УДК 519.175.4 + 681.142

А.Д. Глухов, канд. физ.-мат. наук
Национальный авиационный университет Украины
(Украина, 03058, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,
e-mail: glukhov07@gmail.com)

Квазислучайные графы и структурная устойчивость сложных дискретных систем

Рассмотрена структурная устойчивость сложных дискретных систем при случайных отказах. С помощью аппарата квазислучайных графов найдены оценки связности системы при заданном числе отказов. Исследована эволюция связности систем, структура которых задана экспандерами.

Розглянуто структурну стійкість складних дискретних систем при випадкових відмовах. За допомогою апарату квазівипадкових графів знайдено оцінки зв'язності системи при заданому числі відмов. Досліджено еволюцію зв'язності систем, структура яких задана експандерами.

Ключевые слова: сложная дискретная система, експандер, квазислучайный граф.

Постановка задачи и основные определения. Предположим, что структура системы представлена неориентированным графом, каждое ребро которого (связь между элементами системы) может разрываться (выходить из строя) с заданной вероятностью. Структурную устойчивость системы будем оценивать вероятностью того, что данный граф остается связным после удаления заданного числа его ребер. Важной числовой характеристикой структурной устойчивости системы также есть наибольшее число удаленных ребер, при котором граф еще остается связным с достаточно большой вероятностью. Для формализации поставленной задачи будет применен аппарат случайных графов специального вида — квазислучайные графы [1, 2].

Пусть G — обыкновенный неориентированный граф с множеством G^0 вершин и множеством G^1 ребер, $|G^0| = n, |G^1| = m$. Квазислучайным графом на основе графа G называется граф $G(p)$ с множеством $(G(p))^0 = G^0$ вершин и со случайным множеством $U = (G(p))^1$ ребер, для которого выполнены условия $\mathrm{Prob}(u \in U) = p$, если $u \in G^1$ и $\mathrm{Prob}(u \in U) = 0$, если $u \notin G^1$.

Пусть H — некоторый подграф G графа, а $G[A]$ — порожденный подграф на множестве вершин $A \subseteq G^0$. Степенью подграфа H будем называть число $\rho(H)$, которое определено в виде $\rho(H) = \{(x, y) : (x, y) \in G^1, x \in H^0, y \notin H^0\}$. Очевидно, что $\rho(H) = \rho(G[H^0])$.

Связностной функцией графа G будем называть величину $g(k) = \min\{\rho(H) : H \subseteq G, |H^0| = k\}$, где $1 \le k \le n/2$. Степенью графа будем называть максимальную степень его вершины. Обозначим через $\sigma_k(G)$ число минимальных по включению разрезов связного графа G.

Будем рассматривать эволюцию [3] квазислучайных графов при возрастании числа их вершин, т.е. при $n \to \infty$. Величину $\lambda = mq$, $q = 1 - p$, назовем декрементом квазислучайного графа $G(p)$. Очевидно, что декремент — это математическое ожидание величины $m - |U|$, т.е. числа удаленных ребер. В общем случае декремент рассматривается как некоторая функция от числа ребер или вершин графа: $\lambda = \lambda(m)$ или $\lambda = \lambda(n)$. Наибольшее значение декремента графа $G(p)$, при котором этот граф будет связным с вероятностью $1 - o(1)$ при $n \to \infty$, назовем пороговым декрементом графа G. В дальнейшем запись $\omega = o(1)$ будет означать, что $\omega = \omega(m)$ есть произвольная функция, такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} \omega(m) = 0$.

Циклы, разрезы и декремент квазислучайных графов некоторых классов. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 [1]**.** Для вероятности P связности графа $G(p)$ на основе связного графа G справедливо следующее неравенство:

$$P \ge 1 - \sum_{1 \le k \le n/2} \sigma_k(G)\, q^k .$$

Каждому ребру $u \in G^1$ связного графа G поставим в соответствие некоторый цикл $Z(u)$ наименьшей длины, содержащий данное ребро u, а длину такого цикла назовем циклическим индексом данного ребра. Наибольший циклический индекс ребер графа будем называть циклическим индексом графа G и обозначим $z(G)$. Очевидно, что равенство $z(G) = s$ означает, что граф G есть объединением циклов длины не больше s.

Пусть $d(G)$ — диаметр графа G, тогда верна следующая лемма.

Лемма 2. Если G — трехсвязный граф, то $z(G) \le 2d(G) + 1$.

Доказательство следует из результатов работы [4].

Лемма 3. Если G — трехсвязный граф, $z(G) = s$, то справедлива оценка $\sigma_k(G) \le m^{\lfloor k/2 \rfloor} s^{\lceil k/2 \rceil}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : u \to Z(u)$, которое ставит каждому ребру графа G некоторый минимальный цикл, содержащий это ребро. Множество Ψ всех таких циклов будем называть стандартным множеством минимальных циклов графа G. Пусть W — некоторый минимальный k-разрез. Рассмотрим два случая.

1. Пусть число k — четное. Поскольку разрез W имеет в каждом цикле множества Ψ четное число общих ребер, то, очевидно, есть не больше $k/2$ циклов множества Ψ, которые имеют непустое пересечение с W. Таким образом, существует не больше чем m возможностей выбрать каждое из $k/2$ ребер разреза W и не больше чем s возможностей выбора остальных $k/2$ ребер. Отсюда следует оценка: $\sigma_k(G) \le m^{k/2} s^{k/2}$.

2. Пусть теперь число k — нечетное. Тогда легко показать, что существуют такие три ребра, $u_1, u_2, u_3 \in W$, что справедливы следующие условия: $f(u_1) = f(u_2) = Z_1$, $f(u_3) = Z_2 \ne Z_1$, $u_2 \in Z_2^1$. Поэтому существует не больше чем m возможностей выбрать ребро u_3 (а следовательно, и цикл Z_2), после чего есть не больше чем s возможностей выбора ребра $u_2 \in Z_2$ (а значит, и цикла Z_2) и не больше чем s возможностей выбора ребра $u_1 \in Z_1$.

Очевидно, что первые три ребра разреза W можно выбрать не больше чем ms^2 способами, а остальные $k-3$ ребра, как и в первом случае, можно выбрать не больше чем $m^{(k-3)/2} s^{(k-3)/2}$ способами. Отсюда следует оценка $\sigma_k(G) \le m^{(k-1)/2} s^{(k+1)/2}$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Из лемм 1—3 вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. Если G — трехсвязный граф, $z(G) = s$, то его пороговый декремент не меньше величины $\omega\sqrt{m/s}$, где $\omega = o(1)$.

Теорема 2. Если G — трехсвязный реберно-симметричный граф, то его пороговый декремент не меньше, чем $\omega\sqrt{m/\ln m}$, где $\omega = o(1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что талия графа G не превышает $a \ln m$ [5], где a — некоторая константа, а поскольку граф реберно-симметричный, то каждое его ребро принадлежит циклу длины не больше, чем $a \ln m$. Следовательно, $z(G) \le a \ln m$. Поэтому необходимое неравенство вытекает из теоремы 1.

Следующий результат для планарных графов описан в работе [6].

Теорема 3. Если G — трехсвязный планарный граф, то его пороговый декремент не меньше величины $\omega\sqrt{n}$, где $\omega = o(1)$.

Декремент квазислучайных графов на основе экспандеров. Экспандеры широко применяются в вычислительной технике, теории информации, теории кодирования и во многих других областях науки и техники [7]. В частности, значительный интерес вызывают сложные дискретные системы, структура которых основана на графах, являющихся экспандерами.

Граф G называется α-экспандером, если для некоторого $\alpha > 0$: $g(k) \ge \alpha k$, т.е. для каждого $H \subset G$, $|H^0| \le n/2$ справедливо неравенство $\rho(H) \ge \alpha |H^0|$.

Будем называть граф экспандером, если он является α-экспандером для некоторого $\alpha > 0$.

Теорема 4. Если G —трехсвязный экспандер, то его пороговый декремент не меньше, чем $\omega\sqrt{m/\ln n}$, где $\omega = o(1)$.

Доказательство. Если G — трехсвязный экспандер, то, как известно [5, 7], справедлива оценка $d(G) \le a \ln n$, где a — некоторая константа. Поэтому, принимая во внимание лемму 1, получаем неравенство $z(G) \le c \ln n$. Теперь доказательство леммы сразу следует из теоремы 1.

Рассмотрим экспандеры ограниченной степени s, где s — некоторая константа. Известно, что такие экспандеры существуют уже при $s \ge 3$ [5, 7]. В дальнейшем для оценки вероятности связности графа на основе экспандера степени s будем оценивать не число разрезов, а число $\xi_k(G)$ его связных k-подграфов.

Лемма 4. Если G — граф степени s, то $\xi_k(G) \le ns^{2k-2}$.

Доказательство. Построим следующее отображение множества его порожденных k-подграфов в множество k-деревьев. Для этого перенумеруем множество вершин данного графа числами $1, 2, \ldots, n$ и каждому порожденному k-подграфу H поставим в соответствие дерево T. Вначале выберем в подграфе H вершину с наименьшим номером. Далее, если уже построено текущее дерево T_j, $j < k$, то выберем вершину x_{j+1} с наименьшим номером, которая не принадлежит этому дереву, но которая соединена ребром u_j с одной из его вершин x_i. Если таких ребер несколько, то выберем среди них то, для которого число x_i наименьшее, и положим $T^0_{j+1} = T^0_j + \{x_{j+1}\}$, $T^1_{j+1} = T^1_j + \{(x_i, x_{j+1})\}$. Это отображение инъективно, так как $T^0 = H^0$, а порожденный подграф H полностью определяется множеством H^0 своих вершин.

Теперь оценим число k-деревьев графа. Выберем произвольную вершину графа и построим дерево с корнем в этой вершине. Каждое такое дерево можно построить как дерево поиска в глубину или DFS-дерево [5]. Легко видеть, что такое дерево является гомоморфным образом в графе G замкнутой цепи длины $2k-2$. Действительно, достаточно рассмотреть произвольное вложение дерева в сферу и тогда обход границы единственной клетки обеспечит необходимую замкнутую цепь данной длины. Но число всех замкнутых цепей графа G длины l, как известно, равно $Sp(A^l)$ [5, 8]. Принимая во внимание, что G — граф степени s, а следовательно, наибольшее собственное число матрицы A не превышает s [8], получаем неравенство $Sp(A^{2k-2}) < ns^{2k-2}$, из которого вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Если G — t-связный экспандер степени s (где s, t — константы), то его пороговый декремент не меньше величины $\omega(n)\, n^{1-1/t}$, где $\omega(n) = o(1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — экспандер степени s, а $G(p)$ — соответствующий квазислучайный граф, где $p=1-\omega(n)\,n^{-1/t}$, а $\omega=\omega(n)=$ $=o(1)$. Заметим, что $g(k)\geq \alpha k,\ g(k)\geq t, 1\leq k\leq n/2$.

Предположим, что граф $G(p)$ — несвязный. Тогда он имеет компоненту связности, порядок которой $k\leq n/2$.. Если H — такая компонента, то очевидно, что существует порожденный k-подграф $G[H^0]$, который также является компонентой связности, и $\rho(G[H^0])\geq g(k)$.

Для вероятности Q существования такой связной компоненты справедливы следующие неравенства:

$$Q\leq \sum_{1\leq k\leq n/2}\xi_k(G)\,q^{g(k)}<\sum_{1\leq k\leq n/2} ns^{2k-2}q^{g(k)}.$$

Представим последнюю сумму в виде $S=S_1+S_2$, где

$$S_1=\sum_{1\leq k\leq t/\alpha} ns^{2k-2}q^{g(k)},\ S_2=\sum_{t/\alpha<k\leq n/2} ns^{2k-2}q^{g(k)}.$$

Оценим каждую из этих сумм отдельно.

1. Поскольку $g(k)\geq 3$, для первой суммы находим следующую оценку:

$$S_1=\sum_{1\leq k\leq t/\alpha} ns^{2k-2}q^{g(k)}\leq \sum_{1\leq k\leq t/\alpha} ns^{2k-2}q^{t}=\sum_{1\leq k\leq t/\alpha} ns^{2k-2}\omega^t n^{-1}=\sum_{1\leq k\leq t/\alpha} s^{2k-2}\omega^t.$$

Отсюда сразу вытекает, что $S_1=o(1)$.

2. Для S_2 справедливы следующие неравенства:

$$S_2=\sum_{t/\alpha<k\leq n/2} ns^{2k-2}\omega^{\alpha k}n^{-\alpha k/t}<\sum_{t/\alpha<k\leq n/2} ns^{2k-2}\omega^{\alpha k}n^{-1}=\sum_{t/\alpha<k\leq n/2} s^{2k-2}\omega^{\alpha k},$$

или

$$S_2<\sum_{t/\alpha<k\leq n/2}(s\omega^{\alpha})^k.$$

Учитывая, что для достаточно больших значений n справедливо неравенство $s^2\omega^{\alpha}<1/2$, получаем следующую оценку: $S_2<2(s^2\omega^{\alpha})^{t/\alpha}=$ $=2s^{2t/\alpha}\omega^t=o(1)$.

Таким образом, теорема доказана.

Следующая теорема свидетельствует о том, что полученная выше оценка порогового декремента t-связного экспандера ограниченной степени является достаточно точной.

Теорема 6. Если G — t-связный регулярный степени t экспандер с декрементом $\beta(n)\, n^{1-1/t}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(n)=+\infty$, то граф $G(p)$, $p=1-\beta(n)\, n^{-1/t}$, содержит изолированные вершины, а следовательно, является несвязным с вероятностью $1-o(1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 6. Как известно [5], в графе G можно выбрать множество B $n/(d+1)$ попарно несмежных вершин. Рассмотрим теперь граф $G(p)$, $p=1-\beta(n)\, n^{-1/t}$, $\beta=\beta(n)$, и оценим вероятность P того, что, по крайней мере, одна из его вершин изолирована. Вероятность того, что данная вершина не является изолированной, составляет $1-q^t$. Учитывая тот факт, что все вершины из B попарно несмежны, получаем следующую оценку вероятности $Q(B)$ того, что все вершины из B являются неизолированными:

$$Q(B)=(1-q^t)^{n/(t+1)} < e^{-q^t n/(t+1)} = e^{-\beta^t/(t+1)} = o(1).$$

Поскольку $P\ge 1-Q$, получаем оценку $P\ge 1-o(1)$, что и требовалось доказать.

Выводы

Полученные оценки порогового декремента графов различных классов свидетельствуют о том, что для t-связных t-регулярных экспандеров G на n вершинах при величине декремента $\lambda(n)$ порядка $\lambda_t(n)=n^{1-1/t}$ происходит следующий фазовый переход: если $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n)/\lambda_t(n)=0$, то G будет связным с вероятностью $1-o(1)$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n)/\lambda_t(n)=\infty$, то G будет несвязным с вероятностью $1-o(1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глухов О.Д., Коростіль Ю.М.* Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 27. — Київ, 2004. — С. 91—95.
2. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. — М. : МНЦМО, 2011. — 136 с.
3. *Erdos P., Renyi A.* On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. — 1960. — Vol. 5. — P. 17—61.
4. C*hung F.R.K., Garey M.R.* Diametr Bounds for Altered Graphs// J. of GraphTheory. — 1984. — Vol. 8. — P. 511—534.
5. *Diestel R.* Graph Theory. — NY : Springer-Verlag, 2000. — 322 p.
6. *Глухов О.Д.* Про планарні квазівипадкові графи пуассонівського типу // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук.праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 57. — Київ, 2010. — С. 10—12.
7. *Hoory S., Linial N., Wigderson A.* Expander graphs and their applications // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2006. — Vol. 43, No. 4. — P. 439 —561.

8. *Cvetković D.M., Doob M., Sachs H*. Spectra of Graphs. — Heidelberg/Leipzig: Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995. — 447 p.

A.D. Glukhov

QUASI-RANDOM GRAPHS AND STRUCTURAL STABILITY OF COMPLEX DISCRETE SYSTEMS

Structural stability of complex discrete systems with random failures has been considered. Estimates of the connectivity system under the preset number of failures have been found with the help of quasi-random graphs. The evolution of connectivity of the systems based of expanders has been investigated.

K e y w o r d s: complex discrete system, expander, quasi-random graph.

REFERENCES

1. Glukhov, O., Korostil, Ju. (2004), "Structural safety of complex discrete systems with random failures", *Modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologii*, *Zbirnyk naukovykh prats IPME NAN Ukrainy*, Vol. 27, pp. 91-95.
2. Raigorodsky, A. (2011), *Modeli sluchaynyh grafov* [Models of random graphs], MNTsMO, Moscow, Russia.
3. Erdos, P. and Renyi, A. (1960), On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci*., Vol. 5, pp. 17-61.
4. Chung, F.R.K. and Garey, M.R. (1984), Diameter bounds for altered graphs, *Journal of Graph Theory*, Vol. 8, pp. 511-534.
5. Diestel, R. (2000) , Graph Theory, Springer-Verlag, NewYork, USA.
6. Glukhov, O.D. (2010), "On quasi random planar graphs of Poisson type", *Modelyuvannya ta informatziyni tekhnologii*, *Zbirnyk naukovykh prats IPME NAN Ukrainy*, Vol. 57, pp. 10-12.
7. Hoory, S., Linial, N. and Wigderson, A. (2006), Expander graphs and their applications, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 43, No. 4, pp. 439-561.
8. Cvetković, D.M., Doob, M. and Sachs, H. (1995), Spectra of Graphs, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, Germany.

Поступила 11.05.16

ГЛУХОВ Александр Дмитриевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей и вычислительной математики Национального авиационного университета. В 1977 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория графов и ее применение в технической диагностике и вычислительной технике.