

ЛАСТІВКА І.О.

**ВАРІАЦІЙНЕ ВИВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ МЕРИДІОНАЛЬНІЙ ПОЛЯРИЗАЦІЇ**

Запропоновано побудову одного з варіантів уточненої теорії п'єзокерамічної оболонки при її меридіональній поляризації, отримано систему диференціальних рівнянь коливань оболонки та граничні умови з використанням варіаційного принципу Рейсснера.

*Ключові слова і фрази:* п'єзокерамічна оболонка, меридіональна поляризація, диференціальні рівняння коливань, граничні умови, варіаційний принцип.

Національний авіаційний університет, Київ, Україна  
E-mail: iola@nau.edu.ua

## ВСТУП

Коливання п'єзокерамічних тіл, як механічний процес, описується рівняннями механіки деформівного твердого тіла, а з точки зору електричних явищ — рівняннями електродинаміки. Обидві групи рівнянь є взаємозв'язаними, вони розв'язуються сумісно і складають рівняння теорії електропружності.

Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої відбувається у складних умовах навантаження при взаємодії різних фізичних факторів, стимулює створення та розвиток теорії спряжених полів у пружних тілах.

Анізотропія фізико-математичних властивостей п'єзоелектриків і взаємозв'язок електромагнітного поля з механічним рухом суттєво ускладнюють опис процесів деформування і міцності. У зв'язку з цим значну увагу приділено розвитку і створенню математичних методів кількісного аналізу. Для моделювання коливних процесів електромеханічних систем, а також для розв'язання крайових задач електропружності доволі часто використовуються кінцево-різницеви та варіаційно-різницеви методи. Широке застосування в техніці оболонок із п'єзокерамічних матеріалів потребує побудови для них прикладних теорій статичного і динамічного деформування.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У даній роботі ставиться задача математичного моделювання коливань п'єзокерамічної оболонки при меридіональній поляризації на основі уточненої теорії типу С.П. Тимошенка та варіаційного принципу Рейсснера [3], який стосовно зв'язаних задач для багатопарових оболонок був розвинений у роботі [4].

УДК 517.958:534.1

2010 *Mathematics Subject Classification:* 97M10.

## 2 ВИВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ВЗДОВЖ МЕРИДІАНУ. ГРАНИЧНІ УМОВИ

Попередньо поляризовану по меридіану оболонку віднесемо до триортогональної системи координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = z$ . На поверхні приведення  $z = 0$ , положення якої може бути вибрано довільним чином, координатні лінії  $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$  є лініями головних кривизн оболонки,  $R_1$  і  $R_2$  — радіуси кривизн,  $h$  — товщина оболонки. Вісь  $Oz$  спрямована по нормалі до серединної поверхні оболонки,  $A_1$  і  $A_2$  — параметри Ламе або коефіцієнти першої квадратичної форми  $dS^2$  поверхні  $z = 0$ , а саме:  $dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$ .

Електропружний стан п'єзокерамічного тіла характеризується тензором механічних напружень  $\sigma$ , деформацій  $\epsilon$ , векторами напруженості  $\vec{E}$  та індукції  $\vec{D}$  електричного поля. В лінійній теорії п'єзоелектрики залежності між вказаними характеристиками електропружного тіла вважаються лінійними. Вигляд співвідношень електропружності залежить від вибору незалежних термодинамічних параметрів, що визначають функцію внутрішньої енергії, а також від напрямку вектора попередньої поляризації п'єзокераміки.

Якщо за незалежні термодинамічні параметри вибрати напруження  $\sigma$  і напруженість електричного поля  $\vec{E}$ , то рівняння стану попередньо поляризованої по меридіану оболонки має вигляд [1]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= s_{11}\sigma_{11} + s_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{zz}) + d_{11}E_1; \\ e_{22} &= s_{13}\sigma_{11} + s_{33}\sigma_{22} + d_{31}E_1; \\ e_{zz} &= s_{31}\sigma_{11} + s_{32}\sigma_{22} + s_{33}\sigma_{zz} + d_{31}E_1; \\ 2e_{1z} &= s_{55}\sigma_{1z} + d_{53}E_z; & 2e_{2z} &= s_{44}\sigma_{2z}; \\ 2e_{12} &= s_{55}\sigma_{12} + d_{53}E_2; & D_1 &= d_{11}\sigma_{11} + d_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{zz}) + \epsilon_{11}E_1; \\ D_2 &= d_{53}\sigma_{21} + \epsilon_{53}E_2; & D_z &= d_{53}\sigma_{1z} + \epsilon_{33}E_z. \end{aligned} \quad (1)$$

У якості основних спрощуючих припущень візьмемо відомі кінематичні гіпотези типу С.П. Тимошенка, відповідно до яких тангенціальні переміщення  $u_1^{(z)}, u_2^{(z)}$  змінюються за лінійним законом, а поперечні  $u_z^{(z)}$  не залежать від товщинної координати:

$$\begin{aligned} u_j^{(z)}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= u_j(\alpha_1, \alpha_2) + z\gamma_j(\alpha_1, \alpha_2); \quad (j = 1, 2), \\ u_z^{(z)}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= W(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Співвідношення (2) доповнимо гіпотезами достатньо загального характеру відносно розподілу електростатичного потенціалу по товщині оболонки

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, z) = \frac{2z}{h}\Phi_0 + f(z)\Phi(\alpha_1, \alpha_2). \quad (3)$$

Тут  $\Phi = const$ , а  $f(z)$ , взагалі кажучи, довільна неперервна функція, що задовольняє умову  $f\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0$ , яка дозволить виконати граничні умови для розглянутих нижче оболонок, поверхні яких покриті електродами з постійною різницею потенціалів.

Вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  пов'язаний з функцією електростатичного потенціалу  $\varphi$  формулою  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ , тому в силу припущень (3)

$$\vec{E} = \left\{ -\frac{f(z)}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}; \quad -\frac{f(z)}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}; \quad -\left(\frac{2\Phi_0}{h} + f'(z)\Phi\right) \right\}.$$

Для виведення диференціальних рівнянь коливань і граничних умов застосуємо варіаційний підхід [3], використаємо функціонал

$$I = \int_0^t \int_V \left( \sigma^{ij} \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + D_i \nabla_i \varphi + G_1(\sigma, D) - T \right) dV dt, \quad (4)$$

де  $\sigma^{ij}$  — тензор напружень,  $u_i$  — переміщення,  $\varphi$  — потенціал,  $\vec{D}$  — вектор електричної індукції,  $G_1(\sigma, D)$  — пружна функція Гіббса,  $T$  — кінетична енергія.

З умови стаціонарності функціоналу (4) отримуємо

$$I = \int_0^t \iint_{\Omega} \left( T_{ij} \delta e_{ij} + M_{ij} \delta \chi_{ij} + 2Q_j \delta e_j + \hat{D}_j \delta \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} \right) + \hat{D}_z \delta \Phi - \left( \rho h \dot{u}_i \delta \dot{u}_i + \left( \frac{\rho h^3}{12} \right) \dot{\gamma}_i \delta \dot{\gamma}_i \right) \right) d\Omega dt = 0. \quad (5)$$

Тут введені наступні інтегральні характеристики:

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz; \quad Q_j = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{jz} dz; \quad (6)$$

$$\hat{D}_j = \int_{-h/2}^{h/2} D_j f(z) dz; \quad \hat{D}_z = \int_{-h/2}^{h/2} D_z f'(z) dz.$$

Величини  $e_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  та  $e_j$  пов'язані з переміщеннями та кутами повороту відомими співвідношеннями [2].

Перейдемо до варіацій переміщень, кутів повороту і потенціалу (незалежні варіації) і, користуючись формулою Гріна-Остроградського, з (5) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{A_i} T_{ii} \right)_{,i} - \frac{1}{A_i A_j} T_{ii} A_{j,i} + \frac{1}{A_i} \left( \frac{1}{A_j} A_i T_{ij} \right)_{,j} + Q_i k_i - \rho h \ddot{u}_i &= 0; \\ \left( \frac{1}{A_1} Q_1 \right)_{,1} + \left( \frac{1}{A_2} Q_2 \right)_{,2} - (T_{11} k_1 + T_{22} k_2) - \rho h \ddot{w} &= 0; \\ \left( \frac{1}{A_i} M_{ii} \right)_{,i} + \left( \frac{1}{A_j} A_i M_{ij} \right)_{,j} - \frac{1}{A_i A_j} M_{jj} A_{j,i} - Q_i - \left( \frac{\rho h^3}{12} \right) \ddot{\gamma}_i &= 0; \\ \hat{D}_z - \left( \frac{1}{A_1} \hat{D}_1 \right)_{,1} - \left( \frac{1}{A_2} \hat{D}_2 \right)_{,2} &= 0, \quad (i, j = 1, 2), (i \neq j) \end{aligned} \quad (7)$$

і контурний інтеграл

$$\int_{\bar{\Omega}} \left( M_{nj} \delta \gamma_j + T_{nj} \delta u_j + Q_n \delta w + \hat{D}_n \delta \Phi \right) d\bar{\Omega} = 0,$$

на підставі якого необхідно сформулювати граничні умови. У рівняннях (7) записи типу  $(\ )_{,i}$  означають диференціювання по відповідній компоненті.

Будемо вважати, що поверхні оболонки вільні від механічних напружень і покриті електродами з заданою різницею потенціалів. Тоді граничні умови мають вигляд

$$\sigma_{jz} \left( \alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\varphi\left(\alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2}\right) = \pm \Phi_0.$$

Напруження  $\sigma_{jz}$  ( $j = 1, 2$ ), знайдені з (1) за деформаціями, що визначаються співвідношеннями Коші, при введених гіпотезах (2) не будуть задовольняти граничні умови (8). Тому будемо додатково вважати, що

$$\sigma_{jz} = \frac{1}{h} f(z) Q_j(\alpha_1, \alpha_2), \quad (j = 1, 2),$$

причому  $f(z)$  така, що  $f\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0$  і  $\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = 1$ , а  $Q_j(\alpha_1, \alpha_2)$  — перерізуюча сила. Протириччя, пов'язані з задоволенням граничних умов (8), можна обійти, якщо два рівняння з (1) виконати інтегрально

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( 2e_{1z} - \left( s_{55} - \frac{d_{53}^2}{\varepsilon_{33}} \right) \sigma_{1z} - \left( \frac{d_{53}}{\varepsilon_{33}} \right) D_z \right) \delta \sigma_{1z} dz = 0, \quad (9)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (2e_{2z} - s_{44} \sigma_{2z}) \delta \sigma_{2z} dz = 0. \quad (10)$$

Знаходимо інтегральні характеристики за формулами (6), підставивши в них рівняння (1), розв'язані відносно напружень:

$$\begin{aligned} T_{11} &= D_{T1} (e_{11} + \nu_{31} e_{22} + (d_{11} + \nu_{31} d_{31})) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}; \\ T_{22} &= D_{T2} (e_{22} + \nu_{13} e_{11} + (d_{31} + \nu_{13} d_{11})) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}; \\ T_{12} &= \frac{2h}{s_{55}} e_{12} - \frac{hd_{33}}{s_{55}} \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}; \quad M_{12} = \frac{h^3}{12s_{55}} 2\chi_{12}; \\ M_{11} &= D_{M1} (\chi_{11} + \nu_{31} \chi_{22}); \quad M_{22} = D_{M2} (\chi_{22} + \nu_{13} \chi_{11}); \\ \hat{D}_1 &= d_{11} T_{11} + d_{13} T_{22} - \varepsilon_{11} \eta_1^2 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}; \\ \hat{D}_2 &= d_{53} T_{12} - \varepsilon_{11} \eta_1^2 \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}; \quad \hat{D}_z = -\varepsilon_{33} \eta_2^2 \Phi, \end{aligned} \quad (11)$$

де позначено:

$$\begin{aligned} D_{T1} &= \frac{h}{s_{11}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; & D_{T2} &= \frac{h}{s_{33}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; \\ D_{M1} &= \frac{h^3}{12s_{11}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; & D_{M2} &= \frac{h^3}{12s_{33}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; \\ \eta_1^2 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz; & \eta_2^2 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [f'(z)]^2 dz. \end{aligned}$$

Перерізуючі сили знаходимо після інтегрування (9) і (10) з урахуванням (11):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2h}{s_{55}\eta_1^2} e_{1z} + \frac{2d_{53}}{s_{55}\eta_1^2} \Phi_0; \\ Q_2 &= \frac{2h}{s_{55}\eta_2^2} e_{2z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи (12) і (11) в систему (7) і замінюючи  $e_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  та  $e_j$  через переміщення та кути повороту, отримуємо рівняння руху, в яких визначальними функціями будуть переміщення, кути повороту та електростатичний потенціал. В ці рівняння увійдуть невизначені множники  $\eta_1^2$  і  $\eta_2^2$ . Є два підходи при виборі величин коригуючих множників, аналогічні тим підходам, що обговорювались в [5]: або теоретично обґрунтовано задаючись видом функції  $f(z)$ , або шляхом порівняння дисперсійних співвідношень, отриманих за прикладною та тривимірною теоріями.

### 3 ВИСНОВОК

На основі варіаційного принципу отримано систему диференціальних рівнянь, що описує поведінку поляризованої по меридіану п'єзокерамічної оболонки під дією заданих сил і зарядів, замкнену фізичними співвідношеннями. Для забезпечення єдиності розв'язку сформульовано та записано граничні умови.

### REFERENCES

- [1] Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. *Piezoelectric and piezomagnetic materials and their functions in transducers*. In: Mason W.P. (Ed.) *Physical Acoustics*, IA. Academic, New York, 1964.
- [2] Pelech B.L. *Theory of shells with shear rigidity*. Naukova Dumka, Kyiv, 1973. (in Russian)
- [3] Reissner E. *On variational theorem in elasticity*. J. Math. Phys. 1950, **29** (2), 52–56.
- [4] Shulga N.A. *Thermoelasticity equilibrium equation of multilayer shallow shells with shear rigidity*. Resistance of materials and theory of structures 1982, **38**, 108–112. (in Russian)
- [5] Volmyr A.S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Nauka, Moscow, 1972. (in Russian)

Надійшло 13.03.2014

---

Lastivka I.O. *Variational inference of differential equations of vibrations of piezoceramic shell with meridional polarization*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 68–72.

A construction of one embodiment of refined theory of piezoceramic shell with meridional polarization was proposed, a system of differential equations of membrane vibrations and the boundary conditions using the variational Reissner principle was obtained.

*Key words and phrases:* piezoceramic shell, meridional polarization, differential equations of vibrations, boundary conditions, variational principle.

Ластивка І.А. *Варіаційний вивод дифференціальних рівнянь коливань п'єзокерамічної оболонки при меридіональній поляризації* // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 68–72.

Предложено построение одного из вариантов уточненной теории пьезокерамической оболочки при ее меридиональной поляризации, получена система дифференциальных уравнений колебаний оболочки и граничные условия с использованием вариационного принципа Рейсснера.

*Ключевые слова и фразы:* пьезокерамическая оболочка, меридиональная поляризация, дифференциальные уравнения колебаний, граничные условия, вариационный принцип.