УДК 512.622.83:517.962.27(043.2)

РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК З ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ФІБОНАЧЧІ ТА ЛЮКА

Корнійчук С. В.
Національний авіаційний університет, Київ

Науковий керівник – Репета В.К., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ключові слова: рекурентна послідовність, послідовність Фібоначчі, послідовність Люка.

Послідовність (x_n), де $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ для $n > 1$, x_0, x_1 – задані сталі, є рекурентною послідовністю другого порядку.

Зокрема, якщо $x_0 = 0, x_1 = 1$, то маємо послідовність (F_n) чисел Фібоначчі: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, тобто 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...; якщо $x_0 = 2, x_1 = 1$, то – послідовність (L_n) чисел Люка: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, тобто 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...

У явному вигляді $F_n = \dfrac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$, $L_n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n}$, де $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотий переріз і є коренем характеристичного рівняння $k^2 - k - 1 = 0$.

У загальному випадку, коли $x_0 = a, x_1 = b$ – довільні задані сталі, явний вигляд для x_n такий:

$$x_n = \frac{a}{2}\left(\varphi^n + (-\varphi)^{-n}\right) + \frac{2b-a}{2}\left(\frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}\right).$$

Отже,

$$x_n = \frac{a}{2}L_n + \frac{2b-a}{2}F_n, \quad n = 0,1,2, \dots .$$

Висновок. Будь-яку рекурентну послідовність (x_n), задану формулами $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, де $n > 1$, і довільними початковими умовами $x_0 = a, x_1 = b$, завжди можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних послідовностей Люка й Фібоначчі.

Зокрема, якщо $a = 2,\ b = 1$, то $x_n = \frac{2}{2}L_n + \frac{2-2}{2}F_n = L_n$ – послідовність Люка; якщо $a = 0,\ b = 1$, то $x_n = \frac{0}{2}L_n + \frac{2-0}{2}F_n = F_n$ – послідовність Фібоначчі.