

ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО СПЛАЙНУ НА ОСНОВІ В-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Введено двовимірний поліноміальний сплайн на основі B -сплайнів п'ятого порядку, близький до інтерполяційного у середньому. Отримано коефіцієнти при маномах, знайдено норму сплайн-оператора та визначено похибку апроксимації гладких функцій, заданих на рівномірних сітках вузлів.

Постановка проблеми. Неперервні наближення двовимірних функцій, заданих значеннями на рівномірних сітках вузлів є актуальними в багатьох задачах: просторове моделювання, при реалізації геоінформаційних систем, при побудові різного роду поверхонь спостережень. Для останнього типу задач важливим є врахування наявності, за всяк час випадкової похибки у відліках функції, що спостерігається. При апроксимації за даними такого роду використовують методи, що забезпечують відтворення функцій за відліками, що є усередненими значеннями деяких функцій на елементах двовимірного розбиття – методи апроксимації у середньому.

В подібній постановці задачі застосування мають два типи методів апроксимації: високоточні – такі, що враховують осциляції функцій та методи згладжування, спрямовані на оцінку тренду. Для останнього типу обчислювальний аспект застосування процедур локальної апроксимації є більш привабливим у порівнянні з класичним підходом побудови моделей на підставі методу найменших квадратів. Слід відзначити, що для великих обсягів даних ширина вікна ковзного середнього (дискретної згортки функцій) вже не є вирішальним обчислювальним фактором стримування при застосуванні. Більш того, ширина вікна (кількість членів дискретної згортки або іншими словами – ширина локального носія) для конкретних задач може мати інформативну змістовну інтерпретацію.

Виходячи із значеного, актуальним є отримання нових методів локальної апроксимації гладких двовимірних функцій, заданих значеннями на рівномірних сітках вузлів, для котрих наявні високі згладжувальні властивості при низькій обчислювальній складності.

Аналіз досліджень та постановка задачі. На сьогоднішній день серед методів локальної неперервної апроксимації найбільше поширення мають процедури на основі лінійних комбінацій B -сплайнів. Обумовлено це тим, що при низькій обчислювальній складності, отримують як високоточні, так і такі наближення, що суттєво згладжують функції, що апроксимуються. Відтворення одновимірних гладких функцій на основі лінійних комбінацій B -сплайнів висвітлено у багатьох роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, В.В.Кармазіною [1 – 3], у авторських дослідженнях [4]. В роботі [4] розлого подано дослідження дво- та багатовимірних сплайнів, що є узагальненням одновимірних, близьких до інтерполяційних у середньому на основі B -сплайнів другого, третього та четвертого порядків. В роботі [5] подано дослідження асимптотичних властивостей одновимірного поліноміального сплайну, що є лінійною комбінацією B -сплайнів п'ятого порядку. Постаємо за мету у даній роботі отримати явний вигляд двовимірного поліноміального сплайну на основі B -сплайнів п'ятого порядку, близького до інтерполяційного у середньому з метою дослідження його норми та якості апроксимації гладких функцій, заданих на рівномірних розбиттях своїми усередненими значеннями.

Виклад основного матеріалу. За аналогією з роботою [4] зафіксуємо два розбиття Δ_{h_t} , Δ_{h_q} осей T і Q точками $t_i = ih_t$, $i \in \mathbb{Z}$, $h_t > 0$, $q_j = jh_q$, $j \in \mathbb{Z}$, $h_q > 0$, відповідно до яких задається розбиття Δ_{h_t, h_q} дійсної площини \mathbb{R}_2 на однакові прямокутні області, кожна з яких визначається координатами лівого нижнього та правого верхнього кута: $\Delta_{h_t, h_q} : \left\{ (ih_t, jh_q), ((i+1)h_t, (j+1)h_q); i, j \in \mathbb{Z} \right\}$.

Двовимірним сплайном порядку r_t дефекту k_t ($1 \leq k_t \leq r_t$) за змінною t і порядку r_q дефекту k_q ($1 \leq k_q \leq r_q$) за змінною q , відносно розбиття Δ_{h_t, h_q} , називають функцію $s(t, q) \in C^{r_t - k_t, r_q - k_q}$, яка на кожному елементі розбиття Δ_{h_t, h_q} є алгебраїчним багаточленом ступеня r_t по t і ступеня r_q по q .

Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t, h_q} задано значення деякої функції $p(t, q) \in C^{5,5} : p_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, причому, будемо вважати, що виконується

$$p_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}, \quad (1)$$

де

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{1}{h_j h_q} \int_{(i-1)h_i}^{ih_i} \int_{(j-1)h_q}^{jh_q} p(t,q) dt dq, \quad i, j \in Z; \quad (2)$$

$\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка.

Масиву значень $p_{i,j}$ поставимо у відповідність локальний поліноміальний сплайн на основі B -сплайнів п'ятого порядку

$$S_{5,0}(p, t, q) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} B_{5,h_i}(t - ih_i) B_{5,h_q}(q - jh_q) p_{i,j}, \quad (3)$$

де (з точністю до аргументу та кроку розбиття) [5]

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h; 3h], \\ \frac{1}{120} \left(3 + \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h; -2h], \\ -\frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h; -h], \\ \frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h; 0], \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0; h], \\ \frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h; 2h], \\ \frac{1}{120} \left(3 - \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h; 3h]. \end{cases} \quad (4)$$

Підставивши значення B -сплайнів типу (4) в вираз (3) неважко отримати явний вигляд сплайну $S_{5,0}(p, t, q)$. Задля економії місця в таблиці (табл.1) наведено коефіцієнти при маномах сплайну, які можна використовувати при побудові відповідних обчислювальних схем та залучати при дослідженні похибки апроксимації функцій сплайн-оператором.

Таблиця 1

Коефіцієнти при мономах сплайну $S_{5,0}(p,t,q)$

Індекс p	1	x	y	xy	x^2	y^2	x^2y	xy^2	x^2y^2
$i-2,j-2$	1	-5	-5	25	10	10	-50	-50	100
$i-2,j-1$	237	-1185	-375	1875	2370	210	-3750	-1050	2100
$i-2,j$	1682	-8410	-770	3850	16820	-220	-7700	1100	-2200
$i-2,j+1$	1682	-8410	770	-3850	16820	-220	7700	1100	-2200
$i-2,j+2$	237	-1185	375	-1875	2370	210	3750	-1050	2100
$i-2,j+3$	1	-5	5	-25	10	10	50	-50	100
$i-1,j-2$	237	-375	-1185	1875	210	2370	-1050	-3750	2100
$i-1,j-1$	56169	-88875	-88875	140625	49770	49770	-78750	-78750	44100
$i-1,j$	398634	-630750	-182490	288750	353220	-52140	-161700	82500	-46200
$i-1,j+1$	398634	-630750	182490	-288750	353220	-52140	161700	82500	-46200
$i-1,j+2$	56169	-88875	88875	-140625	49770	49770	78750	-78750	44100
$i-1,j+3$	237	-375	1185	-1875	210	2370	1050	-3750	2100
$i,j-2$	1682	-770	-8410	3850	-220	16820	1100	-7700	-2200
$i,j-1$	398634	-182490	-630750	288750	-52140	353220	82500	-161700	-46200
i,j	2829124	-1295140	-1295140	592900	-370040	-370040	169400	169400	48400
$i,j+1$	2829124	-1295140	1295140	-592900	-370040	-370040	-169400	169400	48400
$i,j+2$	398634	-182490	630750	-288750	-52140	353220	-82500	-161700	-46200
$i,j+3$	1682	-770	8410	-3850	-220	16820	-1100	-7700	-2200
$i+1,j-2$	1682	770	-8410	-3850	-220	16820	1100	7700	-2200
$i+1,j-1$	398634	182490	-630750	-288750	-52140	353220	82500	161700	-46200
$i+1,j$	2829124	1295140	-1295140	-592900	-370040	-370040	169400	-169400	48400
$i+1,j+1$	2829124	1295140	1295140	592900	-370040	-370040	-169400	-169400	48400
$i+1,j+2$	398634	182490	630750	288750	-52140	353220	-82500	161700	-46200
$i+1,j+3$	1682	770	8410	3850	-220	16820	-1100	7700	-2200
$i+2,j-2$	237	375	-1185	-1875	210	2370	-1050	3750	2100
$i+2,j-1$	56169	88875	-88875	-140625	49770	49770	-78750	78750	44100
$i+2,j$	398634	630750	-182490	-288750	353220	-52140	-161700	-82500	-46200
$i+2,j+1$	398634	630750	182490	288750	353220	-52140	161700	-82500	-46200
$i+2,j+2$	56169	88875	88875	140625	49770	49770	78750	78750	44100
$i+2,j+3$	237	375	1185	1875	210	2370	1050	3750	2100
$i+3,j-2$	1	5	-5	-25	10	10	-50	50	100
$i+3,j-1$	237	1185	-375	-1875	2370	210	-3750	1050	2100
$i+3,j$	1682	8410	-770	-3850	16820	-220	-7700	-1100	-2200
$i+3,j+1$	1682	8410	770	3850	16820	-220	7700	-1100	-2200
$i+3,j+2$	237	1185	375	1875	2370	210	3750	1050	2100
$i+3,j+3$	1	5	5	25	10	10	50	50	100

Таблиця 1 (продовження)

Коефіцієнти при мономах сплайну $S_{5,0}(p,t,q)$

Індекс p	x^3	y^3	x^3y	xy^3	x^3y^2	x^2y^3	x^3y^3	x^4	y^4
$i-2,j-2$	-10	-10	50	50	-100	-100	100	5	5
$i-2,j-1$	-2370	-30	3750	150	-2100	-300	300	1185	-15
$i-2,j$	-16820	140	7700	-700	2200	1400	-1400	8410	10
$i-2,j+1$	-16820	-140	-7700	700	2200	-1400	1400	8410	10
$i-2,j+2$	-2370	30	-3750	-150	-2100	300	-300	1185	-15
$i-2,j+3$	-10	10	-50	-50	-100	100	-100	5	5
$i-1,j-2$	-30	-2370	150	3750	-300	-2100	300	-15	1185
$i-1,j-1$	-7110	-7110	11250	11250	-6300	-6300	900	-3555	-3555
$i-1,j$	-50460	33180	23100	-52500	6600	29400	-4200	-25230	2370
$i-1,j+1$	-50460	-33180	-23100	52500	6600	-29400	4200	-25230	2370
$i-1,j+2$	-7110	7110	-11250	-11250	-6300	6300	-900	-3555	-3555
$i-1,j+3$	-30	2370	-150	-3750	-300	2100	-300	-15	1185
$i,j-2$	140	-16820	-700	7700	1400	2200	-1400	10	8410
$i,j-1$	33180	-50460	-52500	23100	29400	6600	-4200	2370	-25230
i,j	235480	235480	-107800	-107800	-30800	-30800	19600	16820	16820
$i,j+1$	235480	-235480	107800	107800	-30800	30800	-19600	16820	16820
$i,j+2$	33180	50460	52500	-23100	29400	-6600	4200	2370	-25230
$i,j+3$	140	16820	700	-7700	1400	-2200	1400	10	8410
$i+1,j-2$	-140	-16820	700	-7700	-1400	2200	1400	10	8410
$i+1,j-1$	-33180	-50460	52500	-23100	-29400	6600	4200	2370	-25230
$i+1,j$	-235480	235480	107800	107800	30800	-30800	-19600	16820	16820
$i+1,j+1$	-235480	-235480	-107800	-107800	30800	30800	19600	16820	16820
$i+1,j+2$	-33180	50460	-52500	23100	-29400	-6600	-4200	2370	-25230
$i+1,j+3$	-140	16820	-700	7700	-1400	-2200	-1400	10	8410
$i+2,j-2$	30	-2370	-150	-3750	300	-2100	-300	-15	1185
$i+2,j-1$	7110	-7110	-11250	-11250	6300	-6300	-900	-3555	-3555
$i+2,j$	50460	33180	-23100	52500	-6600	29400	4200	-25230	2370
$i+2,j+1$	50460	-33180	23100	-52500	-6600	-29400	-4200	-25230	2370
$i+2,j+2$	7110	7110	11250	11250	6300	6300	900	-3555	-3555
$i+2,j+3$	30	2370	150	3750	300	2100	300	-15	1185
$i+3,j-2$	10	-10	-50	-50	100	-100	-100	5	5
$i+3,j-1$	2370	-30	-3750	-150	2100	-300	-300	1185	-15
$i+3,j$	16820	140	-7700	700	-2200	1400	1400	8410	10
$i+3,j+1$	16820	-140	7700	-700	-2200	-1400	-1400	8410	10
$i+3,j+2$	2370	30	3750	150	2100	300	300	1185	-15
$i+3,j+3$	10	10	50	50	100	100	100	5	5

Таблиця 1 (продовження)

Коефіцієнти при мономах сплайну $S_{5,0}(p,t,q)$

Індекс p	x^4y	xy^4	x^4y^2	x^2y^4	x^4y^3	x^3y^4	x^4y^4	x^5	y^5
$i-2,j-2$	-25	-25	50	50	-50	-50	25	-1	-1
$i-2,j-1$	-1875	75	1050	-150	-150	150	-75	-237	5
$i-2,j$	-3850	-50	-1100	100	700	-100	50	-1682	-10
$i-2,j+1$	3850	-50	-1100	100	-700	-100	50	-1682	10
$i-2,j+2$	1875	75	1050	-150	150	150	-75	-237	-5
$i-2,j+3$	25	-25	50	50	50	-50	25	-1	1
$i-1,j-2$	75	-1875	-150	1050	150	-150	-75	5	-237
$i-1,j-1$	5625	5625	-3150	-3150	450	450	225	1185	1185
$i-1,j$	11550	-3750	3300	2100	-2100	-300	-150	8410	-2370
$i-1,j+1$	-11550	-3750	3300	2100	2100	-300	-150	8410	2370
$i-1,j+2$	-5625	5625	-3150	-3150	-450	450	225	1185	-1185
$i-1,j+3$	-75	-1875	-150	1050	-150	-150	-75	5	237
$i,j-2$	-50	-3850	100	-1100	-100	700	50	-10	-1682
$i,j-1$	-3750	11550	2100	3300	-300	-2100	-150	-2370	8410
i,j	-7700	-7700	-2200	-2200	1400	1400	100	-16820	-16820
$i,j+1$	7700	-7700	-2200	-2200	-1400	1400	100	-16820	16820
$i,j+2$	3750	11550	2100	3300	300	-2100	-150	-2370	-8410
$i,j+3$	50	-3850	100	-1100	100	700	50	-10	1682
$i+1,j-2$	-50	3850	100	-1100	-100	-700	50	10	-1682
$i+1,j-1$	-3750	-11550	2100	3300	-300	2100	-150	2370	8410
$i+1,j$	-7700	7700	-2200	-2200	1400	-1400	100	16820	-16820
$i+1,j+1$	7700	7700	-2200	-2200	-1400	-1400	100	16820	16820
$i+1,j+2$	3750	-11550	2100	3300	300	2100	-150	2370	-8410
$i+1,j+3$	50	3850	100	-1100	100	-700	50	10	1682
$i+2,j-2$	75	1875	-150	1050	150	150	-75	-5	-237
$i+2,j-1$	5625	-5625	-3150	-3150	450	-450	225	-1185	1185
$i+2,j$	11550	3750	3300	2100	-2100	300	-150	-8410	-2370
$i+2,j+1$	-11550	3750	3300	2100	2100	300	-150	-8410	2370
$i+2,j+2$	-5625	-5625	-3150	-3150	-450	-450	225	-1185	-1185
$i+2,j+3$	-75	1875	-150	1050	-150	150	-75	-5	237
$i+3,j-2$	-25	25	50	50	-50	50	25	1	-1
$i+3,j-1$	-1875	-75	1050	-150	-150	-150	-75	237	5
$i+3,j$	-3850	50	-1100	100	700	100	50	1682	-10
$i+3,j+1$	3850	50	-1100	100	-700	100	50	1682	10
$i+3,j+2$	1875	-75	1050	-150	150	-150	-75	237	-5
$i+3,j+3$	25	25	50	50	50	50	25	1	1

Таблиця 1 (закінчення)

Коефіцієнти при маномах сплайну $S_{5,0}(p,t,q)$

Індекс p	x^5y	xy^5	x^5y^2	x^2y^5	x^5y^3	x^3y^5	x^5y^4	x^4y^5	x^5y^5
$i-2,j-2$	5	5	-10	-10	10	10	-5	-5	1
$i-2,j-1$	375	-25	-210	50	30	-50	15	25	-5
$i-2,j$	770	50	220	-100	-140	100	-10	-50	10
$i-2,j+1$	-770	-50	220	100	140	-100	-10	50	-10
$i-2,j+2$	-375	25	-210	-50	-30	50	15	-25	5
$i-2,j+3$	-5	-5	-10	10	-10	-10	-5	5	-1
$i-1,j-2$	-25	375	50	-210	-50	30	25	15	-5
$i-1,j-1$	-1875	-1875	1050	1050	-150	-150	-75	-75	25
$i-1,j$	-3850	3750	-1100	-2100	700	300	50	150	-50
$i-1,j+1$	3850	-3750	-1100	2100	-700	-300	50	-150	50
$i-1,j+2$	1875	1875	1050	-1050	150	150	-75	75	-25
$i-1,j+3$	25	-375	50	210	50	-30	25	-15	5
$i,j-2$	50	770	-100	220	100	-140	-50	-10	10
$i,j-1$	3750	-3850	-2100	-1100	300	700	150	50	-50
i,j	7700	7700	2200	2200	-1400	-1400	-100	-100	100
$i,j+1$	-7700	-7700	2200	-2200	1400	1400	-100	100	-100
$i,j+2$	-3750	3850	-2100	1100	-300	-700	150	-50	50
$i,j+3$	-50	-770	-100	-220	-100	140	-50	10	-10
$i+1,j-2$	-50	-770	100	220	-100	140	50	-10	-10
$i+1,j-1$	-3750	3850	2100	-1100	-300	-700	-150	50	50
$i+1,j$	-7700	-7700	-2200	2200	1400	1400	100	-100	-100
$i+1,j+1$	7700	7700	-2200	-2200	-1400	-1400	100	100	100
$i+1,j+2$	3750	-3850	2100	1100	300	700	-150	-50	-50
$i+1,j+3$	50	770	100	-220	100	-140	50	10	10
$i+2,j-2$	25	-375	-50	-210	50	-30	-25	15	5
$i+2,j-1$	1875	1875	-1050	1050	150	150	75	-75	-25
$i+2,j$	3850	-3750	1100	-2100	-700	-300	-50	150	50
$i+2,j+1$	-3850	3750	1100	2100	700	300	-50	-150	-50
$i+2,j+2$	-1875	-1875	-1050	-1050	-150	-150	75	75	25
$i+2,j+3$	-25	375	-50	210	-50	30	-25	-15	-5
$i+3,j-2$	-5	-5	10	-10	-10	-10	5	-5	-1
$i+3,j-1$	-375	25	210	50	-30	50	-15	25	5
$i+3,j$	-770	-50	-220	-100	140	-100	10	-50	-10
$i+3,j+1$	770	50	-220	100	-140	100	10	50	10
$i+3,j+2$	375	-25	210	-50	30	-50	-15	-25	-5
$i+3,j+3$	5	5	10	10	10	10	5	5	1

Примітка до табл.1: при реалізації обчислювальної схеми всі, коефіцієнти (табл.1) мають бути поділені на число 14745600.

Для значення функції $p(t, q)$ на (i, j) -му елементі розбиття можемо записати:

$$|p(t, q) - S_{5,0}(p, t, q)| \leq |p(t, q) - S_{5,0}(\bar{p}, t, q)| + \varepsilon \|S_{5,0}\|, \quad (5)$$

$$\text{де } \varepsilon = \max_{i,j} \{\varepsilon_{i,j}\}; \|S_{5,0}\| = \sup_{|\varepsilon_{i,j}| \leq 1} \max_{t,q} |S_{5,0}(\varepsilon, t, q)|.$$

Таким чином, для визначення якості апроксимації функції $p(t, q)$ сплайном (3), необхідно оцінити кожен із складників правої частини (5).

Теорема 1. Якщо $p(t, q) \in C^{3,3}$, то при $h_t \rightarrow 0$, $h_q \rightarrow 0$ рівномірно за t і q має місце асимптотична рівність

$$\begin{aligned} p(t, q) - S_{5,0}(\bar{p}, t) = & -\frac{7h_t^2}{24} \cdot p''_{t^2}(t, q) - \frac{7h_q^2}{24} \cdot p''_{q^2}(t, q) - \\ & -\frac{49h_t^2 h_q^2}{576} \cdot p^{(4)}_{t^2 q^2}(t, q) + o(h^4), \end{aligned}$$

$$\text{де } h = \max\{h_t, h_q\}.$$

Доведення. Розглянемо розкладення функції $p(t, q) \in C^{3,3}$ у ряд Тейлора поблизу точки $((i-0,5)h_t; (j-0,5)h_q)$:

$$\begin{aligned} p(t, q) = & p(t^*, q^*) + p'_t(t^*, q^*)\tau + p'_q(t^*, q^*)\nu + \frac{1}{2} p''_{t^2}(t^*, q^*)\tau^2 + \\ & + p''_{tq}(t^*, q^*)\tau\nu + \frac{1}{2} p''_{q^2}(t^*, q^*)\nu^2 + \frac{1}{6} p'''_{t^3}(t^*, q^*)\tau^3 + \frac{1}{2} p'''_{t^2 q}(t^*, q^*)\tau^2\nu + \\ & + \frac{1}{2} p'''_{tq^2}(t^*, q^*)\tau\nu^2 + \frac{1}{6} p'''_{q^3}(t^*, q^*)\nu^3 + \frac{1}{6} p^{(4)}_{t^3 q}(t^*, q^*)\tau^3\nu + \\ & + \frac{1}{6} p^{(4)}_{t^2 q^2}(t^*, q^*)\tau^2\nu^2 + \frac{1}{6} p^{(4)}_{tq^3}(t^*, q^*)\tau\nu^3 + \\ & + \frac{1}{12} p^{(5)}_{t^3 q^2}(t^*, q^*)\tau^3\nu^2 + \frac{1}{12} p^{(5)}_{t^2 q^3}(t^*, q^*)\tau^2\nu^3 + \frac{1}{36} p^{(6)}_{t^3 q^3}(t^*, q^*)\tau^3\nu^3 + o(h^6), \end{aligned}$$

де $t^* = (i-0,5)h_t$, $q^* = (j-0,5)h_q$, $\tau = t - t^*$, $\nu = q - q^*$.

Розкладення сплайну $S_{5,0}(\bar{p}, t, q)$ в ряд Тейлора поблизу точки (t^*, q^*) має вигляд:

$$\begin{aligned}
S_{5,0}(\bar{p}, t, q) &= S_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*) + S'_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^*} \tau + S'_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{q^*} v + \\
&+ \frac{1}{2} S''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^2} \tau^2 + S''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{tq} \tau v + \frac{1}{2} S''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{q^2} v^2 + \\
&+ \frac{1}{6} S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^3} \tau^3 + \frac{1}{2} S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^2q} \tau^2 v + \frac{1}{2} S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{tq^2} \tau v^2 + \\
&+ \frac{1}{6} S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{q^3} v^3 + \frac{1}{6} S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^3q} \tau^3 v + \frac{1}{4} S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^2q^2} \tau^2 v^2 + \\
&+ \frac{1}{6} S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{tq^3} \tau v^3 + \frac{1}{12} S^{(5)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^3q^2} \tau^3 v^2 + \\
&+ \frac{1}{12} S^{(5)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^2q^3} \tau^2 v^3 + \frac{1}{36} S^{(6)}_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*)_{t^3q^3} \tau^3 v^3,
\end{aligned}$$

або (з урахуванням розкладень в ряд Тейлора кожного із складників та величин $p_{ii, jj}$, $ii = i - 2, i + 3$, $jj = j - 2, j + 3$):

$$\begin{aligned}
S_{5,0}(\bar{p}, t, q) &= p + \frac{7}{24} p''_{t^2} h_t^2 + \frac{7}{24} p''_{q^2} h_q^2 + \frac{49}{576} p^{(4)}_{t^2q^2} h_t^2 h_q^2 + p'_t \tau + \\
&+ \frac{7}{24} p'''_{t^3} h_t^2 \tau + \frac{7}{24} p'''_{tq^2} h_t^2 h_q^2 \tau + \frac{49}{576} p^{(5)}_{t^3q^2} h_t^2 h_q^2 \tau + p'_q v + \frac{7}{24} p'''_{t^2q} h_t^2 v + \\
&+ \frac{7}{24} p'''_{q^3} h_q^2 v + \frac{49}{576} p^{(5)}_{t^2q^3} h_t^2 h_q^2 v + \frac{1}{2} p^{(4)}_{t^2q^2} \tau^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} p^{(4)}_{t^2q^2} h_q^2 \tau^2 + \\
&+ p''_{tq} \tau v + \frac{7}{24} p^{(4)}_{t^3q} h_t^2 \tau v + \frac{7}{24} p^{(4)}_{tq^3} h_t^2 h_q^2 \tau v + \frac{49}{576} p^{(6)}_{t^3q^3} h_t^2 h_q^2 \tau v + \frac{1}{2} p^{(4)}_{t^2q^2} v^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} p^{(4)}_{t^3q^2} h_t^2 v^2 + \frac{1}{6} p'''_{t^3} \tau^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{24} p^{(5)}_{t^3q^2} h_t^2 \tau^3 + \frac{1}{2} p'''_{t^2q} \tau^2 v + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} p^{(5)}_{t^2q^3} h_q^2 \tau^2 v + \\
&+ \frac{1}{2} p'''_{tq^2} \tau v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} p^{(5)}_{t^3q^2} h_t^2 \tau v^2 + \frac{1}{6} p'''_{q^3} v^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{24} p^{(5)}_{t^2q^3} h_t^2 v^3 + \frac{1}{6} p^{(4)}_{t^3q} \tau^3 v + \\
&+ \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{24} p^{(6)}_{t^3q^3} h_t^2 \tau^3 v + \frac{1}{4} p^{(4)}_{t^2q^2} \tau^2 v^2 + \frac{1}{6} p^{(4)}_{tq^3} \tau v^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{24} p^{(6)}_{t^3q^3} h_t^2 \tau v^3 + \\
&+ \frac{1}{12} p^{(5)}_{t^3q^2} \tau^3 v^2 + \frac{1}{12} p^{(5)}_{t^2q^3} \tau^2 v^3 + \frac{1}{36} p^{(6)}_{t^3q^3} \tau^3 v^3 + o(h^4).
\end{aligned}$$

Тоді

$$p(t, q) - S(\bar{p}, t, q) = -\frac{7}{24} h_t^2 \left(p''_{t^2} + p'''_{t^3} \tau + p'''_{t^2q} v + p^{(4)}_{t^3q} \tau v + \frac{1}{2} p^{(4)}_{t^2q^2} v^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau v^2 + \frac{1}{6} p_{t^2 q^3}^{(5)} v^3 + \frac{1}{6} p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau v^3 \Big) - \frac{7}{24} h_q^2 \left(p_{q^2}'' + p_{tq^2}''' \tau + p_{t^3}''' v + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} p_{t^2 q^2}^{(4)} \tau^2 + p_{tq^2}^{(4)} \tau v + \frac{1}{6} p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau^3 + \frac{1}{2} p_{t^2 q^3}^{(5)} \tau^2 v + \frac{1}{6} p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau^3 v \right) - \\
& - \frac{49}{576} h_t^2 h_q^2 \left(p_{t^2 q^2}^{(4)} + p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau + p_{t^2 q^3}^{(5)} v + p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau v \right) + o(h^4) = \\
& - \frac{7}{24} h_t^2 \cdot p_{t^2}''(t, q) - \frac{7}{24} h_q^2 \cdot p_{q^2}''(t, q) - \frac{49}{576} h_t^2 h_q^2 \cdot p_{t^2 q^2}^{(4)}(t, q) + o(h^4),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
p_{t^2}''(t, q) &= p_{t^2}'' + p_{t^3}''' \tau + p_{t^2 q}''' v + p_{t^3 q}''' \tau v + \frac{1}{2} p_{t^2 q^2}^{(4)} v^2 + \\
& + \frac{1}{2} p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau v^2 + \frac{1}{6} p_{t^2 q^3}^{(5)} v^3 + \frac{1}{6} p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau v^3; \\
p_{q^2}''(t, q) &= p_{q^2}'' + p_{tq^2}''' \tau + p_{t^3}''' v + \frac{1}{2} p_{t^2 q^2}^{(4)} \tau^2 + p_{tq^2}^{(4)} \tau v + \\
& + \frac{1}{6} p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau^3 + \frac{1}{2} p_{t^2 q^3}^{(5)} \tau^2 v + \frac{1}{6} p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau^3 v; \\
p_{t^2 q^2}^{(4)}(t, q) &= p_{t^2 q^2}^{(4)} + p_{t^3 q^2}^{(5)} \tau + p_{t^2 q^3}^{(5)} v + p_{t^3 q^3}^{(6)} \tau v,
\end{aligned}$$

– розкладення у ряд Тейлора похідних функції $p(t, q) \in C^{3,3}$ поблизу точки (t^*, q^*) .

Теорему доведено.

Слідство 1. При $h_t \rightarrow 0$, $h_q \rightarrow 0$ для $\forall p(t, q) \in C^{3,3}$ є вірним

$$\begin{aligned}
\|p(t, q) - S_{5,0}(\bar{p}, t)\| &= \frac{7h_t^2}{24} \cdot \|p_{t^2}''(t, q)\| + \frac{7h_q^2}{24} \cdot \|p_{q^2}''(t, q)\| + \\
& + \frac{49h_t^2 h_q^2}{576} \cdot \|p_{t^2 q^2}^{(4)}(t, q)\| + o(h^4),
\end{aligned}$$

де $h = \max\{h_t, h_q\}$.

Проведемо оцінку норми сплайну (3).

Теорема 2. Для сплайну $S_{5,0}(p, t, q)$ є вірним

$$\|S_{5,0}\| = \|p\|.$$

Доведення. З урахуванням коефіцієнтів при маноммах (табл.1) та здійснивши перегрупування відносно $p_{ii,jj}$, $ii = i - 2, i + 3$, $jj = j - 2, j + 3$, будемо розглядати представлення $S_{5,0}(p, t, q)$ у вигляді:

$$\begin{aligned}
S_{5,0}(p, t, q) = & \left(\frac{1}{3840} \right)^2 \left(p_{i-2, j-2} (1-x)^5 (1-y)^5 + \right. \\
& + p_{i-2, j-1} (1-x)^5 \left(237 - 375y + 210y^2 - 30y^3 - 15y^4 + 5y^5 \right) + \\
& \quad \quad \quad + \dots + \\
& + p_{i, j+3} \left(1682 - 770x - 220x^2 + 140x^3 + 10x^4 - 10x^5 \right) (1+y)^5 + \\
& + p_{i+1, j-2} \left(1682 + 770x - 220x^2 - 140x^3 + 10x^4 + 10x^5 \right) (1-y)^5 + \\
& \quad \quad \quad + \dots + \\
& + p_{i+3, j+2} (1+x)^5 \left(237 + 375y + 210y^2 + 30y^3 - 15y^4 - 5y^5 \right) + \\
& \quad \quad \quad \left. + p_{i+3, j+3} (1+x)^5 (1+y)^5 \right),
\end{aligned}$$

де $x = \frac{2}{h_t}(t - ih_t)$, $|x| \leq 1$; $y = \frac{2}{h_q}(q - ih_q)$, $|y| \leq 1$.

Тоді $\|S_{5,0}\| \leq \frac{1}{3840^2} \|p\| \max_{|x| \leq 1; |y| \leq 1} A(x, y)$,

де

$$\begin{aligned}
A(x, y) = & \left| (1-x)^5 (1-y)^5 \right| + \left| (1-x)^5 \left(237 - 375y + 210y^2 - 30y^3 - 15y^4 + 5y^5 \right) \right| + \\
& + \left| (1-x)^5 \left(1682 - 770y - 220y^2 + 140y^3 + 10y^4 - 10y^5 \right) \right| + \\
& \quad \quad \quad + \dots + \\
& + \left| (1+x)^5 \left(1682 + 770y - 220y^2 - 140y^3 + 10y^4 + 10y^5 \right) \right| + \\
& + \left| (1+x)^5 \left(237 + 375y + 210y^2 + 30y^3 - 15y^4 - 5y^5 \right) \right| + \left| (1+x)^5 (1+y)^5 \right|.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що функція $A(x, y)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$. Для цих x , y , зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$\max_{x \in [0;1]; y \in [0;1]} A(x, y) = 3840^2.$$

Таким чином

$$\|S_{5,0}\| \leq \|p\|. \quad (6)$$

З іншого боку для будь-якого частинного випадку

$$\|S_{5,0}(p)\| \geq \|S_{5,0}(p^*)\|.$$

Тоді для $x = 0$, $y = 0$ маємо

$$\begin{aligned} S_{5,0}(\bar{p}, t^*, q^*) = & \left(\frac{1}{3840} \right)^2 \left(p^*_{i-2,j-2} + 237p^*_{i-2,j-1} + 1682p^*_{i-2,j} + \right. \\ & + 1682p^*_{i-2,j+1} + 237p^*_{i-2,j+2} + p^*_{i-2,j+3} + 237p^*_{i-1,j-2} + 237^2p^*_{i-1,j-1} + \\ & + 398634p^*_{i-1,j} + 398634p^*_{i-1,j+1} + 237^2p^*_{i-1,j+2} + 237p^*_{i-1,j+3} + 1682p^*_{i,j-2} + \\ & + 398634p^*_{i,j-1} + 1682^2p^*_{i,j} + 1682^2p^*_{i,j+1} + 398634p^*_{i,j+2} + 1682p^*_{i,j+3} + \\ & + 1682p^*_{i+1,j-2} + 398634p^*_{i+1,j-1} + 1682^2p^*_{i+1,j} + 1682^2p^*_{i+1,j+1} + \\ & + 398634p^*_{i+1,j+2} + 1682p^*_{i+1,j+3} + 237p^*_{i+2,j-2} + 237^2p^*_{i+2,j-1} + \\ & + 398634p^*_{i+2,j} + 398634p^*_{i+2,j+1} + 237^2p^*_{i+2,j+2} + 237p^*_{i+2,j+3} + \\ & \left. + p^*_{i+3,j-2} + 237p^*_{i+3,j-1} + 1682p^*_{i+3,j} + 1682p^*_{i+3,j+1} + 237p^*_{i+3,j+2} + p^*_{i+3,j+3} \right). \end{aligned}$$

Якщо

$$p^*_{i-2,j-2} = p^*_{i-2,j-1} = \dots = p^*_{i+2,j+2} = p^*_{i+2,j+3} = \|p\|,$$

то

$$\|S_{5,0}(p)\| \geq \|S_{5,0}(p^*)\| \geq \|S_{5,0}(p^*, 0, 0)\| = \|p\|,$$

а отже, з урахуванням (6), приходимо, що

$$\|S_{5,0}\| = \|p\|.$$

Теорему доведено.

Слідство 2. Для $\forall p(t, q) \in C^{3,3}$ має місце

$$\|p(t, q) - S_{5,0}(p, t)\| \leq \frac{7h_t^2}{24} \|p''_t(t, q)\| + \frac{7h_q^2}{24} \|p''_q(t, q)\| +$$

$$+ \frac{49h_t^2 h_q^2}{576} \left\| p_{t^2 q^2}^{(4)}(t, q) \right\| + \varepsilon \|p\| + o(h^4),$$

де $h = \max\{h_t, h_q\}$.

Висновки. В роботі отримано коефіцієнти при маноматках двовимірного поліноміального сплайну на основі B -сплайнів п'ятого порядку, близького до інтерполяційних у середньому. Знайдено похибку апроксимації зазначеним сплайном гладких функції двох змінних, отримано норму сплайн-оператора.

Підтверджено, що загальні властивості похибки апроксимації є аналогічними, як і для сплайнів на основі лінійних комбінацій B -сплайнів другого, третього та четвертого порядків. Останнє дозволяє припускати можливість узагальнення подібних оцінок якості апроксимації для сплайнів кількості змінних три та більше.

Введений та досліджений сплайн може мати застосування при розробці обчислювальних схем як при застосуванні безпосередньо явного вигляду, так і при використанні часткових випадків при конкретних значеннях аргументів в межах локального носія – при розв'язанні задач низькочастотної фільтрації, масштабування послідовностей відліків двовимірних функцій, при побудові контрастних та комбінованих фільтрів.

Бібліографічні посилання

1. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. . – К.: ИМ НАН Украины, 1996. – 358 с.
2. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИИТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
3. Лигун А.А., Кармазина В.В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. –38 с. –Деп. в УкрНИИИТИ 13.11.89, N2569 – Ук89.
4. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с
5. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження B -сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – 2007. – №1(16). – С.14 – 17.

Надійшла до редколегії 14.07.08.