

# БУДІВНИЦТВО ТА ЦИВІЛЬНА ІНЖЕНЕРІЯ

УДК 656.71-046.32 (045)

**Дубик Олександр Миколайович**

кандидат технічних наук,

Національний авіаційний університет,  
заступник декана факультету архітектури,

будівництва та дизайну

ORCID: 0000-0001-8082-7603

oleksandr.dubyk@npp.nau.edu.ua

## **ДОСЛІДЖЕННЯ АЕРОДРОМНОГО ПОКРИТТЯ НА СЛАБКІЙ ҐРУНТОВІЙ ОСНОВІ З УРАХУВАННЯМ РОЗВИТКУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ БАГАТОШАРОВОГО ПІВПРОСТОРУ, ЩО МІСТИТЬ ШАРИ ЗАЛІЗОБЕТОННОГО ПОКРИТТЯ, ШТУЧНОЇ ОСНОВИ ТА АКТИВНОЇ ЗОНИ ҐРУНТІВ**

*Мета дослідження полягає у визначенні напружено-деформованого стану аеродромного покриття на слабкій ґрунтовій основі з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій багатошарового півпростору. У відповідності до поставленої мети обрано метод скінченних елементів. Використання вказаного методу сприяло отриманню власних результатів. Наукова новизна одержаних результатів полягає у тому, що на основі методу скінченних елементів запропонована універсальна методика визначення напружено-деформованого стану жорстких аеродромних покриттів на слабкій ґрунтовій основі. Запропонована конструкція покриття може бути використана на реальних аеродромах України, де є слабкі прошарки ґрунту. Висновки. Досліджено напружено-деформований стан аеродромного покриття на слабкій ґрунтовій основі з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій багатошарового півпростору. Виконано інженерний розрахунок на міцність жорсткого бетонного покриття злітно-посадкової смуги на вінклерівській основі від колісного навантаження повітряного судна B767-300. Отримані результати розрахунку на міцність запропонованої конструкції жорсткого покриття*

з використанням дискретної моделі типів ґрунтових основ свідчать про універсальність запропонованої методики дослідження напружено-деформованого стану тонких плит на неоднорідній основі.

**Ключові слова:** аеродромне покриття, слабка ґрунтова основа, згинальні моменти, коефіцієнт постелі, переміщення, напружено-деформований стан

**Oleksandr Dubyk**

Candidate of Science (Engineering)

National Aviation University,

Deputy Dean of the Faculty of Architecture,

Construction and Design

ORCID: 0000-0001-8082-7603

saschadubik@ukr.net

## RESEARCH AIRPORT PAVING ON WEAK GROUND BASE WITH THE DEVELOPMENT OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS OF MULTILAYERED HALF-SPACE LAYERS CONTAINING CONCRETE COATINGS, ARTIFICIAL BASES AND CORE SOIL

*The aim of the study is to determine the stress-strain state of the aerodrome surface on a weak soil basis, taking into account the development of elastic-plastic deformations of the multilayer half-space. In accordance with the set goal, the finite element method is chosen. The use of this method contributed to obtaining their own results. The scientific novelty of the obtained results is that on the basis of the finite element method a universal method of determining the stress-strain state of hard aerodrome coatings on a weak soil base is proposed. The proposed coating design can be used at real airfields in Ukraine, where there are weak layers of soil. Conclusions. The stress-strain state of the aerodrome surface on a weak soil base was studied, taking into account the development of elastic-plastic deformations of the multilayer half-space. The engineering calculation for the strength of the rigid concrete pavement of the runway on a Winkler basis from the wheel load of the aircraft B767-300 was performed. The obtained results of calculation of the strength*

*of the proposed structure of the hard surface using a discrete model of the types of soil bases indicate the universality of the proposed method of studying the stress-strain state of thin slabs on a non-uniform basis.*

**Key words:** *aerodrome coverage, weak soil base, bending moments, bed ratio, displacement, stress-strain state*

## ВСТУП

У процесі експлуатації аеродромні покриття піддаються впливу навантажень від повітряних суден і природно-кліматичних факторів. Під впливом останніх в ґрунтових основах покриттів відбуваються теплообмін, промерзання і відтавання ґрунтів. Характеристики міцності і стійкість ґрунтів і штучних основ аеродромних покриттів в річному циклі змінюються в широких межах, що впливає на їх міцність і несучу здатність.

Оскільки міцність, надійність і довговічність аеродромних і дорожніх покриттів багато в чому залежать від водно-теплового режиму основ, важливе значення має вивчення процесів, що відбуваються в них – міграції вологи, зміни температури під впливом зовнішніх умов.

В процесі експлуатації аеродромних покриттів на них впливають навантаження від колісних опор повітряних суден. Особливості цих навантажень враховуються при розрахунку і конструюванні покриттів різних типів. При зльоті, посадці, рулюванні і стоянці повітряних суден величина і час прикладання навантаження на покриття змінюються в залежності від режиму руху літака. Зліт, посадка і рулювання повітряних суден передбачені, як правило, по осьовій лінії елементів аеродрому (ЗПС, РД), однак на практиці цього домогтися складно, особливо при виконанні посадки. Статистичні спостереження показали, що розподіл повторюваності навантажень близькі до нормального закону розподілу.

Відхилення повітряного судна від осьової лінії при рулінні на РД і при зльоті на ШЗПС значно менше, ніж при посадці.

Ці відхилення також відповідають нормальному закону.

Рух повітряного судна зі швидкістю 30–40 км/год по РД і вирулювання на штучної злітно-посадкової смуги (ШЗПС) перед зльотом

чинить на покриття найбільший вплив по ряду причин. По-перше, відсутній розвантажуючий ефект підйомної сили; по-друге, літак перед зльотом має максимальну масу; по-третє, рулювання здійснюється з малими відхиленнями від осрової лінії покриття елемента аеродрому; по-четверте, при наявності нерівностей (уступи в швах між плитами, злами профілю, вибоїнами, відколи крайок та ін.) в покритті виникають додаткові зусилля при русі колісної опори.

Перераховані вище особливості впливу навантажень від колісних опор повітряних суден враховуються нормами проектування аеродромних покриттів<sup>1</sup>. Для обліку інтенсивності та величини навантажень на різних ділянках аеродрому вводяться поправочні коефіцієнти або тільки до величини розрахункового навантаження, або до величини розрахункового навантаження і граничних значень розрахункових параметрів<sup>1</sup>. Величина поправочних коефіцієнтів призначається в межах від 0,7 (крайові по ширині ділянки в середній частині ШЗПС, де вплив навантажень малоймовірний) до 1,2–1,3 – кінцеві ділянки ШЗПС, магістральні РД, середня по ширині частина ШЗПС, по якій здійснюється систематичне рулювання повітряних суден.

Зростання злітних мас повітряних суден супроводжується ускладненням їх опор, тому сучасні літаки мають опори самих різних конфігурацій.

Збільшення числа коліс на основних опорах і кількості самих основних опор є об'єктивним процесом "утримання" навантажень на покритті в розумних межах, в іншому випадку виникає необхідність його докорінної реконструкції з метою посилення. Така різноманітність параметрів основних опор вимагає їх врахування при розрахунку і проектуванні покриттів сучасних аеродромів. На жаль, такий облік в стандартах на проектування покриттів передбачено не в повній мірі. При русі будь-якого літака по покриттю незалежно від конфігурації основних опор (число коліс і відстані між ними)

---

<sup>1</sup> Международная организация гражданской авиации. Международные стандарты и рекомендуемая практика. Аэродромы. Приложение 14 к конвенции о международной гражданской авиации. Том 1: Проектирование и эксплуатация аэродромов. Montréal, Quebec, Canada ICAO Doc 9137, 2009.

в розрахунковому відношенні розглядається одна злітно-посадкова операція і один цикл змін параметрів напружено-деформованого стану. Однак на практиці спостерігається інше

Залежно від товщини цементобетонного покриття змінюється характеристика циклу навантаження, при цьому залишається незмінним кількість циклів впливів за один прохід опори.

Перераховані особливості впливу колісних навантажень від опор літака на покриття характеризують їх як комплексні, параметри яких залежать від багатьох чинників, включаючи зміну величини навантаження і швидкості її впливу, розподіл повторюваності програми навантаження, багатоколісність основних опор важких літаків.

Аеродромні плити ЗПС, знижуючи середній тиск під покриттям за рахунок великої площі різко збільшують глибину стиснутої товщі ґрунтового півпростору, тобто залучають до роботи глибокі, але при цьому слабкі, сильно стиснені шари водо-насичених пілувато-суглинистих ґрунтів, що призводить до значного збільшення осадки.

В основу діючих нормативних документів, для розрахунку жорсткого покриття, покладено аналітичні співвідношення розрахунку суцільної нерозрізної плити на пружній основі з використанням гіпотези прямої пропорційності, при цьому дуже наближено враховується перехід до плит скінченних розмірів за наявності наскрізних швів і стикових з'єднань<sup>2</sup>.

Жорсткі покриття аеродромів (доріг) розраховуються за методом граничних станів. При настанні граничного стану вважається, що конструкція не здатна чинити опір зовнішнім впливам (отримує неприпустимі за умовами експлуатації пошкодження і деформації).

Для бетонних і армобетонних конструкцій покриттів таким граничним станом є стадія появи тріщин, тобто стан появи тріщин є розрахунковим і характеризується як граничний стан за міцністю.

Для залізобетонних покриттів з ненапруженою арматурою в стадії експлуатації тріщини допускається, але обмежується ширина їх розкриття, тобто граничним станом вважається такий, при якому

---

<sup>2</sup> Цыхановский В.К., Козловець С.М., Коряк А.С. Расчет тонких плит на упругом основании методом конечных элементов. – К. : Изд-во "Сталь", 2008. – 234 с.

напруження в розтягнутій арматурі досягають її розрахункового опору при ширині тріщин мм.

Задача розрахунку покриття полягає в тому, щоб забезпечити гарантії проти настання в ньому в період експлуатації того чи іншого граничного стану. Разом з тим, для отримання економічно обґрунтованих рішень ці гарантії не повинні бути зміненими, тобто треба прагнути до того, щоб значення зусиль, що виникають в плитах покриттів, були близькими до гранично допустимих значень.

### 1. Вихідні дані для проведення аналітичного та чисельного розрахунку аеродромного покриття

Розглядається конструкція бетонного покриття, яка може бути використана для штучної злітно-посадкової смуги (ШЗПС) аеродрому. Конструкцію бетонного покриття з активною ґрунтовою основою наведено на рис. 1.

Параметри матеріалу бетонних шарів конструкції покриття та активної ґрунтової основи наступні:

- **двошарова плита покриття**

- верхній шар – високоміцний бетон класу В40

$$R_{\text{злітальне}} = 3,73 \text{ МПа}; B_{\text{btb}} = 4,4 / 55; R_{\text{bn}} = 29,0 \text{ МПа};$$

$$E_b = 3,53 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,22; \gamma_1 = 2500 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

- нижній шар – пісний бетон В15

$$R_{\text{bn}} = 11,0 \text{ МПа}; R_{\text{bn}} = 1,15 \text{ МПа}; R_{\text{btb}} = 2,26 \text{ МПа};$$

$$E_b = 2,60 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_2 = 0,23; \gamma_2 = 2400 \text{ кг} / \text{м}^3; B_{\text{btb}} = 2,8 / 35.$$

- **жорстка основа**

- піскоцемент В5

$$R_{\text{btb}} = 1,2 \text{ МПа}; R_{\text{bn}} = 3,5 \text{ МПа}; E_b = 1,33 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

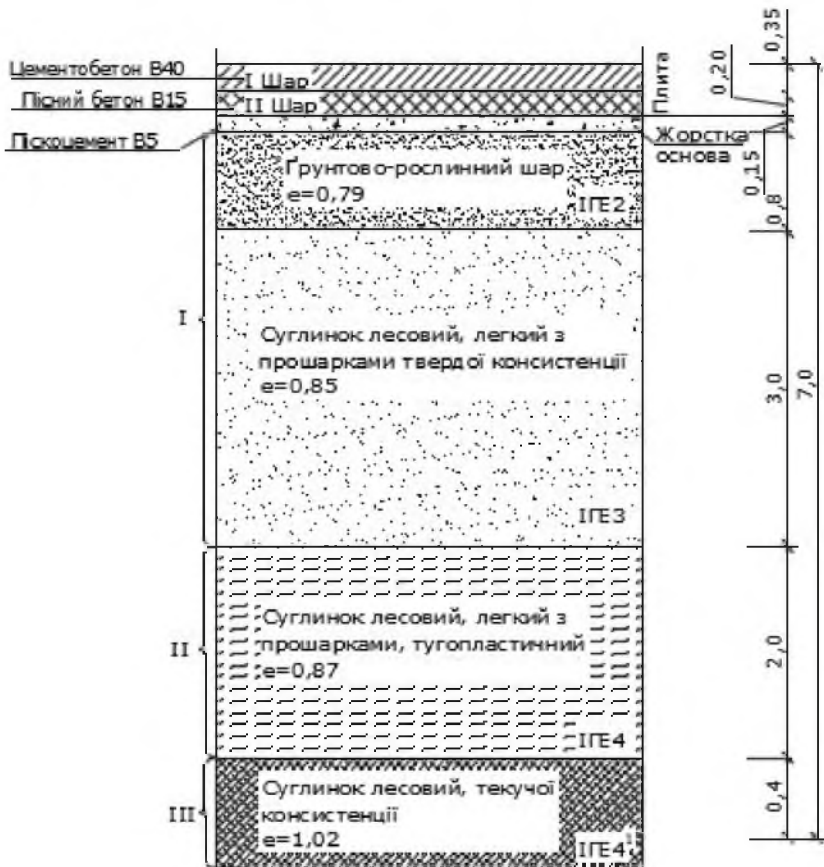
$$\nu_3 = 0,27; \gamma_3 = 1800 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

- **ґрунтова основа** –  $E = 22,1 \text{ МПа}$ .

Значення коефіцієнтів постелі для зазначених інженерно-геологічних елементів наступні:

- для ґрунтового шару ІГЕ-2 –  $K_{\text{se2}} = 70 \text{ МН} / \text{м}^3$ ;

- для ґрунтового шару типу ІГЕ-3 з урахуванням понижуючого коефіцієнту,  $K_{\text{se3}} = 70 (-0,35\%) = 45,5 \text{ МН} / \text{м}^3$ ;



**Рисунок 1** – Конструкція аеродромного покриття з урахуванням активної товщини ґрунтової основи

- для ґрунтового шару типу IГЕ-4  $K_{se4} = 70 (-0,35\%) = 45,5 \text{ МН} / \text{м}^3$  ;
- для ґрунтового шару типу IГЕ-4I  $K_{se4I} = 45,5 \text{ МН} / \text{м}^3$  .

Виконаємо обчислення еквівалентного коефіцієнта постелі з призначенням трьох розрахункових згрупованих шарів основи:

I – включає шари:

- ґрунтово-рослинний шар

$t_1 = 0,8; K_{s1} = 70 \text{ МН} / \text{М}^3;$   
 – шар з ІГЕ-3 –  $t_2 = 3,0 \text{ м}; K_{s2} = 45,5 \text{ МН} / \text{М}^3; t_1 + t_2 = 3,8 \text{ м};$   
 II – включає шар з елементу 4 –  $t_3 = 2,0 \text{ м}; K_{s3} = 45,5 \text{ МН} / \text{М}^3;$   
 $t_{II} = t_3 = 2,0 \text{ м};$   
 III – включає шар з елемента ІГЕ-41:  $t_4 = 0,4 \text{ м}; K_{s4} = 45,5 \text{ МН} / \text{М}^3;$   
 $t_{III} = t_4 = 0,4 \text{ м}.$

Визначаємо коефіцієнт постелі для I редукованого шару:

$$K_{SI} = \frac{K_{s1} \cdot t_1 + K_{s2} \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{70 \cdot 0,8 + 45,5 \cdot 3,0}{3,8} = 50,66 \text{ МН} / \text{М}^3; \quad (1)$$

$$K_{SII} = 45,5 \text{ МН} / \text{М}^3; K_{SIII} = 45,5 \text{ МН} / \text{М}^3.$$

Еквівалентний коефіцієнт постелі визначається за формулою:

$$K_{se} = \frac{K_{SI} + K_{SII} \cdot \alpha_2 + K_{SIII} \cdot \alpha_3}{1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{50,66 + 45,5 \cdot 0,13 + 45,5 \cdot 0,003}{1 + 0,13 + 0,003} = 50,04. \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \frac{t_{II} [1,6 \cdot D_2 - (t_I + 0,5t_{II})]}{t_I (1,6 \cdot D_2 - 0,5t_I)} = \frac{2 [1,6 \cdot 3,6 - (3,8 + 0,5 \cdot 2)]}{3,8 \cdot (1,6 \cdot 3,6 - 0,5 \cdot 3,8)} = 0,13, \quad (3)$$

$$\alpha_3 = \frac{t_{III} [1,6 \cdot D_2 - (t_I + t_{III})]^2}{t_I (1,6 \cdot D_2 - 0,5t_I)} = 0,003, \quad (4)$$

де  $D_2 = 3,6 \text{ м}$  для позакатегорійного нормативного колісного навантаження повітряного судна.

У якості розрахункового повітряного судна приймаємо Boeing 767-300.

Колісне навантаження обчислюється за формулою<sup>3</sup>:

$$F_d = \frac{F_n}{n_k} \cdot k_d \cdot \gamma_f = \frac{724,9}{4} \cdot 1,25 \cdot 1,0 = 226,53 \text{ кН}, \quad (5)$$

<sup>3</sup> Талах, С.М., Дубик, О.М., Лисницька, К.М., & Ільченко, В.В. (2019). Numerical simulation of hard airdrome coatings stress-strain state when interacting with weak ground base= Чисельне моделювання напружено-деформованого стану жорстких аеродромних покриттів при взаємодії зі слабкою ґрунтовою основою / Талах С.М., Дубик О.М., Лисницька К.М. // Збірник наукових праць. Серія: Галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава : Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2019. – №1 (52). – С. 124–132. DOI: 10.26906/znp.2019.52.1685



де  $F_d$  – розрахункове навантаження на колесо;

$n_k$  – число коліс основної опори,  $n_k = 4$ ;

$F_n$  – навантаження на основну опору,  $F_n = 724,9 \text{ кН}$ ;

$k_d, \gamma_f$  – коефіцієнти динамічності і подійомної сили,

$k_d = 1,25, \gamma_f = 1,0$ .

Еквівалентний радіус відбитка обчислюється за формулою:

$$R_c = \sqrt{\frac{F_d}{\pi \cdot p_a}} = \sqrt{\frac{226,53 \cdot 10^3}{\pi \cdot 1,21 \cdot 10^6}} = 0,244 \text{ м}, \quad (6)$$

де  $p_a$  – розрахункове значення надлишкового тиску повітря в пневматиках основної опори,  $p_a = 1,21 \text{ МПа}$ .

Сумарну жорсткість плити покриття визначається за формулою:

$$B = B_{\text{sup}} + B_{\text{inf}} + B_f, \quad (7)$$

де  $B_{\text{sup}}, B_{\text{inf}}$  – жорсткість плити відповідно верхнього та нижнього шарів, віднесена до одиниць ширини їх перерізів, обчислюється за формулами:

$$B_{\text{sup}} = \frac{E_{\text{b(sup)}} \cdot t_{\text{sup}}^3}{12(1 - \nu_{\text{sup}}^2)} = 0,085 \cdot E_{\text{b(sup)}} \cdot t_{\text{sup}}^3, \quad (8)$$

$$B_{\text{inf}} = \frac{E_{\text{b(inf)}} \cdot t_{\text{inf}}^3}{12(1 - \nu_{\text{inf}}^2)} = 0,085 \cdot E_{\text{b(inf)}} \cdot t_{\text{inf}}^3, \quad (9)$$

де  $B_f$  – жорсткість перерізів штучної основи покриття,

$$B_f = 0,085 \cdot E_{\text{b(f)}} \cdot t_f^3, \quad (10)$$

де  $E_{\text{b(sup)}}, E_{\text{b(inf)}}, E_{\text{b(f)}}$  – модулі пружності матеріалів жорстких шарів.

$$B_{\text{tot}} = B_{\text{sup}} + B_{\text{inf}} + B_f = 15,74 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2/\text{м}.$$

При виконанні умови

$$\frac{B_{\text{inf}}}{B_{\text{sup}}} = \frac{1,768 \cdot 10^3}{13,59 \cdot 10^4} \approx 0,13 < 2 \quad (11)$$

допускається улаштування двошарових покриттів з суміщеними швами.

Умовна плита має характеристики:

– сумарну товщину:

$$t_{\text{tot}} = t_{\text{sup}} + t_{\text{inf}} + t_f = 0,35 + 0,20 + 0,15 = 0,70 \text{ м};$$

- циліндричну жорсткість  $B = 15,74 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2/\text{м};$
- пружна характеристика плити при заданому коефіцієнті постелі  $K_{gs} = 50,04 \text{ МН}/\text{м}^3$  визначається за формулою:

$$l = \sqrt[4]{\frac{B}{K_{gs}}} = \sqrt[4]{\frac{15,74 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{50,04 \cdot 10^6}} = 1,332, \quad (12)$$

Максимальний згинальний момент в центральному перерізі плити від колісного впливу ПС В767-300 визначається за формулою:

$$m_{c,\text{max}} = m_1 + \sum_{i=2}^{i=4} M_{x(y)}^{i(\text{max})}; \quad m_d = \rho \cdot m_{c,\text{max}}, \quad (13)$$

де  $m_{c,\text{max}}$  – максимальний погонний згинальний момент у центральному перерізі плити;

$M_{x(y)}^{i(\text{max})}$  – максимальний момент від інших коліс основної опори літака;

$\rho$  – перехідний коефіцієнт від центрального максимального згинального моменту для нескінченно-довгої плити до згинальному моменту перерізу, що розглядається плити скінченних розмірів.

$$m_1 = F_d \cdot f(\alpha); \quad \alpha = \frac{R_c}{l} = 0,1832, \quad (14)$$

Максимальний розрахунковий згинальний момент з урахуванням характеру стикових з'єднань і нерівномірності накопичення залишкових прогинів за формулою:

$$m_d = \rho \cdot m_{c,\text{max}}; \quad \rho = k \cdot k_N, \quad (15)$$

де  $k$  – коефіцієнт, що враховує вплив плити скінченних розмірів з улаштуванням стикових з'єднань,  $k = 1,2$ ;

$k_N$  – коефіцієнт, що враховує збільшення згинального моменту в плиті внаслідок нерівномірного накопичення залишкових прогинів в основі,  $k_N = 1,1$ .

$$m_d = 85,89 \text{ кНм} / \text{м}$$

## 2. Визначення допустимих згинальних моментів у плиті покриття

Гранично допустимий згинальний погонний момент в бетонній плиті визначаємо, виходячи з розрахункового опору розтягу при згині за формулою:

$$m_u = \gamma_c \cdot R_{btb} \cdot \frac{b \cdot t^2}{6} \cdot k_u, \quad (16)$$

де  $\gamma_c$  – коефіцієнт умов роботи,  $\gamma_c = 0,75$ ;  $k_u = 1,28$ .

Визначається  $m_{u,inf}$ , при цьому  $b = 1$  м;  $R_{btb,inf} = 2,26$  МПа;  $k_m = 1,27$ ;  $t = 0,2$ ,

$$m_{u,inf} = \gamma_c k_m R_{btb} \frac{bt^2}{6} k_u = 0,75 \cdot 1,27 \cdot 2,26 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 0,2^2}{6} \cdot 1,28 = 14,464 \text{ кНм/м.}$$

Відповідно до формули (16) визначається розрахунковий погонний згинальний момент у верхньому шарі покриття:

$$m_{d,sup} = m_{-d} - m_{u,inf} = 85,89 - 14,464 = 71,43 \text{ кНм/м.}$$

Визначаємо  $m_{u,sup}$ , при цьому  $b = 1$  м,  $R_{btb,sup} = 3,73$  МПа,  $t = 0,35$ ;

$$m_{u,sup} = \gamma_c R_{btb} \frac{bt^2}{6} k_u = 0,75 \cdot 3,73 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 0,35^2}{6} \cdot 1,28 = 73,11 \text{ кНм/м.}$$

Умова граничного стану верхнього шару бетонної плити має вигляд:

$$m_{d,sup} \leq m_{u,sup}, \quad (17)$$

Перевіряємо умову (17) для верхнього шару плити, використовуючи формулу (16) для верхнього шару:

$$m_{d,sup} < m_{u,sup} \rightarrow 71,43 < 73,11 \text{ кНм/м.} \quad (18)$$

Умова задовольняється.

Умова граничного стану для нижнього шару:

$$m_{d,inf} \leq m_{u,inf}. \quad (19)$$

$$m_{d,inf} = k' \cdot m_{c,max} - m_{d,sup} = 1,2 \cdot 65,07 - 71,43 = 6,65 < 14,464 \text{ кНм/м.} \quad (20)$$

Умова задовольняється.

### 3. Чисельний розрахунок покриття на колісний вплив повітряного судна 767–300

Розрахунковий погонний згинальний момент у кожному з шарів аеродромного покриття не повинен перевищувати допустимого в межах  $\pm 5\%$ :

$$m_a^p \leq m_u, \quad (21)$$

де  $m_a^p$  – розрахунковий згинальний момент у верхньому або нижньому шарі;

$m_u$  – допустимий згинальний момент з урахуванням нормативного опору матеріалу шару на розтяг.

У нашому випадку, для нижнього шару покриття  $m_{dinf} = 6,65 \text{ кНм} / \text{м} < m_{uinf} = 14,46 \text{ кНм} / \text{м}$ , різниця становить близько 54%.

Нижній шар конструкції покриття не задовольняє умовам граничного стану (21) і явно є із завищеною жорсткістю. Існуючі норми розрахунку<sup>4</sup> явно застаріли, не враховують параметрів сучасних повітряних суден типу В767-300 та інших, а також не враховують наявність у ґрунтових основах слабких шарів ґрунту.

За матеріалами інженерно-геологічних вишукувань встановлено, що геологічний шар ІГЕ – 3 є дуже не однорідним і містить прошарки органічного ґрунту, завдяки чому здатний до нерівномірного просідання під навантаженням та замочуванні. Шар ІГЕ – 4<sup>1</sup> має велику пористість, коефіцієнт пористості  $e = 1,016$ , тому здатний до значного просідання.

Зважаючи на складність вихідних умов, для оцінки покриття, що аналізується, необхідно використовувати уточнені методики розрахунку покриттів з використанням чисельних методів.

Для виконання розрахунку покриття злітно-посадкової смуги при колісному навантаженні всіх коліс шасі повітряного судна В767-300 використаємо метод скінченних елементів (МСЕ), а саме

<sup>4</sup> СНиП 2.05.08-85. Аеродроми / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 59 с.

одну з найбільш універсальних схем МСЕ – моментну схему скінченних елементів (МССЕ)<sup>5; 6</sup>.

Розрахунок на міцність виконуємо шляхом дискретного моделювання набору плит скінченних розмірів на пружній вінклерівській основі з урахуванням односторонніх зв'язків. Використаємо спрощену математичну модель пружної основи до припущення про пропорційність між додатним прогином плити і реакцією основи враховуючи, що коефіцієнт пропорційності є величина змінна і залежить від координат точки (вузла) серединної поверхні плити, в якій визначається прогин і реакція основи:

$$q(x^2, x^3) = -c(x^2, x^3)\omega, \quad (22)$$

де  $c(x^2, x^3)$  – функція коефіцієнта пропорційності (постелі);  
 $\omega$  – додатній прогин у даній точці по нормалі до поверхні плити у деформованому стані.

Функція (22) може бути описана шляхом двомірної апроксимації з використанням певного ряду значень коефіцієнта постелі для розглянутого геологічного розрізу з урахуванням багатошаровості ґрунтів, що залягають в основі покриття і їх товщини, якщо в основу покладена величина еквівалентного загального модуля деформації ґрунту в даному перерізі.

Знаючи ряд значень коефіцієнта постелі в залежності від усередненого, по вертикалі товщі основи, загального модуля деформації ґрунту і використовуючи ту чи іншу аналітичну функцію: сплайна, тригонометричну, показникову, степеневу або іншу, – отримуємо конкретну функцію в даній області розрахункової моделі<sup>7; 8; 9; 10</sup>.

<sup>5</sup> Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. Моментная схема метода конечных элементов в задачах механики сплошной среды // Прикладная механика. 2002. Т. 38 (48). № 6. С. 24–63.

<sup>6</sup> Баженов В.А. Цыхановський В.К., Кислоокій В.М. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – Київ : КНУБА, 2000. – 386 с.

<sup>7</sup> Шимановский А.В., Цыхановский В.К., Талах С.М. Оптимизация комбинированных пространственных систем. – К. : Сталь, 2012. – 462 с.

<sup>8</sup> Henke S., Grabe J. Numerical modeling of pile installation // Proc. Of the 17th Intern. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (Alexandria, 2009). – Amsterdam: IOS Press, 2009. – P. 1321–1324. DOI: 10.3233/978-1-60750-031-5-1321

Так як ґрунтова основа є неоднорідною, з прошарками різних за щільністю ґрунтів, скористаємося для апроксимації тригонометричним сплайном:

$$C_N(x^2, x^3) = C_0 - (C_{\max} - C_0) \cdot \sin \frac{\pi x_N^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi x_N^3}{l^3}, \quad (23)$$

де  $C_0$  і  $C_{\max}$  – граничні значення коефіцієнтів постелі;  
 $x_N^2, x_N^3$  – поточні місцеві координати вузлів розрахункового фрагмента в глобальній системі координат;  
 $l^2, l^3$  – розміри розрахункового фрагмента в глобальній системі координат відповідно по  $z^2$  і  $z^3$ .

На основі конструктивної схеми покриття будуємо її еквівалентний аналог, при цьому:

$$t_1 = 0,35 \text{ м}; t_2 = 0,20 \text{ м}; t_3 = 0,15 \text{ м}; t_{\text{tot}} = t_1 + t_2 + t_3 = 70 \text{ см}.$$

Визначаємо центр ваги перерізу дискретної моделі реальної плити щодо координат  $xOy$ , поміщаємо в нього систему координат  $\bar{x}O_c\bar{y}$  і обчислюємо геометричні і фізико-механічні параметри умовної плити, еквівалентної реальній конструктивній моделі за поздовжньою і згинальною жорсткостям:

$$S_x^o = F^o \cdot y_c; \quad F^o = F_1 + F_2 + F_3 = 100 = (35 + 20 + 15) = 7000 \text{ см}^2; \quad (24)$$

$$\gamma_1 = 0,0025 \text{ кгс/см}^3; \quad \gamma_2 = 0,0024 \text{ кгс/см}^3; \quad \gamma_3 = 0,0018 \text{ кгс/см}^3;$$

$$\tilde{F}_o = F^o \cdot \gamma_{\text{cp}}; \quad (25)$$

$$\gamma_{\text{cp}} = \frac{t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2 + t_3 \gamma_3}{t_{\text{tot}}} = \frac{35 \cdot 0,0025 + 20 \cdot 0,0024 + 15 \cdot 0,0018}{70} = 0,0023;$$

$$y_c = \frac{S_x^o}{F^o}; \quad S_x^o = S_x^1 \gamma_1 + S_x^2 \gamma_2 + S_x^3 \gamma_3; \quad (26)$$

<sup>9</sup> Дубик А.Н., Селенков В.Н., Талах С.М. Прочностной расчет аэродромных покрытий при слабых грунтовых основаниях // Proceeding of the 16th Conference for Junior Researchers Science – Future of Lithuania. Transport engineering and management. Vilnius, Lithuania: Technika, 2013. P. 55–59.

<sup>10</sup> Аэродромные покрытия. Современный взгляд / В.А. Кульчицкий и др. – М.: Физико-математическая литература, 2002. – 528 с.

$$y_1 = 52,5 \text{ см}; y_2 = 25 \text{ см}; y_3 = 7,5 \text{ см};$$

$$S_x^1 = 35 \cdot 100 \cdot 52,5 = 18,375 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

$$S_x^2 = 20 \cdot 100 \cdot 25,0 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ см}^3; \quad (27)$$

$$S_x^3 = 15 \cdot 100 \cdot 7,5 = 1,125 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

$$S_x^o = 10^4 (18,375 \cdot 0,0025 + 5 \cdot 0,0024 + 1,125 \cdot 0,0018) = 599,25 \text{ кг}; \quad (28)$$

$$y_c = \frac{599,25}{7 \cdot 10^3 \cdot 0,0023} = 37,22 \text{ см}. \quad (29)$$

Визначаємо моменти інерції погонного перетину.

$$I_{\alpha\bar{x}}^0 = I_{\alpha\bar{x}}^1 + I_{\alpha\bar{x}}^2 + I_{\alpha\bar{x}}^3; \quad (30)$$

$$y_{\alpha\bar{x}}^1 = \frac{bt_1^3}{12} + F_1(y_1 - y_c)^2; \quad (31)$$

$$I_{\alpha\bar{x}}^2 = \frac{bt_2^3}{12} + F_2(y_2 - y_c)^2; \quad I_{\alpha\bar{x}}^3 = \frac{bt_3^3}{12} + F_3(y_3 - y_c)^2; \quad (32)$$

$$I_{\alpha\bar{x}}^1 = \frac{100 \cdot 35^3}{12} + 100 \cdot 35(52,5 - 37,22)^2 = 1,174 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{\alpha\bar{x}}^2 = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot 20(25 - 37,22)^2 = 0,653 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{\alpha\bar{x}}^3 = \frac{100 \cdot 15^3}{12} + 100 \cdot 15(7,5 - 37,22)^2 = 1,35 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{\alpha\bar{x}}^0 = (1,174 + 0,653 + 1,35) \cdot 10^6 = 3,177 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$E I_{(\alpha\bar{x})}^0 = E_1 I_{\alpha\bar{x}}^1 + E_2 I_{\alpha\bar{x}}^2 + E_3 I_{\alpha\bar{x}}^3; \quad (33)$$

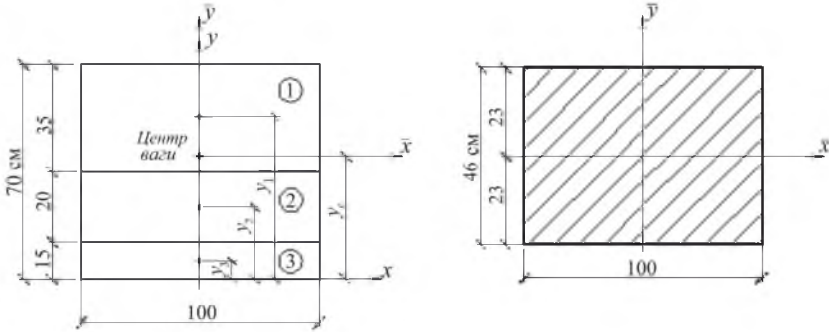
$$E I_{(\alpha\bar{x})}^0 = 3,67 \cdot 10^5 \cdot 1,174 \cdot 10^6 + 2,35 \cdot 10^5 \cdot 0,653 \cdot 10^6 + \\ + 1,02 \cdot 10^5 \cdot 1,35 \cdot 10^6 = 7,212 \cdot 10^{11} \text{ кгсм}^2;$$

$$EF^o = E_1 F_1 + E_2 F_2 + E_3 F_3; \quad (34)$$

$$EF^o = 3,67 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 35 + 2,35 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 20 + \\ + 1,02 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 15 = 1,9 \cdot 10^9 \text{ кгс}.$$

Визначається еквівалентна товщина умовної плити (еквівалентного погонного перетину):  $t_{(e)} = 45,5 \text{ см}$ . Приймаємо 46 см.

На рис. 2 наведена модель еквівалентного аналога конструкції аеродромної плити:



**Рисунок 2** – Побудова моделі еквівалентного аналога конструкції аеродромної плити

Визначаємо еквівалентний коефіцієнт Пуассона для матеріалу умовної плити:

$$v_{(e)} = \frac{0,22 \cdot 35 + 0,23 \cdot 20 + 0,27 \cdot 15}{70} = 0,2336.$$

Середню об'ємну вагу для матеріалу умовної плити визначаємо за формулою:

$$\begin{aligned} \gamma_{(e)} &= \frac{\gamma_1 \cdot t_1 + \gamma_2 \cdot t_2 + \gamma_3 \cdot t_3}{t_{(e)}} = \\ &= \frac{0,0025 \cdot 35 + 0,0024 \cdot 20 + 0,0018 \cdot 15}{45,5} = 0,00357 \text{ кгс} / \text{см}^3 \end{aligned} \quad (35)$$

Визначаємо еквівалентний модуль пружності:

$$E_{(e)} = \frac{EF^0}{100 \cdot t_{(e)}} = \frac{1,9 \cdot 10^9}{100 \cdot 45,5} = 4,176 \cdot 10^5 \text{ кгс} / \text{см}^2. \quad (36)$$

Визначаємо параметри колісного відбитку для скінченно-елементної моделі

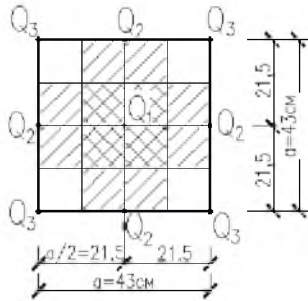


$$F_a = 226,53 \text{ кН} ; R_e = 0,244 \text{ м} ; P_a = 1,21 \text{ МПа};$$

$$a = R_e \sqrt{\pi} = 43,19 \text{ см}, \quad (37)$$

приймаємо  $a = 43$  см.

Основні елементи матриці навантажень пневмовідбитку (рис. 3)



**Рисунок 3** – Схема навантаження від колісного відбитку з зображенням вантажних площ вузлових навантажень  $Q_1, Q_2, Q_3$

$$Q_1 = \frac{a^2}{4} P_a = \frac{1849}{4} \cdot 1,21 = 559,3 \text{ кгс};$$

$$Q_2 = \frac{a^2}{8} P_a = 279,7 \text{ кгс}; \quad (38)$$

$$Q_3 = \frac{a^2}{16} P_a = 139,8 \text{ кгс}.$$

Повне навантаження на колесо

$$P = a^2 P_a = 43^2 \cdot 1,21 = 2237,3 \text{ кгс};$$

$$P = Q_1 + 4Q_2 + 4Q_3 = 559,3 + 4 \cdot 279,7 + 4 \cdot 139,8 = 2237,3 \text{ кгс}.$$

Розрахункова схема покриття будується так, щоб було включено колісне навантаження від всього шасі повітряного судна з урахуванням того, щоб основна опора літака розміщувалася на середній плиті розрахункового фрагмента.

Побудована дискретна модель, що містить дев'ять плит покриття злітно-посадкової смуги з розмірами  $10,0 \times 7,5$  м кожна з урахуванням

симетрії по фюзеляжу літака. Розрахункова схема і скінченно-елементна модель розрахункового фрагменту аеродромного покриття представлена на рис. 4. Еквівалентні дискретні відбитки колісних пневматиків з тиском  $P_a = 1,21$  МПа ( $12,1$  кгс/см<sup>2</sup>) згідно з представленою скінченно-елементною моделлю розміщені на одній середній плиті, тобто на десяти дискретних областях рівномірного поверхневого навантаження, приведені до вузлові за формулами (37), (38). Дискретна модель побудована так, що основна чотириколісна опора розміщена з дотриманням параметрів шасі літака.

Фрагменти топологічної моделі колісних відбитків на розрахунковій схемі покриття мають наступні сіткові координати  $S_1, S_2$  початків  $S_2^N, S_3^N$  та кінців  $S_2^k, S_3^k$  фрагмента колісного навантаження:

- 1)  $N_2^1 = 12$ ;  $N_3^1 = 25$ ;  $k_2^1 = 14$ ;  $k_3^1 = 27$ ;
- 2)  $N_2^2 = 16$ ;  $N_3^2 = 25$ ;  $k_2^2 = 18$ ;  $k_3^2 = 27$ ;
- 3)  $N_2^3 = 12$ ;  $N_3^3 = 30$ ;  $k_2^3 = 14$ ;  $k_3^3 = 32$ ;
- 4)  $N_2^4 = 16$ ;  $N_3^4 = 30$ ;  $k_2^4 = 18$ ;  $k_3^4 = 32$ .

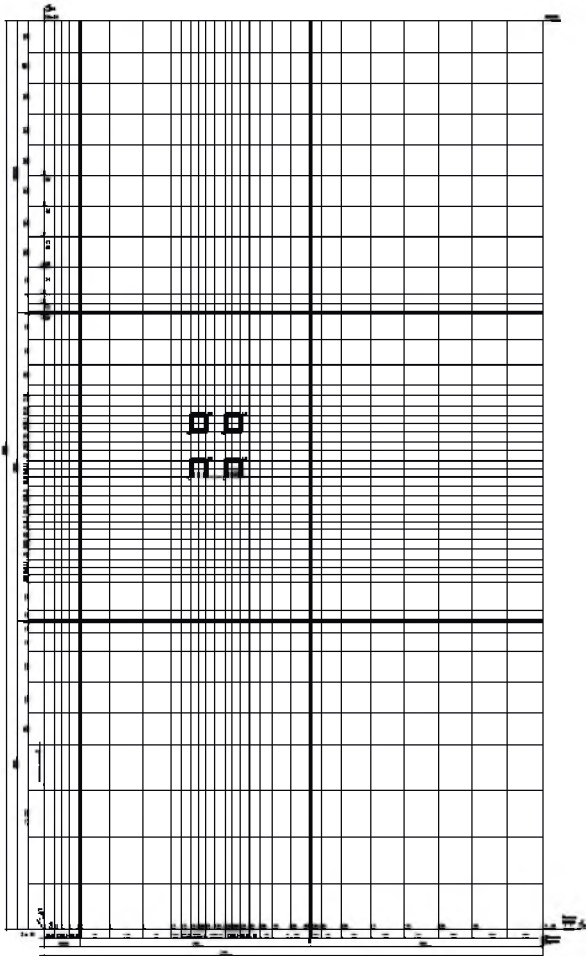
Початок сіткових координат  $S_1, S_2, S_3$  і глобальних координат  $OZ^1 Z^2 Z^3$  розрахункового фрагмента зв'язані з вузлом №1 – на перетині осі симетрії (зліва) та нижній кромці моделі:  $S_1^1 = 1$ ;  $S_2^1 = 1$ ;  $S_3^1 = 1 - Z_1^1 = 0$ ;  $Z_1^2 = 0$ ;  $Z_1^3 = 0$ . Розміри сіткової області складають:  $M1 \times M2 \times M3 = 2 \times 35 \times 43$ . Усього вузлів в СЕ-моделі –  $N_u = 2 \cdot 35 \cdot 43 = 3010$ , що відповідає системі рівнянь рівноваги  $k_p = 3010 \cdot 3 = 9030$  (без урахування накладених в'язів) і кількості скінченних елементів –

$$M_e^{pp} = (M2 - 1) \times (M3 - 1) = (35 - 1) \cdot (43 - 1) = 1428.$$

Результати чисельного розрахунку наведені в таблиці 1.

Максимальне переміщення у вузлі 1501 становить:  
 $u_{1501} = -1,43$  мм.

Максимальний погонний згинальний момент спостерігається під колесом основної опори літака, під крилом. Відповідно по  $Z^2, Z^3$  глобальної системи координат;  $c_0, c_{max}$  – граничні параметри еквівалентного коефіцієнта постелі при моделюванні конкретного лінзоподібного ґрунтового прошарку, закладеного симетрично



**Рисунок 4** – Розрахункова схема покриття ШЗПС при колісному впливі шасі ПС В 767-300

розрахунковій моделі, або граничне значення початкового коефіцієнта постелі у відповідності з формулами:

$$M_{1571} = -149,5 \frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

**Таблиця 1** – Результати чисельного розрахунку напружено-деформованого стану конструкції жорсткого аеродромного покриття

№ п/п	Сіт. Коорд. $S_2 = 16, S_3^N$	№ КЕ (вузла)	$U_N^{1'}$ , мм.	$M_N^{22}$ , кгм.	$M_N^{22}$ , кгм.	$R_N^{1'}$ , кг
1	1	31	-0,32	254,2	-91,3	165,5
2	3	171	-0,48	1830,8	203,	418
3	5	311	-0,67	3191,2	621,1	541,8
4	7	451	-0,93	2129,1	732,7	619
5	9	591	-1,15	-144,7	-42,2	290,7
6	10	661	-1,22	-580,4	1966,4	206,2
7	13	871	-1,29	-1872,2	734,2	257,7
8	15	1011	-1,34	-3280,5	-1213,9	333,4
9	17	1151	-1,38	-4586,3	-3003,2	201,1
10	19	1291	-1,40	-6923,4	-5722,6	312
11	21	1431	-1,43	-11819	-9902,7	315,8
12	22	1501	-1,43	-14517	-11830	256
13	23	1571	-1,43	-14950	-12520	207
14	23	1641	-1,42	-13313	-12303	276,7
15	25	1711	-1,40	-12043	-12230	343,1
16	26	1781	-1,37	-12797	-12965	337,1
17	27	1851	-1,34	-14029	-13709	262,6
18	28	1921	-1,32	-13302	-13411	192,4
19	29	1991	-1,29	-10258	-11965	232,9
20	31	2131	-1,18	-4465,7	-8875	293,2
21	33	2271	-1,03	-795,9	-6665,8	367,3
22	34	2341	-0,95	124,5	33	198,9
23	35	2411	-0,87	735,3	-2838,4	202,6
24	36	2481	-0,81	1530,2	-2188,2	438,2
25	38	2621	-0,65	1691,9	-930,4	510,9
26	40	2761	-0,53	860,3	-448,2	451,6
27	42	2901	-0,45	114,4	-305,5	411,7
28	43	2971	-0,42	-	-	196,3

що перевищує результат інженерного розрахунку на величину:

$$\Delta\% = \frac{(149,5 - 144,64)}{144,64} \cdot 100 = 3,36; \quad (39)$$

Також був виконаний контрольний розрахунок при різниці  $c_0 - c_{max} = 2,0$  кгс/см, при цьому розрахункове максимальне значення погонного згинального моменту дорівнює:

$$M_{1571} = -155,23 \frac{\text{кНм}}{\text{м}},$$

що перевищує результат інженерного розрахунку на величину:

$$\Delta\% = \frac{(155,23 - 144,64)}{144,64} \cdot 100 = 7,32. \quad (40)$$

Це незначно перевищує діапазон допустимих похибок, обумовлених похибками вихідних даних.

## ВИСНОВКИ

Досліджено напружено-деформований стан аеродромного покриття на слабкій ґрунтовій основі з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій багатопшарового півпростору, що містить шари залізобетонного покриття, штучної основи та активної зони ґрунтів.

Виконано інженерний розрахунок на міцність жорсткого бетонного покриття злітно-посадкової смуги на вінклерівській основі від колісного навантаження повітряного судна В767-300.

Отримані результати розрахунку на міцність запропонованої конструкції жорсткого покриття з використанням дискретної моделі типів ґрунтових основ свідчать про універсальність запропонованої методики дослідження напружено-деформованого стану тонких плит на неоднорідній основі. Ця методика дозволяє враховувати адекватність впливу наскрізних швів і стикових з'єднань плит на розподіл внутрішніх зусиль, нерівномірність значень коефіцієнта постелі ґрунтової основи та вплив цієї нерівномірності на величину внутрішніх зусиль, концентрацію нормальних і зсувних напружень в плиті.

Виконано порівняння результатів інженерного та чисельного розрахунку. Чисельний розрахунок висуває більш жорсткі вимоги до визначення напружено-деформованого стану жорстких аеродромних покриттів, ніж інженерний метод.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Международная организация гражданской авиации. Международные стандарты и рекомендуемая практика. Аэродромы. Приложение 14 к конвенции о международной гражданской авиации. Том 1: Проектирование и эксплуатация аэродромов. Montréal, Quebec, Canada НЗС 5Н7, 2009.
2. Цыхановский В.К., Козловець С.М., Коряк А.С. Расчет тонких плит на упругом основании методом конечных элементов. – К. : Изд-во “Сталь”, 2008. – 234 с.
3. Талах, С.М., Дубик, О.М., Лисницька, К.М., & Ильченко, В.В. (2019). Numerical simulation of hard airdrome coatings stress-strain state when interacting with weak ground base= Чисельне моделювання напружено-деформованого стану жорстких аеродромних покриттів при взаємодії зі слабкою ґрунтовою основою / Талах С.М., Дубик О.М., Лисницька К.М. // Збірник наукових праць. Серія: Галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава: Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2019. – №1 (52). – С. 124–132. DOI: 10.26906/znp.2019.52.1685
4. СНиП 2.05.08-85. Аэродромы / Госстрой СССР. – М. : ЦИТИ Госстроя СССР, 1985. – 59 с.
5. Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. Моментная схема метода конечных элементов в задачах механики сплошной среды // Прикладная механика. 2002. Т. 38 (48). № 6. С. 24–63.
6. Баженов В.А. Цыхановський В.К., Кислоокий В.М. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – Київ : КНУБА, 2000. – 386 с.
7. Шимановский А.В., Цыхановский В.К., Талах С.М. Оптимизация комбинированных пространственных систем. – К. : Сталь, 2012. – 462 с.
8. Henke S., Grabe J. Numerical modeling of pile installation // Proc. Of the 17th Intern. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (Alexandria, 2009). – Amsterdam : IOS Press, 2009. – P. 1321–1324. DOI: 10.3233/978-1-60750-031-5-1321
9. Дубик А.Н., Селенков В.Н., Талах С.М. Прочностной расчет аэродромных покрытий при слабых грунтовых основаниях // Proceeding of the 16th Conference for Junior Researchers Science – Future of Lithuania. Transport engineering and management. Vilnius, Lithuania : Technika, 2013. P. 55–59.
10. Аэродромные покрытия. Современный взгляд / В.А. Кульчицкий и др. – М. : Физико-математическая литература, 2002. – 528 с.

## REFERECES

1. Mezhdunarodnaya organizatsiya grazhdanskoj aviatsii. Mezhdunarodnyye standarty i rekomenduyemaya praktika. Aerodromy. Prilozheniye 14 k konventsii o mezhdunarodnoj grazhdanskoj aviatsii . Tom 1: Proyektirovaniye i ekspluatatsiya aerodromov. Montréal, Quebec, Canada H3C 5H7, 2009.
2. Tsykhanovskiy V.K., Kozlovets' S.M., Koryak A.S. Raschet tonkikh plit na uprugom osnovanii metodom konechnykh elementov. – K. : Izd-vo “Stal”, 2008. – 234 s.
3. Talakh, S.M., Dubyk, O.M., Lysnyts'ka, K.M., & Il'chenko, V.V. (2019). Numerical simulation of hard airdrome coatings stress-strain state when interacting with weak ground base= Chysel'ne modelyuvannya napruzhenno-deformovanoho stanu zhorstkykh aerodromnykh pokryttiv pry vzayemodiyi zi slabkoyu gruntovoyu osnovoyu / T-alakh S.M., Dubyk O.M., Lysnyts'ka K.M. // Zbirnyk naukovykh prats'. Seriya: Haluzeve mashynobuduvannya, budivnytstvo. – Poltava: Poltav's'kyy natsional'nyy tekhnichnyy universytet imeni Yuriya Kondratyuka, 2019. – №1 (52). – S. 124–132. DOI: 10.26906/znp.2019.52.1685.
4. SNiP 2.05.08-85. Aerodromy /Gosstroy SSSR. – M. : TSITP Gosstroya SSSR, 1985. – 59 s.
5. Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Tsykhanovskiy V.K. Momentnaya skhema metoda konechnykh elementov v zadachakh mekhaniki sploshnoy sredy // Prikladnaya mekhanika. 2002. T. 38 (48). № 6. S. 24–63.
6. Bazhenov V.A. Tsykhanovskiy V.K., Kyslookyy V.M. Metod skinchennykh elementiv u zadachakh neliniynoho deformuvannya tonkykh ta m'yakyykh obolonok. – Kyiv : KNUBA, 2000. – 386s.
7. Shimanovskiy A.V., Tsykhanovskiy V.K., Talakh S.M. Optimizatsiya kombinirovannykh prostranstvennykh sistem. – K. : Stal', 2012. – 462 s.
8. Henke S., Grabe J. Numerical modeling of pile installation // Proc. Of the 17th Intern. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (Alexandria, 2009). – Amsterdam : IOS Press, 2009. – P. 1321–1324. DOI: 10.3233/978-1-60750-031-5-1321.
9. Dubik A.N., Selenkov V.N., Talakh S.M. Prochnostnoy raschet aerodromnykh pokrytyiy pri slabykh gruntovykh osnovaniyakh // Proceeding of the 16th Conference for Junior Researchers Science – Future of Lithuania. Transport engineering and management. Vilnius, Lithuania : Technika, 2013. P. 55–59.
10. Aerodromnyye pokrytiya. Sovremennyy vzglyad / V.A. Kul'chitskiy i dr. – M. : Fiziko-matematicheskaya literatura, 2002. – 528 s.