку основ.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – рівнобічна трапеція (рис. 4.7, *а*) і висота поділяє основу на відрізки x і y. Тоді

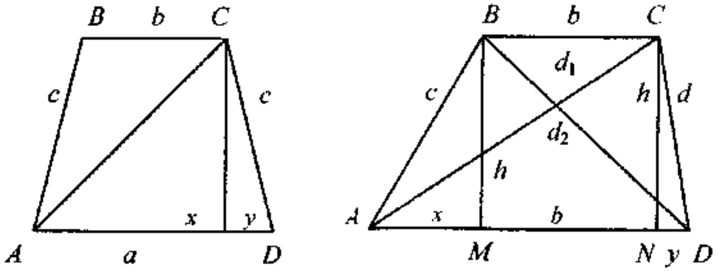
$$x=\frac{a+b}{2};\ y=\frac{a-b}{2};$$

$$d^2=x^2+h^2=x^2+c^2-y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}+c^2=ab+c^2.$$

Задача 5. Довести, що в довільній трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – довільна трапеція (рис. 4.7, *б*) і висоти відтинають від більшої основи відрізки x і y. Тоді середній відрізок MN дорівнює меншій основі b. За теоремою Піфагора $d_1^2=h^2+(x+b)^2$, $d_2^2=h^2+(b+y)^2$, а отже, $d_1^2+d_2^2=x^2+y^2+$ $+2h^2+2b^2+2xb+2yb=c^2+d^2+2b(x+b+y)=c^2+d^2+2ab.$



а *б*

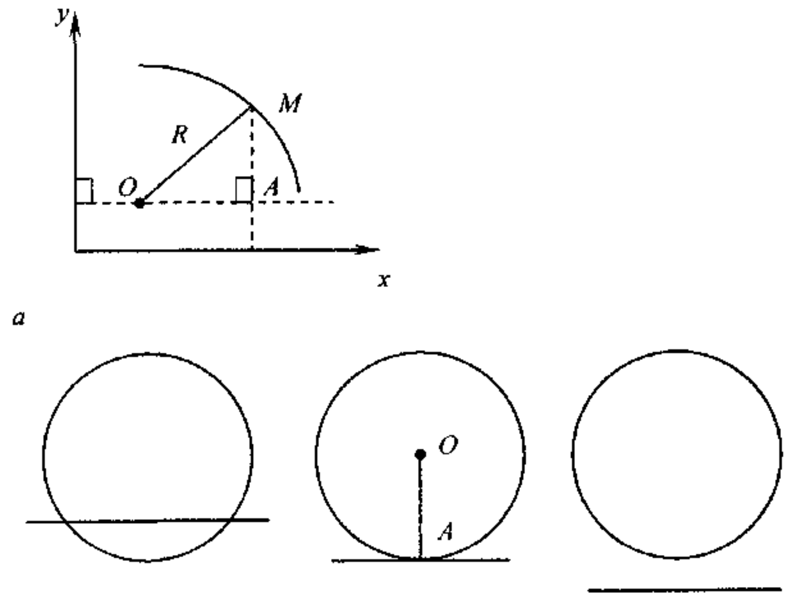
Рис. 4.7

4.4. Коло. Дотичні. Хорди

Нехай R – радіус кола, O (a, b) – його центр, а x, y – декартові координати довільної точки M кола (рис. 4.8, *а*). Тоді $OA=|x-a|$, $MA=|y-b|$, $OM=R$, де OA і AM – катети, а OM – гіпотенуза прямокутного трикутника OMA.

За теоремою Піфагора $OA^2+MA^2=OM^2$, тобто

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$



б *в* *г*

Рис. 4.8

Це рівняння кола з центром у точці O (a, b) і радіусом R. При $a=b=0$ дістанемо $x^2+y^2=R^2$. Це рівняння кола з центром у початку координат. Нехай пряма віддалена від центра кола на відстань d. Якщо вісь Ox взяти перпендикулярно до даної прямої, то рівняння прямої буде мати вигляд $x=d$. Для того щоб пряма і коло мали спільну точку з координатами (x_0, y_0), потрібно, щоб система двох рівнянь $x^2+y^2=R^2$ і $x=d$ мала розв'язок (x_0, y_0). І, навпаки, будь-який розв'язок (x_0, y_0) цієї системи дає координати точки перетину прямої з колом.

Розв'язавши цю систему, дістанемо $x_0 = d$, $y_0 = \pm\sqrt{R^2 - d}$.

Отже, система має два розв'язки, тобто коло і пряма мають дві точки перетину, якщо $R>d$ (рис. 4.8, *б*). Система має один розв'язок, якщо $R=d$ (рис. 4.8, *в*). У цьому разі пряма і коло дотикаються. Система не має розв'язків, тобто пряма і коло не перетинаються, якщо $R<d$ (рис. 4.8, *г*).

Означення. *Пряма, що має з колом тільки одну спільну точку, називається* ***дотичною до кола****, а спільна точка прямої і кола –* ***точкою дотику****.*

Розглянемо властивості дотичної до кола.

Теорема 4.8. *Дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику.*

Доведення. Нехай p – дотична до кола, A – точка дотику (рис. 4.8, *в*), Доведемо, що $OA \perp p$. Припустимо, що це не так. Тоді радіус OA є похилою до прямої p. Оскільки перпендикуляр, проведений з точки O до прямої p, менший від похилої OA, то відстань від центра O кола до прямої p менша за радіус. Отже, пряма p перетинає коло. Але це суперечить умові. Наше припущення неправильне, а отже, $OA \perp p$. Що й потрібно було довести.

Теорема 4.9. (Обернена до теореми 4.8). *Якщо пряма перпендикулярна до радіуса кола в його точці, що лежить на колі, то вона є дотичною до цього кола.*

Довести самостійно.

Розглянемо кілька задач на проведення дотичної до кола.

Задача 6. Побудувати дотичну до даного кола, паралельну даній прямій.

Розв'язання. Опускаємо на дану пряму a з центра O перпендикуляр OA і через точки B і C, в яких цей перпендикуляр перетинається з колом, проводимо прямі b і c паралельно a (рис. 4.9). За теоремою 4.9 b і c – шукані дотичні.

Задача 7. Побудувати дотичну до даного кола, що проходить через дану точку A кола (рис. 4.10).

Розв'язання. Проведемо радіус OA і з його кінця A побудуємо перпендикуляр BC до цього радіуса. За теоремою 4.9 BC – шукана дотична.

Задача 8. Побудувати дотичну до даного кола, що проходить через дану точку A поза колом (рис. 4.11).

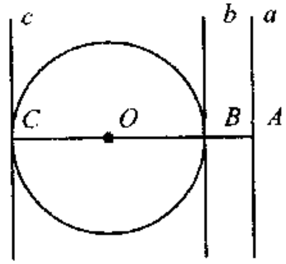


Рис. 4.9

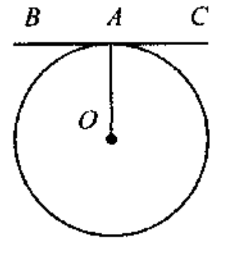


Рис. 4.10

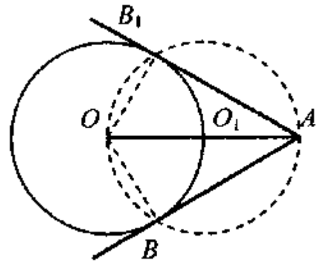


Рис. 4.11

Розв'язання. Сполучимо точку A з центром кола O. Поділимо відрізок OA навпіл. Якщо O_1 – середина відрізка OA, то радіусом OO_1 з центра O_1 проведемо коло. Це коло перетинається з даним. Через точки перетину B і B_1 проведемо прямі AB і AB_1. Ці прямі і будуть дотичними, оскільки кути OBA і OB_1A як вписані кути, що спираються на діаметр, прямі.

Задача 9. Довести, що відрізки двох дотичних, проведених до кола із зовнішньої точки, рівні.

Розв'язання. Використаємо рис. 4.11. Оскільки $OB = OB_1$ (радіуси даного кола), OA – спільна сторона, кути OBA і OB_1A – прямі, то трикутники – OBA і OB_1A рівні. Отже, $AB=AB_1$.

Задача 10. Довести, що добуток довжин відрізків січної дорівнює квадрату довжини відрізка дотичної: якщо через точку M проведені до кола січна і дотична, причому A і B – точки перетину кола з січною, а C – точка дотику, то $AM{\cdot}BM=CM^2$ (рис. 4.12).

Розв'язати самостійно.

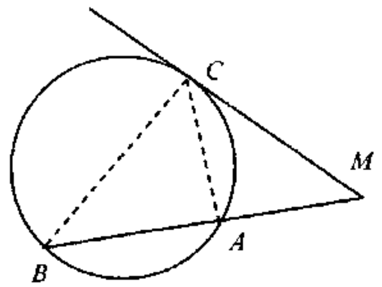


Рис. 4.12

Вказівка. Довести подібність трикутників MBC і MCA. Врахувати, що кут MCA вимірюється половиною дуги CA.

Задача 11. Довести, що добутки довжин відрізків хорд, що перетинаються, рівні: якщо хорди AB і CD перетинаються в точці M, то $AM{\cdot}BM=CM{\cdot}DM$ (рис. 4.13).

Розв'язання. У трикутниках AMD і BMC кути A і C рівні як вписані кути, що спираються на дугу BD; кути CMB і AMD рівні як вертикальні. За першою ознакою подібності трикутників $\Delta AMD \sim \Delta BMC$. Тому $\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{BM}$ або $AM{\cdot}BM=CM{\cdot}DM$, що й потрібно було довести.

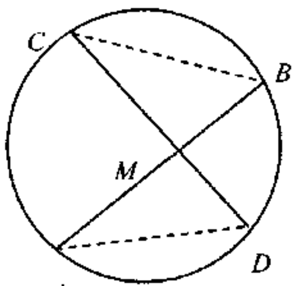


Рис. 4.13

Задача 12. Довести, що діаметр, перпендикулярний до хорди, поділяє її навпіл.

Довести самостійно.

Задача 13. Довести, що якщо діаметр ділить хорду навпіл, то він перпендикулярний до неї.

Довести самостійно.

4.5. Вписані і описані многокутники

Означення. *Многокутник, усі вершини якого належать колу, називають* ***вписаним у це коло****, а коло –* ***описаним навколо цього многокутника*** (рис. 4.14).

Означення. *Многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називається* ***описаним навколо цього кола****, а коло –* ***вписаним у цей многокутник*** (рис. 4.15).

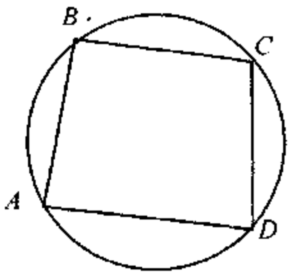


Рис. 4.14

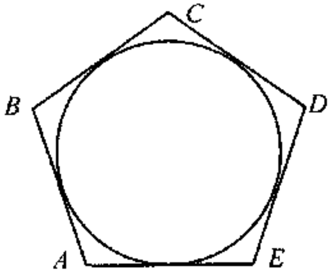


Рис. 4.15

Вписані і описані трикутники. Для будь-якого трикутника існує описане і вписане коло.

Теорема 4.10. *Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і тільки одне. Центром цього кола є точка перетину перпендикулярів, проведених до сторін трикутника через їхні середини.*

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник (рис. 4.16), а M, K і L – середини його сторін. Проведемо через точку M і L прямі m і l, перпендикулярні до сторін AB і BC.

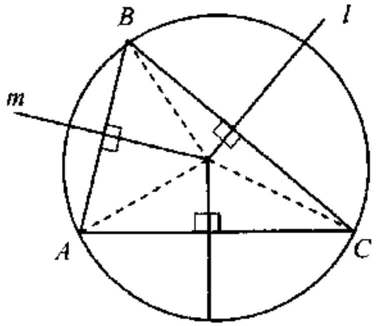


Рис. 4.16

Оскільки AB і BC перетинаються (у точці B), то прямі m і l теж перетинаються (наприклад, у точці O). Прямокутні трикутники AOM і BOM рівні. Тому $AO=BO$. Прямокутні трикутники BOL і COL теж рівні. Тому $BO=CO$ і коло з центром у точці O і радіусом OA проходить через усі три вершини трикутника ABC. Отже, це описане коло. Оскільки $AO=OC$, то точка O лежить на перпендикулярі, проведеному через точку K (середину AC). Усі три перпендикуляри до сторін трикутника, проведені через їхні середини, перетинаються в одній точці. Ця точка є центром кола, описаного навколо трикутника. Теорему доведено.

Примітка. Прямі OL, OK і OM часто називають ***серединними перпендикулярами***, .

Теорема. 4.11. *а) У будь-який трикутник можна вписати коло і тільки одне. Центром цього кола є точка перетину бісектрис трикутника. б) Якщо a і b – катети, c – гіпотенуза, а r – радіус вписаного кола прямокутного трикутника, то*

$$r = \frac{a+b-c}{2}. \tag{4.1}$$

Довести самостійно.

Вказівка. *а*) Доведіть, що бісектриси двох кутів трикутника перетинаються (наприклад, у точці O, рис. 4.17). Точка O лежить усередині трикутника і однаково віддалена від його сторін. Тому точка O є центром вписаного кола. Покажіть, що і третя бісектриса проходить через точку O. *б*) Позначимо $a-r=x$, $b-r=y$. Тоді за властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки, $c=x+y$. Отже, $a+b-c=(r+x)+(r+y)-(x+y)=2r$.

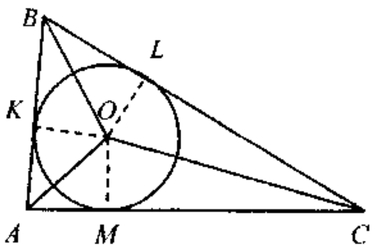


Рис. 4.17

З теорем 4.10 і 4.11а випливає, що в рівносторонньому (правильному) трикутнику центри описаного і вписаного кіл збігаються. Ця точка називається ***центром рівностороннього трикутника.***

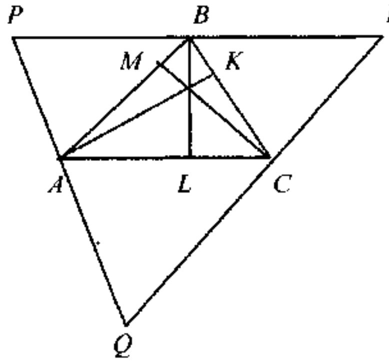
Задача 14. Довести, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай ABC – даний трикутник, AK, BL, CM – його висоти (рис. 4.18). Через вершини A, B і C проведемо прямі, паралельні протилежним сторонам: $PR||AC$, $RQ||AB$, $PQ||BC$. Оскільки чотирикутники $ABCQ$ і $ABRC$ – паралелограми, то $QC=AB=RC$. Далі маємо: $AB||QR$ і $MC \perp AB$. Отже, $MC \perp QR$, тобто MC – серединний перпендикуляр сторони QR трикутника PQR.

Аналогічно можна довести, що BL і AK – це серединні перпендикуляри сторін RP і PQ цього трикутника. Серединні перпендикуляри трьох сторін ΔPQR перетинаються в одній точці. Тому прямі BL, AK і CM, що містять висоти ΔABC, перетинаються в одній точці, що й потрібно було довести.

Задача 15. Довести, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці: ця точка поділяє кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай у ΔABC $AM=MB$ і $BK=KC$ (рис. 4.19). Тоді AK і CM – медіани, а MK – середня лінія цього трикутника. Отже, $MK||AC$ і трикутники AOC і MOK мають рівні кути. Справді, $\angle OMK = \angle ACM$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих MK і AC і їхній січній MC, а $\angle MOK = \angle AOC$ як вертикальні кути. За першою ознакою подібності трикутників $\Delta AOC \sim \Delta MOK$. Звідси і з властивості середньої лінії трикутника випливає, що $\frac{AO}{OK}=\frac{CO}{OM}=\frac{AC}{MK}=2$.



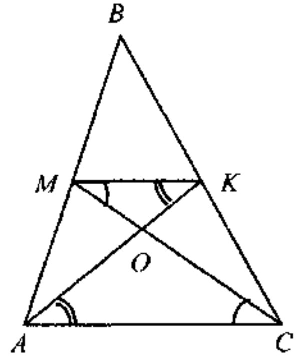


Рис. 4.18

Рис. 4.19

Отже, медіана AK перетинає медіану CM у точці O, яка поділяє CM (а також і AK) у співвідношенні 2:1, починаючи від вершини.

Медіана BL, проведена з вершини B, перетинає медіани AK і CM у точці, яка поділяє ці медіани у тому самому відношенні 2:1. Отже, медіана BL проходить через точку O і поділяється цією точкою у відношенні 2:1, починаючи від вершини, що й потрібно було довести. Точки перетину медіан, бісектрис, серединних перпендикулярів і висот (або їх продовжень) називають ***важливими точками трикутника.***

Вписані і описані чотирикутники. Вписане і описане коло існує не для будь-якого чотирикутника.

Теорема 4.12. *Сума протилежних кутів вписаного опуклого чотирикутника дорівнює* 180°.

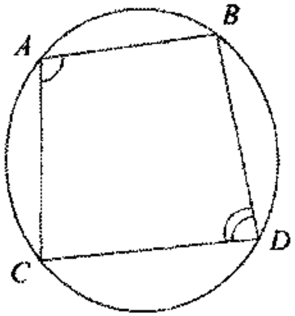


Рис. 4.20

Д о в е д е н н я. Нехай чотирикутник *ABCD* вписаний в коло (рис. 4.20). Тоді за теоремою про вписаний кут $\angle A=\frac{1}{2}\cup BCD$, $\angle C=\frac{1}{2}\cup DAB$. Отже, $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\cup BCD+$ $+\frac{1}{2}\cup DAB=\frac{1}{2}(\cup BCD+\cup DAB)$. Але об'єднання дуг *BCD* і *DAB* є колом. Отже, сума величин кутів *A* і *C* дорівнює кутовій величині півкола: $\angle A+\angle C=180°$.

Теорему доведено.

Отже, для того щоб навколо чотирикутника можна було описати коло, необхідно, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала 180°. Цієї умови і достатньо для того, щоб чотирикутник був вписаним. Доведіть це самостійно.

Теорема 4.13. *Суми протилежних сторін описаного опуклого чотирикутника рівні.*

Д о в е д е н н я. Нехай *ABCD* – даний чотирикутник, в який можна вписати коло (рис. 4.21). Сторони чотирикутника дотикаються до кола в точках *M, N, P* і *Q*. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки: *AM=AQ* , *BM=BN, CN=CP, DP=DQ*. Тому *AM+BM+ CP +DP =AQ+BN+ CN +DQ* або *AB+CD=BC+AD.*

Теорему доведено.

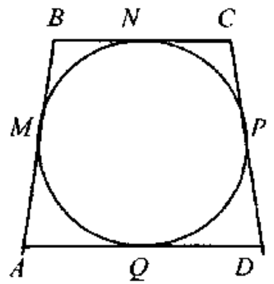


Рис. 4.21

Зазначена умова є не тільки необхідною, але і достатньою умовою існування кола, вписаного в опуклий чотирикутник.

Задача 16. У трапецію можна вписати коло. Периметр трапеції дорівнює *P*. Знайти середню лінію трапеції.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай *ABCD* – дана трапеція (рис. 4.22). За теоремою 4.13 маємо: *AB+CD=BC+AD*. Тому *P=AB+BC+CD+AD=* *=(AB+CD)+(BC+AD)=2(BC+AD)*.

Середня лінія трапеції $MN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}\frac{P}{2}=\frac{P}{4}$. Корисною буває і така теорема.

Теорема 4.14. *У рівнобічній описаній трапеції квадрат висоти дорівнює добутку основ.*

Д о в е д е н н я. Нехай *ABCD* – рівнобічна описана трапеція (рис. 4.23), зі сторонами *AD=a, BC=b, a||b, AB=CD=c*, висотою *h=2R*, де *R* – радіус вписаного кола. Тоді за теоремою 4.13 $2c=a+b$ і з ΔABC маємо:

$$h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}=\frac{4ab}{4}=ab.$$

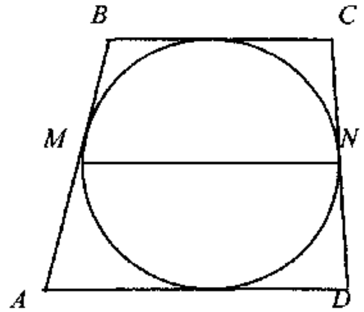


Рис. 4.22

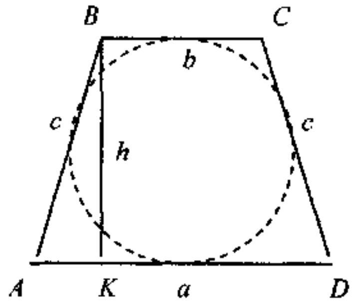


Рис. 4.23

Теорему доведено.

4.6. Теореми синусів і косинусів

Означення. ***Косинусом*** *гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.* ***Синусом*** *гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.*

Косинус і синус кута α позначається відповідно $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$. Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом біля вершині A, що дорівнює α (рис. 4.24). За означенням

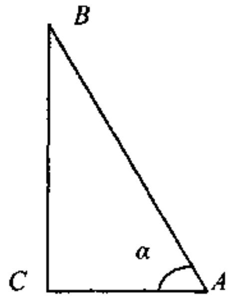


Рис. 4.24

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB}. \qquad (4.2)$$

Із теореми про пропорційні відрізки випливає, що косинус і синус кута прямокутного трикутника не залежать від довжини сторін трикутника. Вони залежать тільки від градусної міри кута.

Наприклад, катет у прямокутному трикутнику, що лежить навпроти кута 30°, завжди дорівнює половині гіпотенузи. Тому, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Існують спеціальні таблиці значень $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$. З рівностей (4.2) випливає, що $AC = AB\cos\alpha$, $BC = AB\sin\alpha$.

Тоді, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$.

Рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ називається ***основною тригонометричною тотожністю.***

Косинус і синус кута α можна визначити і для кута $\alpha \geq 90°$. Будемо вважати за означенням, що

1) якщо $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$;

2) якщо $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$, $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.

Наприклад,

$$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\sqrt{1 - \sin^2 30°} =$$

$$= -\sqrt{1 - (0,5)^2} = -\sqrt{1 - 0,25} = -\sqrt{0,75} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4.15. (Синусів). *У будь-якому трикутнику ABC відношення сторони до синуса протилежного кута є величина постійна і дорівнює діаметру описаного кола:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \qquad (4.3)$$

Доведення. Візьмемо одну з вершин трикутника ABC, наприклад A. Опишемо коло навколо даного трикутника (рис. 4.25, *а, б, в*) залежно від величини кута α). Нехай R – його радіус. Якщо $\alpha \neq 90°$, то через одну з інших вершин, наприклад через B, проведемо діаметр BA_1 описаного кола. Трикутник A_1BC прямокутний, оскільки описаний кут A_1CB спирається на діаметр. Із цього трикутника знайдемо $a = 2R\sin\alpha_1$.

Якщо α – гострий кут, то $\alpha = \alpha_1$, оскільки вписані кути A і A_1 спираються на одну й ту саму дугу (рис. 4.25, *а*). Отже, $\sin\alpha_1 = \sin\alpha$.

Якщо α – тупий кут, то з теореми про вписаний кут випливає, що $\alpha + \alpha_1 = 180°$, або $\alpha_1 = 180° - \alpha$ (рис. 4.25, *б*). Звідси $\sin\alpha_1 = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. В обох випадках

$$a = 2R\sin\alpha. \qquad (4.4)$$

Якщо α – прямий кут, то $a = 2R$ (рис. 4.25, *в*), $\sin 90° = 1$ і рівність (4.3) також виконується.

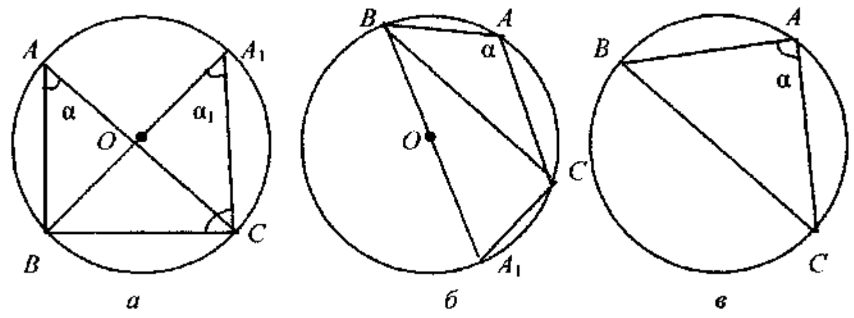


Рис. 4.25

Аналогічні рівняння знайдемо і для кутів β і γ. Отже, $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$. Тому

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Навпроти більшого кута в трикутнику лежить більша сторона і, навпаки, проти більшої сторони лежить більший кут.*

Довести самостійно.

Для наступної задачі подамо ще одне розв'язання (див. п.4.2).

Задача 17. Довести, що бісектриса кута трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай ABC – даний трикутник і BH – його бісектриса (рис. 4.26). Доведемо, що $\frac{AH}{AB}=\frac{HC}{BC}$ або $\frac{AH}{HC}=\frac{AB}{BC}$. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABH і CBH:

$$\frac{AH}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha};\ \frac{CH}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Якщо перше рівняння поділити на друге, то дістанемо $\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{BC}$, що й потрібно було довести.

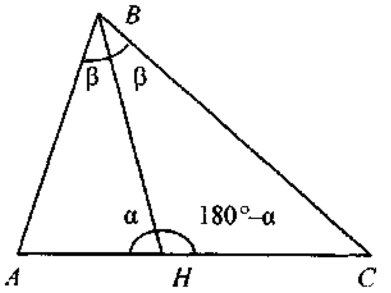


Рис. 4.26

Теорема 4.16. (Косинусів). *Квадрат сторони будь-якого трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:* $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Д о в е д е н н я . Розглянемо три можливі випадки.

1. γ – гострий кут (рис. 4.27, *а*). Проведемо в ΔABC висоту $BH=h$. Позначимо $HC=l$. Тоді $AH=b-l$. Застосуємо теорему Піфагора до трикутників ABH і BHC: $c^2=h^2+(b^2-l^2)$; $a^2=h^2+l^2$.

Звідси $c^2=a^2-l^2+b^2-2bl+l^2=a^2+b^2-2bl$.

Оскільки $l=a\cos\gamma$, то $c^2=b^2-2ab\cos\gamma$.

2. γ – тупий кут (рис. 4.27, *б*). Позначимо через l відрізок CH. Тоді $AH=b+l$. Із прямокутних трикутників ABH і CBH за теоремою Піфагора дістанемо:

$$c^2=h^2+(b+l)^2,\ a^2=h^2+l^2.$$

Звідси $c^2=a^2-l^2+b^2+2bl+l^2=a^2+b^2+2bl$.

Оскільки $l=a\cos(180°-\gamma)=-a\cos\gamma$, то

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

3. $\gamma=90°$ (рис. 4.27, *в*). У цьому випадку $\cos\gamma=\cos 90°=0$.

За теоремою Піфагора $c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Теорему доведено.

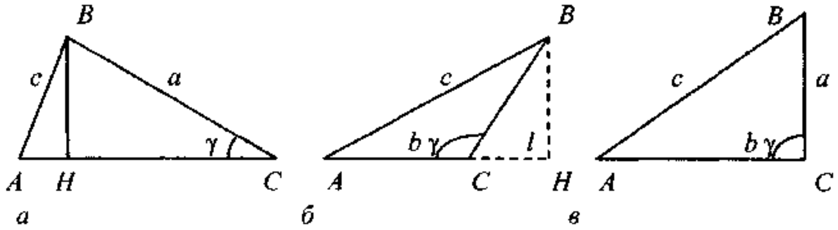


Рис. 4.27

Задача 18. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Д о в е д е н н я . Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. рис. 3.2). Застосуємо теорему косинусів до трикутників ABD і ABC: $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A$; $AC^2=AB^2+DC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$. Оскільки $AB=CD$, $\angle B=180°-\angle A$ і тому $\cos\angle B=-\cos\angle A$, то, додавши ці рівності, отримаємо: $BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+AB^2+BC^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$, що й потрібно було довести.

Задача 19. Доведіть, що квадрат медіани, проведеної до однієї із сторін трикутника, дорівнює різниці між півсумою квадратів двох інших сторін і квадратом половини сторони, до якої медіану проведено.

Довести самостійно.

Вказівка. Доповнити трикутник до паралелограма і викорис-тати попередню задачу.

Задача 20. Довести, що квадрат бісектриси кута при одній із вершин трикутника дорівнює різниці між добутком двох сторін цього кута і добутком відрізків, на які бісектриса поділяє протилежну сторону.

Довести самостійно.

Вказівка. За теоремою косинусів знайти косинуси кутів ABH і CBH (рис. 4.26). Прирівняти їх і зі здобутої рівності знайти квадрат бісектриси.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Точка C поділяє відрізок AB у відношенні $AC:CB=2:3$. Знайдіть відношення $AB:CB$ і $AC:AB$.

2. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і N. При цьому $AM:MB=CN:NB$, $AM=5$ см, $MB=3$ см, а $BC=10$ см. Знайдіть BN.

3. У трапеції $ABCD$ продовження бічних сторін AB і CD перетинаються в точці M. Знайдіть: а) сторону AB, якщо $BM=4$ см, $CD=3$ см і $MC:CD=2:3$; б) сторону BC, якщо $AB=3$ см, $BM=4$ см і $AD=7$ см.

4. Сторони трикутника дорівнюють 5; 3,2; 4 м. Периметр подібного трикутника дорівнює 61 м. Знайдіть сторони подібного трикутника.

5. Сторони трикутника дорівнюють 6, 8 і 12 см. Середня сторона подібного трикутника дорівнює 20 м. Знайдіть решту сторін другого трикутника.

6. Визначте, чи подібні трикутники, якщо їхні сторони дорівнюють: а) 2, 3 і 4 м; 15, 22 і 30 м; б) 3, 6 і 4 м; 9, 18 і 12 м.

7. Доведіть, що два прямокутних трикутники подібні, якщо гіпотенуза і катет одного трикутника пропорційні до гіпотенузи та катета другого трикутника.

8. Доведіть, що перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, є середнє пропорційне між відрізками, на які основа перпендикуляра поділяє діаметр.

9. Висота, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу, поділяє її на відрізки довжиною 3 і 5 см. Знайдіть катети.

10. Діагоналі ромба дорівнюють 32 і 24 см. Знайдіть сторону ромба.

11. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 208 м, сума катетів на 30 м більша, ніж гіпотенуза. Знайдіть сторони трикутника.

12. Дві хорди кола мають спільний кінець і утворюють між собою кут 30°. Відстань між іншими кінцями хорд дорівнює 30 см. Знайдіть радіус кола.

13. Хорда перпендикулярна до діаметра кола і поділяє його у відношенні 1:9. Знайдіть радіус кола, якщо довжина хорди дорівнює 36 см.

14. Відстані кінців діаметра від дотичної 30 і 60 см. Знайдіть довжину діаметра.

15. Де міститься центр описаного кола тупокутного (прямокутного) трикутника? Знайдіть центр за допомогою побудови.

16. Чи може центр вписаного кола міститися поза трикутником (на стороні трикутника)?

17. Доведіть, що коли центри вписаного і описаного кіл трикутника збігаються, то цей трикутник правильний.

18. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, кути якого відносяться як числа: а) 1/2: 3: 4,3; б) 5: 4: 6: 7?

19. Доведіть, що: 1) будь-яка трапеція, вписана в коло, рівнобедрена; 2) будь-який паралелограм, вписаний у коло, – прямокутник; 3) будь-який ромб, вписаний у коло, – квадрат.

20. Навколо трапеції описане коло. Периметр трапеції дорівнює 30 см, а середня лінія дорівнює 9 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.

21. Периметр описаної трапеції дорівнює 12 см. Знайдіть її середню лінію.

22. Знайдіть невідомі сторони і кути ΔABC, якщо:
а) $a=19$, $b=34$, $c=49$; б) $a=20$, $b=31$, $\angle C=49$; в) $a=14$, $b=36$, $\angle A=15°$, $\angle B=50°$.

23. Хорда перпендикулярна до діаметра. Відстані від одного кінця хорди до кінців діаметра дорівнюють 12 і 16 см. Знайдіть довжину хорди.

РОЗДІЛ 5 ПЛОЩА МНОГОКУТНИКІВ І КРУГА. ДОВЖИНА КОЛА

5.1. Поняття площі. Площа многокутника

Під ***площею многокутника*** розуміють додатне число, яке характеризує розмір частини площини, яка розміщена всередині многокутника (рис. 5.1).

Площу позначають буквою S, площу фігури F позначають $S(F)$ або S_F.

Будемо вважати, що площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці виміру, дорівнює одиниці. Це одиниця виміру площі.

Одиницею виміру площі в СІ є 1 м^2 (квадратний метр). Це площа квадрата зі стороною 1 м (рис. 5.2). Використовуються і інші одиниці: см^2 (квадратний сантиметр), мм^2 (квадратний міліметр) і км^2 (квадратний кілометр):

1 см^2=10^{-4}м^2; 1 мм^2=10^{-6}м^2; 1км^2=10^6м^2.

Для многокутників, а також для більш складних фігур (наприклад, круга) справджуються спільні властивості площ:

1) рівні фігури мають рівні площі;

2) площа всієї фігури дорівнює сумі площ її частин (рис. 5.3).

Фігури, які мають рівні площі, називаються ***рівновеликими***.

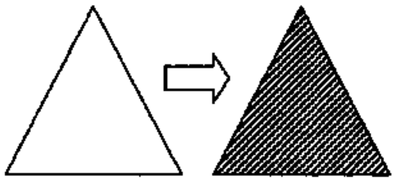
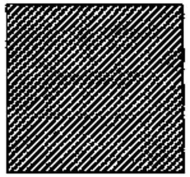
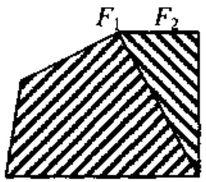


Рис. 5.1



S=1м^2

Рис. 5.2



$S_F = S_{F1} + S_{F2}$ F

Рис. 5.3

Для скорочення будемо говорити «сторона» замість «довжина сторони», «висота» – замість «довжина висоти».

Теорема 5.1. *Площа прямокутника дорівнює добутку його суміжних сторін* (рис. 5.4).

Доведення. Нехай a, b – суміжні сторони прямокутника;

1) a і b – раціональні числа, тобто $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$, де m, n, p, q – натуральні числа. Зведемо ці дроби до спільного знаменника: $a=\frac{mq}{nq}$, $b=\frac{pn}{qn}$. Нехай $\frac{1}{nq}$ попередньої одиниці довжини дорівнює новій одиниці довжини. Тоді сторони прямокутника будуть дорівнювати mq і pn. Розіб'ємо їх на mq і pn частин, що дорівнюють новій одиниці довжини. Через точки проведемо прямі, перпендикулярні до цих сторін (рис. 5.5). При цьому прямокутник розіб'ється на $mq \cdot pn$ малих квадратів зі сторонами, що дорівнюють новій одиниці довжини.

Рис. 5.4

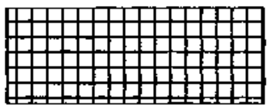


Рис. 5.5

Із властивості площі випливає, що площа даного квадрата дорівнює $S=mq \cdot pn$ нових квадратних одиниць. Попередня одиниця більша, ніж нова в $(nq)^2$ разів. Отже, у попередніх квадратних одиницях

$$S=\frac{mq \cdot pn}{(nq)^2}=\frac{mq \cdot pn}{nq \cdot nq}=\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}=a \cdot b .$$

2) Нехай a і b – будь-які дійсні числа. Позначимо через a_1 і a_2 (b_1 і b_2) наближені значення числа a (числа b) з недостачею і з надлишком з точністю до $\frac{1}{10^n}$. Тоді $a_1 \le a \le a_2$, $b_1 \le b \le b_2$, де a_1, a_2, b_1, b_2 – раціональні числа. Нехай T –даний прямокутник, а P_n і Q_n прямокутники зі сторонами відповідно a_1, b_1, a_2 і b_2. Тоді P_n можна помістити в T, а T – в Q_n: тобто $P_n \le T \le Q_n$. За доведеним площі прямокутників P_n і Q_n дорівнюють a_1b_1 і a_2b_2. За властивістю площі $a_1b_1=S(P_n) \le S \le S(Q_n)=a_2b_2$, де S – площа даного прямокутника, звідси і з правил множення дійсних чисел випливає, що $S=ab$. Що й потрібно було довести.

5.2. Площа паралелограма, трикутника, трапеції

Одну зі сторін паралелограма будемо називати ***основою***. Перпендикуляр, проведений до прямої, що містить основу з будь-якої точки протилежної сторони, називається ***висотою***. На рис. 5.6 AD – основа, BK – висота паралелограма $ABCD$.

Теорема 5.2. *Площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.*

Доведення. Нехай $ABCD$ – паралелограм, BK і CL – його висоти (рис. 5.6). Тоді прямокутні трикутники ABK і DCL рівні. Отже, рівні їхні площі: $S_{ABK}=S_{DCL}$. За властивістю площ $S_{ABCL}=S_{ABK}+S_{KBCL}$ і $S_{ABCL}=S_{ABCD}+S_{DCL}$. Звідси $S_{ABCD}=S_{KBCL}=ah$. Теорему доведено.

Наслідок. *Площа паралелограма дорівнює добутку його суміжних сторін на синус кута між ними.*

Площа трикутника. Одну зі сторін будемо називати ***основою***. ***Висотою*** називається перпендикуляр, проведений до прямої, що містить основу, з протилежної вершини. На рис. 5.7 BC – основа, AK – висота ΔABC.

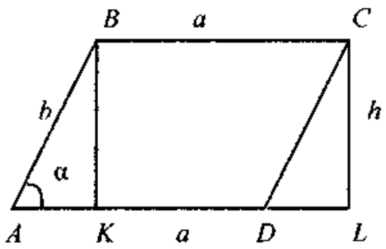
Теорема 5.3. *Площа трикутника дорівнює половині добутку його основи на висоту* (рис. 5.7).

Доведення. Проведемо прямі AD і BD, паралельні сторонам CB і CA трикутника ABC. Чотирикутник $ADBC$ – паралелограм, причому $\Delta ABC=\Delta BDA$. Отже, $S_{ABC}=S_{BDA}$.

Звідси $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{BDA}=2S_{ABC}=ah$ і $S_{ABC}=\frac{ah}{2}$.

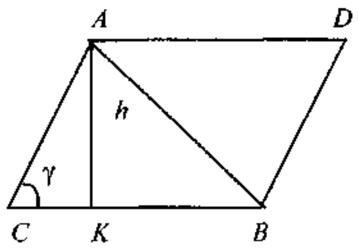
Теорему доведено.

Наслідок 1. *Площа трикутника дорівнює половині добутку двох сторін на синус кута між ними.*



$S_{ABCD}=ah$

Рис. 5.6



$S_{ABC}=ah/2$

Рис. 5.7

Доведення. Нехай $\angle ACB=\gamma$. Тоді з прямокутного трикутника ACK (рис. 5.7) дістаємо, що $h=b\sin\gamma$. Тому

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma. \qquad (5.1)$$

Наслідок 2. *Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів.*

Наслідок 3. *Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.*

Задача 1. Довести, що площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола: $S=pr$, де $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, a, b, c – сторони трикутника.

Розв'язання. Нехай O – центр кола, вписаного в трикутник ABC, r – його радіус (рис. 5.8). Сполучимо вершини A, B, C із центром O. У трикутниках ABO, BCO і ACO висоти OK, OL і OM дорівнюють r.

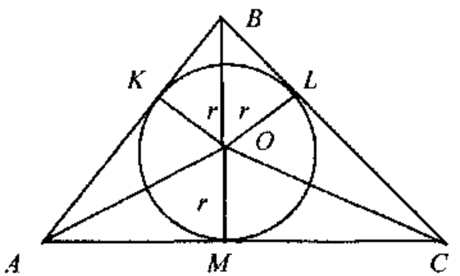


Рис. 5.8

За властивістю площ

$$S_{ABC}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{ACO}=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr.$$

Задача 2. Довести, що площа трикутника $S=\frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

Вказівка. Використати формулу (5.1) і теорему синусів.

Задача 3. Довести, що площа трикутника

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p=\frac{a+b+c}{2}$ – половина периметра трикутника (формула Герона).

Вказівка. Виразити за допомогою теореми косинусів $\cos\gamma$ через сторони трикутника; $\sin\gamma$ знайти за формулою (5.1). Підставити здобуті вирази в тотожність: $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$.

Знайти з отриманої рівності S, перетворивши праву частину до вигляду $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Задача 4. Довести, що площа трикутника

$$S=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha},$$

де a – сторона трикутника, β і γ прилеглі до неї кути, а α – протилежний.

Вказівка. Застосувати теорему синусів до формули (5.1).

Площа трапеції. ***Висотою*** трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї з основ до прямої, що містить другу основу. На рис. 5.9 CK – висота трапеції.

Теорема 5.4. *Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.*

Доведення. Нехай $a=AD$, $b=BC$ – основи трапеції $ABCD$, $h=CK$ – її висота (рис. 5.9). Проведемо діагональ AC. Для трикутника ACD a і h є основою і висотою. Для трикутника ABC b і h є основою і висотою. Тому

$$S_{ACD}=\frac{ah}{2},\ S_{ABC}=\frac{bh}{2},\ S_{ABCD}=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{a+b}{2}h.$$

Теорему доведено. Отже, $S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}h$

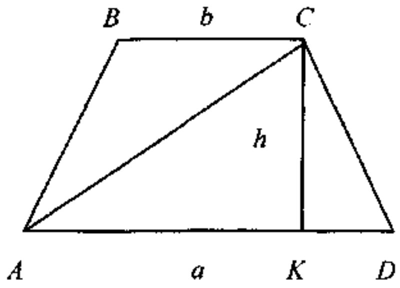


Рис. 5.9

Задача 5. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють a. Один із кутів трапеції дорівнює 45°. Знайти її площу.

Р о з в ' я з а н н я . Нехай $ABCD$ – задана трапеція. Тоді $AB=BC=a$, $\angle ADC$ = 45° (рис. 5.10). Із вершини C опустимо перпендикуляр на сторону AD. У трикутнику KCD $\angle CDK = \angle KCD = 45°$, $\angle CKD=90°$. Тому $CK=KD=a$. Тоді $AD=AK+KD=BC+KD=2a$. Площу трапеції визначимо за формулою $S = \frac{AD+BC}{2} CK = \frac{2a+a}{2} a = \frac{3a^2}{2}$.

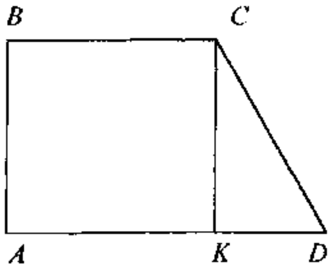


Рис. 5.10

5.3. Опуклі многокутники

Розглянемо довільний опуклий многокутник.

Теорема 5.5. *Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює* $180 \cdot (n-2)$. *Сума його зовнішніх кутів дорівнює* 360°.

Д о в е д е н н я . Візьмемо будь-яку точку O всередині даного n-кутника (рис. 5.11). Сполучимо цю точку з усіма вершинами n-кутника. Дістанемо n трикутників ABO, BCO і т. д. Сума кутів кожного трикутника дорівнює 180°.

Сума кутів при вершині O дорівнює 360°. Тому сума внутрішніх кутів многокутника дорівнює – $n180° - 360° = 180°(n-2)$.

Кожний зовнішній кут многокутника є суміжним з внутрішнім кутом. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то сума зовнішніх кутів дорівнює – $n180° - (n-2)180° = 180°(n-n+2) = 360°$.

Теорему доведено.

Означення. *Многокутники, в яких сторони пропорційні, а кути між відповідними сторонами рівні, називаються* ***подібними.***

Відношення відповідних сторін називають ***коефіцієнтом подібності.***

На рис. 5.12 зображено два подібних чотирикутники з коефіцієнтом подібності k=0,5.

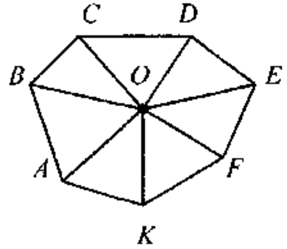


Рис. 5.11

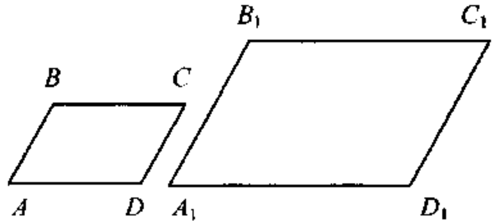


Рис. 5.12

Теорема 5.6. *У подібних многокутників: а) периметри відносяться як відповідні сторони; б) площі відносяться як квадрати їх відповідних сторін.*

Д о в е д е н н я . Обмежимось випадком n=5. Нехай $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ – подібні многокутники (рис. 5.13).

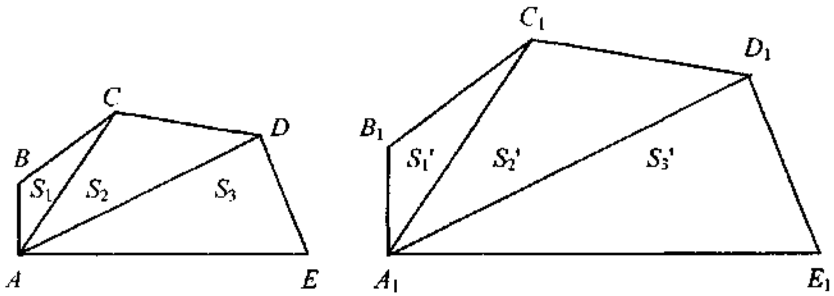


Рис. 5.13

а) Якщо $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\ldots=\frac{EA}{E_1A_1}=k$, то $AB=k\cdot A_1B_1$, …, $EA=k\cdot E_1A_1$. Тому

$$\frac{AB+BC+\ldots+EA}{A_1B_1+B_1C_1+\ldots+E_1A_1}=\frac{kA_1B_1+kB_1C_1+\ldots+kE_1A_1}{A_1B_1+B_1C_1+\ldots+E_1A_1}=k.$$

б) Проведемо діагоналі з вершин A і A_1 (рис. 5.13). Многокутники будуть розкладені на трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, ACD і $A_1C_1D_1$ і т. д. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Маємо $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, $\angle B=\angle B_1$. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Звідси випливає, що многокутники $ACDE$ і $A_1C_1D_1E_1$ подібні. Тому подібні і трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ і т. д.

Маємо: $$\frac{S_1'}{S_1'}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle B}{\frac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1C_1\sin\angle B_1}=\frac{kA_1B_1\cdot kB_1C_1}{A_1B_1\cdot B_1C_1}=k^2.$$

Аналогічно $S_2:S_2'=k^2$, $S_3:S_3'=k^2$. Тому

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=\frac{k^2S_1'+k^2S_2'+k^2S_3'}{S_1'+S_2'+S_3'}=$$
$$=\frac{k^2\left(S_1'+S_2'+S_3'\right)}{S_1'+S_2'+S_3'}=k^2$$

Теорему доведено.

5.4. Правильні многокутники

Означення. *Плоский многокутник називається* ***правильним****, якщо в нього всі сторони рівні і всі кути рівні.*

Теорема 5.7. *Якщо опуклий многокутник правильний, то*

1) *в нього можна вписати коло;*
2) *навколо нього можна описати коло;*
3) *центри вписаного і описаного кіл збігаються.*

Вказівка. Розглянути рівнобедрений трикутник AOB (рис. 5.14), де O – точка перетину бісектрис двох сусідніх внутрішніх кутів многокутника ABC. Виразити OA (та OK) через AB і косинус (тангенс) кута OAB.

Задача 6. Довести, що якщо a_n – сторона правильного n-кутника, а R – радіус описаного навколо цього n-кутника кола, то

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Нехай AB – сторона правильного n-кутника, O – центр описаного кола і $OK\perp AB$ (рис. 5.15). Тоді

$$\angle AOK=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}.$$

З прямокутного трикутника AOK: $AK=AO\sin\angle AOK=R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Оскільки трикутники AOK і BOK рівні ($AO=OB$, OK – спільна сторона і $\angle AOK=\angle OKB$), то $AK=KB$.

Тому $a_n=AB=2AK=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Задача 7. Довести, що коли a_n – сторона правильного n-кутника, а r – радіус вписаного в цей n-кутник кола, то $a_n=2r\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Вказівка. Використати рис. 5.16, де $OK=r$, а $\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}$.

Теорема 5.8. *Площа правильного n-кутника дорівнює* $S_n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}$, *де R – радіус описаного кола, або* $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r$, *де* P_n *– периметр n-кутника, а r – радіус вписаного кола.*

Довести самостійно.

Вказівка. Використати формулу, що виражає сторону правильного многокутника через радіус описаного кола.

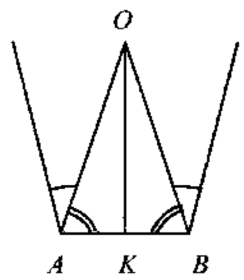


Рис. 5.14

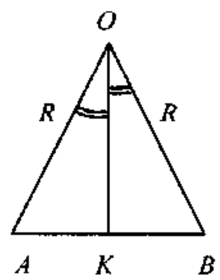


Рис. 5.15

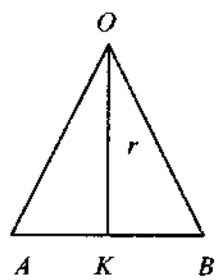


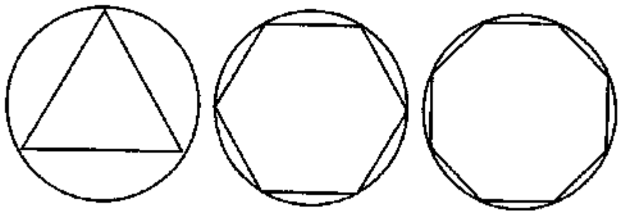
Рис. 5.16

Задача 8. Знайти площу правильного трикутника, вписаного в коло одиничного радіуса.

Розв'язати самостійно.

5.5. Довжина кола

Вписані або описані правильні n-кутники при збільшенні n за формою наближаються до кола (рис. 5.17). Можна сказати, що правильний вписаний n-кутник при дуже великому n мало відрізняється від кола. Тоді периметр правильного вписаного n-кутника при достатньо великому n як завгодно мало відрізняється від довжини кола.



n=3 n=6 n=8

Рис. 5.17

Кажуть, що при збільшенні n периметр наближається до довжини кола, або що границя послідовності периметрів правильних вписаних многокутників дорівнює довжині кола. Тому можна дати таке означення.

Означення. ***Довжиною кола*** *називається границя послідовності периметрів правильних многокутників, вписаних у дане коло, при необмеженому збільшенні кількості сторін.*

Теорема 5.9. *Відношення довжини кола до його діаметра є постійна величина, що не залежить від діаметра.*

Доведення. Нехай R_1 і R_2 – радіуси двох кіл, а C_1 і C_2 – їхні довжини. Впишемо в ці кола правильні n-кутники з достатньо великою кількістю сторін n. Периметри P_1 і P_2 цих многокутників дорівнюють:

$$P_1 = 2R_1 \sin\frac{180°}{n} n\,,\ P_2 = 2R_2 \sin\frac{180°}{n} n\,.$$

Тому

$$P_1{:}2R_1 = P_2{:}2R_2. \qquad (5.2)$$

Якщо n – достатньо велике, то периметри P_1 і P_2 будуть як завгодно мало відрізнятися від довжин кіл C_1 і C_2. Отже, рівність (5.2) зберігається при заміні P_1 на C_1, а P_2 на C_2: $C_1{:}2R_1 = C_2{:}2R_2$.

Теорему доведено.

Відношення довжини кола до діаметра позначається грецькою буквою π : $C{:}2R=\pi$ або $C=2\pi R$.

Довжина кола C обчислюється за формулою

$$C=2\pi R, \qquad (5.3)$$

де $2R$ – діаметр кола; число π – ірраціональне.

Наближене значення $\pi \approx 3{,}1416$.

Задача 9. Знайти радіус кола, якщо довжина його дорівнює 9,42 м, а π =3,14.

Розв'язання. З формули (5.3) для обчислення довжини кола можна визначити його радіус: $R=C{:}2\pi$. Підставивши в останню формулу відповідні значення, дістанемо $R=\dfrac{9{,}42}{2\times 3{,}14}=\dfrac{3}{2}$ м.

Задача 10. На скільки зміниться довжина кола, якщо радіус зміниться на 1 м?

Розв'язати самостійно.

Відповідь. Зміниться на 2π м.

Задача 11. Радіус кола дорівнює R. Знайти довжину дуги кола, що відповідає центральному куту величиною $\alpha°$.

Розв'язання. Розгорнутому куту відповідає півколо. Його довжина дорівнює πR. Отже, куту в один градус відповідає дуга довжиною $\dfrac{\pi R}{180°}$, а куту величиною $\alpha°$ – дуга довжиною $l=\dfrac{\pi R}{180°}\alpha$.

5.6. Площа круга

З наочних міркувань можна вважати, що площа круга як завгодно мало відрізняється від площі вписаного у відповідне коло правильного многокутника з достатньо великою кількістю сторін (рис. 5.18). Тому можна дати таке означення площі круга.

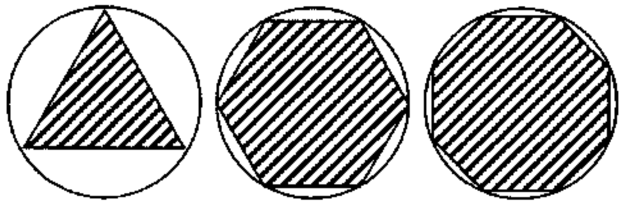


Рис. 5.18

Означення. ***Площею круга*** *називається границя послідовності площ правильних многокутників, вписаних в дане коло, при необмеженому збільшенні кількості сторін.*

Нехай R – радіус круга, C – довжина його кола. Впишемо в коло правильний n-кутник з достатньо великою кількістю сторін n. Площа цього многокутника дорівнює

$$S_n = n\frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}Pnr,$$

де $AB=a_n$ – сторона многокутника; P_n – його периметр; r – радіус вписаного кола (рис. 5.19).

При достатньо великому n периметр P_n як завгодно мало буде відрізнятися від довжини кола C, а радіус r вписаного кола – від радіуса R описаного кола. Кажуть, що при зростанні n периметр P_n прямує до числа C, а площа S_n – до площі круга S. Тому

$$S = \frac{1}{2}CR = \frac{1}{2}2\pi R\,R = \pi R^2.$$

Таким чином, площа круга обчислюється за формулою $S=\pi R^2$, де R – радіус круга.

Круговим сектором називається частина круга, обмежена дугою і двома радіусами, що сполучають центр круга з кінцями дуги (рис. 5.20).

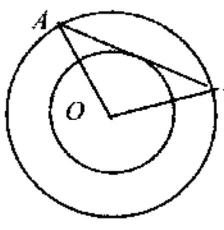


Рис. 5.19

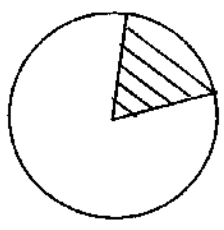


Рис. 5.20

Задача 12. Радіус кола дорівнює R. Знайти площу сектора, обмеженого дугою α°.

Розв'язання. Площа сектора, обмеженого дугою величини 1°, дорівнює $\frac{1}{360}$ площі круга. Отже, площа сектора, що має дугу величиною n°, дорівнює $S_{сек} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$.

Радіанна міра кута. Нагадаємо, що ***центральним кутом*** називається кут між двома радіусами кола.

Означення. ***Радіанною мірою кута*** *називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола.*

Оскільки довжина півкола дорівнює πR, то радіанна міра кута 180° дорівнює π. Тому градусну міру кута α радіан обчислюють за формулою $n = \frac{\alpha 180^\circ}{\pi}$, а радіанну міру кута величиною n° – за формулою $\alpha = \frac{n^\circ \pi}{180^\circ}$. Звідси легко дістати формули для знаходження довжини дуги кола $l=\alpha R$, що має радіанну міру α, або площі сектора $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$, обмеженого такою дугою.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть площу квадрата за його діагоналлю.

2. У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша, ніж площа квадрата, вписаного в це коло.

3. Чому дорівнюють сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 4:9, а його площа $144 м^2$?

4. Квадрат і ромб мають однакові периметри. Яка з фігур має більшу площу? Відповідь поясніть.

5. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 12 см, а менша діагональ 13 см.

6. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ поділяють його сторону BC на 3 частини по 12 см. Знайдіть площу прямокутника.

7. Діагональ паралелограма дорівнює a і утворює зі сторонами кути, що дорівнюють 30° і 45°. Знайдіть площу паралелограма.

8. Чому дорівнює площа рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 12 м, а бічна сторона 10 м?

9. У трикутнику зі сторонами 8 і 4 см проведено висоти до цих сторін. Висота, проведена до сторони 8 см, дорівнює 3 см. Чому дорівнює висота, проведена до сторони 4 см?

10. Знайдіть площу трикутника за трьома сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 17, 65, 80.

11. Який вигляд повинен мати трикутник зі сторонами a і b, щоб його площа була найбільшою? Знайдіть площу такого трикутника.

12. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції, основи якої дорівнюють 5 і 7 см, а один з кутів при основі дорівнює 45°.

13. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 3 см. Обчисліть довжину кола: 1) вписаного в цей трикутник; 2) описаного навколо нього.

14. Сторона квадрата дорівнює 4 см. Обчисліть довжину кола: 1) вписаного в цей квадрат; 2) описаного навколо цього квадрата.

15. Доведіть, що площа чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей на синус кута між ними.

16. Дано чотирикутник. Побудуйте трикутник такої самої площі.

17. Дано трикутник. Побудуйте квадрат такої самої площі.

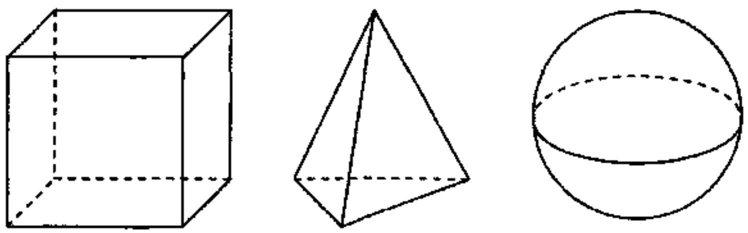
18. Доведіть, що площа трикутника з кутами α, β і γ і радіусом R описаного кола дорівнює $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

19. Доведіть, що площа трикутника з кутами α, β і γ і радіусом r вписаного кола дорівнює $r^2(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2})$.

РОЗДІЛ 6 ПРЯМІ І ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ

6.1. Аксіоми стереометрії і наслідки з них

Стереометрія – частина геометрії, в якій вивчають властивості фігур, що містяться в просторі. Крім плоских фігур, які вивчаються в планіметрії, у стереометрії вивчаються і неплоскі фігури. Фігура називається ***неплоскою*** (просторовою), якщо не всі її точки лежать на одній площині. Прикладом просторової фігури є геометричне тіло – частина простору, обмежена з усіх боків. Геометричне тіло відокремлюється від оточуючого простору поверхнею. Куб (рис. 6.1, *а*), тетраедр (рис. 6.1, *б*), куля (рис. 6.1, *в*) – це геометричні тіла.



а *б* *в*

Рис. 6.1

Основними поняттями в стереометрії є ***точка, пряма*** і ***площина.*** Перші два вже розглядалися в планіметрії. Площини позначають буквами грецького алфавіту $(\alpha,\beta,\gamma,...)$. Запис $P \supset Q$ $(Q \subset P)$ означає, що геометрична фігура P містить фігуру Q.

Властивості площини розкриваються в таких аксіомах.

C_1. *Для будь-якої площини існують точки, що належать цій площині, і точки, що їй не належать.*

C_2. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.*

C_3. *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і тільки одну.*

Розглянемо наслідки з цих аксіом.

Теорема 6.1. *Через пряму a і точку B, що не лежить на ній, можна провести площину і тільки одну.*

Доведення. Нехай A – точка, що належить прямій a (рис. 6.2). Така точка існує за аксіомою AI_1. За аксіомою AI_2 через точки A і B проходить пряма (наприклад, b). Оскільки $B \notin a$, то a і b – різні прямі зі спільною точкою A. За аксіомою C_3 через прямі a і b проходить єдина площина α. Площина α проходить через пряму a і точку B.

Нехай β – ще одна площина, що проходить через a і b. Площини α і β за аксіомою C_2 перетинаються по прямій. Оскільки $a \in \alpha$ і $a \in \beta$, то площини перетинаються по прямій a. Але тоді їхня спільна точка B належить прямій a. З отриманої суперечності випливає, що площина α – єдина, яка проходить через a і A.

Теорема 6.2. *Якщо дві точки A і B прямої a належать площині α, то пряма a належить цій площині.*

Доведення. За аксіомою I_1 існує точка C, що не лежить на прямій a. За теоремою 6.1 через пряму a і точку C можна провести площину. Позначимо її β. Якщо β збігається з α, то $a \in \alpha$ і все доведено. Якщо ж площина β відмінна від α $(\beta \equiv \alpha)$ (рис. 6.3), то β і α перетинаються по прямій d, що містить точки A і B. Оскільки A і B належать прямій a, то за аксіомою I_2 прямі a і d збігаються. Отже, $a \in \alpha$.

Теорема 6.3. *Через будь-які три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і тільки одну* (рис. 6.4).

Доведення. Проведемо прямі AB і AC. Вони різні і перетинаються Через них можна провести площину і тільки одну (аксіома C_3). Площина α містить точки A, B і C.

Якби існувала ще одна площина β, що містить точки A, B і C, то вона містила б і прямі AB і AC (за теоремою 6.2). Але це суперечить аксіомі C_3. Отже, площина α, що проходить через точки A, B, C, єдина.

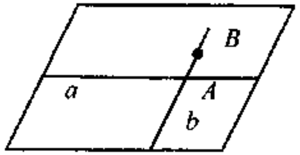


Рис. 6.2

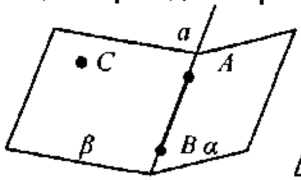


Рис. 6.3

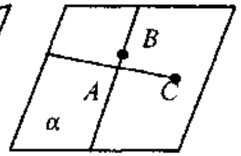


Рис. 6.4

6.2. Паралельність у просторі

Означення. *Дві прямі в просторі називаються* ***паралельними****, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються. Прямі, які не лежать в одній площині, називаються* ***мимобіжними****.*

Теорема 6.4. *Якщо пряма a лежить в площині α, а пряма b перетинає цю площину α в точці $A \notin a$, то прямі a і b мимобіжні* (рис. 6.5).

Доведення. Нехай прямі a і b лежать в одній площині β. Оскільки $b \in \alpha$, то $\beta = \alpha$. Площини α і β мають спільну пряму a і точку A. Отже, вони перетинаються по прямій, і точка A має належати прямій a. З отриманої суперечності випливає, що прямі a і b не лежать в одній площині, тобто є мимобіжними.

Теорему доведено.

Таким чином, для двох різних прямих a і b в просторі можливі три випадки: 1) a і b мають одну спільну точку, у цьому випадку a і b за аксіомою C_3 лежать в одній площині (рис. 6.6); 2) a і b не мають спільних точок, але лежать в одній площині (рис. 6.7); прямі a і b називаються паралельними; це позначається так: $a \parallel b$; 3) a і b не мають спільних точок і не лежать в одній площині (рис. 6.5). Такі прямі називаються мимобіжними. Прямі, які мають дві і більше спільних точок, за аксіомою I_2 збігаються і не є різними.

Теорема 6.5. *Через точку A поза даною прямою a можна провести пряму, паралельну цій прямій, і тільки одну.*

Доведення. Проведемо через пряму a і точку A площину α (рис. 6.7). У площині α через точку A проведемо пряму b, паралельну a. Доведемо єдиність прямої b. Якщо пряма c також проходить через точку A і $c \parallel a$, то через прямі a і c можна провести площину β. Площина β проходить через пряму a і точку A. Звідси за теоремою 6.1 доходимо висновку, що площини β і α збігаються.

Отже, за аксіомою V збігаються прямі b і c, що й потрібно було довести.

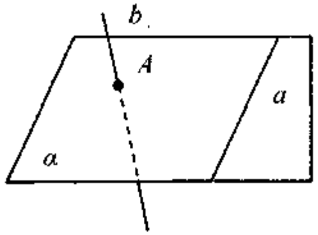


Рис. 6.5

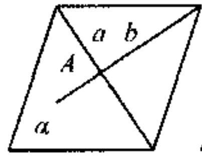


Рис. 6.6

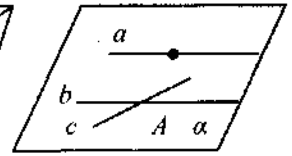


Рис. 6.7

Паралельність прямої і площини. Пряма і площина називаються ***паралельними***, якщо вони не мають спільних точок.

З означення і теореми 6.2 випливає, що для прямої a і будь-якої площини α можливий тільки один із таких трьох випадків: 1) пряма a лежить у площині α (рис. 6.8); 2) пряма a має з площиною α одну спільну точку (рис. 6.9); 3) пряма і площина паралельні (рис. 6.10).

Паралельність прямої a і площини α позначається так: $a \parallel \alpha$.

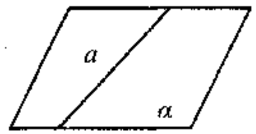


Рис. 6.8

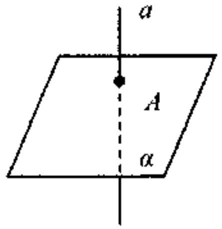


Рис. 6.9

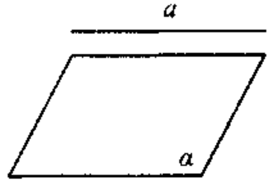


Рис. 6.10

Теорема 6.6. *Якщо пряма b, що не належить площині α, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині α.*

Доведення. Проведемо площину β через прямі a і b (рис. 6.11). Припустимо, що b перетинається з площиною α в точці C. Оскільки $C \in b$, $b \in \beta$, то C належить лінії перетину a площин α і β. Таким чином, C – точка перетину прямих a і b. Це неможливо, оскільки $a \parallel b$. З отриманої суперечності випливає, що $b \parallel \alpha$.

Теорему доведено.

Теорема 6.7. *Якщо площина β проходить через пряму a, паралельну площині α, і перетинає α, то лінія їх перетину b паралельна a.*

Доведення. Припустимо, що $b \not\parallel a$. Тоді прямі b і a мають спільну точку C (рис. 6.12). Оскільки $C \in b$, $b \in \alpha$, то $C \in \alpha$. Це суперечить тому, що $C \in a$, $a \parallel \alpha$. Отже, $b \parallel \alpha$. Теорему доведено.

Теорема 6.8. *Пряма a, паралельна кожній з двох площин α і β, що перетинаються, паралельна їхній лінії перетину b* (рис. 6.13).

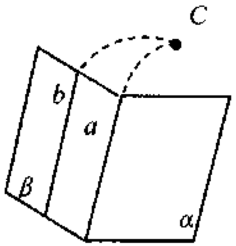


Рис. 6.11

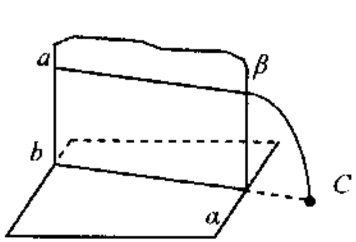


Рис. 6.12

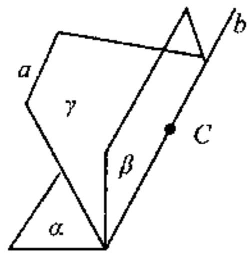


Рис. 6.13

Доведення. Якщо $a \in \alpha$ і $a \in \beta$, то твердження теореми випливає з теореми 6.7. Нехай $a \notin \alpha$, $a \notin \beta$ і C – точка прямої b. Проведемо площину γ через пряму a і точку C. За теоремою 6.7 лінія перетину l_1 площин γ і α (і лінія перетину l_2 площин γ і β) паралельна прямій a. Оскільки ці прямі l_1 і l_2 проходять через точку C, то згідно з теоремою 6.5 ці прямі збігаються з лінією перетину b площин α і β. Отже, $a \parallel b$. Теорему доведено.

Задача 1. Довести, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

Розв'язання. Візьмемо на прямій a точку A (рис. 6.14) і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. За теоремою 6.5 α – шукана площина.

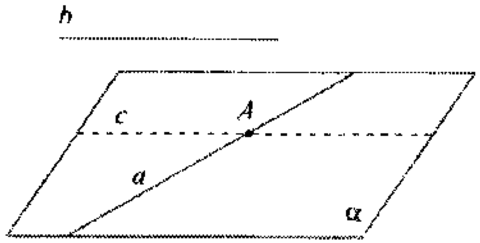


Рис. 6.14

Задача 2. Довести, що a і b паралельні між собою, якщо прямі a і b паралельні третій прямій c.

Вказівка. Взяти точку (наприклад, A) на прямій a і провести площини: α – через A і пряму b і β – 0 через A і пряму c. Показати за допомогою теореми 6.7, що лінія перетину площин α і β збігається з прямою a і паралельна b.

Паралельні площини. Дві площини називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

Таким чином, дві площини в просторі згідно з аксіомою C_2 і теоремою 6.1 або перетинаються (рис. 6.15), або паралельні (рис. 6.16).

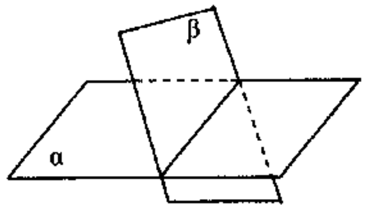


Рис. 6.15

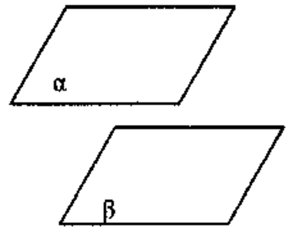


Рис. 6.16

Паралельність площин α і β позначається так: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 6.9. (Ознака паралельності площин). *Якщо площина α паралельна двом прямим a і b, що перетинаються і лежать у площині β, то ці площини паралельні* (рис. 6.17).

Доведення. Припустимо, що α і β перетинаються. За аксіомою C_2 їх перетином буде пряма, наприклад, l. Оскільки площина α проходить через пряму a (пряму b), паралельну площині β, то за теоремою 6.7 l паралельна прямій a (прямій b). Тоді прямі a і b паралельні. Суперечність. Тому $\alpha \parallel \beta$. Теорему доведено.

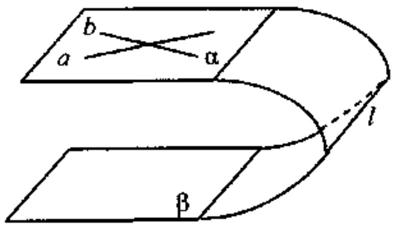


Рис. 6.17

Теорема 6.10. *Якщо дві паралельні площини перетнуті третьою площиною, то лінії перетину паралельні.*

Довести самостійно.

Задача 3. Довести, що паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

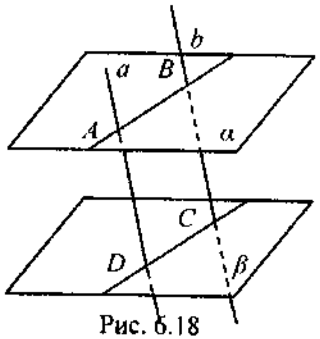


Рис. 6.18

Р о з в ' я з а н н я. Нехай A, B, C і D – точки перетину паралельних прямих a і b з паралельними площинами α і β (рис. 6.18). Проведемо площину γ через прямі a і b. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих AB і CD. Тому фігура $ABCD$ – паралелограм і $AD=BC$.

Задача 4. Через дану точку провести площину, паралельну: 1) даній прямій; 2) даній площині. Розв'язати самостійно.

6.3. Перпендикулярність у просторі

Кут між прямими. Якщо дві прямі перетинаються, то вони утворюють чотири кути. Кутова міра меншого з них називається ***кутом між прямими, що перетинаються***. Кут між прямими a і b позначається так: $\angle(a,b)$. Наприклад, $\angle(a,b)=\angle AOB$ (рис. 6.19).

Теорема 6.11. *Кути з відповідно паралельними і однаково напрямленими сторонами рівні.*

Довести самостійно (рис. 6.20).

Уведемо поняття кута між мимобіжними прямими. Нехай a і b – мимобіжні прямі (рис. 6.21). Через будь-яку точку O простору проведемо прямі c і d, паралельні a і b. Кут γ між побудованими прямими c і d, що перетинаються, називається кутом між мимобіжними прямими a і b (рис. 6.21): $\angle(a,b)=\angle(c,d)$.

Згідно з теоремою 6.11 цей кут не залежить від вибору точки O. Менший кут між мимобіжними прямими (як і між прямими, що перетинаються) має градусну міру, що не перевищує 90°. Кут між паралельними прямими дорівнює нулю.

Дві прямі називаються ***перпендикулярними***, якщо кут між ними дорівнює 90°.

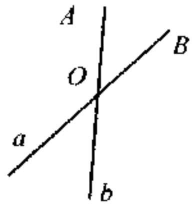


Рис. 6.19

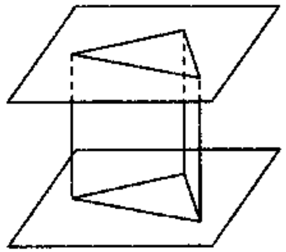


Рис. 6.20

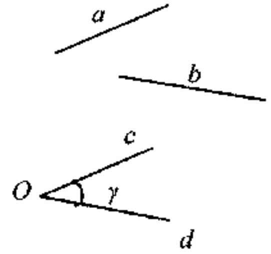


Рис. 6.21

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються (наприклад, AB і AD, рис. 6.22), так і мимобіжні прямі (наприклад, AD і A_1B_1).

Перпендикуляр і похила до площини. Пряма, що перетинає площину, називається ***перпендикулярною*** до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, проведеної на цій площині.

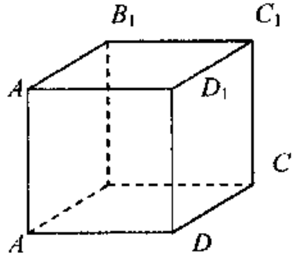


Рис. 6.22

На рис. 6.23 пряма a перпендикулярна до площини α. Це позначається так: $a\perp\alpha$.

Теорема 6.12. (Ознака перпендикулярності прямої і площини). *Якщо пряма a, що перетинає площину α в точці A, перпендикулярна до двох прямих b і c в цій площині, що проходять через точку A, то вона перпендикулярна до площини* α (рис. 6.24).

Д о в е д е н н я. Нехай d – будь-яка пряма площини α. Потрібно довести, що $a\perp d$. Згідно з теоремою 6.11. можна вважати, що d проходить через точку A. Проведемо в площині α будь-яку пряму, що не проходить через точку A і перетинає прямі b, c і d. Нехай B, C і D – точки перетину. На прямій a з точки A в різні боки відкладено відрізки AE і AF. У трикутниках ECA і FCA: $EA=AF$ – за побудовою, $\angle EAC=\angle FAC$ – за умовою, AC – спільна сторона. Отже, $\Delta ECA=\Delta FCA$ і $EC=FC$. Аналогічно покажемо, що $BE=BF$. Оскільки сторона CB для трикутників CBE і CBF – спільна, то звідси за третьою ознакою рівності трикутників випливає, що $\Delta ECB=\Delta FCB$.

Тоді $\angle CBE=\angle CBF$. У трикутниках DBE і DBF також $BE=BF$, а BD – спільна сторона.

Отже, $\Delta DBE = \Delta DBF$. Тому $ED = DF$, а ΔEDF – рівнобедрений. Оскільки $EA = AF$, то AD – його медіана. За властивістю рівнобедреного трикутника $AD \perp EF$, тобто $d \perp \alpha$, що і потрібно було довести.

Теорема 6.13. *Дві прямі, перпендикулярні одній і тій самій площині, паралельні.*

Довести самостійно (рис. 6.25).

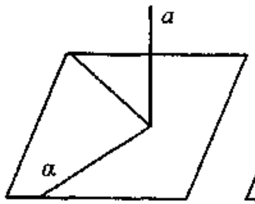


Рис. 6.23

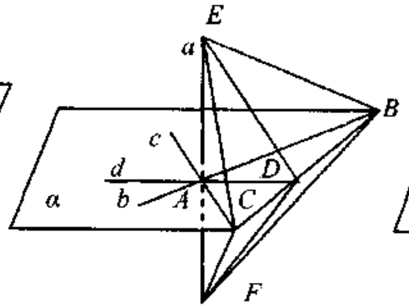


Рис. 6.24

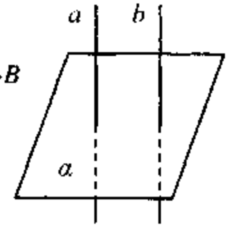


Рис. 6.25

Уведемо поняття перпендикуляра, похилої і проекції похилої на задану площину.

Нехай A – точка, що не лежить в площині α (рис. 6.26). Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до площини α. Ця пряма перетинає площину α в деякій точці H. Відрізок AH називається ***перпендикуляром***, проведеним з точки A до площини α, а точка H – ***основою перпендикуляра***.

Якщо через точку A проведемо пряму, яка перетне площину в точці M, що відрізняється від точки H, то відрізок AM називається ***похилою***, проведеною з точки A до площини α, а точка M – ***основою похилої***.

Відрізок MH називається ***проекцією похилої*** AM на площину α.

Теорема 6.14. (Про три перпендикуляри). *Пряма, проведена в площині через основу похилої, перпендикулярно до її проекції, перпендикулярна і до самої похилої.*

Доведення. Нехай AH – перпендикуляр, а AM – похила, проведена з точки A до площини α (рис. 6.27).

Проведемо через точку M у площині α пряму a, перпендикулярну до проекції MH. Покажемо, що $a \perp AM$. Через точку M проведемо MM_1, перпендикулярну площині α. Тоді $MM_1 \parallel AH$ за теоремою 6.13. Через прямі MM_1 і AH проведемо площину β. Ясно, що β містить і прямі AM і HM.

За побудовою $a \perp MM_1$, а за умовою теореми $a \perp MH$. Тому за теоремою 6.12 пряма a перпендикулярна до площини β, яка містить прямі MM_1 і MH. Але тоді пряма a перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β. Отже, $a \perp AM$.

Теорему доведено.

Ця теорема називається теоремою про три перпендикуляри, оскільки в ній йдеться про зв'язок між трьома перпендикулярами: 1) AH до площини α ; 2) HM до прямої a; 3) AM до тієї самої прямої a.

Теорема 6.15. (Обернена до теореми про три перпендикуляри). *Пряма, проведена в площині через основу похилої перпендикулярно до неї, перпендикулярна і до її проекції.* Довести самостійно.

Означення. ***Кутом між прямою і площиною, що перетинає цю пряму і не перпендикулярна до неї,*** *називається кут між прямою і її проекцією на площину;* $\angle AMH$ *– це кут між прямою* AM *і площиною* α (рис. 6.26).

Задача 5. Нехай MA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60^\circ$. Побудувати висоту MH трикутника MCD (рис. 6.28).

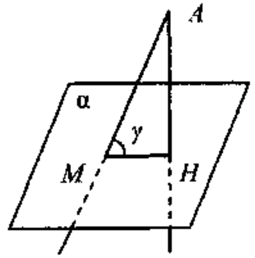


Рис. 6.26

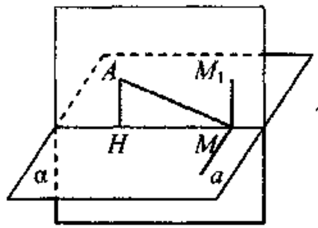


Рис. 6.27

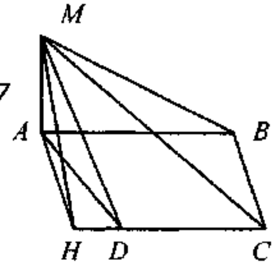


Рис. 6.28

Розв'язання. Шукана висота MH – це перпендикуляр до прямої CD. За теоремою про три перпендикуляри $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60^\circ$, то точка H має лежати на прямій CD поза відрізком CD так, що $HD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AD$. Побудуємо точку H і сполучимо точки M і H. Відрізок MH – висота ΔMCD.

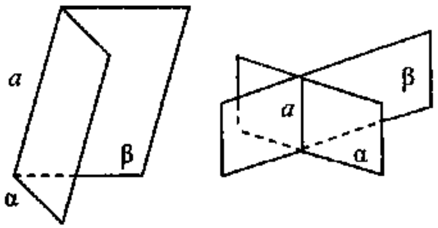
Перпендикулярність площин. Частина площини, що лежить по один бік від якої-небудь прямої a, розміщеної в цій площині, називається ***півплощиною***. Кажуть, що півплощина виходить з прямої a.

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами α і β, які виходять з однієї прямої.

Півплощини α і β називаються ***гранями***, а пряма a, з якої вони виходять – ***ребром двогранного кута*** (рис. 6.29, *а*). Дві площини, що перетинаються, утворюють чотири двогранних кути (рис. 6.29, *б*).

Означення. *Лінійним кутом двогранного кута називається кут, утворений при перетині двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра.*

На рис. 6.30 $\angle AOB$ – лінійний кут двогранного кута з ребром a і гранями α і β.



а *б*

Рис. 6.29

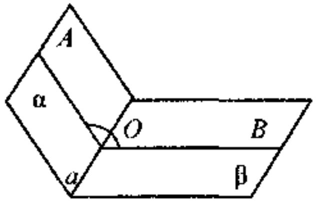


Рис. 6.30

Двогранний кут має безліч лінійних кутів. Усі вони рівні між собою.

Означення. ***Градусною мірою двогранного кута*** *називається градусна міра його лінійного кута.*

Означення. *Дві площини називаються* ***взаємно перпендикулярними****, якщо вони утворюють прямі двогранні кути.*

Розглянемо ознаку перпендикулярності двох площин.

Теорема 6.16. *Якщо площина α проходить через пряму a, перпендикулярну до іншої площини β, то ці площини α і β перпендикулярні* (рис. 6.31).

Доведення. Нехай l – лінія перетину площин α і β. Тоді $a \perp l$. Нехай O – точка перетину прямих a і l. Проведемо через точку O в площині β пряму $OB=b$, перпендикулярну до l. Тоді $\angle AOB$ – лінійний кут двогранного кута з ребром l.

Оскільки $a \perp \beta$, то a перпендикулярна і до прямої b. Тому, $\angle AOB = 90°$ і двогранний кут, утворений площинами α і β – прямий. За означенням $\alpha \perp \beta$.

Теорему доведено.

Задача 6. Довести, що якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то пряма, проведена в одній площині перпендикулярно до лінії перетину площин, перпендикулярна до другої площині.

Розв'язати самостійно.

Вказівка. Використати рис. 6.32.

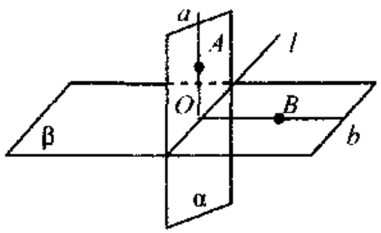


Рис. 6.31

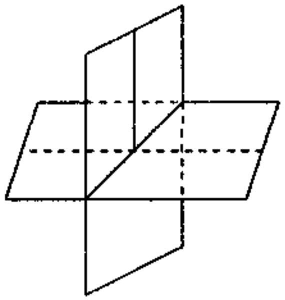


Рис. 6.32

Задачі для самостійного розв'язування

1. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть прямі AC і BD бути: а) паралельними; б) мимобіжними; в) перетинатися?

2. Точка C – середина відрізка AB. Через кінець A проведено площину α. Через точки B і C проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо довжина відрізка CC_1=4 см.

3. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника лежать в одній площині.

4. Кожна з прямих a і b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що прямі a і b паралельні?

5. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

6. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AC, перетинає сторони AB і BC цього трикутника відповідно в точках A_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка A_1C_1, якщо AC=20 см, а AA_1:A_1B=3:2.

7. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то лінія їх перетину паралельна кожній з даних прямих.

Доведіть.

8. Діагональ і сторона многокутника паралельні площині α. Чи правильне твердження, що площина многокутника паралельна площині α, якщо многокутник має: 1) чотири сторони; 2) п'ять сторін; 3) n сторін (n>5)?

9. Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то перетинає і другу.

10. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, що не лежать в одній площині. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні.

11. Три площини паралельні. Паралельні прямі a і b перетинають ці площини в точках A_1A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3. Відомо, що A_1A_2=4 см, B_2B_3=9 см. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

12. Величина двогранного кута дорівнює 30°. На одній із його граней лежить точка A, яка міститься на відстані 6 см від другої грані. На якій відстані від ребра двогранного кута міститься точка A?

13. На грані двогранного кута величиною 60° лежить точка M, віддалена від ребра двогранного кута на відстань 8 см. Знайдіть відстань від точки M до другої грані.

14. Чи правильне твердження, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна: а) до двох сторін трапеції; б) до двох діаметрів круга; в) до двох діагоналей многокутника, що лежить в цій площині:

15. Через дану точку проведіть площину, перпендикулярну до даної прямої.

16. З вершини прямого кута прямокутного трикутника до його площини проведено перпендикуляр довжиною 9 см. Знайдіть суму відстаней від кінців перпендикуляра до гіпотенузи, коли відомо, що катети трикутника дорівнюють 12 і 5 см.

17. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площини, які перетинаються, то пряма їх перетину паралельна кожній із даних прямих. Доведіть це.

18. Якщо точка рівновіддалена від вершин трикутника, то основа перпендикуляра, проведеного з даної точки на площину трикутника, є центром кола, описаного навколо цього трикутника.

Доведіть це.

РОЗДІЛ 7 МНОГОГРАННИКИ

7.1. Загальні поняття

Означення. ***Многогранником*** *називається тіло, обмежене скінченною кількістю плоских многокутників.*

Наприклад, куб (рис. 7.1) обмежений шістьома квадратами, а тетраедр (рис. 6.1, *б*) – чотирма трикутниками. Це найпростіші многогранники.

Многокутники, що обмежують многогранник, називаються *гранями*, а їхні сторони – *ребрами многогранника*. Вершини граней називаються *вершинами многогранника*, а відрізки прямих, які з'єднують дві вершини многогранника, що не лежать в одній грані, називаються *діагоналями многогранника*.

У куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1) AA_1D_1D, DD_1C_1C, BB_1C_1C і AA_1B_1B – бічні грані, $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – основи (верхня і нижня). AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – бічні ребра, AB, BC, CD, AD – сторони нижньої основи, A, B, ... , D_1 – вершини, B_1D, C_1A, A_1C і D_1B – діагоналі. Усього у куба шість граней, дванадцять ребер, вісім вершин і чотири діагоналі.

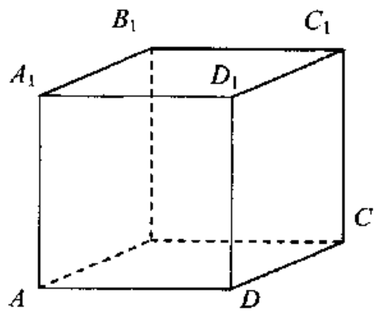


Рис. 7.1

Многогранник називається ***опуклим***, якщо він весь лежить з одного боку від площини кожної його грані. Усі грані опуклого многогранника – опуклі многокутники.

Куб – опуклий многогранник.

7.2. Призма і паралелепіпед

Означення. *Многогранник, дві грані якого рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней – паралелограми, називається* ***n-кутною призмою***.

Два рівних n-кутники називаються *основами призми*, а всі решта n граней – ***бічними гранями***. Ребра призми, що сполучають вершини основ, називаються ***бічними ребрами***. Усі бічні ребра призми рівні і паралельні.

Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до площин основ, то призма називається ***прямою***, в іншому випадку призма називається ***похилою***.

Висотою призми називається відстань між площинами її основ. Висота призми дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї основи до площини другої основи. У прямої призми висота дорівнює довжині будь-якого бічного ребра.

Пряма призма називається ***правильною***, якщо її основами є правильні многокутники. ***Діагональним перерізом призми*** називається переріз площиною, що проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані. Переріз призми площиною, перпендикулярною до її бічних ребер, називається ***перпендикулярним перерізом призми***.

На рис. 7.2 A_1K – висота трикутної похилої призми $ABCA_1B_1C_1$, а NLM – її перпендикулярний переріз. На рис. 7.3 AA_1C_1C – діагональний переріз прямої п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

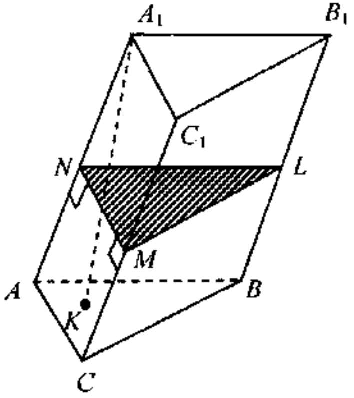


Рис. 7.2

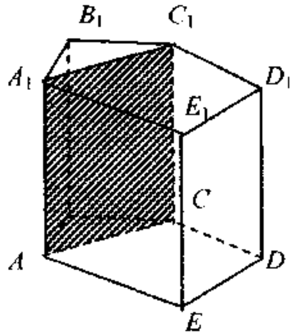


Рис. 7.3

Площею бічної поверхні призми називається сума площ бічних граней.

Теорема 7.1. *Площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро.*

Доведення. Бічні грані призми – паралелограми. Сторони перпендикулярного перерізу є висотами бічних граней, а основами цих граней будуть бічні ребра.

Тому $S = a_1l + a_2l + ... + a_nl = P_nl$, де $a_1, a_2, ... ,a_n$ – сторони перпендикулярного перерізу, а l – довжина бічного ребра. Що й потрібно було довести.

Наслідок. *Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.*

Площа повної поверхні призми дорівнює сумі площ бічної поверхні призми і двох її основ: $S_{пр}=S_{біч}+2S_{осн}$.

Задача 1. Сторони основ прямої трикутної призми дорівнюють 36, 25 і 29 см. Переріз, проведений через бічне ребро перпендикулярно до більшої сторони основи, є квадратом. Знайти площу повної поверхні призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма. AC=36 см. Переріз BB_1K_1K перпендикулярний до AC (рис. 7.4). Тому $AC \perp BK$ і, отже, BK – висота ΔABC, опущена на сторону AC. Звідси $BK=2S_{\Delta ABC}:AC$. Площу ΔABC знайдемо за формулою Герона:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360$ см^2;

$BK=(360 \cdot 2):36=20$ см.

Оскільки BB_1K_1K – квадрат, то $BB_1=BK=20$ см. Маємо:

$S_{повн}=2S_{\Delta ABC}+P_{\Delta ABC} \cdot BB_1=2 \cdot 360+90 \cdot 20=$
$=720+1800=2520$ см^2.

Відповідь. 2520 см^2.

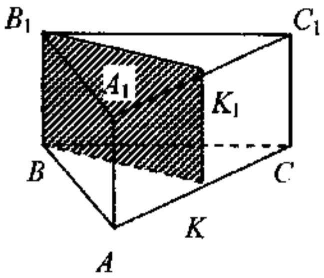


Рис. 7.4

Задача 2. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює Q. Знайти площу перерізу, який проходить через паралельні середні лінії основ. Розв'язати самостійно.

Відповідь. $\frac{Q}{6}$.

Означення. *Призма, основами якої є паралелограми, називається **паралелепіпедом**.*

Теорема 7.2. (Властивості паралелепіпеда). 1. *У паралелепіпеда протилежні грані рівні і паралельні.* 2. *Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і поділяються нею навпіл.*

Довести теорему самостійно, використовуючи властивості паралелограма і теорему 6.7. Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається ***прямим***. На рис. 7.5 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед. Усі його бічні грані – прямокутники. Прямий паралелепіпед, в якого основою є прямокутник, називається ***прямокутним паралелепіпедом***.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда – прямокутники. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його ***вимірами***. На рис. 7.6 AB, AD і AA_1 – виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

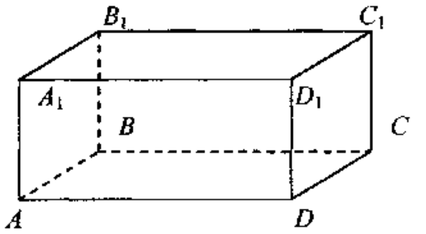


Рис. 7.5

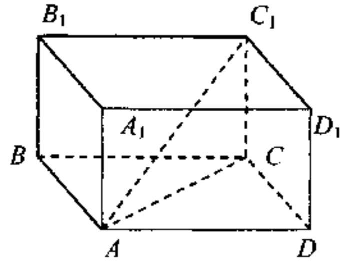


Рис. 7.6

Теорема 7.3. *Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.*

Доведення. Доведемо, що $AC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$ (рис. 7.6). Оскільки основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда є прямокутником, то $AC^2=AD^2+CD^2$. Паралелепіпед прямий, тому $CC_1\perp AC$ і ΔAC_1C – прямокутний. За теоремою Піфагора: $AC_1^2=AC^2+CC_1^2$. Оскільки $CC_1=AA_1$, а $CD=AB$, то $AC_1^2=AD^2+CD^2+CC_1^2=$ $=AD^2+AB^2+AA_1^2$.

Що й потрібно було довести.

Наслідок. *Діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.*

Наслідок. *Відстань між точками $A=(x_1, y_1, z_1)$ і $B=(x_2, y_2, z_2)$ у прямокутній декартовій системі координат $OXYZ$ дорівнює*

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Довести самостійно.

Вказівка. Через точки A і B провести площини, паралельні координатним площинам Oxy, Oxz, Oyz. Діагональ отриманого паралелепіпеда – AB.

Задача 3. Сторони основ прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 і $2\sqrt{3}$ см і утворюють кут 30°. Знайти діагоналі паралелепіпеда, коли відомо, що його менша діагональ утворює з площиною основи кут 60°. Розв'язати самостійно.

Відповідь. $\sqrt{18}$ і $\sqrt{54}$.

Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називається *кубом*. У куба всі грані є рівними квадратами.

7.3. Поняття об'єму. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Під об'ємом тіла розуміють додатне число, яке характеризує величину частини простору, що займає це тіло. Поняття об'єму аналогічне поняттю площі для плоских фігур. Об'єм тіла T позначають: $V(T)$ або V_T.

Не всі тіла мають об'єм. Будемо вважати, що: 1) всі многогранники при заданій одиниці виміру мають визначений об'єм; 2) об'єм куба з одиничним ребром дорівнює одиниці (рис. 7.7); 3) тіло T має об'єм, якщо для будь-якого числа $\xi>0$ існують тіла P і Q з об'ємами $V(P)$ і $V(Q)$, для яких $P\subset T$, $T\subset Q$, а $V(Q)-V(P)<\xi$.

Ця властивість означає, що коли тіла P і Q (наприклад многогранники) мають скільки завгодно близькі об'єми, причому P міститься в T, а Q містить T, то тіло T також має об'єм.

Досвід показує, що для тіл, що мають об'єм (у тому числі для многогранників), виконуються такі умови; 4) рівні тіла мають рівні об'єми; 5) об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів його частин; 6) якщо площі перерізу двох тіл будь-якою площиною, що паралельна даній площині, рівні, то ці тіла мають рівні об'єми (рис. 7.8).

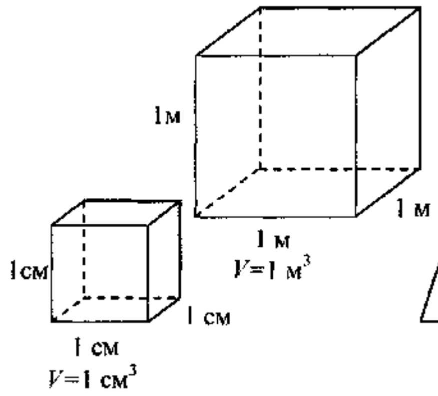


Рис. 7.7

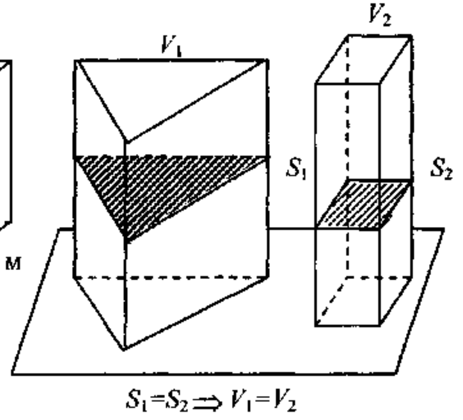


Рис. 7.8

Ця властивість називається *принципом Кавальєрі*[1] і може бути доведена методами інтегрального числення.

[1] Бонавентура Кавальєрі (1598-1647) – видатний італійський математик

Наслідок. *Якщо одне тіло міститься в іншому, то об'єм першого тіла не більший, ніж об'єм другого.*

Випливає з властивості 5 і додатності об'єму.

Теорема 7.4. *Прямокутний паралелепіпед має об'єм $V=abc$, де a, b і c – виміри цього паралелепіпеда.*

Доведення. 1. Нехай спочатку a, b і c – раціональні числа, наприклад: $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{p}{q}$, $c=\dfrac{r}{s}$, де m, n, p, q, r, s – натуральні числа. Зведемо ці дроби до спільного знаменника:

$$a=\frac{mqs}{nqs};\ b=\frac{pns}{nqs};\ c=\frac{rnq}{nqs}.$$

Нехай $\dfrac{1}{nqs}$ попередньої одиниці довжини дорівнює новій одиниці довжини. Тоді виміри прямокутного паралелепіпеда будуть дорівнювати таким натуральним числам: mqs, pns, rnq. Розіб'ємо ребро a на mqs частин, рівних новій одиниці довжини, ребро b – на pns частин, ребро c – на rnq частин. Через точки поділення проведемо площини, перпендикулярні цим ребрам. При цьому паралелепіпед розіб'ється на $mqs \cdot pns \cdot rnq$ малих кубів з ребрами, що дорівнюють новій одиниці довжини. Із властивості об'єму випливає, що об'єм паралелепіпеда дорівнює $V=mqs \cdot pns \cdot rnq$ нових кубічних одиниць. Попередня одиниця більша, ніж нова в $(nqs)^3$ раз. Отже, у попередніх кубічних одиницях

$$V=\frac{mqs\ pns\ rnq}{(nqs)^3}=\frac{mqs\ pns\ rnq}{nqs\ nqs\ nqs}=\frac{m}{n}\frac{p}{q}\frac{r}{s}=abc.$$

2. Нехай a, b і c – будь-які дійсні числа. Позначимо через a_1 і a_2 (b_1 і b_2 або c_1 і c_2) наближення числа a (числа b або числа c) з недостачею або надлишком з точністю до $\dfrac{1}{10^n}$. Тоді $a_1 \le a \le a_2$, $b_1 \le b \le b_2$, $c_1 \le c \le c_2$, де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – раціональні числа. Нехай T – даний паралелепіпед, а P_n і Q_n – паралелепіпеди з ребрами a_1, b_1, c_1 і a_2, b_2, c_2 відповідно. Тоді P_n можна помістити в T, а T – у Q_n, тобто $P_n \subseteq T \subseteq Q_n$. За доведеним об'єми паралелепіпедів P_n і Q_n дорівнюють $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2c_2$.

За властивістю об'єму $a_1b_1c_1 = V(P_n) \le V \le V(Q_n) = a_2b_2c_2$, де V – об'єм даного паралелепіпеда. Звідси і з правил множення дійсних чисел випливає, що $V=abc$.

Що й потрібно було довести.

Наслідок. *Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту:* $V=S_{осн} \cdot H$.

7.4. Об'єм призми

Теорема 7.5. *Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.*

Доведення. Нехай висота даної призми дорівнює H, а основа має площу S і міститься у площині α (рис. 7.9). Візьмемо прямокутний паралелепіпед з висотою H і основою з площею S, яка теж лежить у площині α (рис. 7.9).

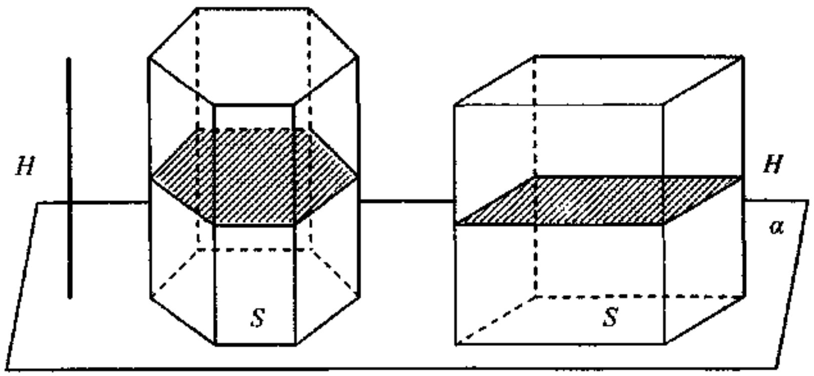


Рис. 7.9

Будь-яка площина, паралельна площині α, перетинає обидві призми по многокутниках, що дорівнюють основам. Це випливає з теорем 6.7, 6.11 і властивостей паралелограма. Тому всі перерізи призм площинами, паралельними площині α, дорівнюють S. За принципом Кавальєрі звідси випливає, що обидві призми мають однаковий об'єм. Оскільки об'єм паралелепіпеда за теоремою 7.4 дорівнює $S \cdot H$, то і об'єм даної призми дорівнює $V=S \cdot H$.

Що і потрібно було довести.

$\boxed{\textbf{Задача 4.}}$ Знайти об'єм прямокутної трикутної призми, сторони основ якої дорівнюють 4 і 8 см і утворюють між собою кут 45°, а бічне ребро дорівнює 20 см.

Розв'язання. Об'єм призми обчислюється за формулою $V=S_{осн} H$, де $S_{осн}$ – площа основи, а H – висота призми (рис. 7.10). У прямій призмі висота дорівнює бічному ребру. Тому H=20 см.

Площу трикутника обчислимо за формулою $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, де a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними.

Маємо: $S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot\sin 45° = 8\sqrt{2}$ см². Обчислимо об'єм призми: $V = S_{осн}H = 8\sqrt{2}\cdot 20 = 160\sqrt{2}$ см³.

Відповідь. $160\sqrt{2}$ см³.

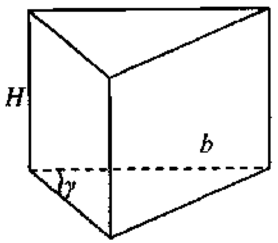


Рис. 7.10

Задача 5. Основа похилої чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат $ABCD$. Вершина A_1 проектується в центр основи. Ребро AA_1 має довжину 12 см і нахилене до основи під кутом 30°.

Знайти об'єм призми (рис. 7.11). Розв'язати самостійно.

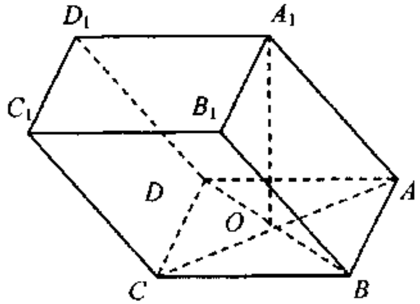


Рис. 7.11

7.5. Піраміда

Означення. ***Пірамідою*** *називається многогранник, одна з граней якого – довільний многокутник, а решта граней – трикутники, що мають одну спільну вершину.*

Многокутник називається ***основою піраміди***, а решта граней (трикутники) – ***бічними гранями***. Вершина, спільна для всіх бічних граней, називається ***вершиною піраміди***.

Бічними ребрами піраміди називаються ребра, які не є сторонами основи. ***Висотою піраміди*** називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи.

На рис. 7.12 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$, чотирикутник $ABCD$ – її основа, S – вершина, SO – висота; SA, SB, SC, SD – бічні ребра. ΔASD, ΔBSD – діагональні перерізи. Піраміда називається ***n-кутною***, якщо в її основі лежить n-кутник. Трикутна піраміда називається ***тетраедром***.

Площею бічної поверхні піраміди називається сума площ усіх її бічних граней.

Площа повної поверхні піраміди дорівнює сумі площ бічної поверхні і площі її основи.

Означення. *Піраміда називається* ***правильною****, якщо її основа – правильний многокутник і вершина піраміди проектується в центр основи.*

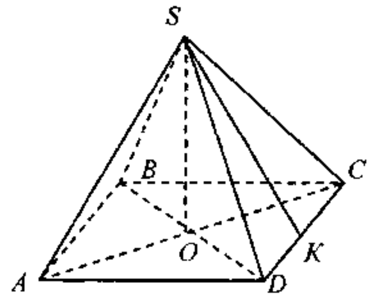


Рис. 7.12

Висота бічної грані правильної піраміди називається ***апофемою***. На рис. 7.12 SK – апофема.

Теорема 7.6. *У правильної піраміди:* 1) *рівні всі бічні ребра;* 2) *всі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники;* 3) *площа бічної поверхні дорівнює половині добутку периметра основи на апофему.*

Доведення. Нехай $SABCD$ – правильна піраміда (рис. 7.12). Оскільки основа висоти – це центр правильного многокутника, що лежить в основі, то точка O – центр кола, описаного навколо основи. Усі прямокутні трикутники, утворені висотою і бічними ребрами, рівні за двома катетами. Тому рівні їхні гіпотенузи, тобто всі бічні ребра. Звідси випливає правильність висновків 1 і 2.

Площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ бічних граней. Площа кожної грані дорівнює $\frac{a\cdot h}{2}$, де a – сторона основи, а h – апофема. Отже, $S_{біч.пір} = \frac{n\cdot a\cdot h}{2}$, або $S_{біч.пір} = \frac{1}{2}P_{осн}h$, де $P_{осн}$ – периметр основи; h – апофема. Теорему доведено.

Задача 6. Знайти площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а бічне ребро 5 см.

Розв'язання. Нехай $ABCDS$ – дана піраміда (рис. 7.12). Площу бічної поверхні знайдемо за формулою $S = \frac{1}{2}Ph$. Основою піраміди є квадрат зі стороною 6 см.

Отже, периметр основи дорівнює 4·6=24 см. Знайдемо апофему піраміди з прямокутного трикутника SDK. Оскільки трикутник CSD рівнобедрений, то апофема SK буде і медіаною ΔCSD. Тому $DK=CD:2=6:2=3$ см.

За теоремою Піфагора $SK=\sqrt{SD^2-DK^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ см. Маємо:

$$S_{\text{біч}}=\frac{1}{2}Ph=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 4=48\text{ см}^2.$$

Відповідь. 48 см^2.

Задача 7. Площа основи піраміди дорівнює Q, а двогранні кути при всіх сторонах основи дорівнюють φ. Довести, що $S_{\text{біч}}=\dfrac{Q}{\cos\varphi}$.

Розв'язання. Нехай $A_1, A_2...A_n$ – многокутник в основі піраміди (рис. 7.13). Проведемо висоту піраміди SO і висоту SB грані SA_1A_2. За теоремою про три перпендикуляри OB – висота трикутника A_1A_2O.

Маємо $SB=\dfrac{OB}{\cos\varphi}$. Тому $S_{\Delta A_1A_2S}=\dfrac{1}{2}A_1A_2\cdot SB=\left(\dfrac{1}{2}\right)A_1A_2\cdot\dfrac{OB}{\cos\varphi}$,

або $S_{\Delta A_1A_2S}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_2O}}{\cos\varphi}$. Аналогічно знаходимо $S_{\Delta A_2A_3S}=\dfrac{S_{\Delta A_2A_3S}}{\cos\varphi}$ і т. д. Додавши почленно ці рівності, у лівій частині дістанемо бічну поверхню піраміди, а в правій – площу основи Q, поділену на $\cos\varphi$. Отже, площа бічної поверхні піраміди дорівнює $\dfrac{Q}{\cos\varphi}$, що й потрібно було довести.

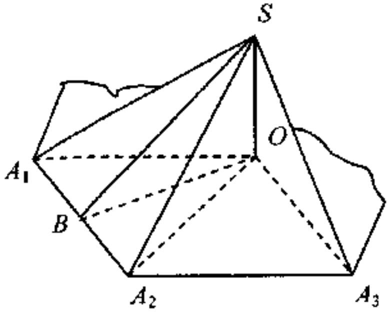


Рис. 7.13

Задача 8. Сторона основи правильної трикутної піраміди 12 см, а бічна грань похилена до площини основи під кутом 60°. Знайти площу поверхні піраміди.

Розв'язання. У правильній піраміді всі бічні грані нахилені до площини основи під однаковим кутом. Тому площу її бічної поверхні можна знайти за формулою $S_{\text{б.п}}=\dfrac{Q}{\cos\varphi}$, де Q – площа основи; φ – кут нахилу бічної грані до площини основи. В основі цієї піраміди лежить правильний трикутник. Його площа $S=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, де a – сторона основи. Підставимо значення a=12 см. Маємо $Q=36\sqrt{3}$ см^2.

Обчислимо площу бічної поверхні піраміди:

$$S_{\text{б.п}}=\frac{Q}{\cos\varphi}=36\sqrt{3}:\cos 60°=36\sqrt{3}:\frac{1}{2}=72\sqrt{3}\text{ см}^2.$$

Відповідь. $72\sqrt{3}$ см^2.

Теорема 7.7. *Якщо піраміда перетнута площиною, паралельною основі, то: 1) бічні ребра і висота поділяються цією площиною на пропорційні частини; 2) у перерізі дістанемо многокутник, подібний до основи; 3) площі перерізу і основи відносяться, як квадрати їхніх відстаней від вершини.*

Доведення. 1. Прямі AB і A_1B_1 можна розглядати як лінії перетину двох паралельних площин (основи і січної) третьою площиною ASB (рис. 7.14). Тому $A_1B_1\|AB$. Аналогічно $B_1C_1\|BC$; $C_1D_1\|CD$ і т. д. Звідси за теоремою 4.1:

$$\frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}=...=\frac{SO_1}{O_1O_2}.$$

2. З подібності трикутників ASB і A_1SB_1, BSC і B_1SC_1 і т. д. дістаємо: $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BS}{B_1S}$; $\dfrac{BS}{B_1S}=\dfrac{BC}{B_1C_1}...$. Звідси $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}....$ Також $\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CS}{C_1S}$; $\dfrac{CS}{C_1S}=\dfrac{CD}{C_1D_1}...$. Звідси $\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}...$.

Аналогічно доводиться пропорційність решти сторін многокутників $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$. Оскільки кути в цих многокутників рівні (як кути з відповідно паралельними сторонами), то вони подібні.

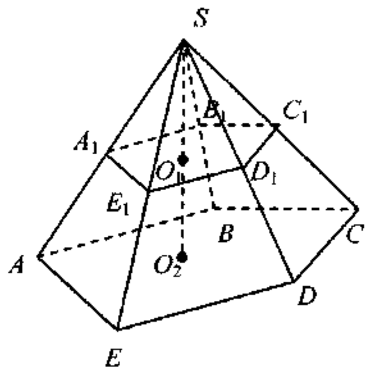


Рис. 7.14

3. Площі подібних многокутників відносяться як квадрати відповідних сторін, тому

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AS}{A_1S}\right)^2=\left(\frac{OS}{O_1S}\right)^2.$$

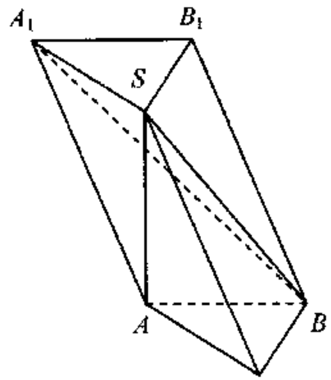
Теорему доведено.

Теорема 7.8. *Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.*

Доведення. 1. Якщо дві піраміди мають рівні висоти і рівні площі основ, то об'єми пірамід рівні. Справді, можна вважати, що основи цих пірамід лежать в одній площині α, і можна застосувати до них принцип Кавальєрі. Рівність площ перерізів цих пірамід площинами, паралельними α, випливає з теореми 7.7.

2. Доведемо теорему для трикутної піраміди $SABC$ (рис. 7.15). Побудуємо на її основі ABC призму $ABCA_1B_1S$, в якої висота дорівнює висоті піраміди, а одне бічне ребро збігається з ребром піраміди SC. Покажемо, що об'єм піраміди дорівнює одній третій об'єму цієї призми.

Відокремимо задану піраміду від утвореної призми. Від неї залишиться чотирикутна піраміда з вершиною S і основою AA_1B_1B (рис. 7.16). Через вершину S і діагональ основи A_1B проведемо січну площину. Дістанемо дві піраміди, в яких спільна висота і рівні площі основ. За доведеним у п. 1 об'єми цих пірамід рівні. Порівняємо одну з них (наприклад SA_1B_1B) з даною пірамідою $SABC$. Розглянемо піраміду SA_1B_1B на рис. 7.15. Візьмемо за її вершину точку B, а за основу – трикутник SA_1B_1. Тоді в пірамід $SABC$ і BA_1SB_1 будуть рівні основи (трикутники ABC і SA_1B_1) і висоти (що дорівнюють висоті призми $ABCA_1B_1S$).



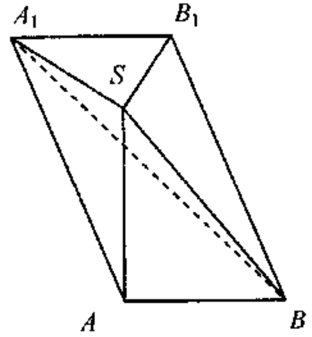


Рис. 7.15 Рис. 7.16

За доведеним у п. 1 ці піраміди мають рівні об'єми. Призма розбита на три піраміди з рівними об'ємами. За теоремою 7.5 об'єм призми $ABCA_1B_1S$ дорівнює $S_{\Delta ABC}\cdot H$. Тому об'єм піраміди $SABC$ дорівнює $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}H$.

3. Нехай $SAB...D$ – n-кутна піраміда з $n>3$. Проведемо через вершину основи A всі можливі діагоналі основи $AB...D$. Через вершину піраміди S і вказані діагоналі основи проведемо січні площини. Піраміда буде ними розбита на $(n-2)$ трикутні піраміди з висотою H, що дорівнює висоті піраміди, і основами, що мають площі S_1, S_2, ..., S_{n-2}. При цьому $S_1+S_2+...+S_{n-2}=S_{осн}$, де $S_{осн}$ – площа основи піраміди $SABC...D$. Об'єми трикутних пірамід за доведеним в п. 2 дорівнюють $\frac{1}{3}S_1H$, $\frac{1}{3}S_2H$, ..., $\frac{1}{3}S_{n-2}H$.

Тоді об'єм усієї піраміди дорівнює

$$V=\frac{1}{3}S_1H+\frac{1}{3}S_2H+...+\frac{1}{3}S_{n-2}H=\frac{1}{3}H\left(S_1+S_2+...+S_{n-2}\right)=\frac{1}{3}HS_{осн}.$$

Теорему доведено.

Задача 9. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро – 8 см. Обчислити об'єм піраміди.

Розв'язання. Об'єм піраміди обчислюється за формулою $V=\frac{1}{3}SH$, де S – площа основи; H – висота піраміди.

На рис. 7.17 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$. В її основі лежить рівносторонній трикутник зі стороною a=12 см.

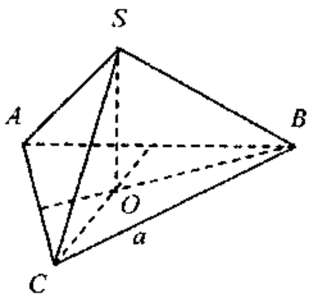


Рис. 7.17

Площу рівностороннього трикутника можна обчислити за формулою $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Тому $S=\frac{144\cdot\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$ см^2.

Для знаходження висоти SO піраміди розглянемо прямокутний трикутник COS, де CO – радіус кола, описаного навколо трикутника зі стороною a.

Тому $CO=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ см. За умовою задачі SC=8 см. За теоремою Піфагора знайдемо SO: $SO^2=SC^2-OC^2=64-48=16$.

Тому SO=4 см. Обчислимо об'єм піраміди:

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\cdot 36\sqrt{3}\cdot 4=48\sqrt{3}\text{ см}^3.$$

Відповідь. $48\sqrt{3}$ см^3.

Означення. ***Зрізаною пірамідою*** *називається частина піраміди, що міститься між її основою і січною площиною, паралельною основі.*

На рис. 7.18 зображено зрізану п'ятикутну піраміду $ABCDE...E_1$, в якій $ABCDE$ – нижня, а $A_1B_1C_1D_1E_1$ – верхня основа, AA_1, BB_1, ...,EE_1 – бічні ребра.

Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений з деякої точки верхньої основи на нижню основу. Бічні грані зрізаної піраміди – трапеції. Основами є подібні многокутники.

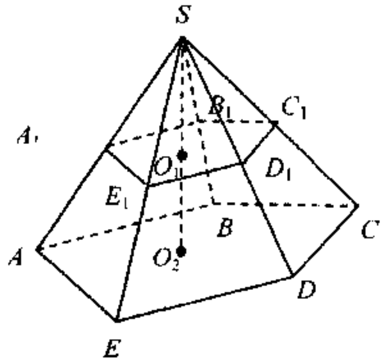


Рис. 7.18

Теорема. *Об'єм зрізаної піраміди з площами основ S_1 і S_2 і висотою H дорівнює:* $V=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$.

Довести самостійно.

Площа бічної поверхні зрізаної піраміди дорівнює сумі площ її бічних граней. *Площа повної поверхні зрізаної піраміди* дорівнює сумі площ основ і бічної поверхні. Зрізана піраміда називається ***правильною***, якщо вона утворена перерізом правильної піраміди. ***Апофемою*** правильної зрізаної піраміди називається висота її бічної грані.

Задача 10. Довести, що площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему. Розв'язати самостійно.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Сторона основи і висота правильної чотирикутної призми відповідно дорівнюють 2 і 1 м. Знайдіть: а) площу бічної поверхні призми; б) площу повної поверхні призми; в) довжину діагоналі призми.

2. Основа прямої трикутної призми – прямокутний трикутник із катетами 3 і 4 см, а бічне ребро дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

3. Поперечним перерізом каналу є рівнобедрена трапеція, основи якої дорівнюють 10 і 4 м, а висота 5 м. Дно і стінки його забетонували. Яку площу забетонували на кожному кілометрі каналу?

4. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, сторони основ якого 5 і 12 м, а діагональ похилена до площини основи під кутом 30°.

5. У прямому паралелепіпеді сторони основ дорівнюють 6 і 8 м і утворюють між собою кут 30°, бічне ребро дорівнює 5 м. Обчисліть: а) більшу діагональ основи; б) діагоналі паралелепіпеда; в) площі діагональних перерізів; г) повну поверхню паралелепіпеда.

6. В основі прямої чотирикутної призми лежить паралелограм, сторони якого дорівнюють 6 і 4 см, а кут між ними 45°. Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ більшої бічної грані утворює зі стороною основи кут 30°.

7. Висота правильної чотирикутної призми H, а діагональ призми утворює з площиною основи кут α. Обчисліть об'єм призми.

8. У правильній шестикутній призмі площа більшого діагонального перерізу 4 см^2, а відстань між двома протилежними бічними гранями 4 см. Знайдіть об'єм призми.

9. Основа похилої призми – рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней – квадрат, площина якого нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм призми.

10. Висота правильної чотирикутної піраміди 4 см, сторона основи 6 см. Знайдіть: а) бічне ребро; б) апофему; в) площу повної поверхні.

11. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а двогранний кут при ребрі основи 60°. Знайдіть: а) сторону основи піраміди; б) площу бічної поверхні.

12. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнюють a. Знайдіть площу бічної і повної поверхні.

13. Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної піраміди, якщо її двогранний кут при основі дорівнює 60°, а бічна поверхня – 32 см^2.

14. Основа піраміди – ромб зі стороною a. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи; бічні грані, що містять це ребро, утворюють тупий двогранний кут величиною β. Одна з решти бічних граней похилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

15. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30°.

16. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а бічне ребро нахилене до площини під кутом 45°.

17. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 18 см і нахилене до площини основи під кутом 60°.

18. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 12 см і нахилене до площини основи під кутом 30°.

19. За бічним ребром b і плоским кутом 2α при вершині знайдіть об'єм і площу повної поверхні піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної; 4) n-кутної.

20. Основа піраміди – прямокутна трапеція, в якій більша з непаралельних сторін 12 см, а менший кут 30°. Усі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, площа бічної поверхні 90 см^2. Знайдіть об'єм.

21. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а її висота 3 см. Знайдіть об'єм піраміди.

22. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої – 23 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°.

23. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, а бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 45°.

РОЗДІЛ 8 ТІЛА ОБЕРТАННЯ

8.1. Циліндр

Означення. ***Циліндричною поверхнею*** *називається поверхня, утворена рухом деякої прямої* (*твірної*), *яка переміщується в просторі паралельно сама собі і перетинає задану плоску лінію* (***напрямну***).

На рис. 8.1 зображено циліндричну поверхню. Пряма AB є твірною, а крива MAN – напрямною.

Означення. ***Циліндром*** *називається тіло, обмежене двома паралельними площинами і циліндричною поверхнею, напрямна якої є замкненою, несамопересічною лінією* (рис. 8.2).

Частина циліндричної поверхні, яка лежить між паралельними площинами, називається *бічною* ***поверхнею циліндра***. Частини паралельних площин, які обмежують циліндр, називаються ***основами циліндра***.

Циліндр називається ***прямим***, якщо його твірні перпендикулярні до основ. Якщо в основі циліндра лежить круг, то такий циліндр називають ***круговим***.

Прямий круговий циліндр можна розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони як осі (рис. 8.3). При цьому сторона AB описує бічну поверхню, а сторони OA і O_1B – основи циліндра.

Надалі розглядатимемо тільки прямі кругові циліндри; для стислості будемо називати їх просто ***циліндрами***.

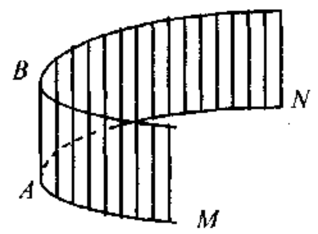


Рис. 8.1

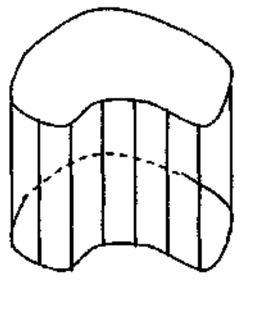


Рис. 8.2

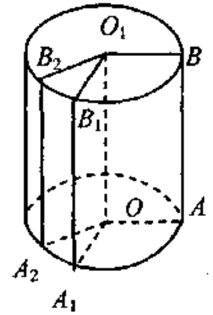


Рис. 8.3

На рис. 8.4 зображено циліндр, де AA_1 і BB_1 – його твірні; OB і O_1B_1 – радіуси основ; l – вісь циліндра; OO_1 – висота циліндра.

Перерізом циліндра площиною, що проходить через вісь є прямокутник (рис. 8.5). Дві сторони цього прямокутника – твірні циліндра, дві інші – діаметри основ. Такий переріз називається ***осьовим***.

Перерізом циліндра площиною, перпендикулярною до осі, є круг, що дорівнює основам (рис. 8.6).

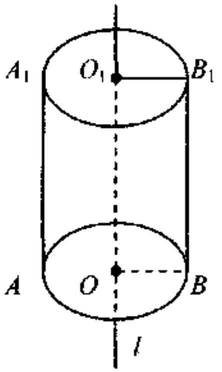


Рис. 8.4

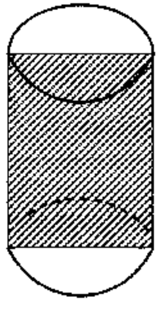


Рис. 8.5

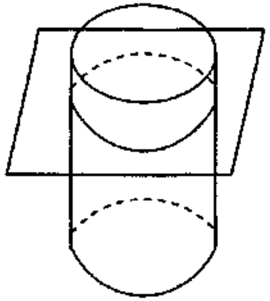


Рис. 8.6

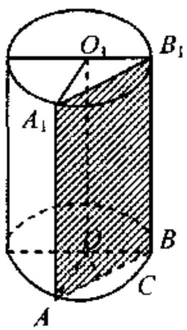


Рис. 8.7

Задача 1. Висота циліндра дорівнює 12 см, радіус його основи 5 см. Знайти площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 3 см від неї.

Р о з в ' я з а н н я. Перерізом циліндра є прямокутник AA_1B_1B (рис. 8.7). Його сторона AA_1 дорівнює висоті циліндра, а сторона AB є хордою, по якій січна площина перетинає основу циліндра. Визначимо цю хорду з трикутника OCA. Для цього з центра кола O проведемо радіус, перпендикулярний до хорди AB. Як відомо, він проходить через середину цієї хорди. Розглянемо трикутник OCA. У ньому OA=5 см (радіус основи циліндра), OC=3 см (відстань від осі циліндра до січної площини). Можна визначити CA: $CA^2=OA^2-OC^2=25-9=16$ см. Звідси CA=4 см. Тоді $BA=2CA$=8 см.

Площа шуканого перерізу дорівнює площі прямокутника зі сторонами AB і AA_1. Тому $S=AB\cdot AA_1=8\cdot 12=96$ см^2.

Відповідь. 96 см^2.

Задача 2. Прямокутник, діагональ AC якого дорівнює 12 см і нахилена до основи під кутом 30°, є осьовим перерізом циліндра. Знайти висоту і радіус основи циліндра (рис. 8.8). Розв'язати самостійно.

Відповідь. 6 см; $3\sqrt{3}$ см.

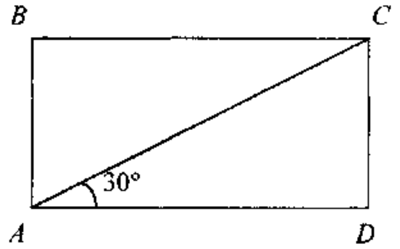


Рис. 8.8

Площа поверхні циліндра. Якщо бічну поверхню циліндра розрізати по твірній AB (рис. 8.9, *а*) і розгорнути її так, щоб ця поверхня лежала в одній площині, то дістанемо прямокутник (рис. 8.9, *б*).

Цей прямокутник називається ***розгорткою бічної поверхні циліндра***. Дві сторони прямокутника дорівнюють висоті (і твірним) циліндра, а дві інші є довжиною кола основи циліндра.

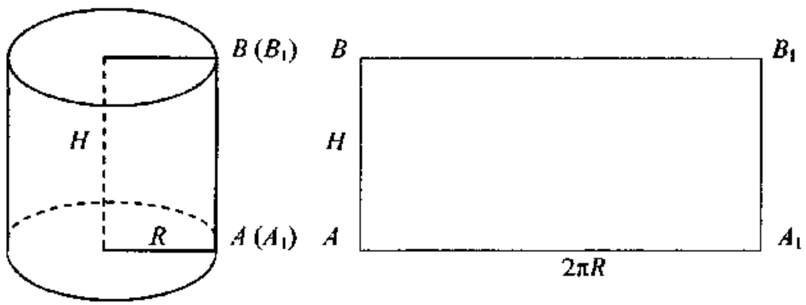


Рис. 8.9

За площу бічної поверхні циліндра беруть площу її розгортки, тобто добуток $AB\cdot AA_1$. Оскільки $AA_1=2\pi R$ (довжина кола з радіусом R), а $AB=H$, то площу бічної поверхні циліндра можна обчислити за формулою $S_{б.ц}=2\pi RH$.

Площею повної поверхні циліндра називається сума площ бічної поверхні і двох основ. Оскільки в основі циліндра лежить круг, площа якого дорівнює πR^2, то для обчислення площі повної поверхні циліндра отримаємо формулу

$$S_{п.п}=S_{б.п}+2S_{осн}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R),$$

де H – висота циліндра; R – радіус основи циліндра.

Задача 3. Обчислити площу повної поверхні циліндра, в якого радіус основи дорівнює 6 см, а осьовим перерізом є прямокутник з діагоналлю, що дорівнює 13 см.

Розв'язання. Основою прямокутника, що є осьовим перерізом (рис. 8.8), буде діаметр циліндра, що дорівнює 2·6=12 см. За теоремою Піфагора знайдемо висоту циліндра з прямокутного трикутника ACD:

$$H = AB = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 169 - 144 = 5 \text{ см}.$$

Площа повної поверхні циліндра:

$$S_{п.п} = 2\pi R(H+R) = 2\pi 6(5+6) = 132\pi .$$

Вписані і описані призми. Призма називається ***вписаною*** в циліндр, якщо її основи – рівні многокутники, вписані в основи циліндра, а бічні ребра є твірними циліндра (рис. 8.10).

Кажуть, що площина дотикається до бічної поверхні циліндра, якщо перетином цієї площини і циліндра є твірна циліндра.

Означення. *Призма називається* ***описаною навколо циліндра****, якщо її основи – рівні многокутники, описані навколо основ циліндра, а бічні грані дотикаються до бічної поверхні циліндра* (рис. 8.11).

Задача 4. Площа осьового перерізу циліндра Q. Знайти площу бічної поверхні вписаної в циліндр правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

Розв'язання. На рис. 8.12 зображено правильну трикутну призму, вписану в циліндр. Площа її бічної поверхні обчислюється за формулою $S_{б.п} = 3a\,H$, де a – сторона основи призми; H – висота призми. Виразимо a через радіус R і діаметр D циліндра, описаного навколо даної призми: $a = \sqrt{3}R = \frac{D\sqrt{3}}{2}$. Тоді

$$S_{б.п} = \frac{3\sqrt{3}}{2}DH . \qquad (8.1)$$

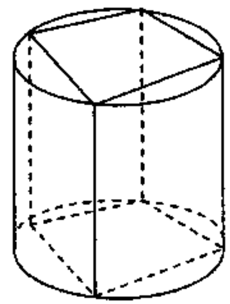


Рис. 8.10

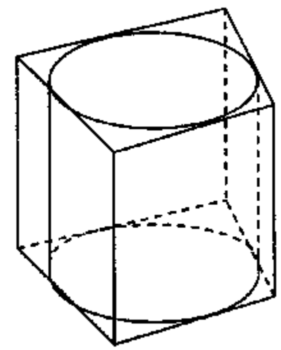


Рис. 8.11

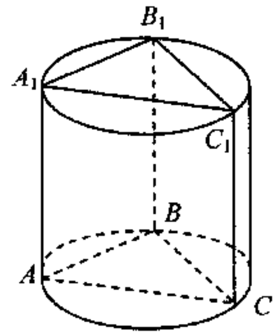


Рис. 8.12

Відомо, що осьовий переріз циліндра – прямокутник, однією стороною якого є діаметр основи, а другою – висота циліндра. За умовою задачі площа осьового перерізу дорівнює Q. Тому $Q=DH$. Звідси і з рівності (8.1) дістанемо $S_{б.п} = \frac{3\sqrt{3}}{2}Q$.

Задачу для випадків 2 і 3 розв'язати самостійно.

8.2. Конус

Означення. ***Конічна поверхня*** *– це поверхня, утворена рухом прямої l, яка переміщується у просторі так, що постійно проходить через задану точку S і перетинає задану плоску криву MAN* (рис. 8.13).

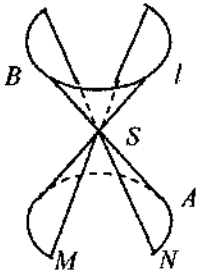
Пряма що рухається, називається ***твірною***, точка S – ***вершиною***, а лінія MAN – ***напрямною*** конічної поверхні. Конічна поверхня складається з двох частин. Одна з цих частин утворюється променем SA, а друга – променем SB. Конічна поверхня називається ***замкненою***, якщо напрямною є замкнена лінія (рис. 8.14).

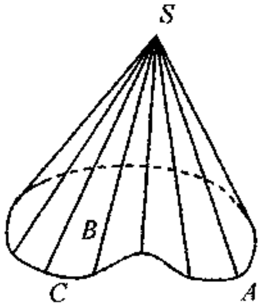
Означення. ***Конусом*** *називається геометричне тіло, обмежене однією частиною замкненої конічної поверхні і площиною, яка перетинає всі твірні цієї поверхні і не проходить через вершину.*

Частина конічної поверхні, обмежена цією площиною, називається ***бічною поверхнею конуса***; частина площини, обмежена конічною поверхнею – ***основою***. Перпендикуляр, проведений з вершини конуса на його основу, називається ***висотою конуса***.

Конус називається ***прямим круговим***, якщо в його основі лежить круг, а висота проходить через центр цього круга.

Такий конус можна розглядати як тіло, отримане при обертанні прямокутного трикутника SOA (рис. 8.15) навколо одного з катетів. Катет SO, навколо якого відбувається обертання, називається ***віссю конуса***. Він дорівнює ***висоті*** конуса. Гіпотенуза SA є ***твірною*** конуса. Другий катет OA дорівнює радіусу основи конуса. У прямого кругового конуса всі твірні рівні.





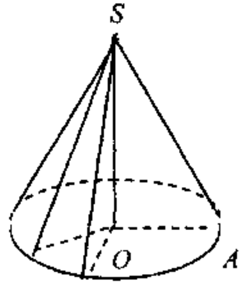
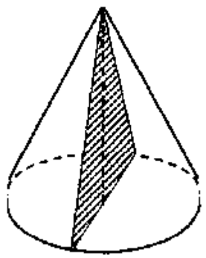


Рис. 8.13 Рис. 8.14 Рис. 8.15

Надалі прямий круговий конус будемо називати просто конусом. Переріз конуса площиною, що проходить через його вісь, називається ***осьовим перерізом***. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник (рис. 8.16), в якого бічні сторони – твірні конуса, а основа – діаметр основи конуса. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає конус по кругу з центром на осі конуса (рис. 8.17).



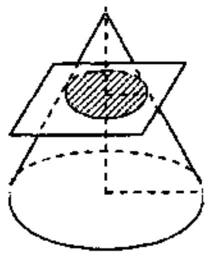


Рис. 8.16 Рис. 8.17

Задача 5. Довести, що якщо конус перетнутий площиною, паралельною основі, то: 1) твірна і висота конуса поділяються цією площиною на пропорційні частини; 2) площі перерізу і основ відносяться, як квадрати їх відстаней від вершини.

Розв'язати самостійно.

Площа поверхні конуса. Якщо бічну поверхню конуса розрізати по твірній SA (рис. 8.18, *а*) і розгорнути її так, щоб ця поверхня лежала в одній площині, то дістанемо сектор (рис. 8.18, *б*).

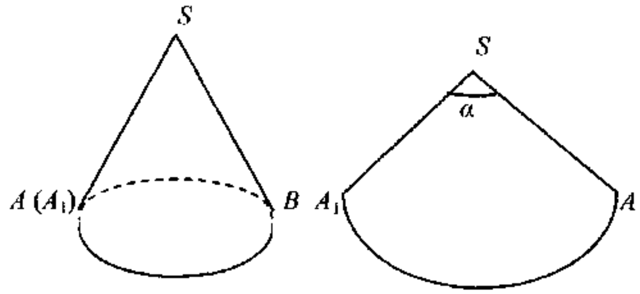


Рис. 8.18

Цей сектор називається *розгорткою бічної поверхні конуса*. Радіус сектора дорівнює твірній конуса, а довжина дуги дорівнює довжині кола основи конуса.

За площу бічної поверхні конуса беруть площу її розгортки, тобто величину $S_{б.п}=\frac{1}{2}\alpha l^2$, де α – радіанна міра кута A_1SA. Оскільки $l\alpha=2\pi R$, то $\alpha=\frac{2\pi R}{l}$. Тоді $\frac{1}{2}\alpha l^2=\frac{1}{2}\frac{2\pi R}{l}l^2=\pi Rl$. Площа бічної поверхні конуса $S_{б.п}=\pi Rl$, де R – радіус основи конуса; l – твірна конуса.

Площею повної поверхні конуса називається сума площ бічної поверхні і основи. Оскільки площа основи дорівнює πR^2, то площа повної поверхні конуса

$$S_{п.к}=S_{б.к}+S_{осн}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(l+R),$$

де R – радіус основи; l – твірна конуса.

Задача 6. Знайти площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 20 см, а кут при вершині осьового перерізу дорівнює 90°.

Р о з в ' я з а н н я. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник ABS (рис. 8.19), в якому $BS=AS$ – твірні конуса, $AO=OB$ – радіуси основи конуса; OS – висота конуса і трикутника ABS. Тому $\angle OSB=\frac{1}{2}\angle ASB=45°$. Розглянемо ΔOSB. Він прямокутний; SB=20 см, $\angle OSB$=45°. Знайдемо OB: $OB=SB\sin 45°=10\sqrt{2}$ см.

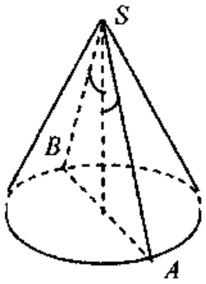


Рис. 8.19

Площу повної поверхні конуса обчислимо за формулою:

$$S_{п.п} = \pi R^2 + \pi Rl = 200\pi + 200\sqrt{2}\pi =$$

$$= 200\pi\left(1+\sqrt{2}\right)\text{см}^2.$$

Відповідь. $200\,\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2.

Зрізаний конус. Частина конуса, що лежить між основою і січною площиною, паралельною основі, називається ***зрізаним конусом*** (рис. 8.20).

Зрізаний конус можна розглядати як тіло, утворене при обертанні прямокутної трапеції $ABCD$ навколо сторони AB (рис. 8.21).

Задача 7. Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса, в якого радіуси основ r і R ($r<R$), а твірна L.

Р о з в ' я з а н н я. Доповнимо даний конус до повного (див. рис. 8.20). Нехай $L=AA_1$ – твірна конуса, $O_1A_1=r$ і $OA=R$ – радіуси основ. Площа бічної поверхні дорівнює різниці бічних поверхонь повного і "маленького" конусів:

$$S = \pi RSA - \pi rSA_1 = \pi RSA_1 + \pi RL - \pi rSA_1 = \pi SA_1\left(R-r\right) + \pi RL.$$

З подібності трикутників SO_1A_1 і SOA маємо $\frac{R}{r}=\frac{SA}{SA_1}$ або $\frac{R-r}{r}=\frac{SA-SA_1}{SA_1}$, $(R-r)\,SA_1=rL$. Підставимо rL замість $(R-r)SA_1$ у вираз для S: $S=\pi RL+\pi rL=\pi\left(R+r\right)L$.

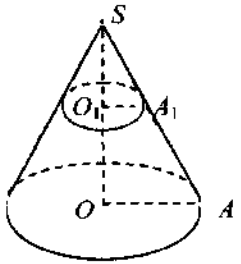


Рис. 8.20

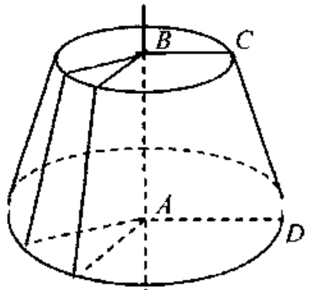
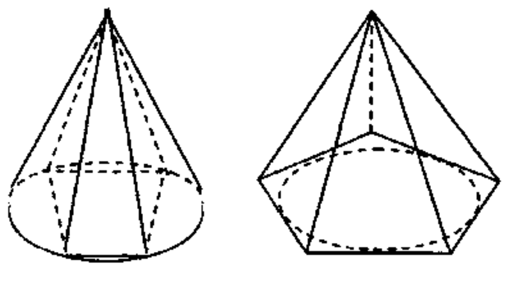


Рис. 8.21

Вписані і описані піраміди. ***Пірамідою, вписаною в конус***, називається така піраміда, основою якої є многокутник, вписаний в коло основи конуса, а вершиною є вершина конуса (рис. 8.22, *а*). Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса. Піраміда називається ***описаною навколо конуса***, якщо її основа – многокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина – вершина конуса (рис. 8.22, *б*).

Задача 8. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і плоским кутом при вершині α. Знайти площу повної поверхні конуса.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $ABCDS$ – вписана піраміда, K – середина сторони її основи. Твірну конуса знайдемо з ΔDSK (рис. 8.23): $DK=\frac{a}{2}$, $\angle DSK=\frac{\alpha}{2}$.



а *б*

Рис. 8.22

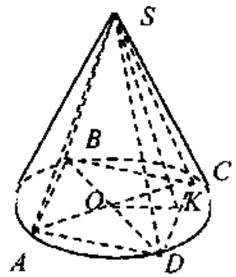


Рис. 8.23

Маємо $l = SD = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Радіус основи конуса дорівнює половині діагоналі основи піраміди: $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Повну поверхню конуса знайдемо за формулою: $S=\pi R\left(R+l\right)$.

Маємо $S = \pi\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = \pi a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Відповідь. $\pi a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$.

8.3. Сфера. Куля

Означення. ***Сферою*** *називається геометричне місце точок простору, розміщених на заданій відстані від даної точки* (рис. 8.24).

Дана точка називається ***центром сфери***, а дана відстань – радіусом сфери. Відрізок, що сполучає центр сфери і якусь точку сфери називається *радіусом сфери*. Відрізок, який сполучає точки сфери і проходить через її центр, називається ***діаметром.***

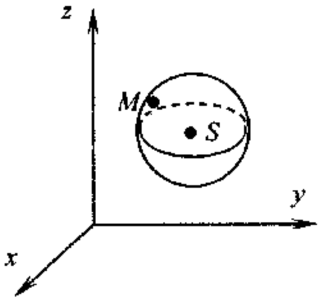


Рис. 8.24

На рис. 8.24 зображено декартову систему координат. У цій системі координат задано сферу з центром у точці $S(a, b, c)$ і радіусом R. Для кожної точки $M(x, y, z)$, що належить сфері, виконується рівність $SM=R$. Для будь-якої точки N, що не належить сфері, рівність $SN=R$ не виконується.

Відстань від точки $A(x_1, y_1, z_1)$ до точки $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюється за формулою

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Тому $SM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, але оскільки точка M лежить на сфері, то $SM=R$. Звідси дістаємо рівняння сфери радіуса R з центром у точці $S(a, b, c)$ для прямокутної системи координат

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Рівняння сфери радіуса R з центром у початку координат має вигляд $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Означення. *Тіло, обмежене сферою, називається* ***кулею.***

Центр, радіус і діаметр сфери називаються також ***центром, радіусом і діаметром кулі.***

Кулю можна розглядати як тіло, утворене при обертанні півкруга навколо його діаметра (рис. 8.25).

Площина, яка проходить через діаметр кулі, – ***діаметральна площина.*** Вона є площиною симетрії кулі і розбиває її на дві рівні півкулі. Переріз кулі її діаметральною площиною називається ***великим кругом.***

Теорема 8.1. *Всякий переріз кулі площиною є круг. Центром цього круга є основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.*

Доведення. На рис. 8.26 зображено кулю з центром O і радіусом R і січну площину α. Із центра кулі на площину опустимо перпендикуляр OO_1. Нехай точка X належить перерізу кулі площиною α. Тоді вона належить і кулі і площині α.

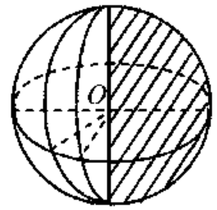


Рис. 8.25

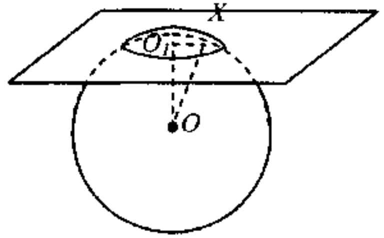


Рис. 8.26

Трикутник OO_1X – прямокутний. Тому $OX^2=OO_1^2+O_1X^2$ і $O_1X=\sqrt{OX^2-OO_1^2}$. Оскільки $OX\le R$, то $O_1X\le\sqrt{R^2-OO_1^2}$, тобто будь-яка точка X, що належить перерізу кулі площиною α, міститься від точки O_1 на відстані, не більшій $\sqrt{R^2-OO_1^2}$. Тому вона належить кругу з центром у точці O_1 і радіусом $r=\sqrt{R^2-OO_1^2}$. Навпаки, будь-яка точка X площини α, що належить кругу з центром у точці O_1 і радіусом r, належить кулі, а це означає, що перерізом кулі площиною є круг із центром у точці O_1, що й потрібно було довести.

Наслідок. *Нехай R і r – радіус кулі і радіус круга перерізу, а d – відстань січної площини від центра. Тоді $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Із цієї формули випливає, що:* 1) *площини, які лежать на однаковій відстані від центра кулі, перетинають кулю по кругах одного радіуса;* 2) *із двох перерізів кулі той ближчий до центра кулі, який має більший радіус;* 3) *найбільший круг у перерізі буде при $d=0$, тобто коли січна площина проходить через центр кулі. У цьому випадку $r=R$; переріз* *є великим кругом;* 4) *найменший радіус перерізу буде при d=R. У цьому випадку r=0, тобто круг перерізу перетворюється в точку. Січна площина і круг мають тільки одну спільну точку*

Означення. *Площина, що має з кулею тільки одну спільну точку, називається **дотичною площиною до кулі**.*

Теорема 8.2. *Радіус кулі, проведений у точку дотику кулі і площини, перпендикулярний до дотичної площини.*

Доведення. На рис. 8.27 зображено кулю з центром O і дотичну площину α; A – точка дотику. Доведемо, що $OA \perp \alpha$. Припустимо, що це не так. Тоді OA – похила до площини α. Отже, відстань від центра кулі до площини α менша, ніж радіус кулі. І тому площина перетинає кулю по кругу. Але це суперечить умові теореми, оскільки дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку. Отримана суперечність доводить, що $OA \perp \alpha$. Справджується і обернена теорема.

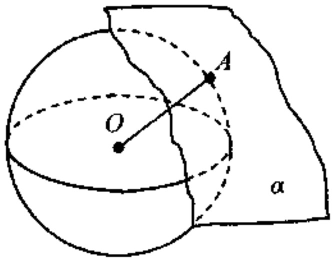


Рис. 8.27

Теорема 8.3. *Якщо радіус кулі перпендикулярний до площини, що проходить через його кінець, що лежить на кулі, то ця площина є дотичною до кулі.* Довести самостійно.

8.4. Об'єм циліндра, конуса, кулі

Теорема 8.4. *Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.*

Доведення. Нехай H – висота циліндра, S – площа його основи.

1. Покажемо спочатку, що циліндр має об'єм. Нехай ε – будь-яке додатне число. Площа S круга, що є основою циліндра, при достатньо великому n як завгодно мало відрізняється від площ $S(P_n)$ і $S(Q_n)$ вписаних і описаних правильних n-кутників P_n і Q_n. Тому можна взяти такий вписаний n-кутник P_n і такий описаний n-кутник Q_n, що $S(Q_n)-S(P_n)<\dfrac{\varepsilon}{H}$. Побудуємо прямі призми K_n і L_n з основами P_n і Q_n і висотою H. Призма K_n вписана в циліндр (позначимо його через T), призма L_n описана навколо нього. Об'єми призм дорівнюють: $V(K_n)=S(P_n)H$, $V(L_n)=S(Q_n)H$. При цьому

$$V(L_n)-V(K_n)=S(Q_n)H-S(P_n)H=H\big(S(Q_n)-S(P_n)\big)<H\frac{\varepsilon}{H}=\varepsilon.$$

Звідси і з властивостей об'єму випливає, що циліндр має об'єм.

2. Розглянемо циліндр і пряму призму, в яких рівні висоти H і площі основ S, причому основи належать даній площині α (рис. 8.28).

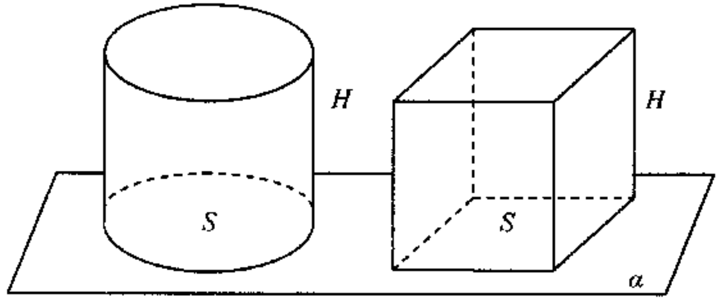


Рис. 8.28

Будь-яка січна площина, паралельна площині α, перетинає зазначені тіла по фігурах, що дорівнюють основам. Тому площі зазначених перерізів однакові і дорівнюють S.

За принципом Кавальєрі ці тіла мають рівні об'єми. Оскільки об'єм призми дорівнює SH, то об'єм циліндра також дорівнює SH, де S – площа основи, H –висота. Теорему доведено

Оскільки основою циліндра є круг радіуса R, то площа основи дорівнює πR^2. **Об'єм циліндра** $V=\pi R^2 H$, де R – радіус основи; H – висота циліндра.

Задача 9. Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 5, основа розгортки бічної поверхні 8.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – прямокутник, який є розгорткою бічної поверхні циліндра (рис. 8.29). Тоді його бічна сторона AB є висотою циліндра: $H=AB=5$. Основа прямокутника дорівнює довжині кола основи циліндра.

З формули довжини кола $C=2\pi R=8$ знайдемо радіус основи циліндра $R=\dfrac{C}{2\pi}=\dfrac{8}{2\pi}=\dfrac{4}{\pi}$.

За формулою об'єму циліндра дістаємо $V=\pi\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2 5=\dfrac{80}{\pi}$.

Відповідь. $\dfrac{80}{\pi}$.

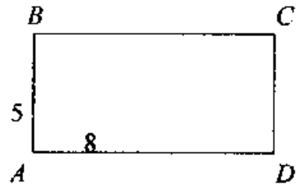


Рис. 8.29

Теорема 8.5. *Об'єм конуса дорівнює* $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, *де* H *– висота конуса;* R *– радіус основи.*

Довести теорему самостійно.

Вказівка. Використати доведення попередньої теорема. Замість числа $\frac{\varepsilon}{H}$ взяти число $\frac{3\varepsilon}{H}$. Вписати в конус і описати навколо нього правильні n-кутні піраміди. Застосувати принцип Кавальєрі для порівняння об'ємів конуса і піраміди з рівновеликими основами і рівними висотами.

Задача 10. Довести, що об'єм зрізаного конуса дорівнює $V=\frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)$. Розв'язати самостійно.

Об'єм кулі. Нехай куля радіуса R дотикається до площини основи циліндра з висотою $2R$ і радіусом основи R (рис. 8.30).

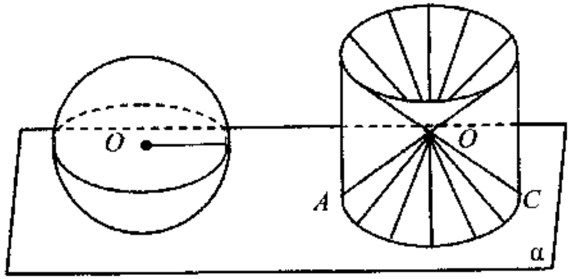


Рис. 8.30

Нехай із циліндра вирізано два конуси, основами яких є основи циліндра, а спільною вершиною є середина осі циліндра. Від циліндра залишиться тоді деяке тіло, об'єм якого дорівнює об'єму нашої кулі. Це можна довести, використовуючи принцип Кавальєрі [2]. Але об'єм тіла, що залишилося від циліндра, дорівнює об'єму циліндра без подвоєного об'єму конуса:

$$\pi R^2\ 2R-2\frac{1}{3}\pi R^2 R=2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отже, об'єм кулі радіуса R можна обчислити за формулою:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Вписана куля. Куля називається ***вписаною*** в многогранник (або конус чи циліндр), якщо вона дотикається до всіх граней многогранника (основи конуса або до основ циліндра і всіх їх твірних).

Задача 11. У конус вписано кулю. Визначити об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює l і утворює з основою кут 60°.

Розв'язання. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник ABC (рис. 8.31). Оскільки $\angle BCA=60^\circ$, то ΔABC – рівнобедрений. Осьовий переріз конуса перетинає кулю по великому кругу. Отже, радіус кулі, вписаної в конус, дорівнює радіусу круга, вписаного в ΔABC. Оскільки сторони ΔABC дорівнюють l, то $R=\frac{l\sqrt{3}}{6}$.

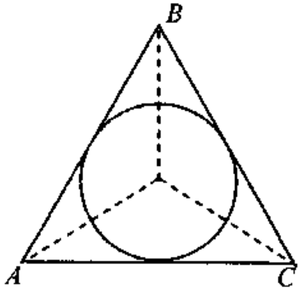


Рис. 8.31

Тоді об'єм кулі дорівнює:

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{\pi\sqrt{3}l^3}{54}.$$

Відповідь. $\frac{\pi\sqrt{3}l^3}{54}$.

Задача 12. Об'єм многогранника, описаного навколо кулі, дорівнює добутку повної поверхні многогранника на третину радіусу кулі. Довести.

Довести самостійно.

8.5. Площа сфери

Нехай T – сфера радіуса R. Візьмемо за її площу об'єм як завгодно "тонкого" поверхневого шару кулі радіуса R. Нехай радіус кулі збільшився на величину h (рис. 8.32). Тоді об'єм кулі збільшиться на величину ΔV:

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(R+h)^3-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(R^3+3R^2h+3Rh^2+h^3-R^3\right)=$$
$$=\frac{4}{3}\pi\left(3R^2h+3Rh^2+h^3\right).$$

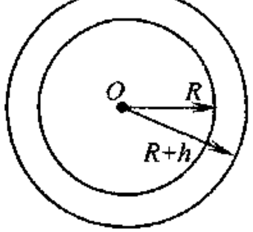


Рис. 8.32

Маємо:

$$\frac{\Delta V}{h}=\frac{4}{3}\pi\frac{3R^2h+3Rh^2+h^3}{h}=$$

$$=4\pi R^2+4\pi Rh+\frac{4}{3}\pi h^2.$$

Якщо h як завгодно мала величина, то доданки $4\pi Rh$ і $\frac{4}{3}\pi h^2$ також як завгодно малі. Тому площа сфери радіуса R дорівнює

$S_{сф}=4\pi R^2$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Квадрат, площа якого Q, обертається навколо сторони. Знайдіть площу осьового перерізу отриманого тіла.

2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 5. Знайдіть площу бічної і повної поверхні циліндра.

3. Два циліндри утворені обертанням одного й того самого прямокутника (зі сторонами 5 і 8 см) навколо його суміжних сторін. Як відносяться площі їхніх бічних поверхонь?

4. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$, радіус основи дорівнює 4 см. Знайдіть висоту і твірну конуса.

5. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $90°$. Твірна конуса – 10 см. Знайдіть площу основи конуса і висоту конуса.

6. Знайдіть площу перерізу конуса площиною, що паралельна основі і проходить через середину висоти, якщо радіус конуса дорівнює 12 см.

7. Твірна конуса дорівнює 10 см. Радіус основи – 3 см. Обчисліть площу бічної і повної поверхні.

8. Висота конуса дорівнює 10 см, а твірна – 13 см. Обчисліть площу бічної і повної поверхонь.

9. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Обчисліть площу поверхні конуса.

10. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 12 см^2, діаметр основи – 6 см. Знайдіть поверхню конуса.

11. Твірна конуса дорівнює 4 см, а кут при вершині осьового перерізу $90°$. Знайдіть площу бічної і повної поверхні.

12. Яку фігуру дістанемо при перетині двох великих кругів однієї і тієї самої кулі?

13. Через які дві точки поверхні кулі можна провести кілька кіл великого круга?

14. Куля радіусом 5 см перетнутий площиною, віддаленою від центра на 3 см. Обчисліть площу круга, утвореного в перерізі.

15. Переріз кулі площиною, віддаленою від його центра на відстань 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть радіус кулі.

16. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, яка проходить через середину радіуса і перпендикулярна йому, якщо площа великого круга дорівнює P.

17. Висота циліндра дорівнює 10 см. Радіус основи – 2 см. Обчисліть об'єм циліндра.

18. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 5 см. Знайдіть об'єм циліндра.

19. Два циліндри утворено обертанням одного і того самого прямокутника (його розміри 5 і 3 см) навколо кожної із суміжних його сторін. Як відносяться об'єми циліндрів?

20. Твірна конуса дорівнює 9 см. Радіус основи – 3 см. Обчисліть об'єм конуса.

21. Висота конуса дорівнює 10 см, а твірна – 13 см. Обчисліть об'єм конуса.

22. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Обчисліть об'єм конуса.

23. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 12 см^2, діаметр основи – 6 см. Знайдіть об'єм конуса.

24. Обчисліть об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 8 см.

25. Об'єм кулі дорівнює V. Визначте її радіус.

26. Діаметр однієї кулі є радіусом іншої кулі. Як відносяться їхні об'єми?

27. Переріз кулі площиною, віддаленою від її центра на відстань 3 см, має радіус 4 см. Знайдіть: а) радіус кулі; б) об'єм кулі.

28. У скільки разів потрібно збільшити діаметр кулі, щоб її об'єм збільшився у 2 рази?

29. Ребро куба дорівнює a. Обчисліть об'єм кулі, вписаної в куб.

30. У скільки разів потрібно збільшити діаметр кулі, щоб її площа збільшилась у 2 рази?

31. У скільки разів потрібно збільшити об'єм кулі, щоб її площа збільшилась у 2 рази?

32. Знайдіть відношення об'ємів куль: вписаної в куб і описаної навколо нього.

33. Знайдіть відношення об'ємів куль: вписаної в конус і описаної навколо нього, якщо висота конуса в два рази більша від радіуса його основи .

34. Знайдіть відношення об'ємів конусів: вписаного в кулю і описаного навколо неї, якщо висоти конусів в три рази більші, ніж радіуси їхніх основ.

РОЗДІЛ 9

ВЕКТОРИ

9.1. Основні означення

Вектором називають напрямлений відрізок. Вектори розглядають на площині (двовимірні) і в просторі (тривимірні). В обох випадках вектор визначається впорядкованою парою точок, перша з яких – початок вектора, друга – кінець вектора; вектор напрямлений від початку до кінця. На рисунку вектор зображується стрілкою (рис. 9.1).

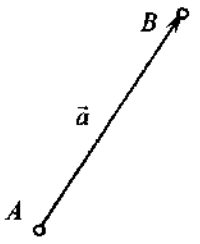


Рис. 9.1

Для позначення векторів використовують символи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ і т. д.; якщо A і B – відповідно точки початку і кінця вектора, то цей вектор позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\overline{AB}$. Довжина відрізка AB називається *модулем* (абсолютною величиною, довжиною) вектора $\overrightarrow{AB}$. Модуль вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Якщо початок вектора збігається з його кінцем, то вектор називається *нульовим* (позначається 0 або $\bar{0}$). Модуль нульового вектора дорівнює нулю. Напрямленими відрізками зображуються тільки ненульові вектори.

Два ненульових вектори називаються *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути однаково напрямленими (вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ на рис. 9.2) або протилежно напрямленими (вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на рис. 9.3).

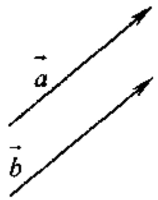


Рис. 9.2

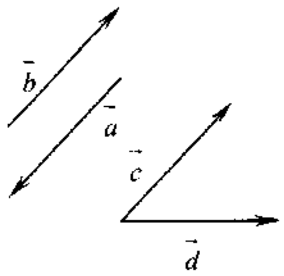


Рис. 9.3

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені, їх називають ***співнапрямленими*** і пишуть $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Протилежно напрямлені вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ позначають так: $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два ненульових вектори називаються ***рівними,*** якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакові модулі.

Зауважимо, що рівність $\vec{a}=\vec{b}$ означає $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ і $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Усі нульові вектори дорівнюють один одному.

На рис. 9.2 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а на рис. 9.3 – нерівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

З означення рівності векторів випливає, що від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному вектору, і тільки один.

Будемо казати, що ненульовий вектор $\overline{AB}$ паралельний площині, якщо пряма AB паралельна цій площині.

Ненульові вектори називають ***компланарними***, якщо вони паралельні одній і тій самій площині.

Будь-які два вектора завжди компланарні, а три вектори можуть і не бути компланарними.

На рис. 9.4 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{C_1B_1}$ компланарні, а вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ не є компланарними.

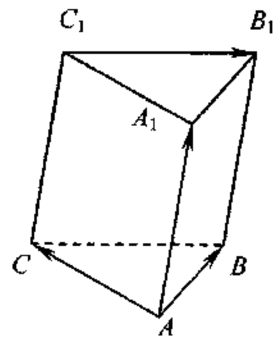


Рис. 9.4

9.2. Лінійні операції над векторами

Додавання векторів і множення вектора на число називаються ***лінійними операціями над векторами.***

Введемо означення і основні властивості цих операцій.

Нехай дані два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9.5). Від кінця вектора $\vec{a}$ відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\overrightarrow{AC}$, що йде від початку вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ в кінець вектора $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Це правило додавання векторів називається ***правилом трикутника***. Воно застосовується і в тому разі, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні (рис.9.6 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$).

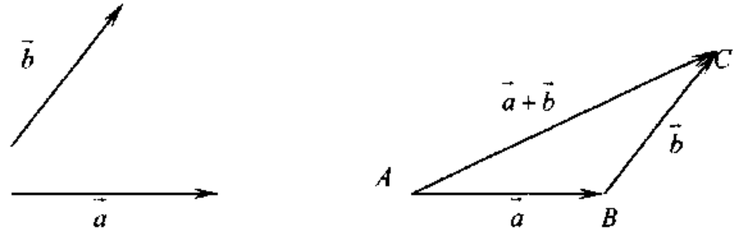


Рис. 9.5

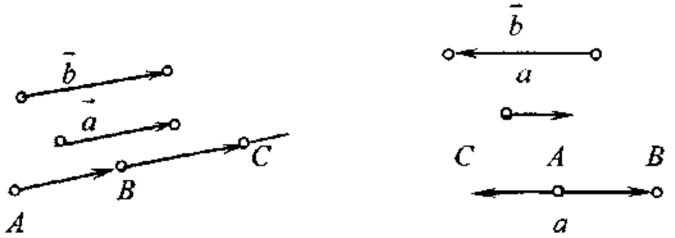


Рис. 9.6

Суму векторів можна знаходити і за ***правилом паралелограма***: сумою двох неколінеарних векторів є вектор, що зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, що має з ними спільний початок (рис. 9.7).

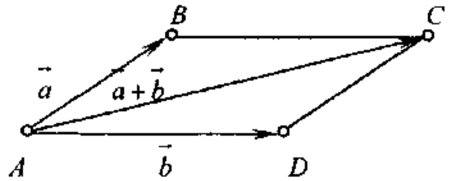


Рис. 9.7

Закони додавання векторів

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставний закон).

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сполучний закон)

3. $\vec{a}+0=\vec{a}$.

Сума трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначається як сума вектора $\vec{a}+\vec{b}$ і вектора $\vec{c}$ (рис. 9.8).

Згідно із сполучним законом $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, тому сума трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ записується без дужок: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Аналогічно визначається сума будь-якої кількості векторів, наприклад $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}==(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}$.

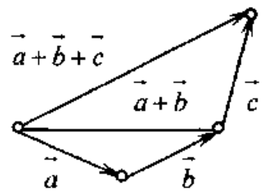


Рис. 9.8

На рис. 9.9 показано, як визначається сума векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ за правилом многокутника.

Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то їхня сума може бути знайдена за ***правилом паралелепіпеда***: вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ зображується діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, що мають спільний початок (рис. 9.10). Справді:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AD}+\overline{DD_1}=\overline{OD_1}.$$

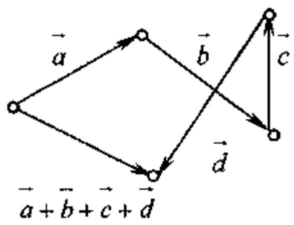


Рис. 9.9

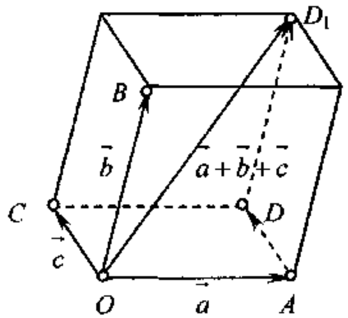


Рис. 9.10

Нехай вектор $\vec{a}$ визначається впорядкованою парою точок (A, B): $\vec{a}=\overline{AB}$. Вектор, що визначається упорядкованою парою точок (B, A), називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$: $-\vec{a}=\overline{BA}$.

Сумою вектора і йому протилежного вектора є нульовий вектор (початок і кінець вектора збігаються):

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0 \text{ або } \overline{AB}+\overline{BA}=0.$$

Очевидно, що довжини вектора $\vec{a}$ і йому протилежного вектора рівні, а напрями цих векторів протилежні:

$$|\vec{a}|=|-\vec{a}|,\ \vec{a}\uparrow\downarrow(-\vec{a}).$$

Різницею $\vec a-\vec b$ двох векторів $\vec a$ *і* $\vec b$ називається сума вектора $\vec a$ і вектора, протилежного вектору $\vec b$, тобто

$$\vec a-\vec b=\vec a+(-\vec b).$$

Якщо $\overline{OA}=\vec a$ і $\overline{OB}=\vec b$ (рис. 9.11), то вектор $\vec a-\vec b$ зображається напрямленим відрізком

$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$.

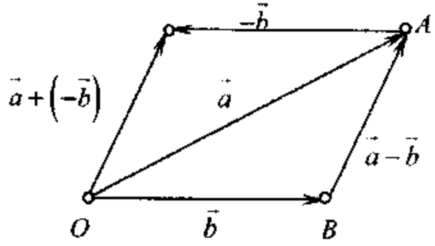


Рис. 9.11

Зауважимо, що коли на векторах $\vec a$ і $\vec b$, відкладених від спільного початку *O*, можна побудувати паралелограм (рис. 9.12), то довжина діагоналі, що має той самий початок *O*, дорівнює довжині вектора $\vec a+\vec b$, а довжина другої діагоналі дорівнює довжині вектора $\vec a-\vec b$:

$$OC=\left|\vec a+\vec b\right|,\ BA=\left|\vec a-\vec b\right|.$$

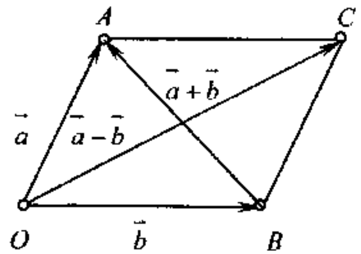


Рис. 9.12

Якщо $\vec c=\vec a-\vec b$, то $\vec a=\vec c+\vec b$. Справді,

$$\vec c+\vec b=(\vec a-\vec b)+\vec b=(\vec a+(-\vec b))+\vec b=\vec a+((-\vec b)+\vec b)=\vec a+0=\vec a.$$

Це показує, що доданки у векторних рівностях можна переносити з однієї частини рівності в іншу.

Означення. ***Добутком ненульового вектора*** $\vec a$ ***на число*** $x\neq 0$ *називається вектор, довжина якого дорівнює* $|x|\cdot|\vec a|$ *і який співнапрямлений вектору* $\vec a$ *при* $x>0$ *і протилежно напрямлений при* $x<0$. Добуток вектора $\vec a$ на число x позначається $x\cdot\vec a=x\vec a$.

Добуток нульового вектора на будь-яке число і добуток будь-якого числа на нуль за означенням вважається таким, що дорівнює нульовому вектору $x\cdot\vec 0=0$, $0\cdot\vec a=0$.

Закони множення векторів на числа

1. $x\left(y\vec a\right)=\left(xy\right)\vec a$ (сполучний закон).

$$\left.\begin{array}{l}2.\ x\vec a+y\vec a=\left(x+y\right)\vec a,\\ 3.\ x\vec a+x\vec b=x\left(\vec a+\vec b\right)\end{array}\right\}\text{ (розподільні закони).}$$

4. $0\cdot\vec a=x\cdot\vec 0=0$.

З означення добутку вектора на число дістаємо таку ***ознаку колінеарності*: вектор $\vec b$ колінеарний ненульовому вектору $\vec a$ тоді і тільки тоді, коли існує таке число x, що $\vec b=x\vec a$.**

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним.***

З ознаки колінеарності випливає така лема.

Лема (про неколінеарні вектори). *Для неколінеарних векторів* $\vec a$ *і* $\vec b$ *рівність* $x\vec a+y\vec b=0$ *виконується тільки тоді, коли* $x=y=0$.

Справді, припустимо, наприклад, що $x\neq 0$, тоді з рівності $x\vec a+y\vec b=0$ отримаємо $\vec a=-\dfrac{y}{x}\vec b$, а це суперечить тому, що вектори $\vec a$ і $\vec b$ неколінеарні. Тому, $x=0$. Аналогічно можна показати, що $y=0$.

Задача 1. Із трьох ненульових векторів $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ кожні два неколінеарні. Знайти суму $\vec a+\vec b+\vec c$, якщо $\vec a+\vec b$ колінеарний $\vec c$, а $\vec b+\vec c$ колінеарний вектору $\vec a$.

Р о з в ' я з а н н я . Оскільки вектори $\vec a+\vec b$ і $\vec c$ колінеарні, то існує таке число $k\neq 0$, що $\vec a+\vec b=k\vec c$, аналогічно для деякого числа $m\neq 0$ маємо $\vec b+\vec c=m\vec a$. Отже, $\vec a+\vec b+\vec c=k\vec c+\vec c=(k+1)\vec c$ і одночасно $\vec a+\vec b+\vec c=\vec a+m\vec a=(m+1)\vec a$.

Таким чином, $(k+1)\vec{c}=(m+1)\vec{a}$, або $(k+1)\vec{c}-(m+1)\vec{a}=0$. З леми випливає, що $k+1=m+1=0$, $k=m=-1$. Отже, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{c}+\vec{c}=0$.

Відповідь. 0.

Теорема 9.1. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то будь-який компланарний з ними вектор $\vec{c}$ можна єдиним чином подати у вигляді $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.*

Таке подання називається ***розкладанням вектора $\vec{c}$ на площині за двома неколінеарними векторами*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і вектор $\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{b}$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

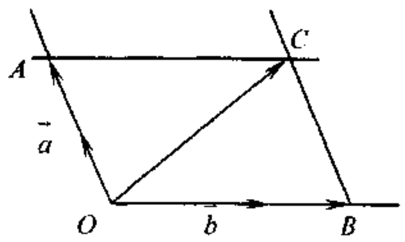


Рис. 9.13

Доведення. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лежать в одній площині, зведемо їх до одного початку. Через кінець вектора $\vec{c}$ проведемо прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9.13). $OACB$ – паралелограм, вектор $\overline{OA}$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{a}$, тому $\overline{OA}=x\vec{a}$; аналогічно, $\overline{OB}=y\vec{b}$, тому $\vec{c}=\overline{OA}+\overline{OB}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Припустимо, що існує інше подання $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}$, тоді $x\vec{a}+y\vec{b}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}$, тобто виконується рівність $(x-x_1)\vec{a}+(y-y_1)\vec{b}=0$. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то за лемою про неколінеарні вектори це можливо тільки у випадку $x-x_1=0$ і $y-y_1=0$.

Якщо вектор $\vec{c}$ колінеарний одному з векторів, наприклад $\vec{a}$, то $\vec{c}=x\vec{a}$ і очевидно, що $\vec{c}=x\vec{a}+0\cdot\vec{b}$. Теорему доведено.

Неважко побачити, що справджується обернене твердження: якщо деякий вектор $\vec{c}$, розкладений за двома неколінеарним векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Справді, нехай $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Якщо числа x і y не дорівнюють нулю, то вектори $x\vec{a}$ і $y\vec{b}$ також неколінеарні. Відкладемо ці вектори від деякої точки $O: x\vec{a}=\overline{OA}$ і $y\vec{b}=\overline{OB}$. Тоді вектор $\vec{c}$ зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$.

Тому точки O, A, B і C лежать в одній площині і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Якщо ж одне з чисел, наприклад x, дорівнює нулю, то $\vec{c}=y\vec{b}$ і, отже, вектор $\vec{c}$ – колінеарний вектору $\vec{b}$, а тому компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Таким чином, справджується така *ознака (критерій) компланарності трьох векторів*: ***якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то вектор $\vec{c}$ компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли справджується розкладання $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.***

Нульовий вектор за означенням вважається компланарним із будь-якими двома векторами.

Теорема 9.2. *Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}. \tag{9.1}$$

Це подання називається *розкладом вектора $\vec{d}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$*, і вектор $\vec{d}$ називається ***лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.***

Доведення. 1) Якщо $\vec{d}=0$, то слід взяти $x=y=z=0$.

2) Нехай $\vec{d}\neq 0$, але $\vec{d}$ компланарний з якоюсь парою векторів узятих із трійки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Наприклад, із $\vec{b}$ і $\vec{c}$; тоді існують числа y і z, що обидва одночасно не дорівнюють нулю, для яких $\vec{d}=y\vec{b}+z\vec{c}$ і при $x=0$ матимемо потрібний розклад (9.1).

3) Нехай $\vec{d}$ некомпланарний з жодною парою векторів з трійки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Відкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (вони всі ненульові) від деякої точки O. Проведемо через точку D пряму, паралельну вектору OC (рис. 9.14). Нехай D_1 – точка перетину цієї прямої з площиною векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді

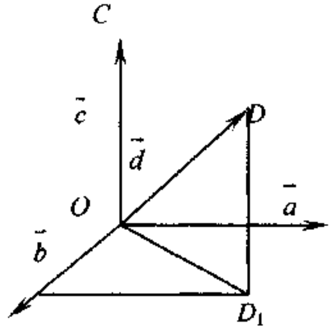


Рис. 9.14

$\overline{OD_1}=x\vec{a}+y\vec{b}$,

де $x^2+y^2\neq 0$, і $\overline{D_1D}=z\vec{c}$.

Оскільки $\vec{d}=\overline{OD_1}+\overline{D_1D}$, то звідси дістаємо (9.1).

Теорему доведено.

Задача 2. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ діагональ CB_1 ділиться точкою M у відношенні $CM:MB_1=1:2$ (рис. 9.15). Знайти розклад вектора $\overrightarrow{AM}$ по векторах $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

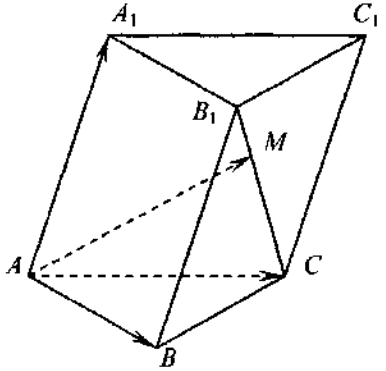


Рис. 9.15

Р о з в ' я з а н н я . Маємо з ΔBB_1C:

$$\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

Отже, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$. Тоді

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right).$$

9.3. Кут між векторами. Скалярний добуток векторів

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Таким чином, якщо від однієї точки відкласти вектори $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{ON}$ (рис. 9.16), то величина кута MON є за означенням кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Цей кут позначається $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

Кут між векторами може набувати значень від 0 до 180°. Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0°, а між протилежно напрямленими – 180°.

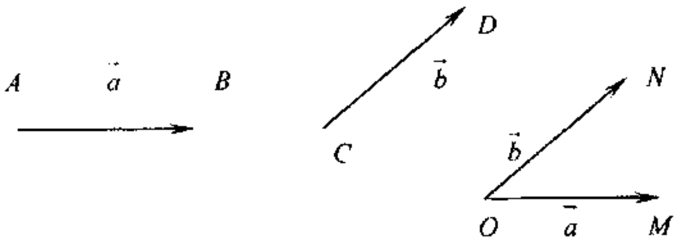


Рис. 9.16

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 90°, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***перпендикулярними***, або ***ортогональними***. Тоді записують $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Задача 3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут що дорівнює 120°, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$ (рис. 9.17).

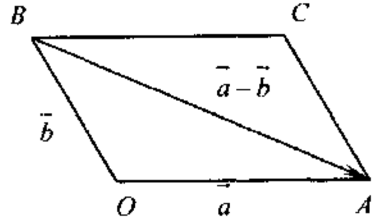


Рис. 9.17

Р о з в ' я з а н н я . Оскільки $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, де BA – діагональ паралелограма $OBCA$, побудованого на векторах $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ як на сторонах, то за теоремою косинусів з ΔOAB маємо:

$$AB^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle AOB,$$

$$AB^2=9+16-2\cdot3\cdot4\cos120°=25+2\cdot3\cdot4\cdot0{,}5=27.$$

Отже, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\,\vec{b}$.

Таким чином,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.
2. $\vec{a}\,\,\vec{b}=\vec{b}\,\,\vec{a}$.
3. $\left(x\vec{a}\right)\vec{b}=x\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\vec{b}=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{c}\,\vec{b}$.

Наприклад, використовуючи ці властивості, дістанемо:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{a}-\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}-\vec{b}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2.$$

5. Якщо один з векторів нульовий, то скалярний добуток за означенням дорівнює нулю: $\vec{a}\,\,\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{b}=0$.

6. Скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює квадрату його довжини:

$$\vec{a}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2.$$

7. Скалярний добуток векторів додатний, якщо кут між ними гострий, скалярний добуток від'ємний, якщо кут між векторами тупий.

8. Якщо кут між векторами дорівнює 90°, то косинус цього кута дорівнює нулю і скалярний добуток цих векторів також дорівнює нулю.

Правильне й обернене твердження: якщо скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні. Отже, виконується така теорема.

Теорема 9.3. *Два ненульових вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.*

Задача 4. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{c}=5\vec{a}+4\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. За попередньою теоремою

$$0=\vec{c}\,\vec{d}=\left(5\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=5(\vec{a})^2-10\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}\vec{a}-8(\vec{b})^2=$$

$$=5(\vec{a})^2-8(\vec{b})^2-6\vec{a}\vec{b}.$$

Оскільки $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, то $6\cos\varphi=-3$, $\cos\varphi=-0{,}5$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отже, $\varphi=120°$.

Задача 5. Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\left(\vec{b}\vec{c}\right)\vec{a}-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$ і $\vec{c}$ перпендикулярні. Довести.

Доведення.

$$\left(\left(\vec{b}\vec{c}\right)\vec{a}-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\left(\vec{b}\vec{c}\right)\vec{a}\right)\vec{c}-\left((\vec{a}\vec{c})\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\vec{c}\right)(\vec{a}\vec{c})-(\vec{a}\vec{c})\left(\vec{b}\vec{c}\right)=$$

$$=\left(\vec{b}\vec{c}\right)(\vec{a}\vec{c})-\left(\vec{b}\vec{c}\right)(\vec{a}\vec{c})=0.$$

Отже, ці вектори перпендикулярні.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові, то косинус кута між цими векторами визначається за формулою

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}. \tag{9.2}$$

Задача 6. Знайти кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо дві його медіани взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Якщо одна з цих медіан проведена до основи, то вона буде також і висотою. Тоді медіана, що їй перпендикулярна, буде паралельна основі. Оскільки ця друга медіана має з основою спільну точку, то вони лежать на одній прямій. З одержаної суперечності випливає, що обидві взаємно перпендикулярні медіани проведені до бічних сторін трикутника (рис. 9.18). Тоді якщо $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a}$,

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-2\vec{a}\right);$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{c}-\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{c}\right).$$

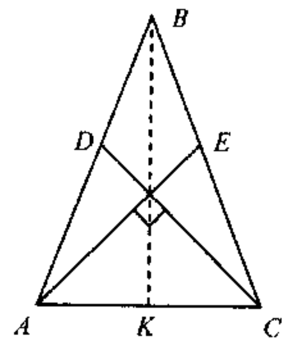


Рис. 9.18

За умови $0=\overline{AE}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{4}\left(\vec{c}-2\vec{a}\right)\left(\vec{a}-2\vec{c}\right)$.

Звідси $5\vec{a}\vec{c}-2(\vec{c})^2-2(\vec{a})^2=0$. Оскільки, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то звідси $\cos\varphi=\frac{4}{5}$, $\varphi=\arccos\frac{4}{5}$, де $\varphi=\angle ABC$.

9.4. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Вектори на площині. Якщо через деяку точку O площини проведено дві взаємно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку, то кажуть, що на цій площині задано прямокутну декартову систему координат (рис. 9.19).

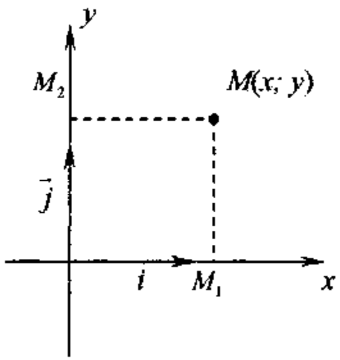


Рис. 9.19

Прямі називається ***осями координат***, позначаються Ox, Oy і називаються: Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат. Їх спільний початок називається ***початком координат.*** Уся система координат позначаються Oxy.

Нехай M_1, M_2, – ортогональні проекції точки M відповідно на координатні осі Ox, Oy. Точка M_1, як точка координатної прямої Ox, має координату x, аналогічно, точка M_2 на координатній прямій Oy має координату y. Упорядкована пара чисел x, y називається ***координатами точки*** M, координати пишуться в круглих дужках $M(x; y)$. Відповідність між точками і їх координатами взаємно однозначна.

Нехай вектор $\vec{a}$ має початок у точці $A(x_1; y_1)$ і кінець в точці $B(x_2; y_2)$. Два числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{a}$, пишеться $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ або $\vec{a}=(a_1; a_2)$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати; якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні. Векторна рівність $\vec{a}=\vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$, рівносильна системі двох скалярних рівностей: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$.

Одиничні вектори, що мають напрямлення додатних координатних півосей, називаються ***координатними векторами*** або ***ортами***. Координатні вектори осей абсцис і ординат позначимо відповідно $\vec{i}$, $\vec{j}$ (рис. 9.19). Очевидно, $\vec{i}=(1; 0)$, $\vec{j}=(0; 1)$.

Якщо вектор заданий своїми координатами $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$, то виконується рівність $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$, яка називається ***розкладанням вектора*** $\vec{a}$ ***по координатних векторах.***

Справджуються такі правила дій над векторами, заданими своїми координатами:

1. При додаванні векторів $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}$ $(b_1; b_2)$ їх відповідні координати додаються:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

2. При множенні вектора $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ на число всі його координати помножуються на це число:

$m\vec{a}=(ma_1; ma_2)$.

3. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}$ $(b_1; b_2)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат:

$\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

4. Модуль вектора $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ дорівнює

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Задача 7. Знайти значення m при якому вектори $\vec{a}=(m; -12)$ і $\vec{b}=(4;-6)$ колінеарні.

Р о з в ' я з а н н я. За умовою колінеарності $\vec{a}=p\vec{b}$, отже $m=4p$, $-12=-6p$. Звідси: $p=2$, $m=8$.

Відповідь. $m=8$.

Вектори в просторі. Якщо через деяку точку O проведено три взаємно перпендикулярні координатні прямі з спільним початком відліку, то кажуть, що задано ***прямокутну декартову систему координат*** (рис. 9.20). Прямі називаються ***осями координат***, позначаються Ox, Oy, Oz і називаються: Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат. Їхній спільний початок називається ***початком координат.*** Площини, що проходять через кожні дві координатні осі, називаються ***координатними площинами***, таких площин три: Oxy, Oxz, Oyz. Уся система координат позначаються $Oxyz$.

Нехай M_1, M_2, M_3 – ортогональні проекції точки M відповідно на координатні осі Ox, Oy, Oz. Точка M_1 як точка координатної прямої Ox має координату x, аналогічно, точки M_2 і M_3 на координатних прямих Oy і Oz мають координати y і z. Упорядкована трійка чисел x, y, z називається ***координатами точки M***, координати пишуться в круглих дужках $M(x;\ y;\ z)$. Відповідність між точками і їх координатами взаємно однозначна.

Нехай вектор $\vec{a}$ має початок у точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінець в точці $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Три числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ і $a_3=z_2-z_1$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{a}$, пишеться $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ або $\vec{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати; якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні. Векторна рівність $\vec{a}=\vec{b}$, якщо $\vec{a}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\vec{b}\ (b_1;\ b_2;\ b_3)$, рівносильна системі трьох скалярних рівностей: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$.

Одиничні вектори, що мають напрями додатних координатних півосей, називаються ***координатними векторами*** або ***ортами***. Координатні вектори осі абсцис, ординат і аплікат позначимо відповідно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 9.21). Очевидно, $\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$.

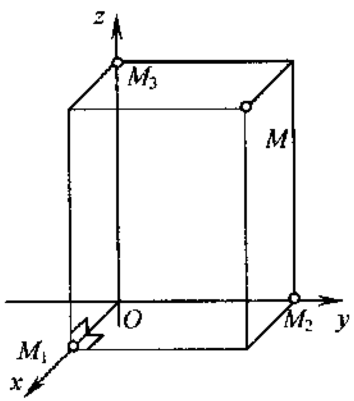


Рис. 9.20

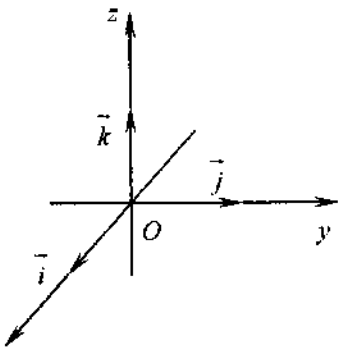


Рис. 9.21

Якщо вектор $\vec{a}$ заданий своїми координатами $\vec{a}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$, то виконується рівність $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, яка називається ***розкладанням вектора a за координатними векторами.***

Нехай $\vec{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\vec{b}=(b_1;\ b_2;\ b_3)$. Аналогічно плоскому випадку, дії над векторами, заданими своїми координатами, виконуються за такими правилами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.
2. $m\vec{a}=(ma_1;ma_2;ma_3)$.
3. $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.
4. $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Задача 8. Знайти координати і довжину вектора $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$, якщо точки A, B, C мають такі координати: $A(1, 3, -4)$, $B(2, 0, 1)$, $C(2, 1, 3)$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}=(2-1;0-3;1-(-2))=(1;-3;3)$.

$\overrightarrow{BC}=(2-2;1-0;3-1)=(0;1;2)$, $2\overrightarrow{BC}=(0;1;2)$.

Отже, $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=(3-0;-9-1;9-2)=(3;-10;7)$, і

$\left|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3^2+(-10)^2+7^2}=\sqrt{9+100+49}=\sqrt{158}$.

Задача 9. Знайти значення n, при якому вектори $\vec{a}=(3;-1;n)$ і $\vec{b}=(2;3;5)$ перпендикулярні.

Розв'язання. За умовою перпендикулярності скалярний добуток $\vec{a}\,\vec{b}$. Отже, $3\cdot2-1\cdot3+5n=0$, $n=-\dfrac{3}{5}$.

Відповідь. $n=-\dfrac{3}{5}$.

Задача 10. Знайти кут φ між векторами $\vec{a}=(2;\ -1;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 6;\ -6)$.

Розв'язання.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{2\cdot3-1\cdot6-2(-6)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}}=\frac{12}{\sqrt{9}\sqrt{81}}=\frac{4}{9}.$$

Відповідь. $\varphi=\arccos\dfrac{4}{9}$.

Задача 11. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\vec{b}=42$, $\vec{b}=(2;1;3)$.

Розв'язання. Оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то $\vec{a}=(2k;k;3k)$, де k – деяке дійсне число. Тоді $\vec{a}\vec{b}=k\left(2^2+1+3^2\right)=14k$. За умовою $\vec{a}\vec{b}=42$, отже $14k=42$, $k=3$.

Відповідь. $\vec{a}=(6;\ 3;\ 9)$.

Проекцією вектора $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$ називається величина $np_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9.22).

Із рис. 9.22 випливає, що $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$.

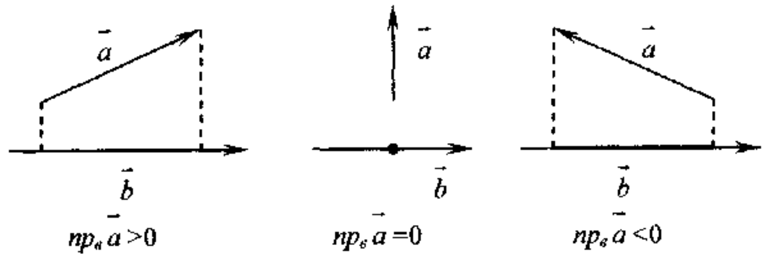


Рис. 9.22

Задача 12. Дано вектори $\vec{a}=(1;3;-2)$ і $\vec{b}=(2;1;1)$. Знайти $np_{\vec{a}-\vec{b}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $\vec{a}-\vec{b}=(-1;2;-4)$, $2\vec{a}+\vec{b}=(4;7;-2)$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=-4+14+8=18$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$.

Отже, шукана проекція дорівнює $\dfrac{18}{\sqrt{21}}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

9.5. Метод координат

Деякі з розглядуваних далі співвідношень (довжина відрізка, рівняння кола, сфери) виводились раніше з інших міркувань. Поряд з іншими ми дістанемо ці співвідношення ще раз, але вже на основі векторного методу.

Задача 13. Довести, що якщо AB — відстань між точками $A\,(a_1, a_2)$ і $B\,(b_1, b_2)$ координатної площини, то

$$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

Доведення. Маємо $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.

Зауваження. Якщо $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ — точки простору, то з аналогічних міркувань дістанемо:

$$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

Задача 14. Довести, що точки $A(3;\ 0)$, $C(0;\ 1)$ і $B(2;\ 7)$ є вершинами прямокутного трикутника і знайти його площу.

Розв'язання. Маємо: $\overrightarrow{AC}=(0-3,1-0)=(-3,1)$, $\overrightarrow{BC}=(0-2,1-7)=(-2,-6)$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-3(-2)+1\cdot(-6)=0$, отже, $AC\perp BC$.

Знайдемо довжини катетів: $AC^2=(\overrightarrow{AC})^2=(-3)^2+1^2=10$, $AC=\sqrt{10}$, $BC^2=(-2)^2+(-6)^2=4+36=40$, $BC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Таким чином,

$$S=0{,}5AC\ BC=0{,}5\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}=10\text{ кв. од.}$$

Задача 15. Довжини катетів прямокутного трикутника дорівнюють 16 і 12 см. Знайти відстань між центрами вписаного і описаного кіл (рис. 9.23).

Розв'язання. Нехай катети $a=CA$ і $b=CB$ заданого прямокутного трикутника лежать відповідно на осях координат Cx і Cy. Тоді $A(16;\ 0)$, $B(0;\ 12)$, $C(0;\ 0)$ – вершини трикутника, центр O описаного кола (середина гіпотенузи $c=AB$) має координати $(8;\ 6)$, а центром вписаного кола є точка $O'(r;\ r)$, де $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ (див.(4.1)).

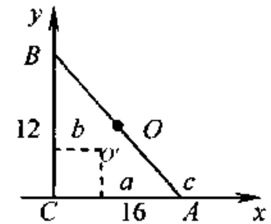


Рис. 9.23

За теоремою Піфагора маємо $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$ см.

Тоді $r=\dfrac{12+16-20}{2}=4$ см.

Отже,

$$|O'O|=\sqrt{(8-4)^2+(6-4)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\text{ см},$$

де O' і O – центри вписаного і описаного кіл.

Відповідь. $2\sqrt{5}$.

Задача 16. Знайти відстань між точками $A(1;2;-3)$ і $B(3;1;2)$.

Розв'язання. $AB=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{30}$.

Відповідь. $\sqrt{30}$.

Задача 17. Якщо $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ — кінці відрізка AB, то його середина M має координати $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Довести.

Доведення. Твердження очевидне, якщо хоча б одна з точок збігається з початком координат. В іншому випадку (див. рис. 9.24):

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}. \qquad (9.3)$$

Аналогічне співвідношення виконується і для координат x і y.

Зауваження. Якщо $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$ — точки простору, то середина M відрізка AB має координати

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Справді, це випливає з того, що співвідношення (9.3) має місце для вказаних точок і в просторі.

Задача 18. Точка A лежить на осі Ox, точка B на координатній площині Oyz. Серединою відрізка AB є точка M (1, 2, 3). Знайти координати точок A і B.

Розв'язання. Очевидно, A $(x, 0, 0)$ і $B(0,y,z)$. Отже $\frac{x}{2}=1$, $\frac{y}{2}=2$, $\frac{z}{2}=3$ і $A(2,0,0)$, $B(0,4,6)$.

Відповідь. $A(2;0;0)$, $B(0;4;6)$.

Задача 19. Довести, що коло з центром $A(a,b)$ і радіусом r має рівняння

$$(x-a)^2+(y-b)=r^2. \qquad (9.4)$$

Доведення. Якщо $B(x,y)$ — довільна точка кола, то $|\overline{AB}|=r$, де $\overline{AB}=(x-a,\ y-b)$ (рис. 9.25).

Отже, має місце формула (9.4).

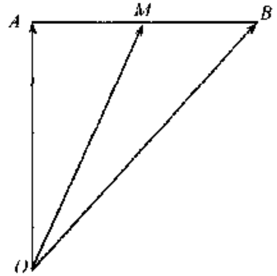


Рис. 9.24

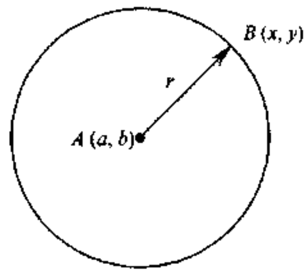


Рис.9.25

Зауваження. Якщо центром кола є початок координат $O(0,0)$, то коло має рівняння

$$x^2+y^2=r^2.$$

Задача 20. Показати, що рівняння $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ є рівнянням кола.

Справді, $x^2+y^2-6x+4y-23=(x-3)^2+(y+2)^2-6^2=0.$

Задача 21. Довести, що сфера з центром у точці $A(a,b,c)$ і радіусом R має рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Довести самостійно.

Задача 22. Показати, що рівняння

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-11=0 \qquad (9.5)$$

є рівнянням сфери.

Справді, ліву частину рівняння (9.3) можна записати так

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=5^2.$$

Задача 23. Довести, що коли $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ — дві довільні точки прямої, то вона має рівняння

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{9.6}$$

Доведення. Справді, якщо $C(x, y)$ — довільна точка прямої, то вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{BA}$ колінеарні (рис. 9.26). Отже, їхні координати пропорційні і виконується рівність (9.6).

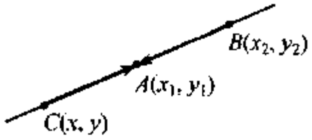


Рис. 9.26

Зауваження. Із (9.6) після перетворень дістаємо:

$$x\left(y_2-y_1\right)-x_1\left(y_2-y_1\right)=$$
$$=y\left(x_2-x_1\right)-y_1\left(x_2-x_1\right)$$

або

$$\left(y_2-y_1\right)x-\left(x_2-x_1\right)y=x_1\left(y_2-y_1\right)-y_1\left(x_2-x_1\right).$$

Позначимо $y_2-y_1=a$, $-\left(x_2-x_1\right)=b$, $x_1\left(y_2-y_1\right)-y_1\left(x_2-x_1\right)=c$. Тоді рівняння прямої набирає вигляду

$$ax+by=c. \tag{9.7}$$

Це так зване ***канонічне рівняння прямої***. Якщо $b\neq 0$, то з нього діленням обох частин (9.7) на b після позначення $k=-\frac{a}{b}$, $m=\frac{c}{b}$ дістаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y=kx+m.$$

Числа k і m мають такий геометричний зміст: $k=\operatorname{tg}\varphi$, де φ – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox, а m — координата точки перетину прямої з віссю Oy.

Теорема 9.4. *а)Якщо прямі*

$$y=k_1x+m_1 \text{ і } y=k_2x+m_2 \tag{9.8}$$

паралельні (перпендикулярні), то виконується умова $k_1=k_2$ $\left(k_1k_2=-1\right)$.

б). Тангенс кута між прямими (9.8) обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Задача 24. Записати рівняння прямої, яка паралельна прямій $4x+2y=5$ і проходить через точку $A(4, -4)$.

Розв'язання. Для шуканої прямої $k=-2$, отже вона має рівняння $y=-2x+m$. Підставляючи координати точки A, дістаємо:

$$-4=-2\cdot 4+m, \quad m=4.$$

Отже, рівняння має вигляд:

$$y=-2x+4.$$

Відповідь. $y=-2x+4$.

Задача 25. Довести, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}=(a,b,c)$, має вигляд

$$ax+by+cz+d=0. \tag{9.9}$$

Доведення. Якщо $A(x_0;y_0;z_0)$ – фіксована, а $M(x;y;z)$ – довільна точка даної площини, то вектори $\vec{n}=(a,b,c)$ і $\overrightarrow{AM}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ перпендикулярні. Отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Якщо позначити $-ax_0-by_0-cz_0=d$, то дістанемо (9.9).

Задачі для самостійного розв'язування

1. При якому значенні p вектори $\vec{a}=(4;7)$ і $\vec{b}=(p;21)$ колінеарні?

2. При якому значенні m вектори $\vec{a}=(2;3)$ і $\vec{b}=(4;p)$ перпендикулярні?

3. Знайдіть косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ і $2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}$, якщо точки A, B, C мають координати: $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$, $C(2; -3)$.

4. Дано: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}-\vec{b}|=19$. Знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$.

5. Дано: $|\vec{a}|=6$, $|\vec{a}+\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=7$. Знайдіть $|\vec{b}|$.

6. Знайдіть довжини векторів $2\vec{a}-\vec{b}$ і $3\vec{b}-\vec{a}$, якщо $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$.

7. Знайдіть одиничний вектор, протилежний вектору $\vec a=-6\vec i+\vec j-4\vec k$.

8. Знайдіть довжини векторів $\vec a+\vec b$ і $\vec a-\vec b$, якщо $\vec a=(3;-4)$, $\vec b=(2;-3)$.

9. Знайдіть кут між векторами $\vec a=(4;1;3)$ і $\vec b=(2;-2;1)$.

10. Вектори $\vec a,\vec b,\vec c$ задовольняють умову $\vec a+\vec b+\vec c=0$. Знайдіть $\vec a\vec b+\vec a\vec c+\vec b\vec c$, якщо $|\vec a|=2$, $|\vec b|=3$, $|\vec c|=4$.

11. Знайдіть скалярний добуток векторів $4\vec a-3\vec b$ і $8\vec a+3\vec b$, якщо $|\vec a|=2$, $|\vec b|=1$ і кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$ дорівнює 120°.

12. Знайдіть кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$, якщо $|\vec a|=2|\vec b|$ і вектор $2\vec a+\vec b$ перпендикулярний до вектора $\vec a-3\vec b$.

13. Знайдіть координати вектора $\vec b$, колінеарного вектору $\vec a=(4;1;3)$, якщо $\vec a\ \vec b=-65$.

14. Знайдіть вектор $\vec c$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec a=(2;3;-1)$ і $\vec b=(1;-2;3)$ і задовольняє умову $\vec c\left(2\vec i-2\vec j+3\vec k\right)=-3$.

15. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Знайдіть суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

16. Нехай M – точка перетину медіан ΔABC. Знайдіть $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}$.

17. На стороні AB трикутника ABC взяли точку M так, що $AM=2MB$. Виразіть вектор $\overline{CM}$ через вектори $\vec a=\overline{BC}$ і $\vec b=\overline{AC}$.

18. Знайдіть k, при якому: $\overline{AB}+\overline{DE}+\overline{CD}+\overline{BC}=$ $=k\left(\overline{EC}+\overline{DA}+\overline{CD}\right)$.

19. Точки M і N – середини сторін AB і BC трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{BC}-\overline{BA}\right)$.

20. Знайдіть координати вектора $\vec a$, перпендикулярного до координатного вектора $\vec j$ і до вектора $\vec b=3\vec i+\vec j-2\vec k$, якщо $|\vec a|=\sqrt{13}$.

21. Знайдіть координати одиничного вектора $\vec a$ перпендикулярного до векторів $\vec i+\vec j$ і $\vec j+\vec k$.

22. Знайдіть координати вектора $\vec a$, перпендикулярного до векторів $\vec i-\vec j$ і $\vec j-\vec k$, якщо $|\vec a|=\sqrt3$.

23. Знайдіть координати вектора $\vec a$, що колінеарний вектору $\vec b=(6;\ 8;\ -7{,}5)$ і утворює тупий кут з координатним вектором $\vec j$, якщо $|\vec a|=50$.

24. Знайдіть m і n, якщо вектор $\vec a=(3;\ m;\ -1)$ перпендикулярний до вектора $\vec b=(2;\ 1;\ n)$ і $|\vec a|=|\vec b|$.

25. Знайдіть координати вектора $\vec a$, перпендикулярного до векторів $\vec i$ і $\vec b=3\vec i-\vec j-\vec k$, якщо $|\vec a|=\sqrt2$.

26. Знайдіть координати одиничного вектора $\vec a$, що перпендикулярний до вектора $\vec b=(-1;\ 2;\ 2)$ і утворює рівні кути з векторами $\vec i$ і $\vec j$.

27. Знайдіть координати векторів $\overline{AB}$ і $2\overline{BA}$, якщо $A(3;\ -1;\ 2)$ і $B(-1;\ 2;\ 1)$.

28. Знайдіть координати точок M_1 і M_2, симетричних з точкою $M(1;\ -2;\ 5)$ відносно осі абсцис і відносно площини Oxy відповідно.

29. Дано $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(3;\ 2;\ -2)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Знайдіть кут при вершині C трикутника ABC.

30. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(2;\ 3/2;\ -4)$, $B(3;\ -4;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -7)$.

31. Знайдіть відстань від точки $M(-2;\ 0;\ 1)$ до середини відрізка AB, якщо $A(2;\ -1;\ 0)$ і $B(-2;\ 3;\ 2)$.

32. Дано $A(-1;\ 3;\ -7)$, $B(2;\ -1;\ 5)$, $C(0;\ 1;\ -5)$. Знайдіть AB і $\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$.

33. Дано $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$, $D(-5;\ -5;\ 3)$. Знайдіть кут між векторами $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

34. Обчисліть довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $5\vec a+2b$ і $a-3b$, якщо $|\vec a|=2\sqrt2$, $|\vec b|=3$, , $\left(\widehat{\vec a,\vec b}\right)=45°$.

35. Знайдіть кут між векторами $\vec p+\vec q$ і $\vec p-\vec q$, якщо $\vec p=8\vec i+4\vec j$, $\vec q=4\vec i+\vec j$.

36. Вектор $\vec{a}$, у якого перша координата вдвічі більша за другу, утворює з координатним вектором $\vec{k}$ кут 135°. Знайдіть його координати, якщо $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$.

37. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1, 3)$, $B(5, -4)$, $C(-3, 5)$. Складіть рівняння висоти BH цього трикутника.

38. Складіть рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо рівняння гіпотенузи $y = -2x + 3$ і вершина прямого кута $C(1, -2)$.

39. Знайдіть відрізки a і b, які пряма $3x - 5y + 15 = 0$ відтинає на осях координат.

40. Знайдіть відстань від точки $A(1, 3)$ до прямої $2x - 3y - 5 = 0$.

41. Складіть рівняння прямої, проведеної через точку $A(2, 2)$ так, що площа трикутника, який пряма утворює з осями координат, дорівнює 9 кв. од.

42. Складіть рівняння кола, що проходить через точки $A(1, 2)$, $B(6, -3)$ і $C(4, 1)$.

43. Складіть рівняння сфери, що проходить через точки $A(2, 6, 3)$ і $B(4, -2, 1)$, якщо її центр лежить на осі Oy.

44. Знайдіть координати центра і радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

ПЛАНІМЕТРІЯ

1. Сторона трикутника, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно 34, 25 і 24 см. Знайдіть периметр трикутника.

2. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC поза ним побудовано квадрат. Знайдіть відстань від вершини C до центра квадрата, якщо сума катетів трикутника дорівнює m.

3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бічна сторона відноситься до висоти, проведеної до основи, як 5:4. Обчисліть діаметр описаного кола.

4. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см. Висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки у відношенні 7:18, починаючи від вершини. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє ця висота.

5. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 66 см. Бісектриса кута при основі поділяє бічну сторону на відрізки у відношенні 5:6, починаючи від вершини. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє ця бісектриса.

6. Довжина кола збільшилась на 20%. На скільки відсотків збільшиться площа вписаного в це коло правильного трикутника?

7. Бісектриса кута при основі поділяє медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, на відрізки 16,5 і 27,5 см, починаючи від основи. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса поділяє бічну сторону трикутника.

8. Площа рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, вдвічі більша за площу останнього. Знайдіть кути прямокутного трикутника.

9. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з гострих кутів дорівнює 30°. Знайдіть радіус кола з центром у вершині цього кута, яке поділяє даний трикутник на дві рівновеликі частини.

10. У трикутник зі сторонами 10, 17 і 21 см вписано прямокутник з периметром 24 см так, що одна його сторона лежить на більшій стороні трикутника. Знайдіть сторони прямокутника.

11. Дві сторони трикутника відповідно дорівнюють 6 і 8 см. Медіани, проведені до цих сторін, перпендикулярні. Знайдіть площу трикутника.

12. Визначте площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 18 і 20 см, а медіана третьої сторони дорівнює 17 см.

13. Радіус кола дорівнює 7 см. Із точки, віддаленої від центра на 9 см, проведено січну так, що вона поділяється колом навпіл. Знайдіть довжину цієї січної.

14. У трикутник вписане коло з радіусом 4. Одну зі сторін трикутника поділена точкою дотику на відрізки, довжина яких 6 і 8. Знайдіть довжини сторін трикутника.

15. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 27 і 29. Довжина медіани, проведеної до третьої сторони, дорівнює 26. Знайдіть висоту трикутника, проведену до сторони довжиною 27.

16. У трикутнику ABC висота AO на 4 см менша сторони BC. Сторона АС дорівнює 5 см. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо його площа дорівнює 16 см^2.

17. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до бічної сторони дорівнює 12, а основа відноситься до бічної сторони, як 6:5. Знайдіть радіус описаного кола.

18. У трикутнику сторони відносяться, як 13:14:15. Знайдіть відношення площі цього трикутника до площі вписаного круга.

19. Із центра кола, вписаного в трикутник зі сторонами 13, 14 і 15, проведено друге коло радіуса 5. Знайдіть довжини хорд, які відтинаються цим колом на сторонах трикутника.

20. Обчисліть довжини сторін прямокутного трикутника, периметр якого дорівнює 12 см, а площа становить 6 см^2.

21. Знайдіть площу круга, вписаного в прямокутний трикутник, якщо проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 і 16 см.

22. Із вершини прямого кута трикутника проведено перпендикуляр, який поділяє гіпотенузу на відрізки 36 і 64 см. Знайдіть довжини відрізків, на які бісектриса більшого гострого кута поділяє цей перпендикуляр.

23. У рівнобедреному трикутнику довжина основи дорівнює 6, довжина висоти, опущеної на основу, дорівнює 8. Знайдіть відстань від середини основи до бічної сторони.

24. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, – 24 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

25. У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, поділяє сторону на відрізки 21 і 30 см. Знайдіть відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону.

26. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 16 см, а медіана, проведена до бічної сторони, – $2\sqrt{97}$ см. Знайдіть периметр цього трикутника.

27. Вершина рівнобедреного трикутника віддалена від точки перетину медіан на 24 см. Знайдіть площу трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює 20 π см.

28. У рівнобедреному трикутнику вершина, протилежна основі, віддалена від точки перетину медіан на 60 см, а від точки перетину бісектрис на 65 см. Знайдіть площу цього трикутника.

29. У рівнобедреному трикутнику точка перетину серединних перпендикулярів віддалена від основи на 21 см. Знайдіть площу трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює 150π см.

30. У рівнобедреному трикутнику вершина, протилежна основі, віддалена від точки перетину медіан на 64 см, а від точки перетину серединних перпендикулярів на 75 см. Знайдіть площу цього трикутника.

31. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника дорівнює $12\sqrt{2}$ см і поділяє гіпотенузу на відрізки у відношенні 3:4. Знайдіть периметр цього трикутника

32. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 6 см. Знайдіть медіану бічної сторони.

33. Медіани прямокутного трикутника, проведені до катетів, відносяться, як $\sqrt{2}$:1. Знайдіть кути трикутника.

34. У трикутник із сторонами AB=4, BC=2, AC=3 вписано коло. Знайдіть площу трикутника AMN, де M, N – точки дотику цього кола із сторонами AB і AC відповідно.

35. У трикутник із сторонами AB=4, BC=6, AC=4 вписано коло. Знайдіть довжину відрізка DE, де D, E – точки дотику цього кола відповідно зі сторонами AB і AC.

36. У рівнобедреному трикутнику висота дорівнює 8, а основа відноситься до бічної сторони, як 6:5. Знайдіть радіус вписаного кола.

37. Сторони трикутника відносяться як 1:2:2. Знайдіть його площу, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R.

38. У рівнобедреному трикутнику висоти, опущені на основу і бічну сторону, дорівнюють m і n. Знайдіть сторони трикутника.

39. Довжини сторін трикутника дорівнюють 14, 15 і 16 см. Знайдіть бісектрису середнього за величиною кута трикутника.

40. У рівнобедреному трикутнику висоти, опущені на основу і бічну сторону, дорівнюють 16 і 19. 2. Знайдіть відношення площі цього трикутника до площі трикутника з вершинами в точках перетину бісектрис зі сторонами.

41. Дві сторони трикутника відносяться, як 3:5. Довжина третьої сторони дорівнює 26 см, а її медіани – 16 см. Визначте невідомі сторони трикутника.

42. Основа висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, віддалена від катетів на 6 і 8 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.

43. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює 1,05; різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 17 см. Знайдіть площу трикутника.

44. Одна з сторін трикутника дорівнює 26 см. Медіани двох інших сторін дорівнюють 30 і 39 см. Знайдіть площу трикутника.

45. Коло проходить через кінці меншої діагоналі ромба і ділить кожну сторону ромба на два відрізки довжиною a і b. Знайдіть площу ромба.

46. У ромбі діагоналі відносяться, як 3:4. Знайдіть площу ромба, якщо площа вписаного круга дорівнює 36π см.

47. Висота ромба дорівнює 12 см, а одна із діагоналей дорівнює 20 см. Знайдіть площу ромба.

48. У ромбі різниця діагоналей дорівнює 5 см. Знайдіть площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює 12π см.

49. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює 56 см, а його площа – 396 см. Знайдіть сторону ромба.

50. Сторони паралелограма дорівнюють 4 і 6 см. Із середини більшої сторони паралельну сторону видно під кутом 45°. Знайдіть площу паралелограма.

51. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 30°, поділяє його сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини прямого кута. Обчисліть площу паралелограма.

52. У коло радіуса R вписаний правильний шестикутник $ABCDEF$. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ACB.

53. Навколо кола описано рівнобічну трапецію з бічною стороною b, одна з основ якої дорівнює a. Знайдіть площу трапеції.

54. Доведіть, що пряма, яка проходить через точки перетину двох кіл, поділяє навпіл спільну дотичну до них.

55. У коло радіуса R вписано чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні і дорівнюють a і b. Знайдіть сторони чотирикутника.

56. Хорда, довжина якої 64 см, перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки, різниця між якими дорівнює 48 см. Обчисліть суму квадратів відстаней від кінців хорди до кінців діаметра.

57. Дотична й січна, що виходять з однієї точки, відповідно дорівнюють 20 і 40 см. Січна віддалена від центра на 8 см. Обчисліть радіус кола.

58. Дві дотичні, проведені з однієї точки до кола радіуса R, утворюють кут величиною 60°. Знайдіть радіус кола, вписаного в кут, утворений цими дотичними, яке дотикається до даного кола.

59. У сектор з радіусом $R=3$ см і центральним кутом $\alpha=60°$ вписано коло. Знайдіть радіус кола.

60. Точка M поділяє хорду кола на відрізки довжиною 4 і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо точка M віддалена від центра кола на відстань 6 см.

61. Коло радіуса 2 дотикається зсередини до кола радіуса 6. Знайдіть радіус третього кола, яке дотикається даних кіл і діаметра, що сполучає їхні центри.

62. Радіус кола дорівнює r. Із точки M проведено січну MB, яка проходить через центр кола і дотична MA, причому $MB=2MA$. Знайдіть, на якій відстані від центра кола міститься точка M.

63. У прямокутній трапеції, висота якої дорівнює h, на стороні не перпендикулярній до основи, як на діаметрі описано коло, яке дотикається до протилежної сторони трапеції. Знайдіть площу прямокутного трикутника, в якого катети рівні основам трапеції.

64. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC через вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD в точці E і бічну сторону CD в точці K, причому $BE:ED = 1:2$, $CK:KD=1:4$. Знайдіть відношення довжин основ трапеції.

65. Одна бічна сторона трапеції дорівнює 30 см, а друга бічна сторона точкою дотику вписаного кола поділяється на відрізки 8 і 18 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

66. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від більшої бічної сторони на 12 см. Менша основа трапеції дорівнює 21 см. Знайдіть периметр цієї трапеції.

67. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину поділяються у відношенні 13:3, починаючи від вершин гострих кутів. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см.

68. Діагоналі трапеції поділяють її на чотири трикутника. Доведіть, що площі двох трикутників, які прилягають до бічних сторін, рівні.

69. Довжини діагоналей трапеції дорівнюють k і m, довжина відрізка, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює n. Знайдіть площу трапеції.

70. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її висота дорівнює h, а бічну сторону видно із центра описаного кола під кутом 60°.

71. У трапеції $ABCD$: $\angle BAD=90^0$, $\angle ADC=30°$. Коло, центр якого лежить на відрізку AD, дотикається прямих AB, BC і CD. Знайдіть площу трапеції, коли відомо, що радіус кола дорівнює R.

72. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, більша основа дорівнює b, а сума меншої основи і бічної сторони дорівнює $0.75b$. Знайдіть меншу основу.

73. Діагоналі трапеції поділяють її на чотири трикутники. Знайдіть площі двох трикутників, які прилягають до бічних сторін, якщо основи трапеції дорівнюють 6 і 20 см, а менша діагональ перпендикулярна основам і дорівнює 52 см.

74. Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють 81 і 83. Знайдіть площу трапеції.

75. Довести, що коли в трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні, то сума квадратів діагоналей дорівнює квадрату суми основ.

76. У рівнобічну трапецію вписано коло. Відстань від центра кола до точки перетину діагоналей трапеції відноситься до радіуса, як 3:5. Знайдіть відношення периметру трапеції до довжини вписаного кола.

77. Обчисліть площу трапеції, периметр якої дорівнює 5 см , вписаної в півколо з радіусом 1 см (основа трапеції лежить на діаметрі півкола).

78. Довжини основ трапеції 9 і 36 см. Середину меншої основи трапеції сполучено з кінцями бічних сторін. Обчисліть відстань між точками перетину даних відрізків з діагоналями трапеції.

79. Сума квадратів паралельних сторін трапеції дорівнює 288. Визначте довжину відрізка, паралельного цим сторонам, якщо він поділяє площу трапеції навпіл.

80. Довести, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, проходить через точку перетину непаралельних сторін.

81. Периметр рівнобічної трапеції відноситься до довжини вписаного кола, як $m:n$. Знайдіть відношення радіуса вписаного кола до відстані від центра кола до точки перетину діагоналей трапеції.

82. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 і 15 см. Знайдіть основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

83. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 26 і 36 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

84. У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 24 і 26 см, а менша діагональ є бісектрисою прямого кута. Обчисліть площу трапеції.

85. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 14 і 24 см, а більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Обчисліть периметр цієї трапеції.

86. Основи трапеції дорівнюють 142 і 69 см, а діагоналі 120 і 153 см. Обчисліть площу трапеції.

87. Довжини основ трапеції 10 і 30 см. Середину більшої основи трапеції сполучено з кінцями бічних сторін. Обчисліть відстань між точками перетину даних відрізків з діагоналями трапеції.

88. Периметр паралелограма дорівнює 96 см, а його висоти відносяться, як 5:7. Знайти суму квадратів діагоналей паралелограма.

89. Основи трапеції дорівнюють 24 і 60 см. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини діагоналей.

90. Доведіть, що пряма, яка сполучає середини основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей.

91. Навколо кола радіуса R описано рівнобічну трапецію з меншою основою b. Знайдіть діагональ трапеції.

92. У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців бічної сторони дорівнюють 75 і 100 см, а до кінців меншої основи – 65 і 75 см. Обчисліть площу цієї трапеції.

93. Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см, а від кінців бічної сторони – на 156 і 65 см. Обчисліть площу цієї трапеції.

94. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину поділяються у відношенні 13 : 5, починаючи від вершини гострих кутів. Знайдіть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 32 см.

95. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 3: 13, починаючи від вершини тупих кутів. Знайдіть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 48 см.

96. Сторони прямокутника відносяться, як 7 : 3, а площа його дорівнює 525 см^2. Обчисліть периметр цього прямокутника.

97. Площа прямокутника дорівнює 360 см^2. Обчисліть сторони прямокутника, якщо периметр його дорівнює 78 см.

98. Квадрат із стороною a вписаний в коло. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в один з утворених сегментів.

99. Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і поділяє кожну із двох інших його сторін на відрізки 2 і 23 см. Обчисліть радіус кола.

100. Коло радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата із стороною 18 см. Обчислити відрізки, на які поділяє коло кожну з двох інших сторін квадрата.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

1. З точки до площини проведено дві похилі, кут між якими 60°, а кут між їхніми проекціями – 90°. Довжина проекції кожної похилої на площину дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки до площини.

2. З точки, відстань якої від даної площини 12 см, проведені дві похилі довжиною 13 і 20 см. Відстань між основами похилих – 14 см. Знайдіть кут між проекціями похилих.

3. З точки до площини правильного трикутника зі стороною 12 см опущено перпендикуляр довжиною 30 см. Основою перпендикуляра є одна з вершин трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до тієї вершини трикутника, на якій не лежить основа перпендикуляра.

4. З точки, яка міститься на відстані 10 см від площини, проведені дві похилі довжиною відповідно 10 і 20 см. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 60°. Знайдіть відстань між основами похилих.

5. З точки поза площиною проведено до цієї площини перпендикуляр довжиною 12 см і похилу довжиною 16 см, сума довжин яких 15 см, а кут між ними 90°. Знайдіть проекцію перпендикуляра на похилу.

6. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 14 і 8 см. Знайдіть відстань від точки відрізка, яка поділяє його у відношенні 3:4, починаючи від кінця відрізка, ближчого до даної площини.

7. Через вершину прямого кута трикутника проведена площина паралельно гіпотенузі на відстані 20 см від неї. Проекції катетів на цю площину відповідно дорівнюють 60 см і 1 м. Знайдіть гіпотенузу.

8. Кінці відрізка довжиною 20 см належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до прямої перетину цих площин відповідно дорівнюють 4 і 5 см. Знайдіть кут між відрізком і прямою перетину площин.

9. Одна зі сторін ромба лежить на площині α, а протилежна їй сторона віддалена від площини α на 16 см. Проекції діагоналей ромба на площину α відповідно дорівнюють 32 і 8 см. Знайдіть довжину сторони ромба.

10. З точки на площину прямокутної трапеції, менша основа якої дорівнює 12 см, висота – 10 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута, опущено перпендикуляр довжиною 30 см. Основа перпендикуляра – вершина тупого кута трапеції. Знайдіть відстань від даної точки до вершини гострого кута трапеції.

11. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою b, з вершини якого проведено діагоналі бічних граней. Площина цих діагоналей утворює з висотою призми кут β. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює h.

12. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині φ. Через основу цього трикутника і протилежну вершину призми проведено переріз, площа якого S. Кут між перерізом і висотою призми дорівнює β. Знайдіть об'єм призми.

13. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Діагональ бічної грані, яка проходить через бічну сторону основи, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм призми.

14. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Діагональ грані, що проходить через бічну сторону трикутника, дорівнює d і нахилена до площини основи призми під кутом φ. Знайдіть площу повної поверхні призми.

15. В основі прямої призми лежить ромб із стороною b і гострим кутом β. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм призми.

16. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Діагональ грані, що проходить через бічну сторону трикутника, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу повної поверхні призми.

17. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною b. Діагоналі призми дорівнюють d і n. Знайдіть об'єм призми.

18. В основі прямої призми лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює d. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β, а діагональ бічної грані – кут γ. Знайдіть площу повної поверхні призми.

19. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з тупим кутом β і більшою основою b. Діагональ трапеції є бісектрисою тупого кута, менша діагональ призми утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть повну поверхню призми.

20. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β. Знайдіть висоту піраміди, якщо об'єм піраміди дорівнює V.

21. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює φ. Знайдіть висоту піраміди, якщо об'єм піраміди дорівнює V.

22. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при основі дорівнює φ, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює r. Знайдіть об'єм піраміди.

23. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює r.

24. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола вписаного в бічну грань дорівнює r.

25. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і катетом b. Кожна її бічна грань нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

26. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою b і кутом при вершині φ. Кожна бічна грань піраміди нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

27. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою b і кутом при вершині β. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

28. В основі піраміди лежить ромб із стороною a і гострим кутом α. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

29. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою a і кутом φ при вершині ($\varphi \neq 60°$). Грані піраміди, що містять нерівні сторони цього трикутника, перпендикулярні до площини основи піраміди, а третя – нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

30. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом γ. Дві бічні грані піраміди, що містять катети, перпендикулярні до площини основи піраміди, а третя – нахилена до неї під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди.

31. Основою піраміди є ромб з гострим кутом φ. Дві нерівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Найбільше бічне ребро піраміди дорівнює d і нахилене до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

32. В основі трикутної піраміди лежить гострокутний рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра її дорівнюють b і нахилені до площини основи під кутом φ.

33. В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник з гострим кутом β при вершині. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні грані нахилені до площини основи під кутом φ і відстань від вершини піраміди до кожної із сторін основи дорівнює b.

34. Основою піраміди є прямокутник з кутом φ між діагоналями. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра дорівнюють b і утворюють з площиною основи кут γ.

35. Основою піраміди є ромб з гострим кутом β. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота її бічної грані дорівнює h.

36. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом φ при вершині. Дві нерівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо більше її бічне ребро дорівнює d.

37. В основі піраміди з висотою h лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Дві рівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Більше бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм піраміди.

38. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні суміжні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо найменше бічне ребро дорівнює d.

39. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

40. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять катети, перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

41. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Дві рівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

42. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β і площею S. Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть бічну поверхню піраміди,

43. В основі піраміди з висотою h лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть повну поверхню піраміди.

44. В основі піраміди лежить прямокутна трапеція з більшою бічною стороною b і гострим кутом β. Бічна грань піраміди, що містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до площини основи, а три інші нахилені до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

45. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

46. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

47. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює r. Знайдіть об'єм піраміди.

48. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник. Дві бічні грані, що містять гіпотенузу і катет цього трикутника, перпендикулярні до площини основи. Найбільше бічне ребро утворює з двома іншими бічними ребрами кути α і β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

49. Хорду довжиною d нижньої основи циліндра видно з центра цієї основи під кутом β. Відрізок, що сполучає середину цієї хорди з центром верхньої основи, утворює з висотою циліндра кут γ. Знайдіть об'єм циліндра.

50. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо діагональ утвореного перерізу циліндра дорівнює d, а площа осьового перерізу S.

51. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, яка перетинає нижню основу по хорді довжиною m. Діагональ перерізу дорівнює d. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою хорди нижньої основи, утворює з висотою кут γ. Знайдіть бічну поверхню циліндра.

52. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу величиною φ. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом γ. Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює S.

53. Паралельно осі циліндра, бічна поверхня якого дорівнює S, проведено площину. Кут між діагоналями утвореного перерізу дорівнює β. Знайдіть площу перерізу, якщо відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з висотою циліндра кут γ.

54. Через вершину конуса з основою радіуса R проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом β, а з вершини — під кутом γ. Знайдіть площу перерізу.

55. Через вершину конуса з твірною L проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом β. Ця площина віддалена від центра основи на відстань d. Знайдіть площу перерізу.

56. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом β. Ця площина віддалена від центра основи на відстань d. Знайдіть кут при вершині перерізу, якщо його площа дорівнює S.

57. Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β і перетинає її по хорді довжиною d. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.

58. Через дві твірні конуса, кут між якими β, проведено площину. Площа бічної поверхні конуса дорівнює S. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо твірна конуса утворює з висотою кут γ.

59. З центра основи конуса хорду довжиною d видно під кутом β, а з вершини конуса – під кутом γ. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

60. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні описаного циліндра.

61. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм вписаного циліндра.

62. В правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює φ, сторона основи – b. Знайдіть площу бічної поверхні описаного конуса.

63. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює β, а бічне ребро – b. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

64. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з гострим кутом β при вершині. Діагональ грані, що проходить через бічну сторону трикутника, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

65. Основою прямої призми є гострокутний рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Діагональ грані, що проходить через основу трикутника, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

66. В основі піраміди лежить прямокутник із стороною b і протилежним їй гострим кутом β між діагоналями. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо даної піраміди.

67. Гострокутний трикутник із стороною b і прилеглими до неї кутами β і γ обертається навколо даної сторони. Знайдіть поверхню тіла обертання.

68. Гострокутний трикутник з стороною b і прилеглими до неї кутами β і γ обертається навколо даної сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

69. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює r.

70. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в цю піраміду, дорівнює r.

71. У кулю вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Знайдіть поверхню кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом φ.

72. У кулю вписано правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює h. Знайдіть поверхню кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом β.

73. Навколо кулі описано правильну чотирикутну піраміду, всі бічні грані якої утворюють з площиною основи кут φ. Знайдіть об'єм кулі, якщо висота піраміди дорівнює h.

74. Навколо кулі описано правильну трикутну піраміду, всі бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть поверхню кулі, якщо висота піраміди дорівнює h.

75. У правильній чотирикутній піраміді всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R.

76. У правильній трикутній піраміді всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.

77. Прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть поверхню тіла обертання.

78. Прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом β обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм тіла обертання.

79. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом β. Менша діагональ призми нахилена до її основи під кутом γ, а більша діагональ дорівнює d. Знайдіть повну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

80. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Знайдіть об'єм конуса.

81. Кут між твірною конуса і його основою дорівнює φ. Відстань від центра описаної навколо конуса кулі до основи його висоти дорівнює d. Знайдіть бічну поверхню конуса.

82. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.

83. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

84. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.

85. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.

86. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Радіус вписаного в нього кола дорівнює r. Дві рівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом γ. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

87. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R.

88. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

89. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

90. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус кулі. вписаної в неї, дорівнює r.

91. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Через сторону основи проведено площину під кутом φ до основи ($\beta > \varphi$). Знайдіть площу перерізу, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r.

92. У правильній чотирикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r.

93. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб з тупим кутом φ. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від центра вписаної кулі до вершини піраміди дорівнює d.

94. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник з кутом φ між діагоналями. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від центра описаної кулі до основи висоти піраміди дорівнює d.

95. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї дорівнює R.

96. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом β. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

97. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

98. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r.

99. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Через сторону основи проведено площину під кутом φ до основи ($\beta > \varphi$). Знайдіть площу перерізу, якщо висота піраміди дорівнює H.

100. У правильній чотирикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r.

101. У паралелепіпеді всі його грані – рівні ромби із стороною a і гострим кутом β. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

102. Довести, що три точки A, B і C належатимуть одній прямій тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки O простору і для деякого дійсного числа k виконується рівність

$$\overrightarrow{OC} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \ (A \neq B).$$

103. Дано прямокутник $ABCD$ і довільну точку M простору. Довести, що $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\ \overrightarrow{MD}$, де A і C, B і D – протилежні вершини прямокутника.

104. Дано прямокутник $ABCD$ і довільну точку M.
Довести, що

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2,$$

де A і C, B і D – протилежні вершини прямокутника.

105. У куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписано сферу, M – довільна точка сфери. Довести, що

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{MA_1}^2 + \overrightarrow{MB_1}^2 + \overrightarrow{MC_1}^2 + \overrightarrow{MD_1}^2 = 8a^2,$$

де a – довжина ребра куба.

ЗРАЗКИ ЗАДАЧ ВСТУПНИХ ТЕСТУВАНЬ

2005 рік

Технічний напрям

1. З однієї вершини трикутника проведено висоту, бісектрису і медіану. Відстані від другої вершини до кінців висоти, бісектриси і медіани відповідно дорівнюють 21, 25 і 25,5 см. Знайдіть периметр трикутника.

2. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчислити площу цього трикутника, якщо площа вписаного круга дорівнює 64 π см^2.

3. У трикутнику основа дорівнює 50 см, висота, проведена до неї, дорівнює 24 см. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см.

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а медіана, проведена до основи, дорівнює 16 см. Знайдіть площу описаного круга.

5. У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців меншої основи, довжина якої 70 см, на відстані 65 і 75 см. Знайдіть периметр цієї трапеції.

6. Знайдіть площу круга, вписаного в прямокутний трикутник, якщо проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 і 16 см.

7. Перпендикуляр, опущений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, поділяє цю діагональ на відрізки 41 і 57 см. Різниця довжин сторін паралелограма дорівнює 14 см. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма.

8. Довжина хорди кола дорівнює 12 см. Через один з кінців цієї хорди проведена дотична, відстань якої від іншого кінця хорди дорівнює 8 см . Знайдіть радіус кола.

9. Точки E і F поділяють сторони AC і CB паралелограма $OACB$ так, що $\dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}} = 2$, $\dfrac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FB}} = 2$. Знайти $\dfrac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DE}}$ і $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DF}}$, якщо D точка перетину прямих AF і OE.

10. Знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}-\vec{b}|=22$.

Економічний напрям

1. Радіус описаного навколо рівнобедреного трикутника кола дорівнює 25 см, а вписаного – 12 см. Знайдіть сторони трикутника.

2. В рівнобедреному трикутнику відстань між точками перетину медіан і бісектрис дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина кола, вписаного в трикутник, дорівнює 20π см.

3. Висота і бісектриса прямокутного трикутника, опущені з вершини прямого кута, дорівнюють відповідно 3 і 4 см. Знайдіть площу трикутника.

4. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB і площею 30 см^2 точка O – центр вписаного кола. Площа трикутника AOB дорівнює 13 см^2. Знайдіть сторони трикутника ABC.

5. У прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписане коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайдіть довжину гіпотенузи.

6. Довжини бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ відповідно дорівнюють 8 і 10 см, а довжина основи BC – 2 см. Бісектриса кута ADC проходить через середину сторони AB. Знайдіть площу трапеції.

7. Знайдіть сторони трикутника, якщо медіана і висота, проведені з вершини одного кута, поділяють цей кут на три рівні частини, а сама медіана дорівнює 10 см.

8. Радіус описаного навколо рівнобедреного трикутника кола дорівнює 25 см, а вписаного кола – 12 см. Знайдіть сторони трикутника.

9. Середня лінія трапеції поділяється однією із діагоналей у відношенні $1:k$ і ділить трапецію на дві частини, менша з яких має площу S. Знайдіть площу трапеції.

10. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

2006 рік

Технічний напрям

1. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 і 18 см. Кут між ними дорівнює 30 см. Знайдіть площу паралелограма.

2. Сторони трикутника відповідно дорівнюють 17, 25 і 26 см. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє висота, проведена до найменшої сторони.

3. Сторони трикутника відповідно дорівнюють 25, 17 і 26 см. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє бісектриса найменшого кута.

4. У трапеції бічні сторони дорівнюють 169 і 125 см. Довжина вписаного в цю трапецію кола дорівнює 120 см. Знайдіть основи трапеції.

5. У прямокутнику бісектриса прямого кута ділить сторону на відрізки 42 і 14 см, починаючи від найближчої для цього кута вершини. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса поділяє діагоналі прямокутника.

6. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою гострого кута і поділяє другу діагональ на відрізки, довжини яких відносяться, як 5:8, починаючи від вершини тупого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 16 см.

7. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою гострого кута і поділяє другу діагональ на відрізки 8 і 5 см, починаючи від вершини прямого кута. Знайдіть периметр цієї трапеції.

8. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 60°, поділяє сторону на відрізки 33 і 55 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайдіть відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ цього паралелограма.

9. Точки M і N відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Знайти відношення, в яких відрізки DM і BN поділяються діагоналлю AC. Знайти відношення трьох відрізків, утворених на діагоналі AC.

10. Знайдіть $|\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{a}+\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

Економічний напрям

1. Навколо кола радіуса $r=4$ см описано рівнобічну трапецію, середня лінія якої $d=10$ см. Знайдіть довжини сторін трапеції.

2. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, середня лінія якої дорівнює 5, а синус гострого кута при основі дорівнює 0,8. Знайдіть площу трапеції.

3. У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 36 і 39 см, а більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Знайдіть площу цієї трапеції.

4. Одна із сторін трикутника дорівнює 6 см, а висоти, опущені на інші сторони, дорівнюють 2 і $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічні сторони трикутника.

5. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC бісектриса кута BAD проходить через середину M сторони CD. Відомо, що $AB=5$, $AM=4$. Знайдіть довжину відрізка BM.

6. У прямокутнику бісектриса прямого кута поділяє його діагональ на відрізки 30 і 40 см, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть відрізки, на які поділяє ця бісектриса сторону прямокутника.

7. У прямокутнику бісектриса прямого кута поділяє його діагональ на відрізки 30 і 40 см, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса поділяє сторону прямокутника.

8. У прямокутній трапеції менша діагональ є бісектрисою прямого кута. Різниця основ дорівнює 5 см, різниця бічних сторін дорівнює 1 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

9. У трикутнику дві сторони дорівнюють 75 і 78 см, а висота, проведена до третьої сторони, 72 см. Знайдіть бісектрису, проведену до третьої сторони.

10. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ і вектор $2\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $2\vec{a}-\vec{b}$.

2007 рік

Технічний напрям

1. Сума бічної сторони і основи рівнобедреного трикутника дорівнює 78 см. Точка бісектриси, проведеної до основи, рівновіддалена від бічної сторони та поділяє цю бісектрису на відрізки у відношенні 5:4. Знайдіть основу.

2. У прямокутній трапеції менша діагональ є бісектрисою прямого кута. Різниця основ дорівнює 5 см, різниця бічних сторін дорівнює 1 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

3. У трикутнику дві сторони дорівнюють 75 і 78 см, а висота, проведена до третьої сторони, 72 см. Знайдіть бісектрису, проведену до третьої сторони.

4. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 21 і 28 см. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє бісектриса прямого кута.

5. Площа паралелограма дорівнює 240 см^2, а його периметр дорівнює 88 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30°.

6. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а медіана, проведена до основи, дорівнює 16 см. Знайдіть площу описаного круга.

7. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60 см. Висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см. Знайдіть площу цього трикутника.

8. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 5 і 12 см, кут між ними дорівнює 60°. Обчисліть площу паралелограма.

9. У трикутнику ABC медіана AM перпендикулярна медіані BN. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AM = 3$ см, $BN = 2$ см.

10. Знайдіть $\vec{x}\ \vec{z}$, якщо $\vec{x}=2\vec{y}+5\vec{z}$; $|\vec{x}|=3$; $\vec{x}\ \vec{y}=1$.

Економічний напрям

1. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, поділяє його сторону на відрізки, різниця між якими 11 см Обчисліть периметр ромба, якщо відстань від точки перетину його діагоналей до сторони дорівнює 12 см.

2. У трикутнику медіана проведена до сторони, утворює з нею кут 120°. Дві інші сторони дорівнює 14 і $2\sqrt{19}$ см. Знайдіть сторону трикутника.

3. Висота трикутника, опущена на сторону, поділяє її на відрізки 7 і 32 см, а бісектриса поділяє цю сторону на відрізки у відношенні 5:8. Обчисліть периметр трикутника та зазначену висоту трикутника.

4. Усередині паралелограма взята довільна точка і сполучена з вершинами. Довести, що сума двох протилежних трикутників дорівнює половині площі паралелограма.

5. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC вписано в коло радіуса. Друге коло дотикається катетів трикутника ABC і першого кола. Знайти його радіус.

6. Доведіть, що сума векторів, які сполучають центр правильного трикутника з його вершинами, дорівнює нулю.

ДОДАТОК

ФОРМУЛИ ДЛЯ ДОВІДОК

ПЛАНІМЕТРІЯ

1. Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника – $180° (n-2)$.

2. Висота трикутника $h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$, a, b, c – сторони трикутника.

3. Медіана трикутника $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

4. Бісектриса трикутника $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

5. Теорема Піфагора $a^2+b^2=c^2$, де $\angle C = 90°$.

6. Теорема синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, де R – радіус описаного кола.

7. Теорема косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

8. Площа трикутника

$$S = \frac{ah_a}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

9. Площа паралелограма $S = ah_a$.

10. Площа ромба $S = ah = \frac{1}{2}d_1d_2$, де d_1 і d_2 – діагоналі.

11. Площа трапеції $S = \frac{a+b}{2}h$, де a і b – основи трапеції, h – висота.

12. Довжина кола $C = 2\pi R = \pi D$.

13. Площа круга $S = \pi R^2$.

14. Довжина дуги $l = \frac{\pi R n°}{180°} = \alpha R$, де $n°$ – градусна, α – радіанна міра дуги.

15. Площа сектора $S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

16. Площа сегмента $S = R^2\left(\frac{\pi n°}{360°} - \frac{\sin n°}{2}\right)$.

17. Радіус вписаного в трикутник кола $r = \frac{S}{p}$.

18. Радіус описаного навколо трикутника кола $R = \frac{abc}{4S}$.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

Площі поверхонь та об'єми просторових геометричних фігур

1. Площа бічної поверхні призми: $S = P\cdot l$, де P – периметр перпендикулярного перерізу призми; l – бічне ребро.

2. Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S = \frac{1}{2}P\cdot m$, де P – периметр основи піраміди, а m – апофема.

3. Площа поверхні прямого кругового циліндра:
а) бічна – $S_б = 2\pi RH$;
б) повна – $S_п = 2\pi R(R+H)$,
де R – радіус основи циліндра, а H – висота.

4. Площа поверхні конуса:
а) бічна – $S_б = \pi Rl$;
б) повна – $S_п = \pi R(R+l)$,
де R – радіус основи конуса, а l – твірна.

5. Площа поверхні зрізаного конуса:
а) бічна – $S_б = \pi(R+r)l$,
б) повна – $S_п = \pi(R+r)l + (R^2+r^2)$,
де R, r – радіуси основ зрізаного конуса, а l – твірна.

6. Площа поверхні кулі: $S = 4\pi R^2$, де R – радіус кулі.

7. Площа поверхні сферичного пояса або сегмента:
$S = 2\pi RH$,
де R – радіус кулі, а H – висота пояса або сегмента.

8. Об'єм паралелепіпеда:

а) прямокутного – $V = abc$,

б) похилого – $V = SH$,

де a, b, c – виміри паралелепіпеда, а S – площа основи, H – висота.

9. Об'єм призми: $V = SH$, $V = S_1 l$, де H – висота; S – площа основи; S_1 – площа перпендикулярного перерізу; l – бічне ребро.

10. Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3}SH$, де S – площа основи; H – висота піраміди.

11. Об'єм зрізаної піраміди: $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, де H – висота, а S_1 і S_2 – площі основ зрізаної піраміди.

12. Об'єм циліндра: $V = \pi R^2 H$, де R – радіус основи циліндра, а H – висота.

13. Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, де R – радіус основи конуса, а H – висота.

14. Об'єм зрізаного конуса: $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, де R, r – радіуси основ, H – висота зрізаного конуса.

15. Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R – радіус кулі.

16. Об'єм кульового шару: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, де R – радіус кулі; H – висота кульового шару.

17. Об'єм кульового сегменту: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, де R – радіус кулі; h – висота сегменту.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

2. 1) Ні; 2) Так. **3.** Ні. **4.** АВ. **5.** 1) 7 см; 9 см. 2) 10 см; 6 см. **6.** 1) 150°; 2) 135°; 3) 120°. **8.** 1) 110°; 70°; 2) 105°; 75°; 3) 60°; 120°; 4) 72°; 108°. **10.** 70°. **11.** 130°. **13.** 2) 104°.

Розділ 2

1. 1, а) 8 см; 8 см; 5 см. **4.** 60° . **6.** 59°. **8.** 110°. **10.** Ні. Поясніть. **17.** 20°. **18.** 45°; 82,5°; 52,5°.

Розділ 3

1. 6 см; 8 см. **2.** 60°; 120°. **3.** Ні. Поясніть. **5.** 16 см; 8 см. **6.** 60 см. 7. 2.5; 3.5. **8.** а) Ні; б) Так. **9.** 65°; 25°. **10.** 10 см; 25 см. **11.** 60°; 120°. 12. 60°; 120°. **13.** а) 70°; 110°; б) 42°; 48. **15.** 45°. **17.** 60°; 120°. **20.** 2 см. **23.** 55. **24.** 1.7.

Розділ 4

1. $\frac{5}{3}$; $\frac{2}{5}$. **2.** 3,75 см. **3.** а) 6 см; б) 4 см. **4.** 20; 25; 16. **5.** 15 м; 30 м. **6.** а) Ні; б) Так. **9.** $\sqrt{24}$; $\sqrt{40}$. **10.** 20 см. **11.** 80 см; 39 см. **12.** 30 см. **13.** 30 см. **14.** 90 см. **18.** а) Ні. б) Так. **21.** 6 см. **23.** 9,6.

Розділ 5

1. $\frac{d^2}{2}$. **2.** У 2 рази. **3.** 8 м; 18 м. **4.** Квадрат. **6.** 432 см^2. **7.** $\frac{d^2\sqrt{2}}{4}$. **8.** 48. **9.** 6 см. **10.** 1) 84 кв. од.; 2) 288 кв. од. **12.** 6 см^2. **13.** 1) $\pi\sqrt{3}$ см; 2) $2\pi\sqrt{3}$ см. **14.** 1) 4π см; 2) $4\pi\sqrt{2}$ см.

Розділ 6

3. 8 см. **5.** Ні. **6.** 8 см. **9.** 1) Так. 2) Ні. 3) Ні. **12.** 10 см; 15 см. **13.** 12 см. **14.** $4\sqrt{3}$. **15.** а) Ні; б) Так; в) Ні.

Розділ 7

1. а) 8 м; б) 16 м; в) $\sqrt{7}$ м. **2.** 84 см^2. **3.** 14000 м^2. **4.** $\frac{442\sqrt{3}}{3}$ см^2. **6.** $24\sqrt{6}$ см^3. **7.** $\frac{1}{2}H^3\text{ctg}^2\alpha$. **8.** 12 см^3. **9.** $\frac{3}{8}a^3$. **10.** а) 34 см; б) 5 см; в) 96 см. **12.** $a^2\sqrt{3}; a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **13.** 4 см. **14.** $a^2\sin\beta\left(\text{tg}\,\gamma+\frac{1}{\cos\gamma}\right)$. **15.** $\frac{512\sqrt{6}}{9}$ см^2. **16.** $\frac{128}{3}$ см^3. **17.** 5832 см^2. **18.** $54\sqrt{3}$ см^3. **20.** 72 см^3. **21.** $12\sqrt{3}$ см^2. **22.** $\frac{24334}{9}$ см^3. **23.** $54\sqrt{3}$ см^2.

Розділ 8

1. $2Q$. **2.** 25π; 37,5π. **3.** Рівні. **4.** $4\sqrt{3}$ см; 8 см. **5.** 280π см^2; $5\sqrt{2}$ см. **6.** 36π см^2. **7.** 30π см^2; 39π см^2. **8.** $13\pi\sqrt{69}$ см^2; $\pi\sqrt{69}\left(13+\sqrt{69}\right)$ см^2. **9.** 12π см^2. **10.** 24π см^2. **11.** $8\sqrt{2}\pi$ см^2; $8\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$см^2. **14.** 16π см^2. **15.** 10 см. **16.** 0,75π. **17.** 40π см^2. **18.** 31,25π см^2. **19.** 5 : 3. **20.** $18\pi\sqrt{2}$ см^3. **21.** 230π см^3. **22.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$. **23.** 12π см^3. **24.** $\frac{256\pi}{3}$ см^3. **25.** $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. **26.** 1 : 8. **27.** а) $R=5$ см; б) $\frac{500\pi}{3}$см. **28.** $\sqrt[3]{2}$. **29.** $\frac{\pi a^3}{6}$.

Розділ 9

1. 12. **2.** $-\frac{8}{3}$. **3.** 0,8. **4.** 427. **5.** 7. **6.** $\sqrt{61}$; $2\sqrt{41}$. **7.** $\frac{1}{\sqrt{53}}(6\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})$.

8. $\sqrt{74}$; $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{3}{\sqrt{26}}$. **10.** $\frac{29}{2}$. **11.** 137. **12.** 60°. **13.** –2,5. **14.** $(-3;3;3)$.

15. c^2. **16.** 0. **17.** $\overline{CM}=-\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$. **18.** $k=-1$. **20.** $\vec{a}=(\pm2;0;\pm3)$.

21. $\vec{a}=\left(\pm\frac{1}{3};\mp\frac{1}{3};\pm\frac{1}{3}\right)$. **22.** $\vec{a}=(\pm1;\pm1;\pm1)$. **23.** $\vec{a}=(-24;-32;30)$.

24. $m=-\frac{31}{12}, n=\frac{41}{12}$. **25.** $\vec{a}=(0;1;-1)$ або $\vec{a}=(0;-1;1)$.

26. $\vec{a}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ або $\vec{a}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. **27.** $AB=(-4;3;-1)$; $2\overline{BA}=(8;-6;2)$. **28.** $M_1(1;2;-5)$; $M_2(1;-2;-5)$. **29.** $\pi-\arccos 0{,}36$.

31. $\sqrt{5}$. **33.** $\frac{\pi}{2}$. **34.** 15; $\sqrt{593}$. **35.** $\arccos\frac{63}{65}$. **36.** $\vec{a}=(2\sqrt{5};\sqrt{5};-5)$.

37. $y=2x-14$. **39.** $a=-5, b=3$. **40.** $\frac{12}{\sqrt{13}}$. **41.** $x+2y=6$ або $2x+y=6$. **42.** $(x-1)^2+(y+3)^2=5^2$. **43.** $x^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2+z^2=\frac{497}{16}$.

44. $O(3;-2;4)$, $R=\sqrt{28}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.* Геометрія: Підруч. для 7–9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Вежа, 2001. – 272 с.

2. *Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.* Геометрія: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Вежа, 2002. – 224 с.

3. *Бурда М.І., Савченко Л.М.* Геометрія: Навч. посіб. для 8–9 кл. шк. з поглибленим вивченням математики. – К.: Освіта, 1966. – 240 с.

4. *Нікулін О.В., Кукуш О.Г.* Геометрія: Поглиблений курс: 7– 9 кл.: Навч. посіб. – Київ; Ірпінь; ВТФ «Перун», 1999. – 352 с .

5. *Габович И.Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Книга для учителя. – К.: Рад. шк., 1989. –160 с.

6. *Мазур К.И.* Решебник всех конкурсних задач по математике сборника под ред. М.И. Сканави. – Вып. 4, кн. 1. – К.: Поисково-издательсткое агенство «Книга Памяти Украины», 1998. – 726 с.

7. *Мазур К.И.* Решебник всех конкурсних задач по математике сборника под ред. М.Й. Сканави. – Вып. 4, кн. 2. – К.: Поисково-издательское агенство «Книга Памяти Украины», 1998. – 811 с.

8. *Мазур К.И.* Решение основних конкурсних задач по математике сборника под ред. М.И. Сканави. – К., 1988. – 672 с.

9. *Пастушенко С.М., Пастушенко В.М.* Математика. Означення, теореми, формули. Довід. для учнів середніх навчальних закладів. Вид. 2-е: Навч. посібник. – К: КМУЦА, Діал, 1998. – 352 с.

10. *Збірник* задач з математики для вступників до втузів / В.К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін; За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища. шк., 1992. – 445 с.

11. *Романюк В.Я., Собко М.С.* Геометрія. Завдання для письмового екзамену в 9-х класах. – Львів: ВНТЛ, 1996. – 64 с.

12. *Литвиненко Г.М., Собко М.С.* Збірник задач і вправ для екзамену з математики на атестат про середню освіту. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1995. – 64 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МУРАНОВА Наталя Петрівна
БЕВЗ Валентина Григорівна
БАРИШОВЕЦЬ Петро Павлович

ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Коректор *А. Бородавко*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Верстка *Л. Колодіна*