

**А.С. Савченко**, д.т.н.,  
**О.В. Толстікова**, к.т.н.,  
**Л.П. Клобукова**

*Національний авіаційний університет, Київ*

## **СПЕКТРАЛЬНА ЕФЕКТИВНІСТЬ СИГНАЛІВ БЕЗПРОВОДОВИХ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ**

В останні роки безпроводові мережі (БПМ) передачі даних стали одним із головних напрямків розвитку мережної індустрії. Безпроводові локальні мережі можна розглядати як розширення безпроводової мережі з безпроводовим зв'язком "останньої милі" для підключення великої кількості мобільних терміналів. Перевагою безпроводових локальних мереж є порівняльна простота реалізації: не потрібні кабелі, топологія БПМ може динамічно змінюватися разом із підключенням, переміщенням і відключенням мобільних користувачів без особливих втрат часу.

Успіх безпроводових мереж значною мірою залежить від розробки мережних продуктів для множинного доступу до безпроводового середовища та відповідних стандартів. Одним із таких стандартів є протокол IEEE 802.11, що стосується специфікацій на рівнях *MAC* і *PHY* для безпроводових мереж.

Надзвичайно актуальним є впровадження сучасних безпроводових технологій у промисловому та сільськогосподарському виробництві. При впровадженні безпроводових технологій у цих галузях слід враховувати специфіку побудови таких систем та особливі вимоги, визначені стандартами, а саме:

- традиційні мережі виробничого призначення підтримують три рівні моделі *ISO-OSI*: фізичний, передачі даних (канальний) та прикладний. При цьому для таких мереж немає єдиного стандарту: різні мережі працюють за своїми протоколами верхнього рівня;

- пред'являються спеціальні вимоги до надійності передачі на фізичному і каналному рівнях моделі *OSI*;

- при введенні нового комплексу послуг (голос, відео, дані) пріоритет з якості обслуговування (*QoS*), як правило, віддається даним.

При виборі безпроводової, в тому числі, сенсорної технології для мереж виробничого застосування необхідно також враховувати:

- інтенсивність обміну даними на польовому рівні;
- можливість використання автономних джерел електроживлення різної ємності;
- топологію побудови радіомережі. Необхідно забезпечити надмірність зв'язків, також можливість самоорганізації мережі. Це підвищить надійність радіомережі, а також спростить введення в дію кінцевих об'єктів (безпроводових датчиків та виконавчих механізмів).

Ідея відмови від проводів є дуже привабливою. Можуть бути вирішені проблеми, пов'язані з заміною частини проведення вже впроваджених промислових мереж. Мережні вузли та кабелі можуть повільно руйнуватися, особливо в агресивних хімічних середовищах. Відновлення проводової мережної інфраструктури вельми трудомістке і потребує великих фінансових витрат.

Перераховані чинники технічного та економічного характеру, безумовно, важливі, але звернемо увагу, що основні стандарти безпроводових мереж, перш за все, стосуються специфікацій фізичного рівня та у деякій мірі підрівнів *MAC* і *PHY* рівня передачі даних (канального рівня). Тому при розробці та проектуванні БПМ основна увага приділяється вдосконаленню теоретичних методів синтезу та аналізу радіосигналів як матеріальних носіїв інформації, що переноситься у вільному середовищі. У статті, що пропонується до розгляду, зроблена спроба торкнутися найбільш актуальних, на наш погляд, проблем, які неминуче виникають у безпроводових мережах: спектральної ефективності сигналів, завадозахищеності та електромагнітної сумісності.

Практично в усіх роботах, присвячених дослідженню сигналів безпроводових мереж обміну даними, енергетична та спектральна ефективність сигналу протиставляються одне одному. При цьому у рекомендаціях Міжнародної спілки електрозв'язку [1] чітко вказується, що порівнювати коефіцієнт використання спектру, ефективність використання спектру та відносну спектральну ефективність для різних радіосистем просто марно. Крім того, відмічається, що, хоча спектральна ефективність являється важливим чинником, оскільки від неї залежить кількість

радіослужб, які можуть працювати водночас, вона не може бути єдиним чинником, який підлягає розгляду. Треба враховувати також вартість, доступність та сумісність обладнання, надійність та інші техніко-експлуатаційні характеристики.

Твердження, що довжина сигналу та ширина його спектру пов'язані зворотно пропорційною залежністю, впливає безпосередньо з властивостей перетворення Фур'є. Воно є уповні очевидним. Менш очевидними є самі поняття довжини та ширини спектру сигналу. В інженерній практиці застосовуються різні визначення, вибір яких залежить, перш за все, від швидкості убування спектральної щільності [5]. Загальноприйняте визначення енергетичного критерію базується на ширині смуги частот, у якій міститься певна доля повної енергії сигналу, та оцінці протяжності залишків спектру поза даною смугою. Нарешті, основоположне значення має розподіл енергії сигналу по часу та частоті.

При підсумовуванні ряду Фур'є, яким описується *OFDM*-сигнал, не треба забувати, що ряд Фур'є неперервної функції, строго кажучи, не зобов'язаний збігатися. Значить, функцію *OFDM*-сигналу неможливо отримати безпосереднім підсумовуванням ряду Фур'є. Однак цю проблему можна розв'язати методом Фейєра підсумовування середніх арифметичних [2]. Використовуючи метод Фейєра, можна, по-перше, знайти частинні суми довільної сигнальної функції, а по-друге (і це значно важливіше), аргументовано провести порівняльний аналіз різних сигнальних функцій по критеріям спектральної та енергетичної ефективності.

Розглянемо деяку  $2\pi$ -періодичну неперервну функцію  $f_p(t)$ , яка може бути єдиним образом розкладена у ряд Фур'є:

$$f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (1)$$

Нехай існує послідовність частинних сум  $\Sigma_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ,  $K < \infty$ ) ряду Фур'є функції  $f_p(t)$ :

$$\Sigma_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^k (a_m \cos mt + b_m \sin mt).$$

Розрахуємо середньоарифметичне частинних сум  $\Sigma_k$  :

$$\Sigma_K(x) = \frac{\Sigma_0(x) + \Sigma_1(x) + \dots + \Sigma_{K-1}(x)}{K}. \quad (2)$$

Вирази виду (2) для довільного  $K$  називають сумами Фейєра функції  $f_p(t)$ . Згідно з теоремою Фейєра суми Фейєра  $2\pi$ -періодичної неперервної функції  $f_p(t)$  збігаються до  $f_p(t)$  рівномірно на всій числовій вісі.

Теорему Фейєра можна розглядати як посилення теореми Вейєрштраса про апроксимацію неперервних функцій тригонометричними поліномами. Теоремою Вейєрштраса встановлюється лише факт того, що будь-яка неперервна функція є рівномірний ліміт деякої послідовності тригонометричних поліномів, а теорема Фейєра визначає уповні конкретну послідовність, яка має цю властивість – послідовність сум Фейєра (2).

Згідно з теоремою Фейєра у точці неперервності  $t_0$  функції  $f_p(t)$  її ряд Фур'є, який підсумовується по Фейєру, рівномірно збігається до  $f_p(t_0)$ . Якщо ж у точці  $t_g$  існує розрив першого роду,

то ряд Фур'є збігається до  $f_p(t_g) = \frac{f_p(t_g + \varepsilon) + f_p(t_g - \varepsilon)}{2}$ , де  $\varepsilon$  – мала околиця точки  $t_g$ .

Оскільки при цьому рівномірна збіжність ряду Фур'є вже не гарантується, результат Фейєра був посилений Лебегом, який показав, що для будь-якої функції, що підсумовується, її ряд Фур'є збігається до  $f_p(t)$  майже усюди.

Тут треба відмітити, що число розривів OFDM-сигналу як  $2\pi$ -періодичної функції  $f_p(t)$  завжди є скінченим, тому звісна "множина міри нуль", із-за якої й виникає додаток "майже всюди", в інженерній практиці не зустрічається.

Що ж стосується практичного використання результатів теореми Фейєра, представимо частинну суму  $\Sigma_k$  у вигляді інтегралу:

$$\Sigma_k(t) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin k \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} \right)^2 f(t + \tau) d\tau, \quad (3)$$

який називається інтегралом Фейєра. Ядро цього інтегралу:

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{2\pi k} \left( \frac{\sin k \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} \right)^2,$$

(4)

відповідно, називається ядром Фейєра.

З урахуванням (4) вираз (3) запишемо у наступному вигляді:

$$\Sigma_k(t) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin k \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} \right)^2 f(t + \tau) d\tau, \quad (5)$$

що, по суті, представляє собою інтеграл згортки досліджуваної функції з ядром.

Наведені результати використані для дослідження *OFDM*-сигналу. У роботі [3] розраховані функції розкладання *OFDM*-сигналу з п'ятьма піднесучими в ряд Фур'є, який обмежений п'ятьма членами. Умова ортогональності не дотримується: бічні пелюстки парціальних спектрів перетинаються у точках, де їх значення є довільними та не дорівнюють нулю.

Для отримання порівняльних результатів підсумовування за методом середньоарифметичних досліджено ядро Фейєра. За формулою (4) розрахований графік ядра Фейєра для випадку  $k = 1$ . Графік зображений на рис. 1. Можна бачити, що отримана функція у деякій мірі нагадує графік гаусівського або косинус квадратного імпульсу. Параметри реального ядра Фейєра узгоджуються з параметрами вибраного *OFDM*-сигналу. Графік відповідного ядра зображений на рис. 2.

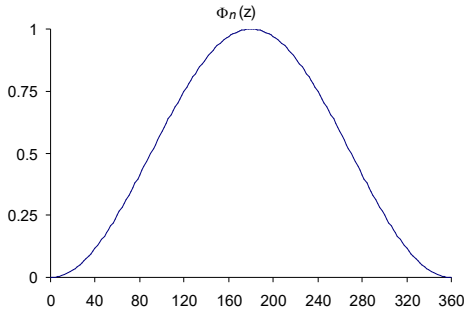


Рис. 1. Графік ядра Фейєра;  $k = 1$

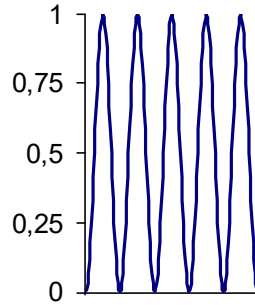


Рис. 2. Графік ядра Фейєра;  $k = 5$

З використанням виразу (5) було знов розраховано графіки розкладання *OFDM*-сигналу з п'ятьма неортогональними піднесучими (рис. 3) та графік сумарного сигналу зі згладжуванням по Фейєру (рис. 4). З рис. 3 та рис. 4 видно, що при використанні згладжувального ядра Фейєра рівень бічних пелюсток піднесучих значно знижується. Відповідно, відновлений сумарний сигнал набуває в околиці плоскої частини імпульсу форми, більш близької до прямокутної. Фронт та зріз імпульсу втрачають коливальний характер, стають монотонними, при цьому, що уповні логічно, сумарний сигнал на низькому рівні бічних пелюсток розширяється.

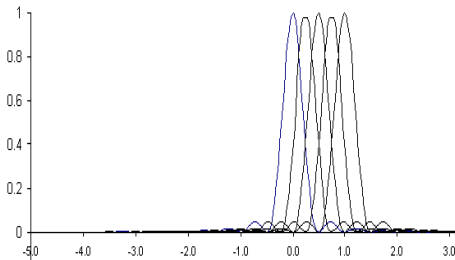


Рис. 3. Графіки п'яти піднесучих *OFDM*-сигналу зі згладжувальним ядром Фейєра

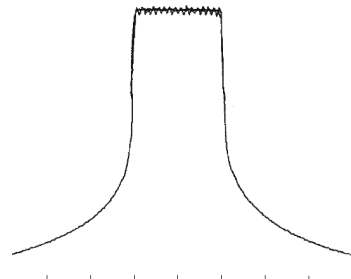


Рис. 4. Графік сумарного сигналу зі згладжувальним ядром Фейєра

Таким чином, спектральна ефективність сигналу в цілому покращується. За критерієм оптимального частотно-часового розподілу енергії сигналу суперечностей між енергетичною та спектральною ефективністю не спостерігається.

## ВИСНОВКИ

Успіх безпроводових мереж супроводжується новими викликами, у першу чергу, об'єктивною обмеженістю частотного ресурсу. У зв'язку з цим виникає проблема забезпечення максимально доступної спектральної ефективності сигналів, які переносять інформацію у каналах обміну. Показано, що при розкладанні довільного сигналу у ряд Фур'є відновлення сигналу можна достатньо успішно забезпечити шляхом застосування методу Фейера підсумовування середніх арифметичних частинних сум ряду.

У роботі [3] доведено, що ядро Фейера може служити інструментом згладжування форми сигналу. Відповідно, забезпечується потрібна спектральна ефективність сигналу, і, як наслідок, найбільш повне використання частотного ресурсу (який завжди обмежений, особливо у безпроводових мережах). Більш того, завдяки використанню згладжуючих ядер Фейера у певній мірі усуваються суперечності між енергетичною та спектральною ефективністю сигналів.

## ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. *Recommendation ITU-R SM.1046-3 (09/2017). Definition of spectrum use and efficiency of a radio system SM Series Spectrum management. Geneva, ITU, 2017. – 55 p.*

2. *Kohlenbach U. Quantitative results on Fejer monotone sequences // Ulrich Kohlenbach, Laurentiu Leustean, Adriana Nicolae - Communications in Contemporary Mathematics, 2018. - 39 p. Електронний ресурс. Режим доступу: DOI: 10.1142/S0219199717500158*

3. *А.С. Савченко, О.В. Толстікова, Л.П. Клобукова. Критерії вибору спектрально-ефективних сигналів у безпроводових інформаційних мережах. Наукоємні технології. – К.: НАУ, 2022. – Вип. №4 (56). – С. 268-273.*