

*І.О. Ластівка, д.т.н., А.С. Богатирчук, к.ф.-м.н., І.П. Кудзіновська, к.т.н.
(Національний авіаційний університет)*

Розрахунок напружено-деформованого стану елементів конструкцій в літакобудуванні

Проведено математичне моделювання та розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану композитних анізотропних оболонок, що знаходяться під дією деякої внутрішньої сили. Отримано числові результати для деяких типорозмірів оболонок на основі розробленої програми на алгоритмічній мові C++ із використанням методу скінченних елементів.

Композитні оболонки різноманітної форми у якості елементів конструкцій набувають все більшого застосування в авіаційній галузі, оскільки, у порівнянні з металами, композитні матеріали мають високу питому міцність і модуль пружності при суттєво меншій густині. Широке впровадження оболонок із композитних матеріалів потребує дослідження їх характеристик, зокрема, напружено-деформованого стану при різних динамічних навантаженнях, а також розробки розрахункових моделей і методів, спроможних враховувати особливості поведінки композитних конструктивних елементів.

Розглянемо напружений стан оболонки довільної форми із композитного матеріалу. Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску деякої інтенсивності. Для такого класу задач використовується модель оболонок типу Тимошенка. Розглянемо серединну поверхню оболонки в системі криволінійних ортогональних координат (α, β) . Скористаємось варіаційним рівнянням Лагранжа [1]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \\ & - \int_{\Gamma_1} \left(T_{tt}^0 \delta u_t + T_{ts}^0 \delta u_s + T_{tt}^0 \delta w + G_{tt}^0 \delta \gamma_t + G_{ts}^0 \delta \gamma_s \right) d\Gamma = 0, \quad (1) \\ & \delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23}, \end{aligned}$$

де $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ – узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, V_0 – питома енергія деформації.

Переміщення серединної поверхні оболонки виражаються залежностями

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta), \\ U_2 &= u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad (2) \\ W &= w(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд [1]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{v}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \beta} + k_\beta w, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w, \\
\varepsilon_{13} &= \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v), \\
\varepsilon_{23} &= \gamma_2 + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \delta(-k_\beta v + k_{\beta\alpha} v), \\
\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \frac{\gamma_2}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \beta}, \\
2\chi_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки

$$\begin{aligned}
T_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \\
T_2 &= B_{22}\varepsilon_2 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{23}\varepsilon_{22}, \\
S_{12} &= B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12}, \\
G_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \\
G_2 &= D_{22}\chi_2 + D_{22}\chi_2 + D_{23}2\chi_{22}, \\
H_{12} &= D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \\
Q_1 &= K_1\varepsilon_{13}, \quad Q_2 = K_2\varepsilon_{23}.
\end{aligned} \tag{4}$$

У формулах (4) B_{ij} , D_{ij} , K_i – узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I(u, v, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0. \tag{5}$$

Для розв'язання задачі застосуємо метод скінченних елементів: розрахункова область розбиваємо на ізопараметричні квадратичні елементи, що мають по вісім вузлів [2]; кожен елемент віднесемо до локальної системи координат (x_1, x_2) , при цьому $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$. Перетворення від локальних координат до глобальних здійснюємо за допомогою функцій форми

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{1}{4}(1+x_{10})(1+x_{20})(x_{10}+x_{20}-1), \quad (i=1, 3, 5, 7); \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1-x_1^2)(1+x_{20}), \quad (i=2, 6); \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1+x_{10})(1-x_2^2), \quad (i=4, 8)\end{aligned}\tag{6}$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \varphi_i.\tag{7}$$

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \varphi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \varphi_i.\tag{8}$$

Тут u_1^i, \dots, γ_2^i – шукані переміщення в i -му вузлі.

Після підстановки співвідношень (6)–(8) у (5) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно шуканих переміщень. Розбиття області оболонки на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь і її розв’язання виконуються на комп’ютері за допомогою програми, складеної на мові C++ [3].

Застосування у даній роботі програмного продукту, складеного на алгоритмічній мові C++, дає можливість з урахуванням граничних умов визначати переміщення, деформації, механічні напруження, а також, у разі послаблення оболонок круговими отворами [4, 5], обчислювати коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль і моментів на контурах отворів.

Запропонований підхід може бути використаний при проєктуванні відповідних елементів конструкцій у літакобудуванні.

Список літератури

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т. 1. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами / О.М. Гузь, І.С. Чернишенко, В.М. Чехов та ін. – К. : Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. O. Zenkevich, K. Morgan Finite elements and approximation. New York: «John Wiley & Sons», 1983. – 328 p.
3. Глинський Я.М. C++ і C++ Builder / Я.М. Глинський, В.С. Анохін, В.А. Ряжська. – Львів: Деол, 2003. – 192 с.
4. Ластівка І.О. Розрахунок концентрації напружень у циліндричних композитних оболонках з отворами / І.О. Ластівка, А.С. Богатирчук // Міжнародний науковий журнал «Інтернаука». – 2020 р. – №10 (90). – С. 38–41.
5. Ластівка І.О. До розрахунку напружено-деформованого стану композитних оболонок з отворами // І.О. Ластівка, А.С. Богатирчук, І.П. Кудзіновська // Міжнародний науковий журнал «Інтернаука». – 2019 р. – №9 (71). – С. 46–50.