УДК 517.521(043.2)

ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Антон Купневич
Національний авіаційній університет, Київ

Науковий керівник – Віктор Репета, к.ф.-м.н., доц.

Ключові слова: числовий ряд, сума ряду, інтеграл, інтегральне представлення.

Вступ. Однією із задач теорії збіжних числових рядів є обчислення їх суми. Окрім використання комп'ютерних технологій, не втрачають актуальності аналітичні методи обчислення точних значень сум таких рядів.

Результати.

1. Розглядається задача знаходження суми збіжного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+pn+q}. \tag{1}$$

Обмежимося випадком, коли $n^2+pn+q=(n+n_1)(n+n_2)$, де n_1, n_2 $(n_1<n_2)$ – додатні раціональні числа, причому принаймні одне з них не є цілим числом і різниця $n_2-n_1\notin Z$. У загальному випадку справедливе представлення

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+pn+q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+n_1)(n+n_2)}=\frac{1}{n_2-n_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+n_1}-\frac{1}{n+n_2}\right). \tag{2}$$

У випадку, коли різниця n_2-n_1 є цілим ненульовим числом, задача підсумовування ряду (1) не викликає труднощів. Отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+pn+q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+n_1)(n+n_2)}=\frac{1}{n_2-n_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+n_1}-\frac{1}{n+n_2}\right)=\frac{1}{n_2-n_1}\sum_{n=1}^{n_2-n_1}\frac{1}{n+n_1}.$$

Якщо ж $n_2-n_1\notin Z$, тоді у представленні (2) вираз $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+n_1}-\frac{1}{n+n_2}\right)$ згорнути не можна. У цьому випадку обчислення суми ряду (1) за вказаних умов можна звести до обчислення відповідного інтеграла. Спиратимемося на такі міркування. Оскільки справджується інтегральне представлення $\frac{1}{p}=\int_0^1 x^{p-1}dx$ $(p>0)$, тоді $\frac{1}{n+n_1}=\int_0^1 x^{n+n_1-1}dx$ і $\frac{1}{n+n_2}=\int_0^1 x^{n+n_2-1}dx$ для $n=1,2,3,\dots$. У результаті для суми S ряду маємо рівності

$$S=\frac{1}{n_2-n_1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 x^{k+n_1-1}dx-\int_0^1 x^{k+n_2-1}dx\right)=\frac{1}{n_2-n_1}\left(\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+n_1-1}\right)dx-\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+n_2-1}\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{n_2-n_1}\left(\int_0^1 x^{n_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right)dx-\int_0^1 x^{n_2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right)dx\right)=\frac{1}{n_2-n_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^{n_1}-x^{n_2}}{1-x}dx\,.$$

Виконавши інтегрування, дістають суму ряду (1).

Приклад 1. $n_1=0,5$, $n_2=1$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1,5n+0,5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+0,5)(n+1)}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+0,5}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$S=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\frac{x}{1-x}\right)dx=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{x}-x}{1-x}dx=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=4\ln 2-2\,.$$

Приклад 2. $n_1=\frac{1}{3}$, $n_2=\frac{1}{2}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\frac{5}{6}n+\frac{1}{6}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\,.$$

2. Отримані результати природно узагальнити на випадок ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_l(n)}{(n+n_1)(n+n_2)\cdot\ldots\cdot(n+n_k)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_1}{n+n_1}+\frac{A_2}{n+n_2}+\ldots+\frac{A_k}{n+n_2}\right),$$

де n_1, $n_2,\ldots,n_k$ ($n_1<n_2<\ldots<n_k$) – додатні раціональні числа, причому принаймні одне з них не є цілим числом і хоча б одна різниця $n_i-n_j\notin Z$, $P_l(n)$ – поліном степеня l ($l<k-1$), A_1, A_2, ..., A_k – певні сталі, які задовольняють умову $A_1+A_2+\ldots+A_k=0$. Тоді

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{A_1x^{n_1}+A_2x^{n_2}+\ldots+A_kx^{n_k}}{1-x}dx\,.$$

Приклад 3. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+0,5)(n+1)(n+1,5)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+0,5}-\frac{4}{n+1}+\frac{2}{n+1,5}\right).$$

Тоді

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1-x}-\frac{4x}{1-x}+\frac{2\sqrt{x^3}}{1-x}\right)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{2\sqrt{x}-4x+2\sqrt{x^3}}{1-x}\right)dx=8\ln 2-\frac{16}{3}\,.$$

Висновок

Отримані результати задають алгоритм обчислення сум збіжних числових рядів виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_l(n)}{(n+n_1)(n+n_2)\cdot\ldots\cdot(n+n_k)}$ з додатними раціональними значеннями $n_1,n_2,\ldots,n_k$ і $l<k-1$ за допомогою інтегрування.