Завдання для виконання домашнього завдання (денна форма навчання) та контрольної (домашньої) роботи (заочна форма навчання) розміщено нижче, його мета полягає у засвоєнні теоретичного і практичного матеріалу тем модуля № 2 та самостійного опрацювання матеріалу з вивчення методів, що використовуються у знаходженні екстремумів унімодальних функцій.

Студент відповідно до вказаного провідним викладачем варіанту самостійно виконує завдання, оформлює його відповідним чином і захищає.

Тема роботи: Застосування методу золотого перерізу при визначенні коефіцієнта рівняння

Теоретичні відомості.

Метод золотого перерізу. Цей метод найчастіше використовують для знаходження екстремумів унімодальних функцій.

Розглянемо застосування методу золотого перерізу для розрахунку коефіцієнта рівняння, яке описує експериментальні дані.

Визначення параметрів (коефіцієнтів рівняння) функціональної залежності в разі використання чисельних методів, як і визначення коефіцієнтів рівняння прямої, ґрунтується на застосуванні найбільш поширеного методу — найменших квадратів (МНК). Згідно з цим методом здобута математична залежність найкраще описує експериментальні дані, якщо сума квадратів відхилень експериментальних значень від розрахованих теоретично є мінімальною. Тобто для набору експериментальних точок (x_i, y_i), i = 1,..., n функціональна залежність $y = f(x, a, b, c, d, ...)$ є оптимальною, якщо

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i,\ a,\ b,\ c,\ d,\ ...))^2 = \min, \qquad (5.1)$$

де $a, b, c, d, ...$ — коефіцієнти рівняння.

Тобто цільова функція (F) залежить від значень коефіцієнтів рівняння $F = f(a, b, c, d, ...)$, а значення функції F буде мінімальним, коли її частинні похідні дорівнюють нулю. Тому в разі використання МНК знаходять частинні похідні суми (5.1) за коефіцієнтами функціональної залежності $y = f(x, a, b, c, d, ...)$, тобто за коефіцієнтами $a, b, c, d, ...$.

Розв'язування системи рівнянь, утворених після диференціювання рівняння (5.1), залежить від виду рівняння $y = f(x, a, b, c, d, ...)$ і аналітично не завжди можливе. У такому разі використовуються чисельні методи знаходження мінімуму функції F, одним з яких є метод золотого перерізу.

Основою практичного використання чисельних методів знаходження мінімуму функції F є розрахунок її значень для різних значень шуканого параметра, послідовність вибору якого визначається використовуваним методом оптимізації.

Для наочності розглянемо простий приклад визначення параметра рівняння — коефіцієнта функціональної залежності — за наявності тільки одного коефіцієнта. Нехай експериментальні дані описуються рівнянням вигляду:

$$y = ax + \exp(ax).$$

Завдання полягає в тому, щоб за відомим масивом даних x_i, y_i:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y	1,89	3,03	4,52	6,55	9,39	13,42	19,24	27,73

знайти таке значення параметра a, котре якнайкраще описує експериментальну залежність.

Для розв'язування такої задачі можна діяти в такий спосіб. Підставляючи в рівняння $y = ax + \exp(ax)$ різні значення параметра a (у наведеному прикладі від 1 до 6) і використовуючи можливості MS EXCEL, будуємо графіки даної залежності для різних значень a (рис. 5.6) і обчислюємо значення функції F для відповідних значень a:

a	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00

F	1089,8	768,2	333,8	0,0	1386,9	13350,9

Як бачимо з графіка на рис. 5.6, залежність для a = 4 найкраще описує експериментальні дані, а значення функції F мінімальне (у прикладі дорівнює нулю, тобто експериментальні дані ідеально описуються рівнянням).

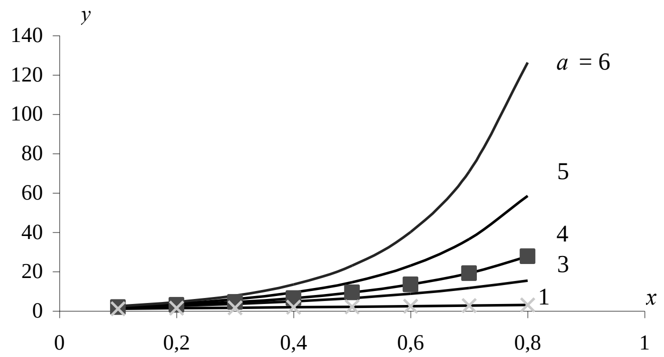


Рис. 5.6. Графіки залежності $y = ax + \exp(ax)$ для різних значень параметра a

Такий метод не є ефективним і на практиці майже не застосовується. Проте з наведеного прикладу випливає необхідність створення ефективного алгоритму, який дав би змогу найшвидше об-числювати потрібний коефіцієнт.

Практична реалізація алгоритму методу золотого перерізу ґрунтується на відшуканні мінімуму цільової функції F — суми квадратів відхилень експериментальних значень від розрахованих за теоретичним рівнянням.

Алгоритм, який буде описано далі, ґрунтується на використанні цього ефективного методу одновимірної оптимізації для відшукання мінімуму функції однієї змінної.

Проілюструємо використання методу одновимірної оптимізації для відшукання мінімуму функції однієї змінної в розглянутому випадку, тобто коли дані описуються рівнянням $y = ax + \exp(ax)$, і потрібно, маючи експериментальні дані (y_i та x_i), обчислити значення сталої величини (коефіцієнта рівняння) a.

Отже, для набору експериментальних точок (x_i, y_i), i = 1, ..., n, функціональна залежність $y = f(x)$ буде оптимальною, якщо цільова функція:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f\left(x_i\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - ax_i - \exp\left(ax_i\right)\right]^2 = \min.$$

Тож потрібно знайти мінімум функції $F = f(a)$.

Для практичного застосування методу треба знати початковий інтервал Δ, що містить мінімум цільової функції $F = f(a)$ і де функція $f(a)$ унімодальна. Знаючи початковий інтервал Δ, можна за допомогою певного алгоритму розрахунків поступово його зменшувати (наближатись до мінімуму цільової функції), досягаючи необхідної точності визначення a.

Існують різні методи зменшення початкового інтервалу невизначеності Δ до деякого кінцевого $\Delta_{\text{кінц}}$, який установлюється необхідною точністю розрахунку значення сталої величини a. Зупинімось на одному з них — методі золотого перерізу, який зазвичай на практиці буває найефективнішим.

З’ясувалося, що ефективність таких двох відомих методів, як метод золотого перерізу і метод пошуку Фібоначчі, дещо вища за ефективність пошуку послідовним поділом відрізка навпіл і набагато вища за ефективність пошуку іншими методами.

Пошук за допомогою методу золотого перерізу ґрунтується на розбитті відрізка прямої на дві частини, відношення яких дорівнює *золотому перерізу*. Метод золотого перерізу використовує два дроби Фібоначчі:

$$F_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38 \text{ і } F_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62 .$$

Зауважимо, що $F_1 = (F_2)^2$ і $F_1 + F_2 = 1$.

Пошук необхідно починати в такому напрямі, щоб значення функції $f(a)$ зменшувалося.

Початковий відрізок Δ, якому належить мінімум $f(a)$, можна дістати, наприклад, за умови послідовної серії кількох зростаючих кроків за незалежною змінною. Проте здебільшого інтервал, в якому може міститися значення шуканої величини, визначається її фізичним змістом. Позначимо початкові значення інтервалу невизначеності параметра a як $a_{\min}$ і $a_{\max}$, і тоді початковий відрізок інтервалу невизначеності $\Delta_0 = a_{\max} - a_{\min}$.

Для наочності розглянемо послідовність визначення параметра a, яку ілюструє рис. 5.7. Отже, згідно з рис. 5.7 доходимо висновку, що коли ми перебуваємо на першому з кроків, спрямованих на знаходження мінімуму функції $F = f(a)$ за допомогою зменшення початкового інтервалу Δ_0 до деякого кінцевого $\Delta_{\text{кінц}}$, то зменшення інтервалу Δ потрібно виконувати в такий спосіб. Обчислюємо:

$$a_1 = a_{\min} + F_1\Delta_0\,,\ a_2 = a_{\min} + F_2\Delta_0 = a_{\max} - F_1\Delta_0\,.$$

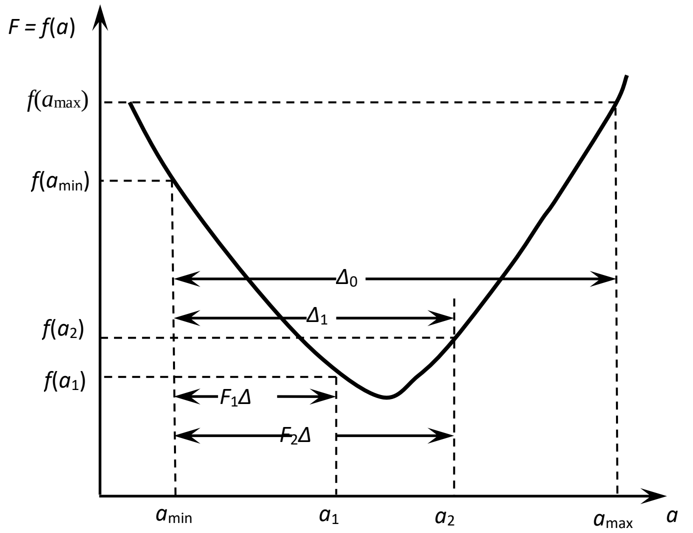


Рис. 5.7. Пошук методом золотого перерізу (золотий пошук)

Далі розраховуємо значення $f(a_1)$ та $f(a_2)$.

Знаходження нового інтервалу невизначеності (зменшення інтервалу Δ) залежить від співвідношення цих величин. Мінімум функції $F = f(a)$ може знаходитися в області *I*, *II*, або *III* (рис. 5.8).

Якщо $f(a_1) < f(a_2)$, то $\Delta_1 = a_2 - a_{\min}$, і зменшиться тільки верхня межа інтервалу невизначеності $a_{\max} = a_2$ (рис. 5.8, криві *C* та *E*).

Якщо $f(a_1) > f(a_2)$, то $\Delta_1 = a_{\max} - a_1$, і зросте тільки нижня межа інтервалу невизначеності $a_{\min} = a_1$. (рис. 5.8, криві *B* та *D*).

Якщо $f(a_1) = f(a_2)$, то $\Delta_1 = a_2 - a_1$, і межами нового інтервалу невизначеності будуть значення $a_{\max} = a_2$; $a_{\min} = a_1$ (рис. 5.8, крива *A*).

Отже, зменшується інтервал невизначеності значень a. У наведеному прикладі (див. рис. 5.7) $f(a_1) < f(a_2)$, тому $\Delta_1 = a_2 - a_{\min}$, і зменшиться тільки верхня межа $a_{\max} = a_2$.

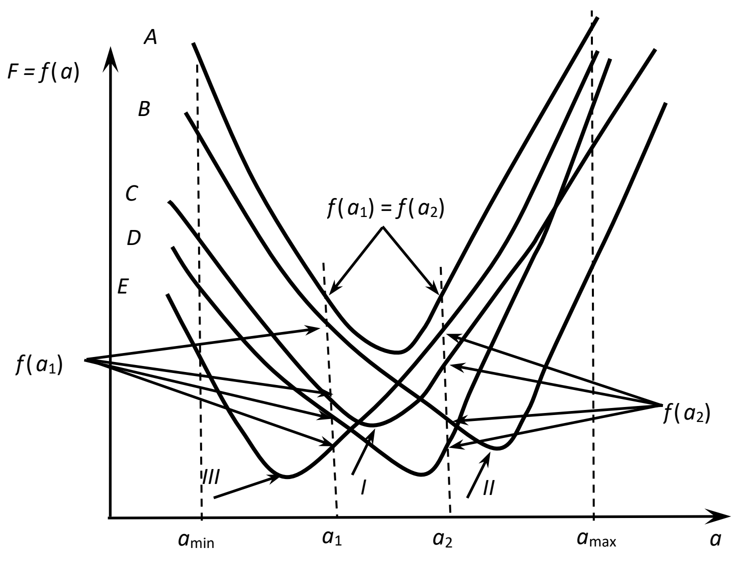


Рис. 5.8. Варіанти розташування мінімуму унімодальної функції

Для нового інтервалу невизначеності розраховуємо значення $f(a_1)$ та $f(a_2)$ при

$$a_1 = a_{\min} + F_1\Delta_1,\ a_2 = a_{\min} + F_2\Delta_1 = a_{\max} - F_1\Delta_1.$$

Далі розраховуємо значення $f(a_1)$ та $f(a_2)$, порівнюємо їх та визначаємо Δ_2. На кожному наступному кроці цей інтервал і далі зменшуватиметься. Розрахунки виконуватимуться доти, доки різниця $a_{\max} - a_{\min}$ не задовольнятиме вимог щодо точності встановлення значення a.

Виконувати розрахунки та математичне опрацювання експериментальних даних згідно з таким методом оптимізації зручно в середовищі MS EXCEL, реалізовуючи наведений раніше алгоритм створенням програми за допомогою вбудованої в MS EXCEL мови програмування Visual Basic.

Згідно з алгоритмом методу золотого перерізу для розрахунку невідомого коефіцієнта рівняння потрібні такі дані:

- початкові граничні значення параметра a ($a_{\min}$ та $a_{\max}$);
- експериментальні дані (y_i та x_i);
- кількість n експериментальних точок;
- точність визначення значення параметра a.

Розглянемо приклад визначення коефіцієнта a рівняння $y = ax + \exp(ax)/x^2$ з використанням можливостей MS EXCEL та створенням програми для реалізації методу золотого перерізу за допомогою вбудованої в MS EXCEL мови програмування Visual Basic.

Для цього стовпці A та B у програмі MS EXCEL заповнюємо значеннями величин x_i та y_i, у комірки C2, D2, E2, F2 записуємо відповідно значення нижньої та верхньої меж параметра a , точність визначення значення a, кількість експериментальних точок. На рис. 5.9 наведено приклад введення вихідних даних залежності $y = ax + \exp(ax)/x^2$.

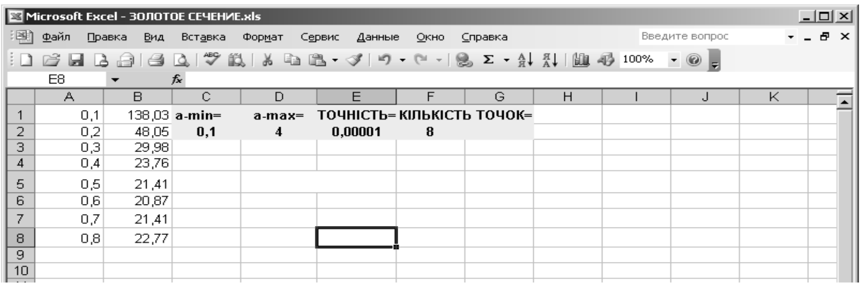


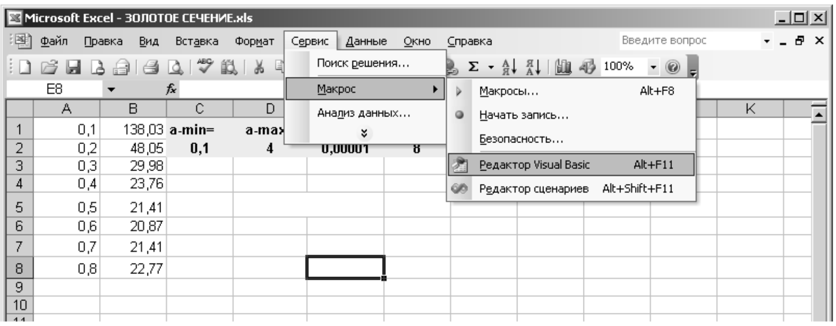
Рис. 5.9. Приклад введення вихідних даних
залежності $y = ax + \exp(ax)/x^2$

Після цього за допомогою програми ZOLOTO (дод. 2), у якій реалізовано метод золотого перерізу, можна розрахувати невідомий коефіцієнт a.

Тому після введення вихідних даних слід перейти в меню «Сервис», далі — у меню «Макрос» та перейти у вікно «Редактор Visual Basic» (рис. 5.10), в якому потрібно набрати програму, складену мовою програмування «Visual Basic» (рис. 5.10).

Програма складається з підпрограми Function Fmeta (a, NT) та Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT).

Програма Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT) виконує мінімізацію цільової функції F, розрахунок якої виконується у підпрограмі Function Fmeta (a, NT). Тому програму Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT) можна використовувати для розрахунків невідомого коефіцієнта в різних рівняннях.



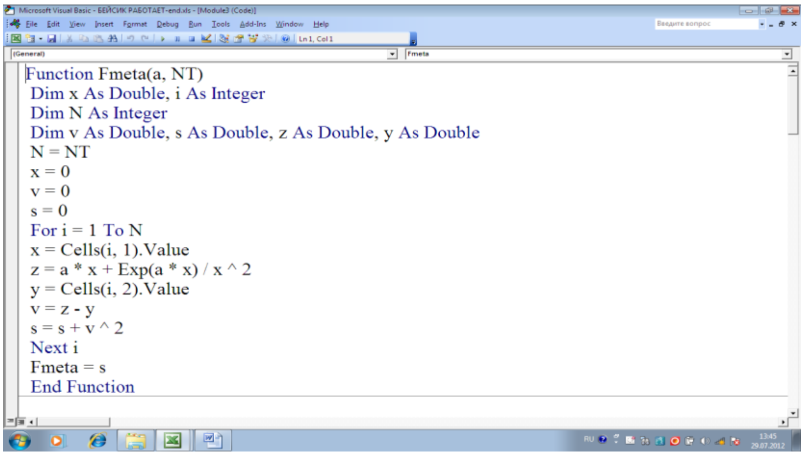


Рис. 5.10. Перехід у вікно «Редактор Visual Basic»

Залежно від виду рівняння в підпрограмі Function Fmeta (a, NT) буде змінюватись рівняння цільової функції. Так, у нашому прикладі з визначення коефіцієнта a рівняння $y = ax + \exp(ax)/x^2$ для цільової функції маємо рівняння:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax - \exp(ax_i)/x_i^2\right)^2 .$$

Підпрограма Function Fmeta (a, NT) згідно з рівнянням для цільової функції мовою Visual Basic має вигляд:

```
Function Fmeta (a, NT)
Dim x As Double, i As Integer
Dim N As Integer
Dim v As Double, s As Double, z As Double, y As Double
N = NT
x = 0
v = 0
s = 0
For i = 1 To N
x = Cells (i, 1).Value
z = a * x + Exp(a * x) / x ^ 2
y = Cells (i, 2).Value
v = z – y
s = s + ν ^ 2
Next i
Fmeta = s
End Function
```

Підпрограма Function Fmeta(a, NT) розраховує значення $F = f(a_i)$ залежно від значень a_i, які призначає підпрограма Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT) згідно з розглянутим раніше алгорит-мом. У підпрограмі Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT) реалізовано метод золотого перерізу. Підпрограма Function ZOLOTO (AX, BX, TOL, NT) використовує вихідні дані AX та BX – – нижню та верхню початкові межі пошуку невідомої величини; TOL — точ-ність визначення невідомої величини, NT — кількість експериментальних точок. Після набору програми повертаємось у головне вікно EXCEL та розраховуємо значення a, як показано на рис. 5.11.

Додатково у стовпці I наведено значення сум квадратів відхилень експериментальних точок *F* від розрахованих при різних значеннях параметра *а* (стовпець H), а також для наочності наведено графік
F = *f*(*a*) (рис. 5.11).

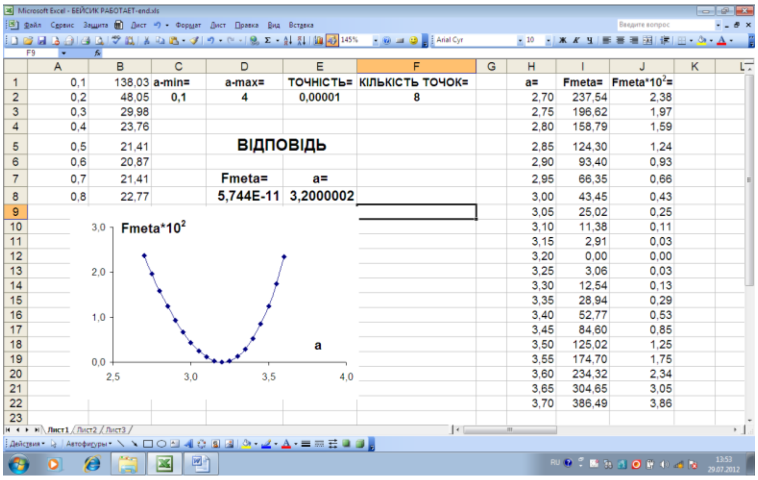


Рис. 5.11. Розрахунок значення *а* та графік залежності Fmeta = *f*(*a*)

Розрахункова робота 7

Застосування методу золотого перерізу при визначенні коефіцієнта рівняння

Мета роботи: *навчитися проводити розрахунки та математичну обробку експериментальних даних, використовуючи засоби EXCEL та Visual Basic.*

Завдання для розрахунково-практичної роботи

Для наведених у табл. 5.1–5.4 і 5.5–5.8 вихідних даних за рівняннями розрахувати значення *а*. Розрахувати значення *F* та побудувати графік залежності $F = f(a)$ при значеннях *а*, що містяться в інтервалі $a \pm 0{,}1a$. Експериментальні дані згідно із залежністю $y = ax + \exp(ax)/x$ (у 28 варіантах):

Таблиця 5.1

x	Значення *y* за варіантами							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,21	1,42	1,65	1,89	2,15	2,42	2,71	3,03
2	0,81	1,15	1,51	1,91	2,36	2,86	3,43	4,08
3	0,75	1,21	1,72	2,31	2,99	3,82	4,82	6,07
4	0,77	1,36	2,03	2,84	3,85	5,16	6,91	9,33
5	0,83	1,54	2,40	3,48	4,94	7,02	10,12	14,92
6	0,90	1,75	2,81	4,24	6,35	9,70	15,31	25,05
7	0,99	1,98	3,27	5,15	8,23	13,73	24,08	44,23
8	1,08	2,22	3,78	6,27	10,82	19,99	39,40	81,63

Таблиця 5.2

x	Значення *y* за варіантами							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3,36	3,72	4,10	4,52	4,97	5,46	5,98	6,55
2	4,82	5,69	6,71	7,91	9,33	11,02	13,04	15,47
3	7,66	9,70	12,34	15,80	20,37	26,43	34,51	45,30
4	12,75	17,65	24,76	35,18	50,52	73,21	106,86	156,86
5	22,50	34,68	54,44	86,69	139,5	226,3	369,1	604,19
6	42,30	73,24	129,1	230,4	414,5	749,58	1359,5	2470,4
7	84,10	163,6	323,1	643,7	1288	2586,0	5198,4	10458,4
8	174,6	380,6	838,0	1855	4117	9152,5	20356	45289,9

Таблиця 5.3

x	Значення *y* за варіантами						
	17	18	19	20	21	22	23
1	7,17	7,85	8,59	9,39E+00	1,03E+01	1,12E+01	1,23E+01
2	18,38	21,90	26,15	3,13E+01	3,75E+01	4,51E+01	5,43E+01
3	59,77	79,20	105,32	1,40E+02	1,88E+02	2,52E+02	3,38E+02
4	231,26	342,06	507,15	7,53E+02	1,12E+03	1,67E+03	2,48E+03
5	991,45	1629,62	2681,45	4,42E+03	7,27E+03	1,20E+04	1,98E+04
6	4,49E+03	8,18E+03	1,49E+04	2,71E+04	4,94E+04	9,01E+04	1,64E+05
7	2,10E+04	4,24E+04	8,53E+04	1,72E+05	3,46E+05	6,97E+05	1,40E+06
8	1,01E+05	2,24E+05	4,99E+05	1,11E+06	2,47E+06	5,50E+06	1,22E+07

Примітка. Запис αE + 0β означає: $\alpha \cdot 10^{\beta}$.

Таблиця 5.4

x	Значення *y* за варіантами				
	24	25	26	27	28
1	1,34E+01	1,47E+01	1,61E+01	1,76E+01	1,92E+01
2	6,56E+01	7,92E+01	9,58E+01	1,16E+02	1,41E+02
3	4,54E+02	6,10E+02	8,21E+02	1,11E+03	1,49E+03
4	3,70E+03	5,52E+03	8,23E+03	1,23E+04	1,83E+04
5	3,26E+04	5,37E+04	8,85E+04	1,46E+05	2,41E+05
6	2,99E+05	5,45E+05	9,93E+05	1,81E+06	3,30E+06
7	2,83E+06	5,69E+06	1,15E+07	2,31E+07	4,65E+07
8	2,72E+07	6,06E+07	1,35E+08	3,00E+08	6,69E+08

Експериментальні дані згідно із залежністю $y = ax + \exp(ax)/x^2$ (у 28 варіантах):

Таблиця 5.5

x	Значення *y* за варіантами					
	1	2	3	4	5	6
1	19,24	17,58	1,61E+01	1,47E+01	1,34E+01	1,23E+01
2	73,21	60,75	5,05E+01	4,21E+01	3,52E+01	2,95E+01
3	502,52	374,15	2,79E+02	2,08E+02	1,56E+02	1,17E+02
4	4581,85	3074,60	2,06E+03	1,39E+03	9,32E+02	6,28E+02
5	48100	2,92E+04	1,77E+04	1,07E+04	6,52E+03	3,96E+03
6	549000	3,02E+05	1,65E+05	9,08E+04	4,98E+04	2,74E+04
7	6,6E+06	3,30E+06	1,64E+06	8,13E+05	4,04E+05	2,00E+05
8	8,3E+07	3,75E+07	1,69E+07	7,58E+06	3,41E+06	1,53E+06

Таблиця 5.6

x	Значення *y* за варіантами				
	7	8	9	10	11
1	1,12E+01	1,03E+01	9,39E+00	8,59E+00	7,85
2	2,48E+01	2,09E+01	1,76E+01	1,50E+01	12,7
3	8,83E+01	6,68E+01	5,08E+01	3,89E+01	30,0
4	4,23E+02	2,86E+02	1,94E+02	1,32E+02	90,9
5	2,41E+03	1,46E+03	8,91E+02	5,44E+02	333
6	1,50E+04	8,25E+03	4,53E+03	2,49E+03	1370
7	9,95E+04	4,94E+04	2,46E+04	1,22E+04	6060
8	6,88E+05	3,09E+05	1,39E+05	6,24E+04	28000

Таблиця 5.7

x	Значення *y* за варіантами

	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	7,17	6,55	5,98	5,46	4,97	4,52	4,10	3,72	3,36
2	10,9	9,33	8,02	6,9	5,97	5,16	4,46	3,85	3,31
3	23,3	18,30	14,50	11,6	9,39	7,67	6,31	5,23	4,35
4	62,9	44,02	31,21	22,5	16,53	12,39	9,49	7,41	5,89
5	205	127,24	79,82	50,8	33,11	22,14	15,29	10,94	8,10
6	758	419,73	234,09	131,9	75,59	44,41	27,02	17,21	11,55
7	3020	1503,6	751,63	377,8	191,8	99,16	52,77	29,38	17,41
8	12600	5672,4	2555,0	1153	523,8	240,30	112,46	54,58	28,13

Таблиця 5.8

x	Значення y за варіантами							
	21	22	23	24	25	26	27	28
1	3,03	2,71	2,42	2,15	1,89	1,65	1,42	1,21
2	2,84	2,41	2,03	1,68	1,36	1,06	0,77	0,51
3	3,62	3,01	2,47	2,00	1,57	1,17	0,80	0,45
4	4,73	3,83	3,09	2,46	1,91	1,41	0,94	0,49
5	6,18	4,82	3,80	2,99	2,30	1,68	1,11	0,57
6	8,18	6,05	4,62	3,56	2,71	1,97	1,29	0,65
7	11,12	7,64	5,56	4,18	3,14	2,27	1,48	0,74
8	15,80	9,83	6,70	4,85	3,58	2,57	1,68	0,83