СИНТЕЗ И АНАЛИЗ БАЗИСА ТРЕУГОЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А.Я. Белецкий, В.В. Клобуков, В.Н. Шутко

Запропоновано систему ортогональних квазігармонійних функцій, яка близька за ефективністю до базису дискретних експоненційних функцій та краща останньої за простотою апаратно-програмної реалізації.

Ключові слова: квазігармонійні функції, дискретні експоненційні функції.

A system of orthogonal quasiharmonic functions is suggested which has the efficiency similar to the basis of discrete exponential functions and which is easier to realize in terms of hardware and software.

Key words: quasiharmonic functions, discrete exponential functions.

В задачах, связанных с вычислением спектров сигналов, важнейшей является проблема ограничения аппаратурных и вычислительных (программных) затрат. Эта проблема, наряду с особенностями отдельных задач, вынуждает исследователей искать различные варианты ортогональных базисов, среди которых можно выделить системы функций Уолша, Адамара, Пэли, Хаара и др. [1,2]. Ряд задач, такие, например, как выделение доплеровского сигнала в смеси сигнала и помехи, предполагают формирование гармонического спектра, получаемого только с помощью базиса Фурье. С другой стороны, большинство приложений не требуют вычисления идеальных гармонических спектров, тем более, что они сопровождаются большими ресурсными затратами, которые во многих случаях делают методы спектрального анализа неприменимыми на практике.

В данной статье решается задача синтеза базиса спектрального разложения дискретных сигналов на основе такого класса квазигармонических функций (КГФ), который по сравнению с классическим базисом дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) обеспечивает существенное сокращение аппаратно-программных средств, необходимых для реализации алгоритма дискретного (или быстрого) преобразования Фурье (ДПФ или БПФ).

На рис. 1 дается полное представление базиса КГФ на комплексной плоскости для случая шестнадцатиточечного ДПФ. Комплексный вектор

$\vec{W}$ вращается по часовой стрелке и его конец занимает позиции $W_1, W_2, ..., W_{N-1}$ (в данном случае число позиций N равно 16). При этом по вещественной и мнимой осям комплексной плоскости формируются числовые последовательности α_k и β_k такие, что

$$W_k = \alpha_k + j\beta_k, \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{1}$$

Комплексные величины (векторы) W_k будем называть фазовыми множителями (ФМ).

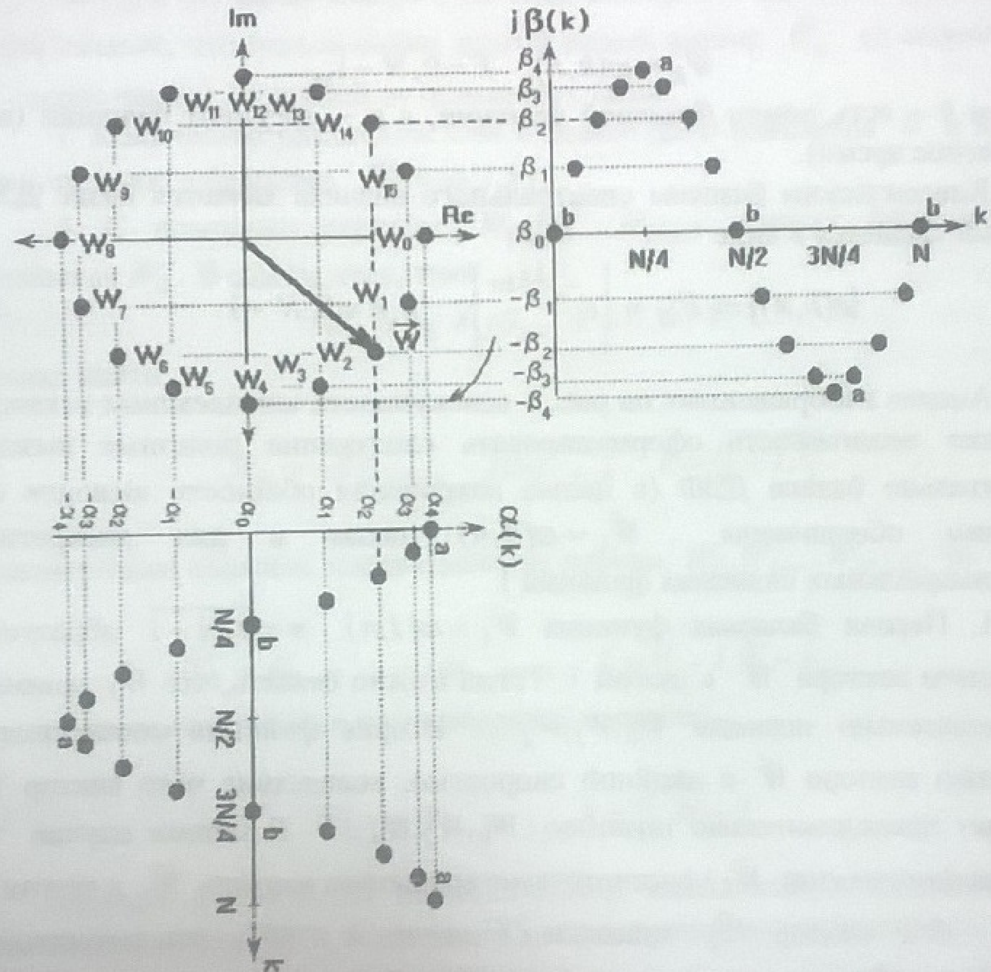

Рис. 1. *Обобщенное представление базиса КГФ на комплексной плоскости*

Обозначим Θ_k – угол, который образуют между собой два соседних вектора W_k и W_{k+1}. Если Θ_k расположены эквидистантно на интервале $[0, \ 2\pi]$, т.е. когда

$$\Theta_k = 2\pi / N, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

и, к тому же, модули всех векторов W_k равны единице, т.е.

$$\sqrt{\alpha_k + \beta_k} = 1, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{3}$$

то совокупность $\{W_k\}$ образует базис ДЭФ.

В том случае, когда нарушается хотя бы одно из условий (2) или (3), мы приходим к базису, который будем называть базисом КГФ.

Любой базис ДПФ составляется из совокупности базисных функций, которые мы обозначим

$$\vec{W}_k = \omega(k,n), \quad k = \overline{0, N-1},$$

причем k – есть номер базисной функции, а n – аргумент функции (или дискретное время).

Классическим базисом спектрального анализа является базис ДЭФ, который задается в виде

$$\{e(k,n)\} \Rightarrow E_N = \left\{ e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right\}, \quad k,n = \overline{0, N-1}. \tag{4}$$

Анализ изображенных на рис. 1 совокупности комплексных векторов W_k дает возможность сформулировать следующие полезные выводы относительно базиса ДЭФ (с целью сохранения общности выводов мы сохраним обозначение $\vec{W}_k = \omega(k,n)$ также и для дискретных экспоненциальных базисных функций).

1. Первая базисная функция $\vec{W}_1 = \omega(1,n)$, $n = \overline{0, N-1}$ образуется вращением вектора $\vec{W}$ с шагом 1. Тогда можно сказать, что $\vec{W}_1$ занимает последовательно позиции $W_0, W_1, W_2, \ldots$. Вторая функция соответствует вращению вектора $\vec{W}$ с двойной скоростью, вследствие чего вектор $\vec{W}_2$ занимает последовательно позиции $W_0, W_2, W_4, \ldots$. В общем случае k-я функция (или вектор $\vec{W}_k$) соответствует вращению вектора $\vec{W}$ с шагом k. При $k > N/2$ вектор $\vec{W}_k$ вращается с шагом $k > N/2$, что равносильно вращению в обратную сторону с шагом N-k. Отсюда

$$\vec{W}_{N-k} = \vec{W}_{-k}, \quad k = \overline{0, N/2}.$$

Номер функции соответствует общему понятию частоты, которое дает Трахтман [1] для функций Виленкина-Крестенсона. Реальная частота для k-й функции равна k/T, где T – период времени, в который входят N отсчетов дискретного сигнала.

2. Для базиса ДЭФ сохраняется свойство периодичности их ФМ

$$W_{k+LN} = W_k, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{5}$$

где L – целое число.

Отсюда непосредственно получим, что для любого $k = \overline{0, \infty}$

$$W_k = W_{((k))_N}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{6}$$

где $((m))_N$ – остаток числа m, вычисленного по основанию (модулю) N.

Из (5) и (6) также следует: система векторов $\vec{W}_0, \vec{W}_1, ..., \vec{W}_{N-1}$ полная в том смысле, что нельзя найти другой новый вектор $\vec{W}_q$ со скоростью q (q - целое число), отличной от описанных выше.

3. Количество различных ФМ в базисе ДЭФ равняется N и все они присутствуют в функции $\vec{W}_1 = \omega(1, n)$.

4. С помощью первых $W_0, W_1, ..., W_{N/8}$ могут быть найдены остальные W_k. В самом деле, зная

$$W_k = \alpha_k + j\beta_k, \quad k = \overline{0, N/8},$$

можно найти

$$W_k = -\beta_{N/4-k} - j\alpha_{N/4-k}, \quad k = \overline{\frac{N}{8} + 1, \frac{N}{4}}.$$

Аналогичным образом, когда известны первые $W_0, W_1, ..., W_{N/4}$, то

$$W_k = \beta_{k-N/4} - j\alpha_{k-N/4}, \quad k = \overline{\frac{N}{4} + 1, \frac{N}{2} - 1},$$

а в силу симметричности комплексной плоскости

$$W_k = -W_{k-N/2}, \quad k = \overline{\frac{N}{2}, N-1}.$$

Исходя из свойства периодичности комплексной экспоненты, k-я базисная функция ДЭФ, согласно (5), определится соотношением

$$e(k, n) = e(1, ((k \cdot n))_N). \tag{7}$$

Будем называть канонической матрицу ДЭФ, все элементы которой представлены с минимальными фазами, образующимися после вычитания из угла $\dfrac{2\pi}{N}kn$ целого числа π.

Правило (7) дает возможность представить каноническую форму матрицы преобразования E_N в базисе ДЭФ для $N = 8$ виде.

$$\{e(k,n)\} \Rightarrow E_8 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \; n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & -j & W^3 & -1 & -W & j & -W^3 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & W^3 & j & W & -1 & -W^3 & -j & -W \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W & -j & -W^3 & -1 & W & j & W^3 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -W^3 & j & -W & -1 & W^3 & -j & W \end{array}\right] \end{array} \qquad (8)$$

причем $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – есть фазовый (поворачивающий или весовой) множитель.

Из анализа матрицы (8) легко приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирования базиса ДЭФ

$$e(2k,n) = e\left(k,((2n))_N\right), \quad k \geq 1, \quad n = \overline{0,N-1} \qquad (9)$$

для четных и

$$e(2k+1,n) = e(2k,n) \cdot e(1,n) \qquad (10)$$

для нечетных функций.

Начальными условиями для рекуррентных соотношений (9) и (10) являются

$$e(0,n) = 1, \quad n = \overline{0,N-1}$$

и

$$e(1,n) = \begin{cases} W^n, & n = \overline{0,\frac{N}{2}-1}, \\ -W^{((n))_{N/2}}, & n = \overline{\frac{N}{2},N-1}. \end{cases}$$

Обратим внимание на следующие особенности матрицы (8). Во-первых, элементы правой половины четных базисных функций повторяют элементы левой половины, т.е. для $k,n = \overline{0,\frac{N}{2}-1}$

$$e(2k,n+\frac{N}{2}) = e(2k,n) \qquad (11)$$

и, во-вторых, элементы правой половины нечетных функций инверсны по отношению к соответствующим элементам левой половины функций

$$e(2k+1,n+\frac{N}{2})=-e(2k+1,n). \qquad (12)$$

Кроме того, в силу симметричности матрицы E_N, любые выводы относительно строк также справедливы и относительно столбцов матрицы преобразования. Из этого вытекает, в частности, что, во-первых, элементы нижней половины четных столбцов матрицы E_N повторяют элементы верхней половины, т.е. для $k,n=\overline{0,\frac{N}{2}-1}$

$$e(k+\frac{N}{2},2n)=e(k,2n) \qquad (13)$$

и, во-вторых, элементы нижней половины нечетных столбцов матрицы E_N инверсны по отношению к соответствующим элементам верхней половины столбцов

$$e(k+\frac{N}{2},2n+1)=-e(k,2n+1). \qquad (14)$$

Отмеченные свойства (11)-(14) существенно сокращают объем вычислений при формировании канонической матрицы E_N по рекуррентным формулам (9) и (10) для произвольного (но двоично-рационального) N.

Воспользовавшись формулой Эйлера, представим k-ю базисную функцию

$$e(k,n)=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

в виде

$$e(k,n)=\cos\frac{2\pi}{N}kn-j\sin\frac{2\pi}{N}kn, \qquad k,n=\overline{0,N-1}. \qquad (15)$$

Обозначив $t=n/N$ и полагая t непрерывной переменной, получим

$$e(k,t)=\cos 2\pi kt-j\sin 2\pi kt\,. \qquad (16)$$

Аппроксимируем тригонометрические функции в правой части (16) отрезками прямых так, как это для $k=1$ и 2 изображено на рис. 2.

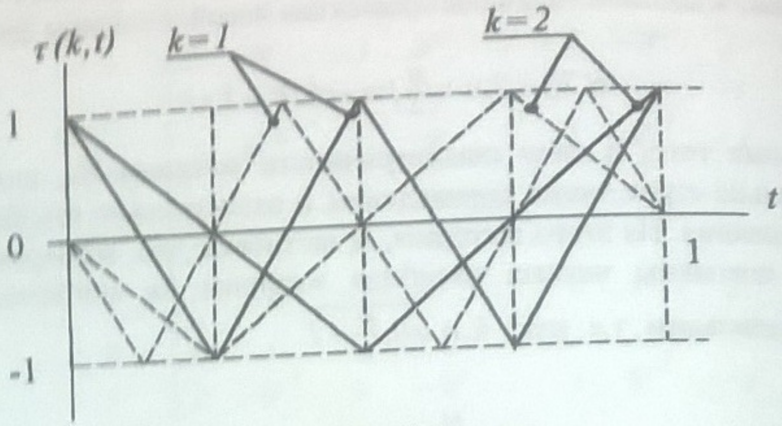

Рис. 2. *График треугольно-симметричных функций*

Назовем функции, аппроксимирующие тригонометрические функции в (16), треугольно-симметричными. Из них может быть составлен базис континуальных треугольно-симметричных функций $\{\tau(k,t)\}$, который по аналогии с континуальным базисом тригонометрических функций может быть представлен в виде

$$\tau(k,t)=\tau^c\left(k\frac{2\pi}{N}t\right)-j\tau^s\left(k\frac{2\pi}{N}t\right), \tag{17}$$

где $\tau^c(\cdot)$ – четная (косинусная или синфазная), а $\tau^s(\cdot)$ – нечетная (синусная или квадратурная) составляющие функции, k и t – есть номер функции и нормированное время такое, что $t\in[0,1]$.

Из (17) и рис. 2 следует, что функции $\tau(k,t)$ - взаимно ортогональны на интервале $t\in[0,1]$. Квадрат нормы $\|\tau_k\|^2$ этих комплексных функций определяется через скалярное произведение

$$\|\tau_k\|^2=\int_0^1\tau(k,t)\tau^*(k,t)dt,$$

где τ^* – переменная, комплексно сопряженная к τ.

Легко показать, что

$$\|\tau_k\|=\begin{cases}1, & k=0,\\ \sqrt{2/3}, & k\ge 1.\end{cases}$$

Совершая в (17) обратный переход от непрерывного времени t к дискретному, т.е. заменяя $t=n/N$, получим систему дискретных треугольно-симметричных функций

$$\tau(k,n) = \tau^c(k,n) + j\tau^s(k,n), \quad k,n = \overline{0, N-1},$$

где $\tau^c(\cdot,\cdot)$ и $\tau^s(\cdot,\cdot)$ – есть дискретные аналоги непрерывных функций $\tau^c(\cdot)$ и $\tau^s(\cdot)$ соответственно, причем для $k=0$

$$\tau^c(0,n) = 1, \quad \tau^s(0,n) = 0, \quad n = \overline{0, N-1},$$

а для $k \geq 1$

$$\tau^c(k,n) = (-1)^{\left[2\frac{n}{N}k\right]} \left\{1 - 4k\left(\left(\frac{n}{N}\right)\right)_{1/2k}\right\},$$

$$\tau^s(k,n) = (-1)^{\left[2\frac{n}{N}k + \frac{1}{2}\right]} \left\{1 - 4k\left(\left(\frac{n}{N} + \frac{1}{4k}\right)\right)_{1/2k}\right\},$$

в которых $[x]$ – целая часть числа x.

Система $\{\tau(k,n)\}$ образует базис дискретных ТСФ, относительно которого можно вычислить спектр $\dot{X}(k)$ дискретного сигнала $\dot{x}(n)$ по формуле

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}(n)\tau(k,n).$$

Система рекуррентных соотношений для матрицы преобразования T_N в базисе ТСФ подобна системе (9) и (10) в базисе ДЭФ, т.е. при $k \geq 1$

$$\tau(2k,n) = \tau\big(k, ((2n))_N\big), \tag{18}$$

для четных функций и

$$\tau(2k+1,n) = \tau(2k,n) \cdot \tau(1,n) \tag{19}$$

- для нечетных функций.

Начальными условиями для (18) и (19) являются

$$\tau(0,n) = 1, \quad n = \overline{0, N-1}, \tag{20}$$

$$\tau(1,n)=\left\{ (1,0),\ \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right),\ (0,-1),\ \left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right),\ (-1,0),\ \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),\ (0,1),\ \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \right\}, \quad (21)$$

где (α,β) – есть обозначение комплексной величины $\alpha+j\beta$. Условие (21) соответствует значению $N = 8$.

На основании рекуррентных выражений (18) и (19), с учетом начальных условий (20) и (21), составим сокращенную матрицу преобразования ДПФ в базисе ТСФ

$$\{\tau(k,n)\} \Rightarrow T_8 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} (1,\,0) & (1,\,0) & (1,\,0) & (1,\,0) & \dots \\ (1,\,0) & \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) & (0,-1) & \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) & \dots \\ (1,\,0) & (0,-1) & (-1,\,0) & (0,\,1) & \dots \\ (1,\,0) & \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) & (0,\,1) & \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \quad (22)$$

Оставшиеся элементы матрицы (22) легко заполнить, используя свойства (11)-(14) базиса ДЭФ, которые справедливы также и для базиса ДТФ.

Опираясь на линейность ТСФ в базисе ДТФ, легко перейти от дробных к целочисленным значениям составляющих фазовых множителей. Для этого достаточно все элементы матрицы T_N умножить на $N/4$. В этом легко убедиться, обратившись к рис. 3, который иллюстрирует способ формирования фазовых множителей W_m для $N=16$.

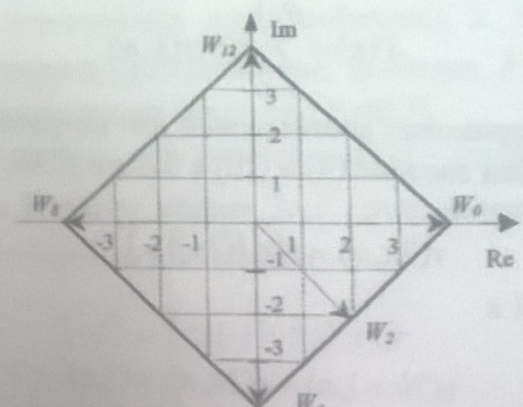

Рис. 3. *К определению целочисленных фазовых множителей в базисе ДТФ*

Значения элементов первой базисной функции τ $(1,n)$ для $N=16$ с целочисленными составляющими комплексных ФМ приведены в табл. 1.

Таблица 1.

n	0	1	2	3
	4	5	6	7
	8	9	10	11
	12	13	14	15
$\tau(1,n)$	(4,0)	(3,-1)	(2,-2)	(1,-3)
	(0,-4)	(-1,-3)	(-2,-2)	(-3,-1)
	(-4,0)	(-3,1)	(-2,2)	(-1,3)
	(0,4)	(1,3)	(2,2)	(3,1)

Полная матрица преобразования T_{16} может быть получена из $\tau(1,n)$ по формуле, аналогичной формуле (7), т.е. для $k>1$ и $n=\overline{0,N-1}$

$$\tau(k,n)=\tau\Big(1,\big((k\cdot n)\big)_N\Big),$$

а нулевая функция равна

$$\tau(0,n)=(4,0).$$

Отметим следующие основные свойства ДТФ:

1. Действительная и мнимая части ДТФ могут принимать лишь $m=N/4$ различных значений. Следовательно, система ДТФ - это система функций квантованных по величине и дискретных по аргументу.
2. Матрицы ДТФ являются симметрическими. Это свойство находит свое выражение в том, что любые выводы относительно переменной n будут также справедливы и относительно номера функции k, и наоборот.

Отметим, что свойство симметричности матрицы ДПФ является необходимым условием существования алгоритма БПФ по схеме Кули-Тьюки, но необязательно достаточным.

3. ДТФ – периодические функции с периодом N, т.е.

$$\tau(k,n+LN)=\tau(k,n),\quad L \text{ – целое число.}$$

Это свойство достаточно наглядно просматривается на рис. 3.

4. Для произвольного двоично-рационального N существует всего $N/8+1$ различных по модулю ДТФ, нормированные значения которых A_m определяются выражением

$$A_k=\sqrt{1-\frac{8k}{N}\left(1-\frac{4k}{N}\right)},\quad k=\overline{0,N/8}.$$

Это свойство легко доказать, обратившись к правилу формирования ФМ, которое для $N=16$ представлено на рис. 3.

5. При всех $k \neq 0$ ДТФ имеет нулевое среднее значение, т.е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tau(k,n) = 0 .$$

6. Базис ТСФ образует полную систему ортогональных функций.
7. Дискретное преобразование Фурье в базисе ДТФ имеет быструю реализацию по схеме Кули-Тьюки [3].

Целочисленное представление дискретных значений ДТФ и простота их математического описания по сравнению с базисом ДЭФ дает возможность проектировать достаточно эффективные спектр-анализаторы с повышенным быстродействием и экономией аппаратных ресурсов, поскольку умножение на целочисленные множители может быть сведено к простым операциям сдвига и сложения двоичных чисел, выполнение которых требует меньших аппаратно-программных ресурсов, чем операция умножения комплексных иррациональных чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1976. – 848 с.
3. Белецкий А.Я., Давлетьянц А.И., Семенов А.А., Синицин Р.Б. Алгоритм быстрого преобразования Фурье в базисе треугольно-симметричных функций. – Электронное моделирование. – К.: Наук. думка, 1985. – №5. – С. 11-13, 35.

Надійшла 10.03.2000