НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА ЛІТЕРАТУРА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський державний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра комп’ютерних наук

НАУКОВІ ПРАЦІ

Марченко Б.Г., Щербак Л.М.

Теорія вимірювань

Тернопіль
2008

НАУКОВІ ПРАЦІ

Марченко Б.Г., Щербак Л.М.

Теорія вимірювань

Укладачі: Щербак Л.М.

Підписано до друку ________. Формат 60x84 1/16. Ум. др. арк. 13,47. Друк лазерний. Замовлення № ____. Наклад 100 пр.

Віддруковано у видавництві ТДТУ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський державний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра комп'ютерних наук

Марченко Б.Г., Щербак Л.М.

Теорія вимірювань

ВИБРАНІ ПРАЦІ

Тернопіль
2008

Професор кафедри комп’ютерних наук,

доктор фізико-математичних наук, професор,

лауреат Державної премії України у галузі науки і техніки

МАРЧЕНКО БОРИС ГРИГОРОВИЧ

(1933-2007)

Присвячується світлій пам'яті
Марченка Бориса Григоровича

Умирають майстри, залишаючи спогад, як рану...
Л.В. Костенко

ВСТУПНЕ СЛОВО, СПОГАДИ...

Серед заходів вшанування світлої пам'яті видатного українського вченого Марченка Бориса Григоровича, якому 28 червня 2008 року виповнилось би 75 років з дня народження, колектив кафедри комп'ютерних наук Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя вирішив видати наукові праці Марченка Б.Г. в області вимірювань. У вступі до цих праць наводяться спогади про життєвий та творчий шлях Марченка Б.Г., які написав учень Бориса Григоровича – професор кафедри комп'ютерних наук Щербак Леонід Миколайович.

Для мене Марченко Б.Г. є Вчителем з великої літери, з яким я працював пліч-о-пліч більше 42 років. Оскільки я є першим аспірантом, першим кандидатом і першим доктором наук Марченка Б.Г., пропозицію колективу кафедри коротко висвітлити життєвий та творчий шлях мого Вчителя я сприйняв з вдячністю.

Науковою проблематикою Борис Григорович почав займатись у старших класах Миргородської школи робочої молоді, його зацікавили проблеми оптики, оптичних приладів за ініціативою шкільного вчителя фізики. Після закінчення школи – вступ у Московське вище технічне училище ім. Баумана на оптоприладобудівний факультет, неможливість продовження навчання в училищі через своє матеріальне становище, вступ до Київського інституту кіноінженерів і, нарешті, закінчення електроакустичного факультету Київського політехнічного інституту у 1958 році – це перші етапи творчого шляху Бориса Григоровича. Потім праця у науково-дослідних інститутах військово-промислового комплексу СРСР на інженерних посадах по розробці систем військової гідроакустики, спеціалізованої апаратури магнітного запису інформації. Відомий вчений з теорії ймовірності Борис Володимирович Гнєденко запросив Бориса Григоровича до аспірантури в Інститут математики АН УРСР, був його першим науковим керівником. Потім, у зв'язку з переїздом Гнєденка Б.В. до Москви, науковим керівником став академік АН УРСР Королюк В.С. В 1965 році Борис Григорович захищає кандидатську дисертацію з теорії ймовірності в Інституті математики, опонентом його дисертації був відомий вчений в теорії випадкових процесів академік АН УРСР Скороход А.В.

Моя перша зустріч з Борисом Григоровичем відбулася у грудні 1964 року у Київському НДІ гідроприладів, згодом я став його першим аспірантом. Потім співпраця, життя, як довга нива... Згадую слова Бориса Григоровича сказані з гумором, що він як Чапаєв, а я є польовий командир. Він був дійсним стратегом, справжнім бійцем і лідером. А лідера, як кажуть у народі завжди прикрашають «шрами». Шрамів в Бориса Григоровича було не мало. На несправедливості він реагував миттєво і різко. У дискусіях міг піти один проти всіх. Природно при цьому не завжди були перемоги, але жодної поразки я не пам'ятаю: принциповій і «залізній» логіці доводів Бориса Григоровича ніхто не міг протиставити альтернативи. На одному із захистів дисертації він мав сміливість заявити: «Не боюсь сказати правди про рівень і недоліки дисертації, тому що я в дитинстві не побоявся відмовити есесівцю, який маючи пістолет міг мене застрелити».

Після захисту кандидатської дисертації Борис Григорович переходить працювати у відділ прикладної математики Інституту математики, науковим консультантом його докторської дисертації стає член-кореспондент АН УРСР Фільчаков П.Ф.

Цікавий факт, під час роботи над докторською дисертацією Борис Григорович плідно працює у напрямку використання ЕОМ для наукових досліджень: унікальна ЕОМ «Мир 1» (розробка Інституту кібернетики АН УРСР) стала «науковим інструментом», який Борис Григорович досконало експлуатує як інженер з наладки ЕОМ, ставить і розв'язує наукові комп'ютерні задачі із статистичної радіофізики, гідроакустики, теорії надійності.

У 1972 році Борис Григорович захищає докторську дисертацію з радіофізики у Київському державному університеті ім. Т. Шевченка, одним із опонентів був член-кореспондент АН УРСР Ядренко М.Й. Необхідну підтримку і високу оцінку наукових результатів докторської дисертації Борис Григорович отримує від відомих вчених: з теорії автоматичного управління – Пугачова В.С., Солодовнікова В.В., Доступова Б.Г., Казакова І.Е., Чинаєва П.І.; з статистичної радіотехніки – Тихонова В.І., Левіна Б.Р., Баскакова С.І., Малахова А.Н., Трифонова А.П., Яковлєва В.П.; з статистичної гідроакустики – академіка АН СРСР Ілічова В.І., Захарова Л.М., Ольшевського В.В., Рожкова В.О. та інших.

Коротко зупинюсь на найбільш вагомих творчих здобутках Бориса Григоровича, які він особисто відмічав у розмовах зі мною.

Наукові результати: це створення основ теорії лінійних випадкових процесів та їх інтегральних зображень на базі безмежно подільних законів розподілу випадкових процесів з незалежними приростами; побудова систем ортогональних стохастичних функціоналів від процесів з незалежними приростами, що дало можливість узагальнити системи ортогональних функціоналів Н. Вінера (гауссівський закон розподілу) і Х. Огури (пуассонівський закон розподілу); обґрунтування шляхів практичного використання отриманих теоретичних результатів для розв'язання широкого кола прикладних задач статистичної радіофізики, гідроакустики, теорії вимірювань, теорії надійності та інших.

Результати впровадження його наукових праць мають місце на потужних науково-виробничих підприємствах енергетичної, суднобудівної, авіаційної промисловості (за результатами впровадження Борис Григорович отримав премію НАН України ім. Г.Ф. Проскури у 1996 р., в 2005 році став лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки).

Створення наукової школи пов'язано з широким спектром діяльності Бориса Григоровича, зупинюсь лише на основному:

а) підготовка кандидатів і докторів наук, які сьогодні успішно працюють у вищих навчальних закладах, наукових інститутах, організаціях і які є фундаментом школи Марченка Б.Г.: докторами наук стали Бойко І.Ф., Денисюк В.П., Мислович М.В., Приймак М.В., Шульга В.Г., Шутко М.О., Щербак Л.М., двоє з них Мислович і Щербак – лауреати Державної премії України, до школи входять також більше двадцяти кандидатів наук і відповідно значне число аспірантів;

б) організація проведення та участь в роботі наукових конференцій різного рівня – важливий етап у творчій біографії Бориса Григоровича: у 1975 році він створює і керує майже на протязі десяти років Всесоюзною конференцією «Статистичні методи в теорії передачі та перетворення інформаційних сигналів», яка відіграла важливу роль для розвитку і становлення статистичних методів дослідження у різних галузях науки і техніки на Україні; в роботі конференції приймають активну участь як відомі вчені, так і наукова молодь з різних міст: Москви, Ленінграда, Горького, Воронежа, Ульяновська, Мінська, Вільнюса, Києва, Харкова, Львова, Дніпропетровська, Одеси, Черкас та ін.; учасники конференції з інтересом слухали доповіді Яковлева В.П. з Москви, Трифонова А.П. з Воронежа, Лексаченка В.О. з Ленінграда, Возбінаса С.А. з Вільнюса, Драгана Я.П., Яворського І.М., Федоріва Р.Ф. зі Львова, Омельченка В.І., Безрука В.П. з Харкова, Кунченка Ю.П. з Черкас. Особливий інтерес викликали дискусії по доповідях, інколи вони мали навіть емоційний характер з обов’язковою участю Бориса Григоровича. Серед інших конференцій Борис Григорович згадував і високо цінував науковий рівень та організацію Міжнародного конгресу математиків (Берлін, 1998 р.), на якому він виступав з доповіддю.

Творча співпраця, робота у **вищих навчальних закладах** була однією із складових життя Бориса Григоровича. Наведу лише окремі факти, про які часто згадував Борис Григорович. При розмові академік Гнєденко Б.В. взяв папір, ручку і без підготовки почав писати складні інтегральні співвідношення по тематиці досліджень Бориса Григоровича. Академік Пугачов В.С. на розмову з Борисом Григоровичем спочатку виділив п'ять хвилин, а реальна розмова затягнулась на півтора години - академік високо оцінив фундаментальні результати по визначенню характеристичної функції лінійного процесу, які отримав Борис Григорович. В свою чергу Борис Григорович допомагав, підтримував, в ряді випадків був опонентом на захисті докторських дисертацій ряду українських вчених, наприклад, у Драгана Я.П. Серед них також Бабак В.П., Безрук В.П., Войчишин К.С., Пресняков І.П., Омельченко В.О., Кунченко Ю.П., Федорів Р.Ф., Куц Ю.В., Юдін О.К., Еременко В.С. і багато інших.

Борис Григорович згадував, що найбільш плідні поради як читати лекції, як виступати на конференції він отримав від відомого вченого з теорії ймовірностей і випадкових процесів члена-кореспондента АН УРСР Гіхмана І.І.

Київський політехнічний інститут, Національний авіаційний університет, Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя - це вищі навчальні заклади, де Борис Григорович викладав дисципліни із спеціальних розділів математики, статистичної теорії електричних кіл і сигналів, теорії надійності, працював з аспірантами.

У ТДТУ Борис Григорович з 1995 року підготував доктора наук Приймака М.В., кандидатів наук Мацюка О.В., Млинко Б.Б., Мулик Н.В., Пастуха О.М., Фриза М.Є., двоє з них Мацюк О.В. та Фриз М.Є. стали його докторантами.

Борис Григорович приймав участь у спеціалізованих вчених радах по захисту дисертацій у вказаних вищих навчальних закладах, був членом експертної ради ВАК України. При цьому на значній кількості засідань голос Бориса Григоровича був вирішальним. Всі на засіданнях знали про його принциповість, чесність і високий професійний рівень.

Пригадую, як Борис Григорович підтримував у «формі» свій професійний рівень. У літню відпустку він завжди їхав у Миргород. Там була батьківська хатинка, город, який Борис Григорович орав своїм електроплугом, в якості добрива був торф з болота. Господарювати він дуже любив і говорив: «Це часник, картопля, капуста з мого городу». Коли приїздив з відпустки у Київ, відразу сідав читати томи Фіхтенгольца, Смірнова, отримував математичний «допінг» і знову був в «олімпійській» формі.

Слід декілька слів сказати про долю наукових праць, які наведені нижче. У 1979 році Борис Григорович переходить працювати в Інститут електродинаміки АН УРСР. На цій роботі одним із основних науково-технічних напрямків досліджень є вимірювання електричних і неелектричних величин, створення відповідних інформаційно-вимірювальних та діагностичних систем в електроенергетиці.

Творча співпраця, дискусії з академіком АН УРСР Гріневичем Ф.Б., відомими вченими в області метрології і теорії вимірювань Цвєтковим Е.І., Орнатським П.П., Маєвським С.М., Тузом Ю.М., Циделко В.Д., Ніженським А.Д. та іншими сприяли виходу цих публікацій, над якими ми разом з Борисом Григоровичем працювали більше 10 років. Основна ідея цих робіт: обґрунтування теорії похибок при вимірюваннях без використання гіпотези про існування точного значення вимірюваної величини. Ця задача була вирішена шляхом створення аксіоматичної теорії вимірювань.

У спогадах про творчу спадщину Бориса Григоровича названі лише прізвища відомих вчених, з якими він працював і які його підтримували. Так, Гнєденко Б.В. дав рецензію на публікацію основної праці по докторській дисертації, Пугачов В.С. підтримав на захисті докторської дисертації, Тихонов В.І. – при затвердженні ступеня доктора наук у ВАК СРСР. В той же час не названими залишились сотні прізвищ студентів, аспірантів, наукової молоді, які пам'ятають допомогу, поради, ідеї Бориса Григоровича, які ходили «послухати Марченка» на конференціях, семінарах і які отримали творчу наснагу, поштовх для наукової праці.

Завершуючи ці спогади звертаюсь до студентів, аспірантів, наукових співробітників і хочу наголосити, що кращим вшануванням світлої пам'яті видатного українського вченого Марченка Бориса Григоровича буде наша плідна праця на користь України.

Життєвий шлях Бориса Григоровича є яскравим прикладом такої самовідданої праці!

УДК 53.083
Б. Г. Марченко, докт. фіз.-мат. наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ),
Л. М. Щербак, докт. техн. наук (Національний техн. ун-т України «КПІ», Київ).

СУЧАСНА КОНЦЕПЦІЯ ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАНЬ*

(Представлено академіком НАН України Ф.Б. Гриневичем)

Modern conception is based on the system of the axioms which gives the possibility to build logical unconflicting general theory of measurements, to exclude some a wide class problems of the measurings.

1. З давніх часів людина зустрічається з необхідністю проводити різні вимірювання, що привело до широкого розповсюдження такого процесу. Вірогідно, це сприяло поширенню думки, що вимірювання є досить простим процесом і для його проведення існують відомі правила. Але при формалізації задач вимірювань з'являються деякі труднощі, в тому числі і при створенні теорії вимірювань. На сьогодні створення загальної теорії вимірювань не можна вважати завершеною, а побудова такої теорії на базі аксіоматики є актуальною і назрілою проблемою [1-4].

Одним з основних розділів теорії вимірювань є теорія похибок. Більшість робіт по теорії вимірювань ґрунтується на гіпотезі існування точного значення вимірюваної величини, яке, як правило, постулюється. В той же час існування у всіх випадках точного значення вимірюваної величини викликає сумнів, так інколи його неможливо знайти, а іноді гіпотеза про його існування суперечить фізичній природі величини. Разом з тим сам факт існування такого значення величини, часто для практичних задач не є істотним. Згідно існуючим положенням припускається, що *похибка вимірювань є функцією точного значення вимірюваної величини*, а це в свою чергу робить *теорію похибок* беззмістовною, коли апріорно відомо, що точного значення величини не існує. З таким положенням не можна погодитись, особливо в тому випадку, коли виникає наявна потреба в оцінках похибки, що на практиці майже завжди має місце.

Зупинимось на основній частині даної роботи, в якій пропонується аксіоматичний підхід до побудови теорії вимірювань.

2. Сформулюємо аксіоми теорії вимірювань.

---

* Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Сучасна концепція побудови теорії вимірювань//Доповіді Національної академії наук України. 1999, № 10. С. 85- 88.

Аксіома 1. Кожному наслідку вимірювального експерименту ставиться у відповідність елемент x деякої множини X.

Аксіома 2. Серії наслідків вимірювальних експериментів, які стосуються одного і того ж об'єкту вимірювань і проведені за однакових умов, ставиться у відповідність топологія $\Im$ підмножин множини X.

Аксіома 3. В просторі наслідків вимірювальних експериментів X задається узагальнена міра – заряд q, яка визначена на σ–алгебрі підмножин $\Im$ як дійсна функція.

Така система аксіом є несуперечливою, незалежною і неповною:

- несуперечливою тому, що існують реальні об'єкти вимірювань, які задовольняють цим аксіомам;
- незалежною тому, що ніяка із аксіом не є наслідком іншої;
- неповною тому, що в рамках сформульованих аксіом можна розглядати однакові множини наслідків, але з різними топологіями $\Im$.

Сформульована система аксіом дає можливість умовно виділити два типи вимірювальних експериментів в загальній теорії вимірювань. Зупинимося на цьому більш детальніше.

2.1. До першого типу відносяться типові вимірювальні експерименти, характерною особливістю яких є можливість за умовою задачі вимірювань приписати наслідку кожного експерименту міру (заряд).

Наслідок 1.1. Будь-якому вимірювальному експерименту першого типу ставиться у відповідність математичну модель $(X, \Im, q)$ – вимірний топологічний простір з зарядом, де множина X, як простір носій, введена в аксіомі 1, σ–алгебра підмножин $\Im$, як один з варіантів топології $\Im$ відкритих підмножин X- в аксіомі 2, а заряд q, як дійсна функція в просторі X на σ-алгебрі $\Im$.

При проведенні $n\,(n \geq 1)$ вимірювальних експериментів за однаковими умовами отримуємо дискретну послідовність значень заряду

$$q_1, q_2, ..., q_n; \tag{1}$$

яка дає можливість визначити результат і похибку вимірювань.

Означення 1. Результат вимірювань є однозначно визначена функція послідовності значень заряду (1)

$$\theta_n = f(q_1, q_2, ..., q_n), \tag{2}$$

яка задовольняє умовам задачі вимірювань.

Вибір функції (2) по суті є вибором алгоритму обробки наслідків вимірювальних експериментів при розв'язку задачі вимірювань.

При аналізі результатів вимірювань першого типу експериментів похибка вимірювань є мірою розкиду наслідків вимірювальних експериментів і одночасно характеристикою точності результату вимірювань. З метою її визначення в топологічному просторі з зарядом $(X, \Im, q)$ можна ввести метрику – відстань $\rho(q_i, q_j)$ між елементами множини зарядів $\{q_j,\ j = 1, 2, ...\}$, яка в загальному випадку залежить від функції (2) і задовольняє відомим умовам [4].

Сформулюємо наступне означення похибки вимірювань.

Означення 2. Похибкою вимірювань в топологічному просторі із зарядом $(X, \Im, q)$ *є діаметр множини значень заряду* $\{q\}$, *тобто точна верхня грань між парами елементів множини* $\{q\}$

$$\sup_{i,j}\{\rho(q_i, q_j), i, j, = 1,2,...;\ q_i, q_j \in \{q\}\}$$

З даного означення випливає, що для знаходження похибки вимірювань не постулюється точне значення вимірюваної величини.

Відмітимо, що в окремих випадках, коли розглядається послідовність серій таке значення величини може бути, якщо існує границя послідовності діаметрів множини значень заряду $\{q\}$ і вона прямує до 0, при умові зростання числа наслідків вимірювального експерименту n до нескінченості, тобто при $n \to \infty$.

Але це не означає, що таке точне значення величини узгоджене з фізичною природою об'єкту вимірювань. І коли такого узгодження немає, то необхідно визнати, що точного значення величини не існує.

2.2. До другого типу відносяться такі вимірювальні експерименти, коли наслідком експерименту за умовою задачі вимірювань не має можливості приписати міру наслідку. Такі дії можна умовно іменувати вимірюваннями і розглядати їх як початкові етапи процесу вимірювань.

Наслідок 2.1. Вимірювальному експерименту другого типу ставиться у відповідність математична модель $(X, \Im)$ *– топологічний простір, де множина X введена в аксіомі 1, а топологія* $\Im$ *– в аксіомі 2.*

Сукупність всіх можливих топологій на фіксованій множині X – множині наслідків вимірювального експерименту дає можливість визначити результат вимірювань.

Перетин довільної множини топологій $\Im_0 = \bigcap_n \Im_n$ є топологія в X. Ця топологія не сильніша за будь яку топологію $\Im_n$.

Означення 3. При фіксованому X результатом вимірювань є перетин $\Im_0 = \bigcap_n \Im_n$ *довільної множини топологій* $(\Im_n, n = 1,2,...)$ *в X.*

Іншими словами, сама слабка топологія $\Im_0$ множини X міститься у всіх можливих топологічних просторах, які побудовані на множині наслідків вимірювального експерименту X, і є результат вимірювань.

Базуючись на аксіомі 2 і означенні 3 можна сформулювати таке:

Твердження 1. Областю визначення результату вимірювань є база топології $\Im_0$.

Приведені матеріали дають можливість зробити такі висновки.

3. Розглянуті концептуальні питання загальної теорії вимірювань. Звернено увагу на той факт, що існуюча теорія похибок базується на точному значенні вимірювальної величини і коли такого значення величини не існує, це робить таку теорію похибок беззмістовною. Запропонована концепція побудови теорії вимірювань базується на системі аксіом, яка дає можливість побудувати логічно несуперечливу загальну теорію вимірювань. При цьому така концепція не суперечить існуючим основним положенням теорії вимірювань, а суттєво доповнює і дає математичне обґрунтування.

1. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы. Пер. с чешского. - М.: Прогресс, 1987. - 320 с.

2. *Пфанцагль И.* Теория измерений. Пер. с анг. - М.: Мир, 1976. - 245 с.

3. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений. Сборник «Психологические измерения». Пер. с анг. - М.: Мир, 1962. -110 с.

4. *Халмош* П. Теория меры. Пер. с англ. - М.: 1953. - 289 с.

УДК 53.083
Б. Г. Марченко, докт. фіз.-мат. наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ),
Л. М. Щербак, докт. техн. наук (Національний техн. ун-т України «КПІ», Київ).

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАНЬ*

Наведені основні положення загальної теорії вимірювань, які базуються на системі аксіом. Відомо, що існуюча на сьогодні теорія похибок ґрунтується на гіпотезі про існування точного значення вимірюваної величини, яка не завжди фізично обґрунтована, що призводить до певних труднощів. Запропонована аксіоматична побудова теорії вимірювань дає можливість створити логічно несуперечливу загальну теорію вимірювань, зняти ряд проблем та розв'язати широке коло задач теорії вимірювань.

Приведены основные положения общей теории измерений, которые базируются на системе аксиом. Известно, что существующая теория ошибок основывается на гипотезе о существовании точного значення измеряемой величини, которая не всегда физически обоснована, что вызывает определенные трудности. Предложенное аксиоматическое построение теории измерений дает возможность создать логически непротиворечивую общую теорию измерений, снять ряд проблем и решить широкий круг задач теории измерений.

Вступ. З історії розвитку земної цивілізації відомо, що одні з перших свідомих кроків діяльності людини пов'язані з вимірюваннями. Це призвело до становлення геометрії, астрономії, математики та інших наук. Можливо, що процес рахування був одним з початкових етапів розвитку вимірювань як науки, оскільки певному набору фізичних об'єктів було поставлено у відповідність деяке число, як абстрактний (математичний) об'єкт. Слід сказати, що А. Крилов визначав прикладну математику як «науку о величинах, точно измеряемых», що говорить про тісний взаємозв'язок прикладної математики та теорії вимірювань, з чим неможливо не погодитись.

Зараз вимірювання зустрічається в усіх сферах діяльності людини. В одних випадках дослідник проводить вимірювальний експеримент, а в інших такий експеримент ставить і проводить сама природа. Незважаючи на умовну простоту вимірювань при формалізації самого процесу виникають певні труднощі, тому на сьогодні створення загальної теорії вимірювань можна вважати незакінченим,

---

* Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Основи теорії вимірювань//Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України. Електроенергетика. Київ, 1999. С. 221-230.

а побудова такої теорії на базі аксіоматики є актуальною і назрілою проблемою [1-4].

Слід зазначити, що спроби побудови аксіоматичних систем в теорії вимірювань робились і раніше. Так, у XIX столітті Р. Дедекінд (1888) працював над аксіоматикою теорії чисел, ставлячи за мету подолати суперечності між співвимірними та неспіввимірними величинами. Ці й подальші дослідження К. Вейерштрасса, Г. Кантора, Д. Гільберта, О. Гельдера, Е. Хантінгтона та інших вчених у зазначеній галузі знань більше стосувались аксіоматики математичної теорії чисел, ніж теорії вимірювань.

Набагато ближчий до теорії вимірювань і, можливо, вперше аксіоматичний підхід був започаткований Е. Нагелем (1932) і П. Суппесом (1951) стосовно систем екстенсивних вимірювань, а пізніше в роботах Дж. Неймана і О. Монгерштерна був поширений і на системи неекстенсивних вимірювань [3].

В процесі розвитку теорії вимірювань використовувались результати робіт Г. Гельмгольца, Н. Кемпбелла за класичною теорією вимірювань, К. Гемпеля, Р. Карнапа, В. Штегмюллера стосовно розширення основних положень класичної теорії вимірювань за рахунок аксіоматизації передумов вимірності на базі визначення умов метризації, С. Стівенса за теорії шкал, Дж. Зінеса, Д. Кранца, Д. Льюса, І. Пфанцагля, П. Суппеса, А. Тарського за так званою репрезентативною теорією вимірювань (теорії зображень) в межах концепції формального підходу до побудови теорії вимірювань та ін. [1].

В цій роботі розглядається один з можливих підходів до аксіоматичної побудови загальної теорії вимірювань і наводяться її основні положення. Це не виключає й інших аксіоматичних підходів і може розглядатись як ще одна спроба побудови аксіоматичної теорії вимірювань, яка має переваги і деякі недоліки в порівнянні з іншими. Запропонована концепція аксіоматичної побудови теорії вимірювань була вперше оприлюднена на Міжнародній конференції в Тернополі в 1995 році, де викликала зацікавленість і жваву дискусію фахівців.

Загальні питання теорії вимірювань. При описі вимірювальних експериментів зручно користуватись термінами *наслідок вимірювального експерименту* і *результат вимірювань*.

Під *наслідком вимірювального експерименту* розуміють те, що отримують в процесі реалізації певного комплексу природних, технічних та інших умов при проведенні вимірювального експерименту.

Можна припустити, що наслідок вимірювального експерименту є *подією,* при цьому наявність експериментатора не є обов'язковою.

На основі обробки сукупності наслідків вимірювальних експериментів робиться деякий висновок, який будемо називати *результатом вимірювань*.

Для одержання результату вимірювань існує деяке правило або алгоритм, за яким він визначається.

Вибір конкретного правила значною мірою залежить від постановки задачі вимірювань, і в першу чергу від об'єкту досліджень і експериментатора. Такий до деякої міри, довільний вибір правила обробки наслідків характерний для будь-якого виду вимірювань. Через це одному вимірюванню може відповідати декілька результатів, і вибір того чи іншого результату вимірювань потребує додаткового обґрунтування.

Основна задача вимірювань – це одержання результату вимірювань, який обов'язково має супроводжуватись характеристиками його точності. Слід також зауважити, що об'єкт дослідження з фізичної точки зору характеризується емпіричною системою. Такий підхід призводить до двох основних проблем теорії вимірювань, які в загальному вигляді можна сформулювати так [1, 3]:

1. *проблема зображення* – потрібно показати, що існує гомоморфне відображення властивостей емпіричної системи (об'єкту дослідження) в математичну модель системи, при цьому формальні властивості операцій і співвідношень з об'єктами емпіричної системи при проведенні вимірювального експерименту гомоморфні відповідним операціям і співвідношенням над наслідками вимірювального експерименту;

2. *проблема єдиності розв'язку* задачі вимірювань, яка полягає в установленні єдиності міри, у визначенні умов, за яких різні шкальні значення можуть представити одні й ті ж кількісні аспекти вимірюваної величини (інваріантність шкальних значень або шкальних перетворювань).

В основу вимірювань покладені певні операції порівняння, які, хоча і не обов'язково, здійснюються з допомогою засобів вимірювань. Довільні вимірювання без характеристик точності результату вимірювань втрачають практичну цінність, тому що без них за результат вимірювань може бути прийнято, наприклад, довільне число. Тому в теорії вимірювань значну увагу приділяють визначенню відповідних характеристик точності.

Відомо, що теорія похибок є одним з основним розділів загальної теорії вимірювань. Згідно з існуючими положеннями похибка вимірювань є функцією точного значення вимірюваної величини, яке, як правило, постулюється. Але така гіпотеза в усіх випадках не може бути обґрунтованою, інколи точне значення неможливо знайти, а іноді його наявність суперечить фізичній природі величини.

У таких випадках існуюча теорія похибок стає беззмістовною, з чим не можна погодитись при практичній необхідності розв'язку широкого кола задач вимірювань.

Далі зупинимось на означеннях деяких математичних об'єктів, які широко використовуються в теорії вимірювань.

Відомо, що теорія вимірювань базується на методах теорії міри, включаючи теорію ймовірностей, математичної статистики і теорії інформаційно-вимірювальних систем, одним із центральних об'єктів яких є математична модель.

Означення 1. Математична модель емпіричного об'єкту дослідження (явища, процесу) є сукупність знань, припущень та гіпотез, побудованих у вигляді цілісної, логічно витриманої несуперечливої структури, яка гомоморфно відображає основні властивості емпіричного об'єкту, сформульована з використанням математичних об'єктів, термінів та символів і призначена для розв'язання певного класу задач.

Можна привести приклади, коли для опису одного об'єкту дослідження використовуються різні математичні моделі в залежності від постановки задачі вимірювань. Але можна навести випадки, коли одна математична модель може описувати широкий клас об'єктів, різних за своєю фізичною природою.

Математична модель може використовуватись незалежно від самого об'єкту дослідження (емпіричної системи). Цей факт не акцентується в більшості робіт по теорії вимірювань, що призводить в ряді випадків до непорозумінь.

Тому в загальній теорії вимірювань має місце таке твердження.

Твердження 1. При вимірюваннях об'єкти емпіричної системи і математичної моделі є незалежними.

Однією з математичних моделей, яка відіграє важливу роль в теорії вимірювань, є топологічний простір [2-4]. Зупинимось більш детальніше на його означенні.

Будемо вважати заданою довільну множину X елементів $x \in X$. Завжди розглядаються випадки (аксіома вибору), коли множина X є непорожньою. Протилежний випадок не містить в собі суті вимірювань.

Далі розглядається деяка система (клас) $\Im$ відкритих підмножин X.

Система множин $\Im$ називається топологічною структурою або просто топологією.

При побудові топологічного простору відношення між множинами і елементами множин – точками простору описують в термінах околів.

Топологію $\Im$ іменують також системою околів, при цьому окіл U є околом точки $x \in X$, його позначають як $U(x) \in \Im$ якщо $x \in U$.

Означення 2. Пару $(X, \Im)$ називають топологічнім простором, якщо виконані такі умови:

1) $(\forall x \in X)(\exists U \in \Im): x \in X$;

2) $(\forall x \in X)(\forall U(x), V(x) \in \Im)(\exists W(x) \in \Im): W(x) \subseteq U(x) \cap V(x)$.

Використання аксіоми відокремлення Хаусдорфа лежить в основі побудови хаусдорфових топологічних просторів, які є підмножиною в класі загально визначених топологічних просторів. Згідно з цією аксіомою дві різні точки простору стають розділені в топології $\Im$ за допомогою околів, тобто кожна пара точок хаусдорфового простору $(X,\Im)$ має околи, що не перетинаються.

Означення 3. Топологічний простір $(X,\Im)$ *називається хаусдорфовим, якщо крім умов 1) та 2) означення 2 має місце умова*

3) $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists U(x), U(y) \in \Im) : U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Зауважимо, що при побудові топології $\Im$ немає необхідності задавати всі її елементи, а можна лише задати певну підмножину В топології $\Im$, яка є достатньою для того, щоб всі інші отримати шляхом об'єднання елементів В.

Означення 4. Підсімейство $B \subset \Im$ *називається базою топології* $\Im$*, якщо кожний елемент з* $\Im$ *можна подати у вигляді об'єднання з В.*

При постановці задачі вимірювань використання вимірних топологічних просторів, які є складовою частиною множини топологічних просторів, дає можливість певної конкретизації задачі.

Означення 5. Топологічний простір $(X,\Im)$ *називається вимірним, якщо крім умов* 1) *та 2) означення 2 клас підмножин* $\Im$ *є* σ *– алгеброю.*

Таким чином, у вимірному топологічному просторі $(X,\Im)$ σ-алгебра $\Im$ породжена системою околів відкритих підмножин X.

Однією з основних операцій при проведенні вимірювань є використання міри. Міра, як математичний об'єкт, є моделлю таких фізичних величин, як маса, довжина, площа, об'єм та інші. Відомо також, що міра, як функція множин, приймає тільки невід'ємні числові значення. При вимірюваннях зустрічаються величини, які приймають і від'ємні значення, наприклад, величина від'ємного електричного заряду.

Простим і природним узагальненням міри є заряд. Термін *«заряд»* запозичений з фізики. Заряд у фізиці відрізняється від маси тим, що маса завжди невід'ємна, а заряд може бути довільного знаку.

Така ж відмінність між мірою та зарядом, як математичних об'єктів.

Означення 6. Дійсна функція q задана в просторі X на σ *– алгебрі підмножин* $\Im$

$\Im \ni A\alpha\, q(A) \in \Re$*, де* $\Re$ *– множина дійсних чисел прямої R,*

називається зарядом, якщо виконані такі умови:

1) q(∅)=0;

2) функція q зліченно адитивна, тобто для A i, $A2,... \in \Im$*,* $A_i \cap A_j = \varnothing$*,* $i \neq j$*, маємо*

$$q\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} q(A_j)$$

Сукупність $(X, \Im, q)$ іменується вимірним топологічним простором з зарядом або топологічним простором із зарядом.

Розглянемо математичну задачу вимірювань, при означенні якої можна виділити два послідовних етапи:

1) вивчення об'єкту вимірювань та створення (вибір) відповідних математичних моделей для його опису;

2) в процесі формалізації і конкретизації мети вимірювального експерименту формулюється математична задача вимірювань (формалізована задача вимірювань).

Математична задача вимірювань повинна мати дві складові частини:

1) постановку задачі, де відображається або використовується відомий взаємозв'язок усіх математичних моделей об'єктів процесу вимірювань, початкові та граничні умови, області їх визначення та значень;

2) питання, на яке потрібно відповісти шляхом розв'язання поставленої задачі.

Відмітимо, що в більшості задач відповідь на поставлене запитання міститься в неявній формі в постановці задачі.

Математичну задачу вимірювань часто розбивають на дві пов'язані між собою задачі:

а) до проведення вимірювального експерименту - *апріорна постановка задачі*, коли рішенням задачі є множина всіх можливих результатів вимірювань, аналіз яких може бути прогнозом очікуваного реального результату вимірювань і відповідного значення похибки;

б) після проведення вимірювального експерименту - *апостеріорна постановка задачі*, коли одержаний результат вимірювань на базі обробки наслідків дає можливість прийняти рішення про досягнення мети експерименту.

Результат вимірювань може бути виражений числом, функцією, вектором або вказівкою «більше – менше», де саме число і не присутнє.

При проведенні вимірювального експерименту суттєву роль відіграє вибір «методу вимірювань», характерною властивістю якого є послідовність правил, прийомів і алгоритму обробки наслідків, і який служить основою в таких випадках при:

а) розв'язуванні математичної задачі вимірювань;

б) реалізації засобу вимірювань (наприклад інформаційно-вимірювальної системи).

в) плануванні та організації вимірювального експерименту.

Зупинимось на основній частині даної роботи, в якій пропонується аксіоматичний підхід до побудови теорії вимірювань.

Основні результати. Сформулюємо аксіоми теорії вимірювань.

Аксіома 1. Кожному наслідку вимірювального експерименту ставиться у відповідність елемент х деякої множини X.

Аксіома 2. Серії наслідків вимірювальних експериментів, які стосуються одного й того ж об'єкту вимірювань і проведені за однакових умов, ставиться у відповідність топологія $\mathfrak{I}$ підмножин множини X.

Аксіома 3. У просторі наслідків вимірювальних експериментів X задається узагальнена міра — заряд q, яка визначена на $\sigma -$ алгебрі підмножин $\mathfrak{I}$ як дійсна функція.

Відомо, що система аксіом повинна відповідати певним вимогам, в першу чергу аксіоми повинні бути несуперечливими відносно об'єктів вимірювань і незалежними одна від одної. Системи аксіом можуть бути повними або неповними. В більшості випадків використовуються неповні системи, що дає можливість подальшого розвитку теорії. Класичним прикладом є система аксіом Евкліда при створенні геометрії, яка використовується понад двох тисяч років. В той же час зміна суті тільки однієї п'ятої аксіоми (постулату) Евкліда про паралельність прямих привела до створення іншої геометрії (геометрії Лобачевського), відмінної від евклідової.

Запропонована система аксіом теорії вимірювань є несуперечливою, незалежною і неповною:

– несуперечливою, тому що більшість реальних об'єктів вимірювань задовольняють цим аксіомам;

– незалежною, тому що ніяка з аксіом не є наслідком іншої;

– неповною, тому що в різних задачах можна зустріти об'єкти, при вимірюваннях яких потрібно розглядати однакові множини наслідків, але з різними топологіями $\mathfrak{I}$.

З даної системи аксіом випливає.

Наслідок 1. Множина X не має останнього елемента і є зліченою множиною в загальному випадку.

Таким чином завжди є можливість при дослідженнях одного класу об'єктів і за однаковими умовами проводити нескінчене число вимірювань і це відіграє суттєву роль при розробках методології систем стандартизації та метрологічного забезпечення вимірювань.

Запропонована система аксіом дає можливість умовно виділити два типи вимірювальних експериментів. Зупинимося на цьому більш детально.

1. До першого типу відносять вимірювальні експерименти, характерною особливістю яких є можливість за умовою задачі вимірювань приписати наслідку кожного експерименту міру (заряд).

Наслідок 2. Будь-якому вимірювальному експерименту першого типу ставиться у відповідність математична модель $(X, \mathfrak{I}, q)$ – вимірний топологічний простір з зарядом, де множина X, як простір носій, введена в *аксіомі 1, σ –алгебра підмножин $\Im$, як один з варіантів топології $\Im$ відкритих підмножин X — в аксіомі 2, а заряд q, як дійсна функція в просторі X на σ -алгебрі $\Im$ задовольняє умовам 1) і 2) означення 6.*

Одна з важливих характеристик засобу вимірювань (інформаційно-вимірювальних систем) є їх роздільна спроможність. Така характеристика визначає можливість розділити два довільних близьких в просторі, часі (частоті) наслідки вимірювального експерименту як різні точки $(X,\Im)$. Роздільна спроможність використовується для класифікації засобів вимірювань і її конкретні значення залежать від вибору методу вимірювань і реалізації засобу вимірювань, як технічної системи.

Має місце таке

Твердження 2. Потенційна розділювальна спроможність засобу вимірювань служить основою для побудови системи околів хаусдорфового топологічного простору $(X,\Im)$.

В результаті проведення за однаковими умовами $n(n \geq 1)$ вимірювальних експериментів маємо дискретну послідовність значень заряду

$$q_1, q_2, ..., q_n; \quad (1)$$

яка є основою при визначені результату та похибки вимірювань.

Означення 7. Результат вимірювань є однозначно визначеною функцією послідовності значень заряду (1)

$$\theta_n = f(q_1, q_2, ..., q_n), \quad (2)$$

яка задовольняє умовам визначених задачею вимірювань.

Така функція по суті є алгоритмом обробки наслідків при розв'язку задачі вимірювань.

Для визначення похибки вимірювань в топологічному просторі з зарядом $(X,\Im,q)$ вводимо метрику – відстань $\rho(q_i, q_j)$ між елементами множини зарядів = $\{q_j, j=1,2,...\}$, яка в загальному випадку залежить від функції (2) і, як відомо, задовольняє таким умовам:

1) $\rho(q_i, q_j) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $i = j$;

2) умові симетрії $\rho(q_i, q_j) = \rho(q_j, q_i)$;

3) умові трикутника $\rho(q_i, q_m) \leq \rho(q_i, q_j) + \rho(q_j, q_m)$ для $\forall i, j, m$.

Сформулюємо наступне означення похибки вимірювань.

Означення 8. Похибкою вимірювань в топологічному просторі з зарядом $(X,\Im,q)$ *є діаметр множини значень заряду* $\{q\}$, *тобто точна верхня грань між парами елементів множини* $\{q\}$

$$\sup_{ij}\{\rho(q_i, q_j), i, j, = 1,2,...; q_i, q_j \in \{q\}\}.$$

Таким чином, в загальному випадку при знаходженні похибки вимірювань не використовується точне значення величини. Але приведене означення похибки вимірювань узгоджене і для випадків, коли таке значення величини є.

Для підтвердження гіпотези про існування точного значення величини необхідно виконання таких умов:

а) існування межі послідовності діаметрів множини значень заряду $\{q\}$, яка прямує до 0 при зростанні числа наслідків $n \to \infty$;

б) узгодження гіпотези існування точного значення величини з її фізичною природою.

В разі виконання тільки умови а) необхідно визнати, що точного значення величини не існує.

2. Для наслідків вимірювальних експериментів другого типу за умовою задачі не має можливості приписати міру (заряд). Такі дії можна лише умовно віднести до вимірювань і їх потрібно розглядати як початкові етапи процесу вимірювань.

Наслідок 3. Вимірювальному експерименту другого типу ставиться у відповідність математична модель $(X, \Im)$ – топологічний простір, де множина X введена в аксіомі 1, а топологія $\Im$ — в аксіомі 2.

Побудуємо довільну множину топологій $\{\Im_n, n = 1,2,...\}$ на фіксованій множині наслідків вимірювальних експериментів X.

Перетин довільної множини топологій $\Im_0 = \bigcap_n \Im_n$ є топологією в X. Ця топологія не сильніша за будь-яку топологію $\Im_n$.

Означення 9. При фіксованому X результатом вимірювань є перетин $\Im_0 = \bigcap_n \Im_n$ довільної множини топологій $\{\Im_n, n = 1,2,...\}$ в X.

З такого означення випливає, що найслабша топологія $\Im_0$ множини X міститься у всіх можливих топологіях $\{\Im_n, n = 1,2,...\}$ в X і є результатом вимірювань.

На основі аксіоми 2 і означення 4 сформулюємо таке

Твердження 3. Областю визначення результату вимірювань є база топології $\Im_0$.

Приведені результати дають можливість зробити такі висновки.

Висновки. Запропонована сучасна концепція побудови теорії вимірювань, яка базується на системі аксіом. Наведені основні положення логічно несуперечливої загальної теорії вимірювань, які суттєво доповнюють і дають математичне обґрунтування існуючим положенням.

1. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы//Пер. с чеш.- М.: Прогресс, 1987.- 320 с.

2. *Пфанцагль И.* Теория измерений//Пер. с анг. – М.: Мир, 1976. - 245 с.

3. *Суппес П., Зинес Дж.* Основи теории измерений//Сборник «Психологические измерения»//Пер. с анг. – М.: Мир, 1962.-110 с.

4. *Халмош П.* Теория меры//Пер. с анг. - М.: 1953. - 289 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ЗМІСТ