УДК 53.083

Л.Н. Щербак

Национальный авиационный университет, Киев

К ВОПРОСУ АКСИОМ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Предложена система аксиом для построения общей теории измерения, рассмотрено ее применение для определения результатов и погрешности различных процессов измерений.

***Ключевые слова**: аксиомы теории измерений, топологическое пространство Хаусдорфа, мера, заряд, результат измерений, погрешность.*

Введение. Принято вопросы измерений рассматривать в рамках метрологии как науки об измерениях. Из истории развития Земной цивилизации известно, что одни из первых сознательных шагов деятельности человека связаны с измерениями. Это привело к становлению геометрии, астрономии, математики и других наук. Современная метрология при расширении предметных областей измерений не ограничивается исследованием только физических величин, измерению подлежат и другие свойства, характеристики объектов исследования, изменяющиеся в пространстве и во времени. В этом, на наш взгляд, и состоит основная трудность разработки общей теории измерений, которая описывала бы разноплановость и разнородность процессов измерений. Есть и другой путь построения теории измерения – это выделить группы или разбить на классы условно однородных объектов исследования и для каждого класса разрабатывать свою теорию измерений, например, теорию квалиметрии, репрезентативную теорию измерений, информационно-статистическую теорию измерений и другие. Однако, с точки зрения методологии измерений как отображения реального мира, создание общей теории измерений является более фундаментальной идеей метрологии. Одним из направлений создания общей теории измерений является разработка аксиом теории измерений. Известно, что роль аксиом в становлении той или иной науки является определяющей. Примерами такой роли аксиом является геометрия, базирующаяся на системе аксиом Эвклида (созданы более 2000 лет назад) и теория вероятностей – системе аксиом А.Н. Колмогорова (30-е годы двадцатого столетия). Первые шаги в создании системы аксиом теории измерений предпринял немецкий математик Р.Дедекинд (1888) в своих исследованиях по преодолению противоречий между соизмеримыми и несоизмеримыми числами. В последующие годы был предложен ряд систем аксиом, например, в рамках, так называемой, репрезентативной теории измерений [1,2, 3].

Постановка задания. В работе предложена новая система аксиом для построения общей теории измерений. Первая редакция такой системы аксиом была опубликована в 1999 году [4,5] и в данной работе рассмотрено ее дальнейшее развитие.

Основные результаты. Потенциальные возможности современной метрологии дают возможность использовать три направления исследований для реализации процесса измерений:

- *математического моделирования* на основе разработки информационного обеспечения, использования средств вычислительной техники и проведения вычислительного (компьютерного) измерительного эксперимента;
- *физического моделирования* на основе использования физических моделей объекта исследований, как однородных по физической природе, так и другой физической природы, обоснованного выбора средства измерения и проведения имитационного (моделирующего) измерительного эксперимента;
- *экспериментального или натурного исследования* реального объекта исследования на основе использования средств измерений (ИИС) и проведения натурного измерительного эксперимента.

Постановка практически всех задач измерений приводит к трем основным проблемам теории измерений [1-9], которые в общем виде можно сформулировать так.

Проблема отображения – осуществление гомоморфного отображения свойства объекта исследования в информацию для измерений.

Проблема единства меры – установление одной и той же меры – результата измерений и определении условий, при которых различные методы и способы измерений представляют одни и те же количественные значения измеряемой величины.

Проблема защиты информации для измерений – состоит в формировании, передаче, обработке, регистрации и представлении потребителю данных измерений, использования соответствующих средств измерений, минимизирующих воздействия естественных помех, несанкционированного доступа и преднамеренных угроз.

Согласно ранее существующим положениям погрешность измерений являлась функцией точного значения измеряемой величины, которое, как правило, постулировалось. Но такая гипотеза в большинстве случаев не может быть подтвержденной, иногда точное значение невозможно найти, а иногда его наличие противоречит физической природе величины. Это привело к применению в современной метрологии нового направления оценки результата измерения - *концепции неопределенности* (1993). Факт очень интересный в метрологии. В основном используя практический опыт проведения процессов измерений, Международными организациями метрологов было введено практическое руководство вычисления результата измерений, исключив из применения при этом *точное значение измеряемой величины*. Необходимость появления такого руководства, вероятно, определялось значимостью и своевременным выполнением множества процессов измерения во всем мире.

На основании использования результатов работ [1-9] предлагается система аксиом, в которой:

- не используется гипотеза и постулаты теории измерений про точное или условно точное значение измеряемой величины, что принципиально изменяет методологию определения результата измерений;
- информация для измерений может изменяться в пространстве и во времени;
- определение меры при проведении измерительных экспериментов происходит в два этапа:

  а) определение меры (заряда) при выполнении операции сравнения однородных по физической природе измеряемой и воспроизводимой единицы системы измерений, (шкалы) что дает возможность представлять результат измерений с указанием размерности единицы системы измерений;

  б) использование нормированной вероятностной меры для обеспечения единства измерений при проведении измерительных экспериментов в разных местах и в разное время при контролируемых условиях с целью определения результата и погрешности измерения, относящихся к одному виду объектов измерения в рамках концепции неопределенности, и тем самым определения повторяемости на практике полученных результатов измерений, например, доверительных интервалов с заданной вероятностью.

При проведении измерительного эксперимента первоначально происходит событие, которое дает возможность решить проблему отображения свойства объекта исследования в информацию для измерений. В последующих действиях при проведении измерительного эксперимента происходит операция сравнения информации для измерений с единицей системы измерений и следствию измерительного эксперимента приписывается мера (заряд). В тех случаях, когда информации для измерения нельзя прописать меру и возникает необходимость получения результата операции сравнения, требуется использование других оценок, например, экспертных оценок, шкал эквивалентности и др.

Относительно использования математических объектов в системе аксиом следует отметить следующее.

Использование измеримого топологического пространства Хаусдорфа $(X,\mathcal{T})$ в качестве математической модели исследований следствий измерительных экспериментов обосновывается следующим:

- следствие измерительного эксперимента, которое получается при реализации определенного комплекса условий и действий, может быть не обязательно числом, т.е. следствие x может быть представлено как элемент $x \in X$ произвольного первичного множества – пространства X;
- создание алгебры или σ-алгебры $\mathcal{T}$ открытых подмножеств X описывает различные комбинации следствий с окрестностями, так называемую топологию $\mathcal{T}$, т.е. в топологическом пространстве $(X,\mathcal{T})$ отношения между множествами и элементами множеств описывают в терминах окрестностей, что дает возможность рассматривать окрестность как некоторую область значений погрешности определения следствия измерительного эксперимента;
- использование измеримого топологического множества Хаусдорфа $(X,\mathcal{T})$ из всего класса топологических пространств для задач измерений носит принципиальный характер, поскольку дает возможность на пространстве $\mathcal{T}$ выделить любые две окрестности элементов $x \in X$, которые не пересекаются.

Известно, что мера, как функция множества, является математической моделью таких физических величин, как масса, длина, площадь, объем и другие. Мера принимает только неотрицательные действительные значения. Однако при измерениях встречаются физические величины, например, отрицательный электрический заряд, которые принимают отрицательные значения. Простым и естественным обобщением меры является заряд. Термин *заряд* заимствован из физики. Заряд в физике отличается от массы тем, что масса всегда неотрицательная, а заряд может быть произвольного знака. Такое же отличие между мерой и зарядом как математических объектов.

Сформулируем аксиомы теории измерений.

Аксиома I. *Каждому следствию измерительного эксперимента ставится в соответствие элемент x множества X.*

Аксиома II. *Серии следствий измерительных экспериментов, относящихся к одному и тому же объекту измерений и проведенных при контролируемых условиях, ставится в соответствие топология $\mathcal{T}$ как алгебра или σ - алгебра открытых подмножеств множества X, а совокупность (X,$\mathcal{T}$) образует измеримое топологическое пространство Хаусдорфа.*

Аксиома III. *На подмножествах топологии $\mathfrak{I}$ задается обобщенная мера – заряд q, которая определена как действительная функция, а самому процессу измерения ставится в соответствие его математическая модель (X,$\mathcal{T}$,q) - измеримое топологическое пространство Хаусдорфа с зарядом.*

Аксиома IV. *Теория, методология и практика обеспечения единства измерений, относящихся к одному виду объектов измерений, при проведении последовательности процессов измерения в различных местах и в разное время в контролируемых условиях использует исходную (первичную) модель случайной величины $\xi(\omega), \omega \in \Omega$, область значений которой (A,$\mathcal{B}$,P_ξ) является измеримым вероятностым пространством с нормируемой вероятностной мерой $P_\xi \in [0,1]$, где A – пространство результатов измерений, $\mathcal{B}$ - алгебра или σ-алгебра подмножеств пространства A, а P_ξ - нормированная мера, характеризует повторяемость в пространстве и во времени подмножеств $\mathcal{B}$.*

Кратко остановимся на возможностях использования предложенной системы аксиом для описания процессов измерения. Предложенная система аксиом дает возможность условно выделить два вида процессов измерения. К первому виду относят процессы измерений, характерной особенностью которых является возможность приписать следствию каждого эксперимента меру (заряд).

Утверждение 1. *Любому процессу измерений первого вида ставится в соответствие математическая модель* (X,$\mathcal{T}$,q) *– измеримое топологическое пространство Хаусдорфа с зарядом, где множество X, как пространство носитель, введено в аксиоме I, алгебра или σ – алгебра подмножеств $\mathcal{T}$, как один из вариантов топологии $\mathcal{T}$ открытых подмножеств X — в аксиоме II, а заряд q, как действительная функция на подмножествах топологии $\mathcal{T}$ - в аксиоме III.*

Одна из важных характеристик средства измерений (ИИС) есть их разрешающая способность.

Утверждение 2. *Потенциальная разрешающая способность средства измерений при проведении измерительного эксперимента служит основой для построения системы окрестностей измеримого топологического пространства Хаусдорфа* (X,$\mathcal{T}$).

В результате проведения серии $n(n \ge 1)$ измерительных экспериментов, относящихся к одному виду объектов исследований, имеем дискретную последовательность значений заряда

$$q_1, q_2, ..., q_n; \qquad (1.1)$$

которая используется в дальнейшем для определения результата и погрешности измерений.

Утверждение 3. *Результат измерений является однозначно определенной функцией последовательности значений заряда (1.1)*

$$\theta_n = f(q_1, q_2, ..., q_n), \qquad (1.2)$$

которая удовлетворяет условиям определенных задачей измерений.

Такая функция по сути является алгоритмом обработки следствий измерительных экспериментов при решении задачи измерений. Для определения погрешности измерений в топологическом пространстве Хаусдорфа с зарядом (X,$\mathcal{T}$,q) введем метрику – расстояние $\rho(q_i, q_j)$ между элементами q_i, q_j множества зарядов, которая в общем случае зависит от функции (1.2) и, как известно, удовлетворяет известным условиям.

Тогда для процессов измерения первого вида имеет место.

Утверждение 4. *Погрешностью измерений в топологическом пространстве Хаусдорфа с зарядом* (X,$\mathcal{T}$,q) *является диаметр множества значений заряда $\{q\}$, то есть точная верхняя грань между парами элементов множества $\{q\}$*

$$\sup_{ij}\{\rho(q_i, q_j), i, j, = 1,2,...; q_i, q_j \in \{q\}\}.$$

Таким образом, в общем случае при нахождении погрешности измерений не используется точное значение величины. Данное определение согласовано и для случаев, когда такое значение величины есть. Для подтверждения гипотезы о его существовании необходимо выполнения таких условий:

а) существование границы последовательности диаметров множества значений заряда $\{q\}$, которая в пределе стремится к 0;

б) согласование гипотезы существования точного значения величины с ее физической природой.

При выполнении только условия а)делается вывод, что точного значения величины не существует.

Для процессов измерений второго вида не имеется возможности приписать меру (заряд). Тогда имеет место следующее

Утверждение 5. *Процессу измерения второго вида ставится в соответствие математическая модель* $(X,\mathcal{T})$ *– измеримое топологическое пространство Хаусдорфа, где множество X введено в аксиоме I, а топология* $\mathcal{T}$ *— в аксиоме II.*

Построим произвольное множество топологий $\{\mathcal{T}_n, n=1,2,\ldots\}$ на фиксированном множестве следствий измерительных экспериментов X.

Утверждение 6. *При фиксированном X результатом измерений является пересечение* $\mathcal{T}_0 = \bigcap_n \mathcal{T}_n$ *произвольного множества топологий* $\{\mathcal{T}_n, n=1,2,\ldots\}$ *в X.*

Из данного утверждения следует, что самая слабая топология $\mathcal{T}_0$ множества X содержится во всех возможных топологиях $\{\mathcal{T}_n, n=1,2,\ldots\}$ в X и является результатом измерений.

Выводы. Предложенная система аксиом дает возможность все множества процессов измерения условно разделить на два вида:

- первого вида, которым можно приписать меру (заряд), поэтому для решения задач измерений можно использовать всю систему аксиом (аксиомы I-IV), при этом аксиомы I-III применимы к процессам измерения, которые, как правило, проводятся в одной организации, предприятии и так далее, а аксиома IV – при оценке результатов измерений, полученных в масштабах областей, регионов и далее стран в целом;
- второго вида, для которых производится измерительный эксперимент с обязательной операцией сравнения информации для измерений с другими, как правило, неоднородными оценками, и для которых применимы аксиомы I и II, а в некотором смысле и аксиома IV,

и определить результат и погрешность измерения.

Список литературы.

1. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы: пер. с чеш. – М.: Прогресс, 1987. – 320 с.

2. *Пфанцагль И.* Теория измерения: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 245 с.

3. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений: пер. с англ. // Сборник «Психологические измерения». – М.: Мир, 1962. – 110 с.

4. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Сучасна концепція побудови теорії вимірювань // Доповіді Національної академії наук України, 1999. - № 10. – С. 85-88.

5. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Основи теорії вимірювань // Праці ІЕД НАНУ. – К., 1999. – С. 221-230.

6. *Wiener N.* A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics, Proc. London Math. Soc., 19 (1921), 181-205.

7. *Жуков Ю.Д.* Полиметрические системы: теория и практика: Монография / Ю.Д. Жуков, Б.Н. Гордеев, А.В. Зивенко и др. Николаев: Изд-ль Прокопчук Т.Ю., 2012. – 380 с., ил.

8. *Халмош П.* Теория меры: пер. с англ. – М.: Мир, 1953. 289 с.

9. *Николайчук Я.М.* Теорія джерел інформації. – Тернопіль: ТОВ «Терно-граф», 2010. – 536 с.

Рецензент: д-р техн. наук, Ю.В. Куц, Национальный авиационный университет.

Автор: *ЩЕРБАК Леонид Николаевич*

Национальный авиационный университет, Киев, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры.

Раб. тел. – 044-406-75-45, E-mail – prof_Scherbak@ukr.net

До питань аксіом теорії вимірювань

Л.М. Щербак

Запропоновано систему аксіом для побудови загальної теорії вимірювання, розглянуто її застосування для визначення результатів і похибки різних процесів вимірювань.

***Ключові слова**: аксіоми теорії вимірювань, топологічний простір Хаусдорфа, міра, заряд, результат вимірювань, похибка.*

On the question of the axioms of measurement

L. Scherbak

A system of axioms for a general theory of measurement, considered its application to determine the results of various processes and measurement errors.

***Keywords:** axiom of measurement theory, Hausdorff topological space, measure the charge, the result of measurement error*