

*Н.О. Бабкова, І.О. Ластівка, д.т.н.
(Національний авіаційний університет, Україна)*

Математичне моделювання та числове дослідження нестационарних коливань кільцевих п'єзокерамічних пластин

Проведено дослідження осесиметричних електромеханічних коливань поляризованої по товщині тонкої п'єзокерамічної кільцевої пластини при гармонічних механічних навантаженнях. За допомогою числового методу проведено розрахунок електрорушійної сили п'єзокерамічних пластин, виготовлених з трьох різних типів п'єзокераміки.

П'єзокерамічні елементи пластинчастої форми мають широке застосування в ультразвуковому та акустичному обладнанні, в енергетиці, у машинобудуванні, медицині, в геофізиці, в будівництві та інших галузях виробництва. П'єзокерамічні датчики перетворюють механічну енергію на електричний сигнал, тобто їх робота ґрунтується на прямому п'єзоєфекті.

Дослідження тонких перетворювачів доцільно проводити в наближенні плоского напруженого стану, враховуючи лінійний розподіл електричного потенціалу по товщині. На основі запропонованого наближення в [1] досліджувались нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних збуреннях. При механічному навантаженні п'єзоелектричні перетворювачі працюють в режимі прямого п'єзоєфекту і є джерелом електричного струму. Електрична напруга на розімкнутих електродах п'єзоелектричного елемента буде електрорушійною силою (ЕРС) джерела струму. Визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при гармонічних навантаженнях проводились у роботах [2, 3]. Підхід до визначення ЕРС для пластинчастих елементів в нестационарному випадку запропоновано в [4] за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра.

Метою даної роботи було математичне моделювання динамічного осесиметричного електромеханічного стану поляризованих по товщині п'єзокерамічних тонких кільцевих пластин при механічному збуренні та обчислення ЕРС за допомогою числового моделювання.

Для дослідження осесиметричних електромеханічних коливань поляризованої по товщині тонкої п'єзокерамічної кільцевої пластини товщиною h , з внутрішнім R_0 та зовнішнім R_1 радіусами запишемо основні залежності.

Колівання тіла в загальному випадку описуються рівнянням руху [5]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Координата r змінюється в межах $R_0 \leq r \leq R_1$.

Механічні напруження задовольняють співвідношенням:

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right),$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z \right), \quad (2)$$

де s_{11}^E , s_{12}^E – обернені до модулів пружності матеріальні константи при сталій напруженості електричного поля, $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$ – аналог модуля Пуассона в оберненому законі Гука.

Рівняння коливань (1) в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де $a^2 = \left[(1-\nu_E^2)s_{11}^E \rho \right]^{-1}$ – швидкість поширення електропружної хвилі.

$$\text{З (2) маємо } \sigma_r + \sigma_{\theta} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - 2d_{31}E_z \right). \quad (4)$$

Електрична індукція в загальному випадку визначається за формулою

$$D_z = d_{13}(\sigma_r + \sigma_{\theta}) + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \quad (5)$$

Напруженість електричного поля $E_z = -\partial\phi/\partial z$.

Для тонких пластин вважаємо [5], що електричний потенціал всередині тіла змінюється по лінійному закону

$$\phi = \frac{U(t)}{h} z,$$

звідки

$$E_z = -\frac{U(t)}{h}. \quad (6)$$

Тут $U(t)$ – шукана електрорушійна сила перетворювача, яка визначається з умови рівності нулеві струму при розімкнутих електродах

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\iint_{A^{\pm}} \frac{dD_z}{dt} dA^{\pm} = 0, \quad (7)$$

де A^{\pm} – поверхні пластини, покрита електродами, Q – заряд на електродах.

З (7) випливає

$$Q = -\iint_{A^{\pm}} D_z dA^{\pm} = \text{const}. \quad (8)$$

З (5), (4), (6) при відсутності навантажень вздовж осі z маємо

$$D_z = \frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h}. \quad (9)$$

Якщо плоскі поверхні пластини повністю покриті електродами, то $A^{\pm} = A_{nn} = \pi(R_1^2 - R_0^2)$.

Проінтегрувавши (8) з урахуванням (9), отримуємо вираз для знаходження електрорушійної сили

$$U(t) = \frac{\pi h k_p^2}{d_{13} A_{\text{пл}} (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)).$$

Тут $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2) \varepsilon_{33}^T}$ – планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Перетворимо вираз для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{A_{\text{пл}}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) \right).$$

Збурення в пластині виникають шляхом прикладання механічного тиску до бокових поверхонь. При цьому друга бокова поверхня може бути жорстко защемлена або вільна від навантажень:

$$\sigma_r(R_i, t) = P_i(t) \text{ або } u_r(R_i, t) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини і їх швидкості

$$u_r(r, t = 0) = u^0(r), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, t = 0) = v^1(r). \quad (11)$$

Запишемо у безрозмірних величинах $\bar{r}R = r$, $\bar{u}_r R = u_r$, $\bar{t}R = at$ рівняння коливань (3)

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2} \quad (12)$$

та рівняння для напружень (2)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma_r s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

де електрорушійна сила знаходиться із співвідношення

$$\bar{U}(t) = \frac{d_{13}}{h} U(t) = \frac{\pi k_p^2}{A_{\text{пл}} (1 - k_p^2)} (\bar{R}_1 \bar{u}_r(\bar{R}_1, t) - \bar{R}_0 \bar{u}_r(\bar{R}_0, t)).$$

Для чисельного розв'язання задачі (12), (13) при початкових умовах (11) і граничних умовах (10) вводиться розбиття відрізка $R_0 < r < R_1$:

$$\Omega = \{r_i = R_0 + (i - 0.5)\Delta_r \mid \Delta_r = (R_1 - R_0)/(n - 1), i = 0, \dots, n\}.$$

При заміні похідних по просторовій координаті центрально-різницевиими виразами рівняння руху (12) перетвориться до виду

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2r_i \Delta_r} - \frac{u_i}{r_i^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

У випадку заданих на границях напружень $\sigma_r(R_0, t) = P_0(t)$ та $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t)$ значення $u_0(t)$ і $u_n(t)$ можна визначити, використовуючи наступні апроксимації напружень:

$$\sigma_{r,0} = \frac{u_1 - u_0}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_0 + u_1)}{2R_0} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{\text{пл}}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_0(t),$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_n + u_{n-1})}{2R_1} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{\text{пл}}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_1(t).$$

Звідси отримуємо систему для знаходження значень $u_0(t)$ і $u_n(t)$ при відомих значеннях переміщень у внутрішніх точках.

Електрорушійна сила знаходиться за наступним співвідношенням:

$$U(t) = \frac{A_1}{(1 + \nu_E)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)).$$

Проведемо аналіз коливань кільцевої пластини під дією механічного тиску при різних частотах. Товщина пластини $h = 2\text{мм}$, зовнішній радіус $R_1 = 5\text{см}$, внутрішній $R_0 = 3\text{см}$. Матеріали пластини – п'єзокераміка.

ЦТС-19: $s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$, $c_{12}^E = -6,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$,
 $d_{13} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{Н}$, $\epsilon_{33}^S = 1360 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$, $\rho = 7740 \text{ кг} / \text{м}^3$

PZT-4: $s_{11}^E = 12,3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$, $c_{12}^E = -7,78 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$,
 $d_{13} = -123 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{Н}$, $\epsilon_{33}^S = 1300 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$, $\rho = 7500 \text{ кг} / \text{м}^3$

PXE-5: $s_{11}^E = 15,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$, $c_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}$,
 $d_{13} = -178 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{Н}$, $\epsilon_{33}^S = 1750 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$, $\rho = 7600 \text{ кг} / \text{м}^3$

Розглянемо реакцію пластини на миттєво прикладене при $t = 0$ збурення $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t) = P \sin \omega t$, $\sigma_r(R_0, t) = 0$.

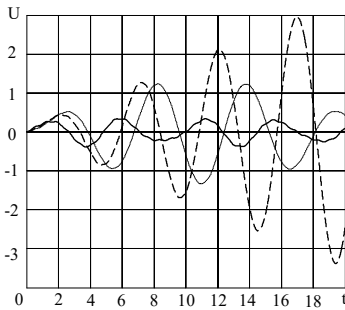


Рис. 1. PZT-4

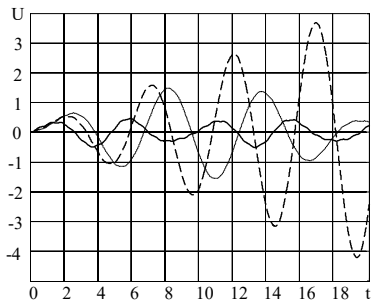


Рис. 2. PXE-5

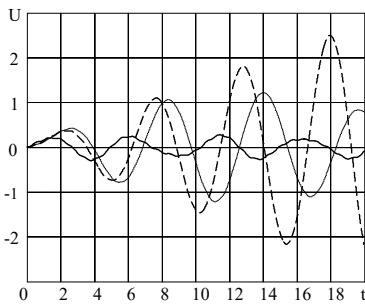


Рис. 3. ЦТС-19

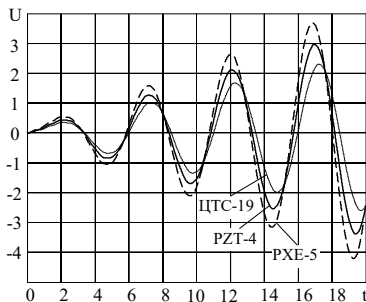


Рис. 4

На рис. 1-3 наведено криві зміни ЕРС пластин з матеріалів, які досліджувались, при різних значеннях частоти збурення ω . До першого резонансу $\omega = 1,29$, близько нього $\omega = 1,2$ та після $\omega = 1,4$.

На рис. 4 криві відображають значення електрорушійної сили поблизу основного резонансу для трьох різних матеріалів п'єзокераміки, які досліджувались. Бачимо, що максимальне значення ЕРС виникло в п'єзокерамічній пластині з матеріалу РХЕ-5, а найменше – з ЦТС-19, ці значення відрізняються майже в 1,4 рази.

Висновки. Проведені дослідження дозволяють визначити електрорушійну силу для кільцевих п'єзокерамічних пластин при нестационарному механічному тиску з різними частотами навантаження. Для матеріалів, на яких проводились дослідження, найбільше значення ЕРС виникло в пластині із матеріалу РХЕ-5, а найменше – ЦТС-19: значення поблизу першого резонансу відрізняються майже в 1,4 рази, а поблизу другого – в 2 рази. У проміжках між резонансами значення ЕРС майже однакові.

Список літератури

1. Шульга Н.А., Григорьева Л. О., Ластивка И.О., Бабкова Н.О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин // Теоретич. и прикладная механика, 2011. – №2(48), с. 98-104.
2. Болкисев А.М., Рудницкий С.И., Шульга Н.А. Электроакустическая чувствительность пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – 25, №12. – С. 68–73.
3. Шульга Н.А., Рудницкий С.И., Качаенко О.Б. Электроакустическая чувствительность пьезокерамической цилиндрической оболочки в акустической среде // Прикл. механика. – 1989. – 25, №2. – С. 44–48.
4. Шульга М.О. Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях // Доп. НАН України. – 2009. – №1 – С.70–74.
5. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К. : Наукова думка, 2008. – 270 с.