УДК 519.652:519.254

П.О.Приставка

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ПОПОВНЕННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВІДЛІКІВ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІАЛЬНОГО СПЛАЙНУ

Для восьмикратного поповнення послідовностей відліків гладких функцій трьох змінних подано лінійні оператори, отримані за використанням тривимірного локального поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів другого порядку підвищеної точності апроксимації, що є близьким до інтерполяційного у середньому.

Постановка проблеми. Задача інтерполяції тривимірних функцій потребує значних обчислювальних затрат. Суттєве зменшення кількості простіших арифметичних операцій при інтерполяції функцій трьох змінних забезпечують методи локальної апроксимації на основі фінітних функцій, зокрема лінійні комбінації *B*-сплайнів. На разі, коли функції трьох змінних табульовано у вигляді послідовностей відліків, може виникати різновид задачі інтерполяції, а саме – кратне поповнення кількості членів подібних послідовностей. У такому разі, застосування явних виглядів сплайн-апроксимацій є недоречним у зв'язку з обчислювальною надлишковістю, у порівнянні з частковими випадками застосування сплайн-операторів при конкретних наперед відомих значеннях аргументів.

В контексті зазначеного, актуальною є задача отримання швидкодіючих обчислювальних схем, які мали б застосування для кратного поповнення послідовностей відліків функцій трьох змінних та котрі при аналогічній якості апроксимації не поступались би неперервним апроксимаціям.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задля отримання швидкодіючих обчислювальних схем, розвиток отримали методи, що базуються на обчислювальному аспекті, зокрема вейвлети та процедури, основані на бінарному (або більш кратному) поповненні послідовностей відліків гладких функцій. Що до останніх, можна зазначити можливість їх одержання на підставі неокласичних методів сплайн-апроксимації, зокрема, з використанням поліноміальних сплайнів, визначених на локальних носіях, для яких і обчислювальний апарат, і дослідження проведено досить розлого.

Задачі відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій

B-сплайнів висвітлено у досить багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном [1] та у ряді авторських робіт, зокрема [2]. Що до методів, побудованих на бінарному поповненні послідовностей, то звертають увагу роботи [3-7], в тому числі і за усередненими на інтервалах розбиття значеннями гладких функцій як однієї, так і двох-трьох змінних [2; 8-12]. Стосовно відтворення функцій за усередненими значеннями, визначеними на рівномірних розбиттях можна зазначити наступне: вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань [1; 2].

Поставимо за мету у подальшому викладенні подати процедури восьмикратного поповнення тривимірних послідовностей відліків гладких функцій (двократного масштабування) на підставі алгоритмізації обчислювальної схеми тривимірного сплайну підвищеної точності на основі *B*-сплайнів другого порядку [2]. Слід зазначити, що в роботах [2; 10] задача масштабування у тривимірному випадку вирішується за рахунок ітераційних процедур бінарного поповнення тривимірних послідовностей. Проте, нескладно показати, що обчислювальна складність такого підходу не може в повній мірі задовольняти розробників програмного забезпечення з вимогою функціонування в режимі реального часу (за рахунок додаткових ітераційних циклів зростає кількість простіших арифметичних операцій).

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо розбиття тривимірного простору на паралелепіпеди з кроками h_t, h_q, h_g уздовж осей T, Q, G, тим самим задано масив точок

$$\left\{\left(t_{i,0}, q_{j,0}, g_{l,0}\right)\right\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}} = \left\{\left(ih_t, jh_q, lh_g\right)\right\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}},$$

кожному елементу якого поставлено у відповідність усереднене в паралелепіпедній області

$$\Big\{\left(t_{i,0} - 0{,}5h_t, q_{j,0} - 0{,}5h_q, g_{l,0} - 0{,}5h_g\right), \\ \left(t_{i,0} + 0{,}5h_t, q_{j,0} + 0{,}5h_q, g_{l,0} + 0{,}5h_g\right)\Big\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}}$$

значення деякої $p(t,q,g) \in C^{k_1,k_2,k_3}$, $k_1, k_2, k_3 = 2, 3, \ldots$ функції, а саме $\left\{p_{i,j,l,0}\right\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}}$.

Для восьмикратного рекурентного поповнення кількості членів послідовності $\left\{p_{i,j,l,0}\right\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}}$ достатньо на кожному κ-му ($\kappa=1,2,\ldots$) кроці рекурсії мати нову, більш згущену сітку вузлів

$$\Big\{(t_{2i,\kappa},q_{2j,\kappa},g_{2l,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j,\kappa},g_{2l,\kappa}),$$
$$(t_{2i,\kappa},q_{2j+1,\kappa},g_{2l,\kappa}),(t_{2i,\kappa},q_{2j,\kappa},g_{2l+1,\kappa}),$$
$$(t_{2i+1,\kappa},q_{2j+1,\kappa},g_{2l,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j,\kappa},g_{2l+1,\kappa}),$$
$$(t_{2i,\kappa},q_{2j+1,\kappa},g_{2l+1,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j+1,\kappa},g_{2l+1,\kappa})\Big\}_{i,j,l\in\mathbb{Z}},$$

які визначаються за формулами:

$$t_{2i,\kappa}=t_{i,\kappa-1},\qquad q_{2j,\kappa}=q_{j,\kappa-1},\qquad g_{2l,\kappa}=g_{l,\kappa-1},$$
$$t_{2i+1,\kappa}=\frac{t_{i,\kappa-1}+t_{i+1,\kappa-1}}{2}=t_{i,\kappa-1}+\frac{h_t}{2^{\kappa+1}},$$
$$q_{2j+1,\kappa}=\frac{q_{j,\kappa-1}+q_{j+1,\kappa-1}}{2}=q_{j,\kappa-1}+\frac{h_q}{2^{\kappa+1}},$$
$$g_{2l+1,\kappa}=\frac{g_{l,\kappa-1}+g_{l+1,\kappa-1}}{2}=g_{l,\kappa-1}+\frac{h_g}{2^{\kappa+1}},$$

причому

$$\begin{gathered}
p_{2i,2j,2l,\kappa}=A_1\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\qquad p_{2i+1,2j,2l,\kappa}=A_2\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\\
p_{2i,2j+1,2l,\kappa}=A_3\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\qquad p_{2i,2j,2l+1,\kappa}=A_4\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\\
p_{2i+1,2j+1,2l,\kappa}=A_5\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\qquad p_{2i+1,2j,2l+1,\kappa}=A_6\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\\
p_{2i,2j+1,2l+1,\kappa}=A_7\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\qquad p_{2i+1,2j+1,2l+1,\kappa}=A_8\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right),\\
i,j,l\in\mathbb{Z},
\end{gathered}\tag{1}$$

де $A_\nu\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right)$, $\nu=\overline{1,8}$ – лінійні функціонали, що побудовано на даних попереднього кроку рекурсії.

Наприклад, функціонали (1) неважко отримати із явного вигляду сплайну $S_{2,1}\left(p,t,q,g\right)$ [2], якщо для значень аргументу сплайну

$$\left(x,y,z\right),$$

де

$$x=\frac{2}{h_t}\left(t-(i+0{,}5)h_t\right),\quad y=\frac{2}{h_q}\left(q-(j+0{,}5)h_q\right),$$

$$z=\frac{2}{h_g}\left(g-(l+0{,}5)h_g\right),\qquad i,j,l\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

покласти відповідно:

$$(0;0;0);\ (0;0;1);\ (0;1;0);\ (0;1;1);$$

$$(1;0;0);\ (1;0;1);\ (1;1;0);\ (1;1;1).$$

В результаті отримаємо (для прикладу подамо при $v=8$):

$$\begin{aligned}
A_8^{(S_{2,1})}(\cdot)=p^{(S_{2,1})}_{2i+1,2j+1,2l+1,\kappa}=\frac{1}{1728}\Big(&-p_{i-1,j-1,l-1,\kappa-1}+7p_{i,j-1,l-1,\kappa-1}+\\
&7p_{i+1,j-1,l-1,\kappa-1}-p_{i+2,j-1,l-1,\kappa-1}+7p_{i-1,j,l-1,\kappa-1}-49p_{i,j,l-1,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j,l-1,\kappa-1}+7p_{i+2,j,l-1,\kappa-1}+7p_{i-1,j+1,l-1,\kappa-1}-49p_{i,j+1,l-1,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j+1,l-1,\kappa-1}+7p_{i+2,j+1,l-1,\kappa-1}-p_{i-1,j+2,l-1,\kappa-1}+7p_{i,j+2,l-1,\kappa-1}+\\
&+7p_{i+1,j+2,l-1,\kappa-1}-p_{i+2,j+2,l-1,\kappa-1}+7p_{i-1,j-1,l,\kappa-1}-49p_{i,j-1,l,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j-1,l,\kappa-1}+7p_{i+2,j-1,l,\kappa-1}-49p_{i-1,j,l,\kappa-1}+343p_{i,j,l,\kappa-1}+\\
&+343p_{i+1,j,l,\kappa-1}-49p_{i+2,j,l,\kappa-1}-49p_{i-1,j+1,l,\kappa-1}+343p_{i,j+1,l,\kappa-1}+\\
&+343p_{i+1,j+1,l,\kappa-1}-49p_{i+2,j+1,l,\kappa-1}+7p_{i-1,j+2,l,\kappa-1}-49p_{i,j+2,l,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j+2,l,\kappa-1}+7p_{i+2,j+2,l,\kappa-1}+7p_{i-1,j-1,l+1,\kappa-1}-49p_{i,j-1,l+1,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j-1,l+1,\kappa-1}+7p_{i+2,j-1,l+1,\kappa-1}-49p_{i-1,j,l+1,\kappa-1}+343p_{i,j,l+1,\kappa-1}+\\
&+343p_{i+1,j,l+1,\kappa-1}-49p_{i+2,j,l+1,\kappa-1}-49p_{i-1,j+1,l+1,\kappa-1}+343p_{i,j+1,l+1,\kappa-1}+\\
&+343p_{i+1,j+1,l+1,\kappa-1}-49p_{i+2,j+1,l+1,\kappa-1}+7p_{i-1,j+2,l+1,\kappa-1}-49p_{i,j+2,l+1,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j+2,l+1,\kappa-1}+7p_{i+2,j+2,l+1,\kappa-1}-p_{i-1,j-1,l+2,\kappa-1}+7p_{i,j-1,l+2,\kappa-1}+\\
&+7p_{i+1,j-1,l+2,\kappa-1}-p_{i+2,j-1,l+2,\kappa-1}+7p_{i-1,j,l+2,\kappa-1}-49p_{i,j,l+2,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j,l+2,\kappa-1}+7p_{i+2,j,l+2,\kappa-1}+7p_{i-1,j+1,l+2,\kappa-1}-49p_{i,j+1,l+2,\kappa-1}-\\
&-49p_{i+1,j+1,l+2,\kappa-1}+7p_{i+2,j+1,l+2,\kappa-1}-p_{i-1,j+2,l+2,\kappa-1}+7p_{i,j+2,l+2,\kappa-1}+\\
&+7p_{i+1,j+2,l+2,\kappa-1}-p_{i+2,j+2,l+2,\kappa-1}\Big).
\end{aligned} \tag{3}$$

В стислому вигляді функціонали $A_v\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right)$, $v=\overline{1,8}$ можна подати так:

$$A_\nu^{(S_{2,1})}(\cdot) = S_{2,1}^{(x;y;z)} = \sum_{ii=i-2}^{i+2} \sum_{jj=j-2}^{j+2} \sum_{ll=l-2}^{l+2} \gamma^{(2,1)}_{(x;y;z),ii-i,jj-j,ll-l} \cdot p_{ii,jj,ll,\kappa-1},$$

де

$S_{2,1}^{(x;y;z)}$ – лінійний функціонал, що визначається із явного вигляду сплайну $S_{2,1}(p,t,q,g)$ [2] при конкретному значенні аргументів (x,y,z);

$\gamma^{(2,1)}_{(x;y;z)} = \left\{ \gamma^{(2,1)}_{(x;y;z)i,j,l}; i,j,l = \overline{-2;2} \right\}$ – тривимірна матриця коефіцієнтів при членах послідовності $\left\{ p_{i,j,l,\kappa-1} \right\}_{i,j,l \in \mathbb{Z}}$, що відповідає частковому випадку сплайну $S_{2,1}(p,t,q,g)$ в точці (x,y,z).

В таблиці (табл.1) подано коефіцієнти при $p_{i,j,l}$, $i,j,l \in \mathbb{Z}$, отримані при конкретних значеннях (x,y,z) сплайну $S_{2,1}(p,t,q,g)$, які можуть бути використані для отримання операторів $A_\nu\left(p^{\kappa-1,i,j,l}\right)$, $\nu = \overline{1,8}$ на зразок (3).

Висновки. Відзначимо, що сплайн $S_{2,1}(p,t,q,g)$, має досить малу похибку апроксимації гладких функцій трьох змінних [2], фактично він є близьким (в асимптотичному сенсі) до інтерполяційного у середньому. Саме тому, отримані в роботі лінійні функціонали поповнення послідовностей відліків зазначених функцій можуть бути рекомендовані при високоточних обрахунках. При реалізації у програмному забезпеченні лінійних операторів на зразок (3), привівши подібні для зменшення кількості простіших арифметичних операцій, можна досягати суттєвої швидкодії обчислювальних схем. Практичне застосування запропоновані оператори можуть мати при масштабуванні цифрованих відео потоків, при опрацюванні результатів роботи томографів, обробці тривимірних цифрованих сигналів різноманітного походження.

Подальші дослідження мають враховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів при опрацюванні послідовностей відліків функцій більшої, ніж три кількості змінних, а також взаємодію методів стиснення та відтворення інформації.

Таблиця 1

Коефіцієнти при $p_{i,j,l}$, $i, j, l \in \mathbb{Z}$, отримані при конкретних значеннях (x, y, z) сплайну $S_{2,1}(p, t, q, g)$.

Індекси	$(0;0;0)$	$(0;0;1)$	$(0;1;0)$	$(0;1;1)$	$(1;0;0)$	$(1;0;1)$	$(1;1;0)$	$(1;1;1)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i-2, j-2, l-2$	-1	0	0	0	0	0	0	0
$i-2, j-1, l-2$	2	0	-1	0	0	0	0	0
$i-2, j, l-2$	46	0	7	0	0	0	0	0
$i-2, j+1, l-2$	2	0	7	0	0	0	0	0
$i-2, j+2, l-2$	-1	0	-1	0	0	0	0	0
$i-2, j-2, l-1$	2	-1	0	0	0	0	0	0
$i-2, j-1, l-1$	-4	2	2	-1	0	0	0	0
$i-2, j, l-1$	-92	46	-14	7	0	0	0	0
$i-2, j+1, l-1$	-4	2	-14	7	0	0	0	0
$i-2, j+2, l-1$	2	-1	2	-1	0	0	0	0
$i-2, j-2, l$	46	7	0	0	0	0	0	0
$i-2, j-1, l$	-92	-14	46	7	0	0	0	0
$i-2, j, l$	-2116	-322	-322	-49	0	0	0	0
$i-2, j+1, l$	-92	-14	-322	-49	0	0	0	0
$i-2, j+2, l$	46	7	46	7	0	0	0	0
$i-2, j-2, l+1$	2	7	0	0	0	0	0	0
$i-2, j-1, l+1$	-4	-14	2	7	0	0	0	0
$i-2, j, l+1$	-92	-322	-14	-49	0	0	0	0
$i-2, j+1, l+1$	-4	-14	-14	-49	0	0	0	0
$i-2, j+2, l+1$	2	7	2	7	0	0	0	0
$i-2, j-2, l+2$	-1	-1	0	0	0	0	0	0
$i-2, j-1, l+2$	2	2	-1	-1	0	0	0	0
$i-2, j, l+2$	46	46	7	7	0	0	0	0
$i-2, j+1, l+2$	2	2	7	7	0	0	0	0
$i-2, j+2, l+2$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
$i-1, j-2, l-2$	2	0	0	0	-1	0	0	0
$i-1, j-1, l-2$	-4	0	2	0	2	0	-1	0
$i-1, j, l-2$	-92	0	-14	0	46	0	7	0
$i-1, j+1, l-2$	-4	0	-14	0	2	0	7	0
$i-1, j+2, l-2$	2	0	2	0	-1	0	-1	0
$i-1, j-2, l-1$	-4	2	0	0	2	-1	0	0
$i-1, j-1, l-1$	8	-4	-4	2	-4	2	2	-1

Таблиця 1 (продовження)

Коефіцієнти при $p_{i,j,l}$, $i,j,l \in \mathbb{Z}$, отримані при конкретних значеннях (x,y,z) сплайну $S_{2,1}(p,t,q,g)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i-1,j,l-1$	184	-92	28	-14	-92	46	-14	7
$i-1,j+1,l-1$	8	-4	28	-14	-4	2	-14	7
$i-1,j+2,l-1$	-4	2	-4	2	2	-1	2	-1
$i-1,j-2,l$	-92	-14	0	0	46	7	0	0
$i-1,j-1,l$	184	28	-92	-14	-92	-14	46	7
$i-1,j,l$	4232	644	644	98	-2116	-322	-322	-49
$i-1,j+1,l$	184	28	644	98	-92	-14	-322	-49
$i-1,j+2,l$	-92	-14	-92	-14	46	7	46	7
$i-1,j-2,l+1$	-4	-14	0	0	2	7	0	0
$i-1,j-1,l+1$	8	28	-4	-14	-4	-14	2	7
$i-1,j,l+1$	184	644	28	98	-92	-322	-14	-49
$i-1,j+1,l+1$	8	28	28	98	-4	-14	-14	-49
$i-1,j+2,l+1$	-4	-14	-4	-14	2	7	2	7
$i-1,j-2,l+2$	2	2	0	0	-1	-1	0	0
$i-1,j-1,l+2$	-4	-4	2	2	2	2	-1	-1
$i-1,j,l+2$	-92	-92	-14	-14	46	46	7	7
$i-1,j+1,l+2$	-4	-4	-14	-14	2	2	7	7
$i-1,j+2,l+2$	2	2	2	2	-1	-1	-1	-1
$i,j-2,l-2$	46	0	0	0	7	0	0	0
$i,j-1,l-2$	-92	0	46	0	-14	0	7	0
$i,j,l-2$	-2116	0	-322	0	-322	0	-49	0
$i,j+1,l-2$	-92	0	-322	0	-14	0	-49	0
$i,j+2,l-2$	46	0	46	0	7	0	7	0
$i,j-2,l-1$	-92	46	0	0	-14	7	0	0
$i,j-1,l-1$	184	-92	-92	46	28	-14	-14	7
$i,j,l-1$	4232	-2116	644	-322	644	-322	98	-49
$i,j+1,l-1$	184	-92	644	-322	28	-14	98	-49
$i,j+2,l-1$	-92	46	-92	46	-14	7	-14	7
$i,j-2,l$	-2116	-322	0	0	-322	-49	0	0
$i,j-1,l$	4232	644	-2116	-322	644	322	-322	-49
i,j,l	97336	14812	14812	2254	14812	2254	2254	343
$i,j+1,l$	4232	644	14812	2254	644	322	2254	343

Таблиця 1 (продовження)

Коефіцієнти при $p_{i,j,l}$, $i, j, l \in \mathbb{Z}$, отримані при конкретних значеннях (x, y, z) сплайну $S_{2,1}(p,t,q,g)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i, j+2, l$	-2116	-322	-2116	-322	-322	-49	-322	-49
$i, j-2, l+1$	-92	-322	0	0	-14	-49	0	0
$i, j-1, l+1$	184	644	-92	-322	28	322	-14	-49
$i, j, l+1$	4232	14812	644	2254	644	2254	98	343
$i, j+1, l+1$	184	644	644	2254	28	322	98	343
$i, j+2, l+1$	-92	-322	-92	-322	-14	-49	-14	-49
$i, j-2, l+2$	46	46	0	0	7	7	0	0
$i, j-1, l+2$	-92	-92	46	46	-14	-14	7	7
$i, j, l+2$	-2116	-2116	-322	-322	-322	-322	-49	-49
$i, j+1, l+2$	-92	-92	-322	-322	-14	-14	-49	-49
$i, j+2, l+2$	46	46	46	46	7	7	7	7
$i+1, j-2, l-2$	2	0	0	0	7	0	0	0
$i+1, j-1, l-2$	-4	0	2	0	-14	0	7	0
$i+1, j, l-2$	-92	0	-14	0	-322	0	-49	0
$i+1, j+1, l-2$	-4	0	-14	0	-14	0	-49	0
$i+1, j+2, l-2$	2	0	2	0	7	0	7	0
$i+1, j-2, l-1$	-4	2	0	0	-14	7	0	0
$i+1, j-1, l-1$	8	-4	-4	2	28	-14	-14	7
$i+1, j, l-1$	184	-92	28	-14	644	-322	98	-49
$i+1, j+1, l-1$	8	-4	28	-14	28	-14	98	-49
$i+1, j+2, l-1$	-4	2	-4	2	-14	7	-14	7
$i+1, j-2, l$	-92	-14	0	0	-322	-49	0	0
$i+1, j-1, l$	184	28	-92	-14	644	322	-322	-49
$i+1, j, l$	4232	644	644	98	14812	2254	2254	343
$i+1, j+1, l$	184	28	644	98	644	322	2254	343
$i+1, j+2, l$	-92	-14	-92	-14	-322	-49	-322	-49
$i+1, j-2, l+1$	-4	-14	0	0	-14	-49	0	0
$i+1, j-1, l+1$	8	28	-4	-14	28	322	-14	-49
$i+1, j, l+1$	184	644	28	98	644	2254	98	343
$i+1, j+1, l+1$	8	28	28	98	28	322	98	343
$i+1, j+2, l+1$	-4	-14	-4	-14	-14	-49	-14	-49
$i+1, j-2, l+2$	2	2	0	0	7	7	0	0

Таблиця 1 (закінчення)

Коефіцієнти при $p_{i,j,l}$, $i, j, l \in \mathbb{Z}$, отримані при конкретних значеннях (x, y, z) сплайну $S_{2,1}(p, t, q, g)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i+1, j-1, l+2$	-4	-4	2	2	-14	-14	7	7
$i+1, j, l+2$	-92	-92	-14	-14	-322	-322	-49	-49
$i+1, j+1, l+2$	-4	-4	-14	-14	-14	-14	-49	-49
$i+1, j+2, l+2$	2	2	2	2	7	7	7	7
$i+2, j-2, l-2$	-1	0	0	0	-1	0	0	0
$i+2, j-1, l-2$	2	0	-1	0	2	0	-1	0
$i+2, j, l-2$	46	0	7	0	46	0	7	0
$i+2, j+1, l-2$	2	0	7	0	2	0	7	0
$i+2, j+2, l-2$	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
$i+2, j-2, l-1$	2	-1	0	0	2	-1	0	0
$i+2, j-1, l-1$	-4	2	2	-1	-4	2	2	-1
$i+2, j, l-1$	-92	46	-14	7	-92	46	-14	7
$i+2, j+1, l-1$	-4	2	-14	7	-4	2	-14	7
$i+2, j+2, l-1$	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
$i+2, j-2, l$	46	7	0	0	46	7	0	0
$i+2, j-1, l$	-92	-14	46	7	-92	-14	46	7
$i+2, j, l$	-2116	-322	-322	-49	-2116	-322	-322	-49
$i+2, j+1, l$	-92	-14	-322	-49	-92	-14	-322	-49
$i+2, j+2, l$	46	7	46	7	46	7	46	7
$i+2, j-2, l+1$	2	7	0	0	2	7	0	0
$i+2, j-1, l+1$	-4	-14	2	7	-4	-14	2	7
$i+2, j, l+1$	-92	-322	-14	-49	-92	-322	-14	-49
$i+2, j+1, l+1$	-4	-14	-14	-49	-4	-14	-14	-49
$i+2, j+2, l+1$	2	7	2	7	2	7	2	7
$i+2, j-2, l+2$	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0
$i+2, j-1, l+2$	2	2	-1	-1	2	2	-1	-1
$i+2, j, l+2$	46	46	7	7	46	46	7	7
$i+2, j+1, l+2$	2	2	7	7	2	2	7	7
$i+2, j+2, l+2$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Знаменник	110592	27648	27648	6912	27648	6912	6912	1728

Примітка до табл.1. В останній стрічці таблиці «Знаменник» наведено значення, на яке при реалізації обчислювальних схем мають бути поділені коефіцієнти відповідного стовпця таблиці (табл.1).

Бібліографічні посилання

1. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
2. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
3. **Dubuk S.** Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, p.185-204.
4. **De Marchi S.** The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions. TR nr. 10/94, University of Padua, 1994.
5. **Holschneider M.** Wavelets. An analysis Tool. Oxford. Oxford University Press, 1995.
6. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (5), 2000, с.11-19.
7. **Иванин Д.А., Лигун А.А.** Линейный метод восстановления поверхностей по её значениям в узлах квадратной решетки // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.8-12.
8. **Лигун А.А., Шумейко А.А., Голобородько П.Л.** О гарантированных оценках для линейных методов восстановления, основанных на бинарном расслоении // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 2 (7), 2001, с.30-39.
9. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Об одном способе восстановления функций по средним значениям на равномерной сетке // Математичне моделювання, Діпродзержинськ, ДГТУ, 1 (6), 2001, с.16-17.
10. **Приставка П.О.** Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2003.-Т.7. – С.39-53.
11. **Приставка П.О.** Поповнення послідовностей відліків функцій двох змінних на основі поліноміальних сплайнів / Вісник НАУ.- К.: НАУ.- 2007.-№3-4. –С. 36–39.
12. **Приставка П.О.** Поповнення зі згладжуванням послідовностей відліків функцій двох змінних на основі сплайнів / Математичне моделювання. – 2008. - №1(18). – С.9-12.