УДК 511.323:51; 519.176

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧІ

Андрій Пітерцев
Національний авіаційній університет, Київ

Науковий керівник – Віктор Репета, к.ф.-м.н., доц.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, рекурентна формула, послідовність Люка, узагальнена формула Біне.

Вступ. Послідовності Фібоначчі мають широке застосування в багатьох сферах, зокрема в математиці (теорії чисел, комбінаториці тощо), біології, теорії кодування, телекомунікаціях, аналізі фінансових ринків тощо. Вивчення властивостей таких послідовностей не втрачає своєї актуальності і натепер.

Результати. Послідовність дійсних чисел (a_n), задану рекурентною формулою $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, a_0, a_1 – задані числа, $n \in N_0$, називатимемо узагальненою послідовністю Фібоначчі.

Класичну послідовність чисел Фібоначчі (F_n) (A000045, OEIS) задають рекурентною формулою $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $n \in N_0$.

Перші члени послідовності чисел Фібоначчі такі: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

У явному вигляді n-й член послідовності Фібоначчі має вигляд $F_n = \dfrac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ (**формула Біне**), де $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749...$ – золотий переріз, $\hat{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\varphi\hat{\varphi} = -1$.

Послідовність чисел Люка (A000045, OEIS) задають рекурентною формулою $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $n \in N_0$.

Перші члени послідовності чисел Люка такі: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ...

У явному вигляді n-й член послідовності Люка має вигляд $L_n = \varphi^n + \hat{\varphi}^n$.

Класична послідовність Фібоначчі і послідовність Люка є окремими випадками узагальненої послідовності Фібоначчі. Тому цілком слушно очікувати, що між цими послідовностями існують певні зв’язки. За будь-яких $n \in N_0$ справджуються формули:

$$a_{n+1} = a_0 F_n + a_1 F_{n+1}; \tag{1}$$

$$L_{n+1} = 2F_n + F_{n+1}; \quad a_n = \frac{a_0}{2} L_n + \frac{2a_1 - a_0}{2} F_n;$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_0 + a_1}{5} L_{n+1} + \frac{2a_1 - a_0}{5} L_n;$$

$$F_{n+1} = \frac{2}{5} L_n + \frac{1}{5} L_{n+1}; \quad F_{n+1} = \frac{a_0 a_{n+2} - a_1 a_{n+1}}{a_0^{\ 2} + a_0 a_1 - a_1^{\ 2}}.$$

Ці рекурентні співвідношення нескладно довести, застосувавши метод математичної індукції.

Узагальнимо формулу Біне на випадок узагальненої послідовністі Фібоначчі. Для цього перетворимо співвідношення (1) з урахуванням формули Біне та рівності $\varphi\hat{\varphi} = -1$:

$$a_{n+1} = a_0 F_n + a_1 F_{n+1} = a_0 \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + a_1 \frac{\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\varphi^{n+1}\left(\dfrac{a_0}{\varphi} + a_1\right) - \hat{\varphi}^{n+1}\left(\dfrac{a_0}{\hat{\varphi}} + a_1\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1}\left(a_1 - a_0\hat{\varphi}\right) - \hat{\varphi}^{n+1}\left(a_1 - a_0\varphi\right)}{\sqrt{5}}.$$

Остаточно отримуємо рівність

$$a_n = \frac{\varphi^n\left(a_1 - a_0\hat{\varphi}\right) - \hat{\varphi}^n\left(a_1 - a_0\varphi\right)}{\sqrt{5}},$$

яку і назвемо **узагальненою формулою Біне**.

Наведемо ще декілька характерних для розглянутих послідовностей тотожностей.

Формули Кассіні:

1. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n$.
2. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^{\ 2} = (-1)^{n+1} \cdot 5$.
3. $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^{\ 2} = (-1)^{n+1} \cdot (a_0^{\ 2} + a_0 a_1 - a_1^{\ 2})$.

Формули сум елементів послідовностей:

1. $F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.
2. $L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n = L_{n+2} - 1$.
3. $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+2} - a_1$.

Формули сум квадратів елементів послідовностей:

1. $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.
2. $L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + ... + L_n^2 = L_n L_{n+1} + 2$.
3. $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = a_n a_{n+1} + a_0(a_0 - a_1)$.

Висновок

Дослідження узагальнених послідовностей Фібоначчі демонструють їх важливість та потенціал для застосування. Це відкриває шляхи для подальшого наукового й технологічного розвитку.