МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ АЕРОНАВІГАЦІЇ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
КАФЕДРА ЕЛЕКТРОНІКИ, РОБОТОТЕХНІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ МОНІТОРИНГУ ТА ІНТЕРНЕТУ РЕЧЕЙ

ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ
Завідувач випускової кафедри
_______________ Шутко В.М.
«____»_____________ 2021 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

ЗДОБУВАЧА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ БАКАЛАВРА
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 171 «ЕЛЕКТРОНІКА»
ОПП «ЕЛЕКТРОННІ СИСТЕМИ»

Тема: «Генератор реалізацій ортогональних лінійних випадкових процесів **»**

Виконавець
студент групи ЕС-404Б ___________ Піхур Валерія Віталіївна

Керівник
Ст., викладач _________Бойко Іван Федорович

Нормоконтролер ___________ Сініцин Р.Б.

КИЇВ 2021

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інститут ______________________ Факультет ________________________________

Кафедра _____________ *ЕРМІТ* ____

Напрям (спеціальність) *171 Електроніка* ___________________________________

(шифр, найменування)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

____

«_____»___________2021 р.

ЗАВДАННЯ

на виконання кваліфікаційної роботи студента

Піхур Валерії Віталіївни

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: «Генератор реалізацій ортогональних лінійних випадкових процесів»

затверджена наказом ректора від "01" квітня 2020р .№ 526

2. Термін виконання проекту (роботи): з 17 травня до 20 червня 2021р

3. Вихідні дані до проекту (роботи):

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що підлягають обробці):

Лінійні випадкові процеси та їх ймовірнісні характеристики, випадкові процеси з лінійним представленням, базові моделі випадкових процесів, моделювання генератора ортогональних лінійних випадкових процесів, висновок, список джерел

5. Перелік обов’язкового графічного матеріалу:

6. Календарний план-графік

№ п/п	Завдання	Термін виконання	Підпис керівника
1.	Вступ	02.04.2021-05.04.2021	
2.	Підбір та аналіз матеріалів за темою дипломної роботи: підручники, Інтернет-ресурси.	06.04.2021-25.04.2021	
3.	Поетапне написання дипломної роботи. Формування введення теоретичної глави, далі аналітичної та проектної частин, а також висновку.	26.04.2021-15.05.2021	
4.	Врахування зауважень наукового керівника, перевірка оформлення роботи на відповідність методичним вказівкам кафедри. Здача науковому керівнику на відгук.	16.05.2021-01.05.2021	
5.	Подання на кафедру. Усунення недоліків. Оформлення пояснювальної записки.	02.06.2021-13.06.2021	
6.	Електронна версія доповіді, ілюстративний матеріал доповіді.	14.06.2021	

7. Консультанти з окремих розділів

Розділ	Консультант (посада, П.І.Б.)	Дата, підпис	
		Завдання видав	Завдання прийняв
	.		

8. Дата видачі завдання: “_____"___________ 2021 р.

Керівник кваліфікаційної роботи _____________ Бойко І.Ф.
(підпис керівника) (П.І.Б.)

Завдання прийняв до виконання __________________ Піхур В.В.
(підпис випускника) (П.І.Б.)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до дипломної роботи «Генератор реалізацій ортогональних лінійних випадкових процесів »: сторінок − 50, рисунків − 12, таблиць −2, літературних джерел − 35.

ЛІНІЙНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСОРИ, ДРОБОВИЙ ШУМ, RC та RLC ШУМІВ, ПАРАМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ, ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЦЕСИ, ГЕНЕРАТОР ОРТОГОНАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

Мета роботи: дослідження систем управління та обробки інформації при випадкових впливах.

Об`єкт дослідження: генератор реалізацій ортогональних лінійних випадкових процесів на лінійному фільтрі з імпульсною характеристикою.

Методи дослідження базуються на застосуванні електроніки, лінійних випадкових процесах та особливості моделювання ортогональних процесів.

Викладений матеріал у дипломній роботі рекомендуется використовувати при проведенні наукових досліджень, у навчальному процесі та в практичній діяльності при викладанні дисциплін.

ВСТУП

Зараз до інформаційних систем пред'являють все більш жорсткі вимоги у сенсі ефективності роботи. Для находження шляхів пів підвищення якості роботи цих пристроїв необхідно проводити їх повний та всебічний аналіз. В цей же час добре відомо, що детерміністичний аналіз у термінах диференціальних рівнянь не дає повної картини фізичних явищ, які є в інформаційних пристроях. Тому для дослідження інформаційних пристроїв використовуються теоретико-ймовірностні методи. По-перше, сигнали, які використовуються, по своїй природі мають випадковий характер,   по-друге різні шуми та перешкоди, також мають ймовірностний характер. Таким чином, найбільш повною математичною моделлю інформаційних сигналів та, пов'язаних з ним, перешкод і шумів, є випадковий процес.

Основне призначення інформаційних систем – це перетворення інформаційних сигналів. Отже , аналіз різних перетворень сигналів в інформаційній системі, зводиться до аналізу перетворень різного роду випадкових процесів. Задача такого аналізу зводиться до находження статистичних характеристик випадкового процесу на виході досліджувального пристрою. При цьому передбачається відомими як характеристики самого пристрою, так й статистичні характеристики процесу на вході.

Але при цьому також виникає проблема адекватного опису реальних випадкових процесів і явищ, в умовах яких працюють досліджувані системи. Крім цього, опис має бути досить зручним в сенсі простоти як в теоретичному плані, так і при експериментальному дослідженні на основі моделювання. Цим умовам великою мірою відповідають безмежно подільні процеси і, зокрема, лінійні випадкові процеси. . Лінійні випадкові процеси, як моделі реальних процесів, дозволяють описувати як стаціонарні, так і нестаціонарні процеси з гауссовими і негауссовими розподілами.

При описи лінійними процесами [1,2] можна виходити з фізики утворення процесу, що підлягає опису. Це найбільш доцільно використовувати при опису імпульсних випадкових процесів, які представляють собою результат впливу випадкових приблизно однакового рівня імпульсів (дробові, теплові та вібраційні, шуми, відображення радіолокаційних сигналів від протяжних об'єктів, радіоактивне випромінювання тощо). При збільшенні інтенсивності появи в одиницю часу випадкових імпульсів, коли вони накладаються один на одного, можна описувати й флуктуаційні шуми.

Іншій підхід полягає в використанні стохастичних характеристик процесів що досліджуються. При цьому і ядро, і породжувальний процес в моделі підбираються таким чином, щоб реальний процес і його математична модель були в певному сенсі стохастично еквівалентні. Це залежить від стохастичних характеристик досліджуваного процесу, якими володіє дослідник. Також від рівня стохастичною еквівалентності залежить і складність вирішення даної проблеми. Еквівалентність на рівні скінченновимірних розподілів досить складно отримати, відповідно складність полягає і в отриманні вихідного статистичного матеріалу.

Достатньо просто виглядає рішення цієї задачі при використанні рівня моментних функцій. При цьому потрібно задатися конкретним видом породжуючого процесу. Тобто фіксуванню трійки параметрів або послідовності семі інваріант. Складаючи і вирішуючи рівняння щодо моментних функцій, можна знайти вираз для ядра. При цьому можна використовувати сплайн-функції.[2]

РОЗДІЛ 1
ЛІНІЙНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЙМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

У літературі з теорії ймовірностей відомі необхідні і достатні умови для того, щоб граничні суми незалежних випадкових величин описувалися безмежноподільними розподілами. Якщо вважати випадковий процес сімейством випадкових величин, що залежать від тимчасового параметра, то граничні теореми і безмежно подільні властивості можуть бути перенесені і на випадкові процеси. Більш того, ті умови та передумови, які призводять до безмежної подільності не суперечать фізиці освіти більшості реальних випадкових процесів і явищ, що виникають в системах обробки інформації.[1,3,5,8] Спочатку ці процеси розглядаються з загальних позицій як моделі радіофізичних процесів. Потім досліджуються властивості і особливості опису в термінах безмежно подільних характеристичних функцій процесів з незалежними приростами, заданих на всій числовій осі з точкою початкового стану. Така специфіка розглядати процеси з незалежними приростами пояснюється тим, що вони використовуються в якості породжують для широкого класу безмежно подільних процесів і носять назву лінійних випадкових процесів. Саме лінійні випадкові процеси, як моделі реальних радіофізичних процесів і явищ, є основним об'єктом досліджень в роботі.

1.1. Безмежноподільні розподіли

Багато фізичних явищ випадкові тому, що ми не можемо не тільки практично, але й теоретично врахувати усіх незначних (за мірою впливу) факторів, які визначають кінцевий результат. Як правило, самі елементарні фактори також мають стохастичну природу та впливають на сумарний ефект незалежно один від одного. Досліджувати їх, кожне з елементарних дій, частіше за все неможливо.

Важніше мати теоретико-ймовірнісний опис сумарного ефекту, так як саме він визначає ефективність.

Тому важно питання граничних теорем для сум незалежних величин [5, 6]. Спочатку знайшли збіжність до нормального закону (центральна гранична теорема). В наступних дослідженнях теореми значну увагу приділялось знаходженню необхідних та достатніх умов збіжності.

Однак, як виявили, нормальний закон не є єдиним граничним законом для розподілу сум незалежних величин. Випадкові величини, які є сумами великого числа незалежних випадкових величин, які задовольняють деяким умовам, описуються цілим класом граничних розподілів, які получили назву безмежноподільних.

Закон розподілу $F(x)$ безмежно подільний, якщо при любому натуральному n він може бути представлений n- кратною згорткою деякого іншого, залежного від значення n, розподілу $F_n(x)$.

Через терміни характеристичних функцій: закон розподілу $F(x)$ безмежно подільний, якщо його характеристична функція $f(u)$ може бути представлена при будь-якому цілому n у вигляді n-й степені деякої іншої, яка залежить від n, характеристичної функції $f_n(u)$, тобто

$$f(u) = [f_n(u)]^n \tag{1.1}$$

Умову (1.1) зручно використовувати для перевірки безмежної подільності закону, якщо врахувати ще одне визначення.

Випадкова величина $\xi = \xi(w)$, де w – елемент простору випадкових подій Ω, є безмежно подільний, якщо при будь-якому цілому n вона може бути представлена у вигляді суми

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \tag{1.2}$$

де $\{\xi_k\}^n{}_{k=1}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які задано у тому же ймовірностному просторі (Ω, P), що і $\xi(w)$.

Будь-яка безмежно подільна величина ξ підлягає безмежно подільному закону розподілу. Обернене твердження не завжди вірно (приклад пуасонівський розподіл).

Одне з основних та необхідних умов, яке має задовольняти послідовність незалежних випадкових величин ξ_{kn}, $k=\overline{1,n}$, n=l,2,..., для того, щоб розподіл їх суми збігався до безмежно подільного[2] : при будь-якому ε>0

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n} P(|\xi_{kn}|>\varepsilon)=0\,. \tag{1.3}$$

Іншими словами, кожна випадкова величина ξ_{kn} з послідовності { ξ_{kn} }, має вносити безкінечно малий внесок до загальної суми ξ (1.2). Ця умова має назву рівномірної асимптотичної малості [3]. Якщо не накласти цю умову, то формулювання задачі безмежної подільності втрачає сенс, тому що розподіл може бути довільним. Також ця умову знімає обмеження в однаковості доданків. При виконанні умови (1.3) граничний розподіл для суми (1.2) завжди безмежно подільний. Умова рівномірної асимптотичної малості пояснює поширеність випадкових явищ з безмежно подільними розподілами. Завжди випадковість проявляється в результату дії дуже великого числа причин, незалежних один від одного при умові, що дія кожної з них безкінечно мало порівняно з результуючою дією.

Додаючи до умови (1.3) додаткові обмеження на доданки суми (1.2) можна прийти до різних конкретних розподілів.

Існує загальний (канонічний) вид характеристичної функції цих розподілів. Він має декілька аналітичних форм представлення, між якими є взаємозв’язок [8,9]. Найчастіше використовують так звану форму (формулу) Леві (без обмеження на другий момент).

Функція $f(u)$ безмежно подільна тоді і тільки тоді, коли вона допускає представлення виду

$$f(u)=iu\mu-\frac{\sigma^2u^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dL(x)\,, \tag{1.4}$$

де μ та $\sigma \ge 0$ – дійсні числові константи. Параметр σ^2 не завжди співпадає з дисперсією і визначається, виходячи з заданої характеристичної функції як границя

$$\sigma^2 = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln f(u) - \ln f(-u)}{2u^2}$$

Якщо безмежно подільна випадкова величина ξ має кінцеву дисперсію $D\xi$, то тоді

$$\sigma^2 = D\xi - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dL(x)$$

Функція $L(x)$ в (1.4)

$$L(x) = \begin{cases} M(x)\text{ï ðè } x < 0, \\ N(x)\text{ï ðè } x > 0, \end{cases}$$

де функції $M(x)$ и $N(x)$ мають назву спектральних функцій, або пуасонівських спектрів скачков даного БПР у формі Леві, $M(x)$ – спектр негативних, $N(x)$ – спектр позитивних пуасонівських скачків.

Функції $M(x)$ и $N(x)$ задовольняють наступним умовам:

1. Функції $M(x)$ и $N(x)$ – неубутні функції на інтервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, <\infty)$ відповідно. У нулі ці функції не визначені;

2. $M(-\infty) = N(\infty) = 0$

3. Інтеграли $\int_{-a}^{0} x^2 dM(x) < \infty$ та $\int_{-a}^{0} x^2 dN(x) < \infty$ при будь-якому a>0 .

Представлення (1.4) єдине і носить назву канонічного представлення П.Леві.

Основні властивості безмежно подільних характеристичних функцій:

1. Безмежно подільна характеристична функція на всій числовій осі ніде не звертається в нуль.

2. Якщо $f(u)$ - безмежно подільна характеристична функція, то $|f(u)|$ також є безмежно подільною характеристичної функцією.

3. Клас безмежно подільних характеристичних функцій замкнутий відносно операцій добутку кінцевого числа його елементів, граничного переходу і зведення в степінь a, де a - будь-яке позитивне число.

4. Щоб характеристична функція була безмежно подільна, необхідно і достатньо, щоб вона була межею послідовності добутків кінцевого числа характе-

ристичних функцій пуассоновского типу, тобто характеристичних функцій виду

$$f_2(u) = epx\left\{ iua_n + \lambda_n\left(e^{iub_n} - 1\right)\right\}, \lambda_n \geq 0$$

5. Якщо $g(u)$ – будь-яка характеристична функція, а n – будь-яке дійсне позитивне число, то

$$f(u) = \exp\left\{n\left[g(u) - 1\right]\right\}$$

є безмежно подільною характеристичною функцією.

6. Існує взаємно однозначна відповідність між характеристичними функціями $f(u)$, які визначаються співвідношенням (1.4), і поєднаннями параметрів $\{\mu, \sigma\}$ і функцій $L(x)$.

7. Усі розподіли з безмежно подільними характеристичними функціями мають невід'ємний коефіцієнт ексцесу. Зокрема, для гаусового закону розподілу він дорівнює нулю.

8. Розподіл з безмежно подільною характеристичною функцією не може бути зосереджено на кінцевому інтервалі, якщо він не зосереджений в одній точці, тобто якщо він не виродився. Отже, обмежена випадкова величина не може бути безмежно подільна.

Усе що характерно для безмежно подільних величин, характерно й для випадкових процесів. Багато з випадкових процесів являють собою результуючий ефект від накладання великої кількості незалежних один від одного "елементарних" випадкових процесів як імпульсного, так і флуктуаційного характеру. Прикладами таких процесів можуть бути добре відомі в електроніці дробовий і теплової шуми, фліккершум, вібраційні шуми, шуми в радіолокації, обумовлені відображеннями від земної або водної поверхні і т.п. У цих прикладах процес можна представити у вигляді алгебраїчної суми "елементарних" процесів, причому останні можна вважати стохастично незалежними і рівномірно малими. Так в дробовому і тепловому шуму "елементарні" процеси представляють собою ефект, викликаний рухом електронів або інших носіїв заряду, при вібраціях "елементарні" процеси виникають від зіткнення дрібних виступів шорсткуватих поверхонь, в радіолокації шум пояснюється накладенням великої кількості перевідбитих сигналів від елементарних відбивачів тій чи іншій поверхні, турбулентність являє собою результат накладення окремих малих збурень в рухомій рідині або газі і т.д.

У цих випадках досить обґрунтовано можна вважати, що елементарні обурення є незалежними, і, крім того, їх рівень в середньому однаковий. Тому є підстави вважати такі випадкові процеси і явиша безмежно подільними. Однак, на відміну від випадкових величин, для випадкових процесів безмежна подільність, як і багато інших властивостей, може бути визначена як в широкому, так і у вузькому сенсах. Якщо одномірна функція розподілу процесу безмежно подільна, то такий процес будемо називати безмежно подільним в широкому сенсі. Процес називається безмежно подільним у вузькому сенсі, якщо всі його скінченномірні функції розподілу є безмежно ділимими.

В якості примеров безгранично подільних випадкових процесів можна назвати вінеровський, пуасонеівський, детермінований процеси. Ці процеси є основними безгранично подільними, інші можна получити як лінійні суміші цих процесів.

Великий підклас безмежно подільних випадкових процесів складають стохастично безперервні процеси з незалежними приростами, куди відносяться, зокрема, і згадувані винеровский і пуассоновским процеси. Однак більш зручними є лінійні випадкові процеси, одержувані на основі стохастичного інтегрування за процесом з незалежними приростами. Лінійні випадкові процеси також є безмежно подільними у вузькому сенсі.

1.2. Породжуючі процеси з незалежними приростами

Серед різних класів випадкових процесів особливе місце займають процеси з незалежними приростами. Це пояснюється великим поширенням в природі різних фізичних процесів і явищ, які добре описуються випадковими процесами з незалежними приростами.

Випадковий процес $\eta(t)$, з $t \in T$ (з неперервним або дискретним часом) називається процесом з нензалежними приростами, якщо при деякому фіксованому $t_0 \in T$, для будь-яких

$$t_{-m} < t_{m+1} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_{-n}$$

(де $t_k \in T, \forall k \in \overline{[-m,n]}, m,n = 0,1,2,\ldots$), випадкові величини

$$\eta(t_{-m+1}) - \eta(t_{-m}), \eta(t_{-m+2}) - \eta(t_{-m+1}), \ldots, \eta(t_0) - \eta(t_{-1}), \eta(t_0), \eta(t_1) - \eta(t_0),$$
$$, \ldots, \eta(t_n) - \eta(t_{n-1})$$

є незалежними.

Випадкова величина $\eta(t_0)$ має назву граничного значення процесу з незалежними приростами, якщо $t_0 = \min T > -\infty$ або $t_0 = \max T < \infty$.

Випадкові процеси з незалежними приростами найбільш детально вивченийні в теоретичному плані [1, 2, 4, 9, 10, 17, 18, 20, 21]. Як дискретні, так і неперервні, процеси з незалежними приростами знаходять велике застосування в технічних додатках. Вони дозволяють описувати багато фізичні явища, дослідженню яких приділяється велика увага при вирішенні прикладних задач. Як приклад сюди можна віднести побудову математичних моделей шумових процесів в теорії передачі і перетворення інформаційних сигналів [17, 22 - 29].

Випадкові процеси з незалежними приростами тісно пов'язані з безмежно подільними розподілами, об цьому говорилось вище .

Частіше за все розглядаються випадкові процеси з незалежними приростами, які задані на додатній напіввісі [0, b], де $b \leq \infty$. Коли потрібно розглядати всю вісь R' = $(-\infty, \infty)$. То вважається, що еволюція процесу починається в t = 0 і на від'ємній напіввісі $(-\infty,\ 0)$ проходить еквівалентно еволюції на позитивній $(0, \infty)$. Тобто реалізації випадкового процесу з незалежними приростами $\eta(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, починаясь в точці t = 0, розвиваються стохастично еквівалеентно як в додатньому так і від'ємному напрямах часової осі *t*.

Випадковий процес з незалежними приростами в термінах характеристичних функцій достатньо зручно описувати.

Нехай $f_\eta(u,t) = \mathbf{M}e^{iu\eta(t)}$ – характеристична функція випадкового процесу $\eta(t), t \in [0,\infty)$ з незалежними приростами, а $f_{\Delta\eta}(u;s,\tau) = \mathbf{M}e^{iu\Delta'\eta(\tau)}$ – характеристична функція приростів $\Delta'\eta(\tau) = \eta(\tau) - \tau(s), s < \tau$ цього процесу.

З означення випливає

$$f_{\Delta\eta}(u;s,\tau) = \overline{f_{\Delta\eta}(u;s,\tau)}, \tau, s \in [0,\infty),$$
$$f_{\Delta\eta}(u;\tau_1,\tau_3) = f_{\Delta\eta}(u;\tau_1,\tau_2)\, f_{\Delta\eta}(u;\tau_2,\tau_3), 0 \le \tau_1 < \tau_2 < \tau_3,$$

Прирости не залежать від граничного значення $\eta(t_0)$, тому його, як правило, вважать не випадковим – рівним нуля $\mathbf{P}\{\eta(0) = 0\} = 1.$

Характеристичні функції $f_\eta(u,t)$ і $f_{\Delta\eta}(u;s,\tau)$ зв'язані

$$f_\eta(u,t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\Delta\eta}(u;t_{i-1},t_i) = f_{\Delta\eta}(u;0,t_1)\prod_{i=2}^{n} f_{\Delta\eta}(u;t_{i-1},t_i) =$$
$$= f_\eta(u;t_1)\prod_{i=2}^{n} f_{\Delta\eta}(u;t_{i-1},t_i), 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n.$$

На практиці часто оперують стохастично неперервними процесами.

Випадковий процес $\xi(t), t \in T$ називається стохастично неперервним у точці $t \in T$, якщо

$$\lim \mathbf{P}\{|\xi(t+\tau) - \xi(t)| > \varepsilon\} = 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Якщо випадковий процес стохастично неперервний у будь-якій точці $t \in T$, то його називають стохастично неперервним на *T*.

Зі стохастичної неперервності випадкового процесу не випливає неперервність його реалізацій.

Теорема Леві. Будь-який випадковий процес $\eta(t), t \in [0,\infty)$ з незалежними приростами можна зобразити у вигляді суми трьох стохачстично незалежних складових:

$$\eta(t) = m(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t), t \in [0,\infty).$$

де $m(t)$ - невипадкова функція, $\eta_1(t)$ - випадковий процес з незалежними приростами, що змінюється тільки стрибками у невипадкові моменти часу, $\mathbf{M}\eta_1(t) = 0$, $\eta_2(t)$ - стохастично неперервний випадковий процес з незалежними приростами з $\mathbf{M}\eta_2(t) = 0$.

Випадковий процес $\eta(t), t \in [0,\infty)$, $\mathbf{P}\{\eta(0) = 0\} = 1$ з незалежними приростами називається однорідним, якщо розподіл його приростів $\eta(t+\tau) - \eta(t), \tau > 0$ не залежить від t

Однорідний випадковий процес з незалежними приростами завжди стохастично неперервний.

Однорідний процес $\eta(t), t \in [0,\infty)$, $\mathbf{P}\{\eta(0) = 0\} = 1$ з незалежними приростами повністю характеризується заданням розподілу випадкової величини $\eta(1)$.

Дійсний випадковий процес $\eta(t), t \in [0,\infty)$ має назву процесу з ортогональними приростами, якщо $\mathbf{M}\eta^2(t) < \infty, \forall t$ і для будь-яких $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ випадкові величини $\eta(t_2) - \eta(t_1)$ і $\eta(t_4) - \eta(t_3)$ є ортогональними, $\mathbf{M}[\eta(t_2) - \eta(t_1)][\eta(t_4) - \eta(t_3)] = 0$

1.3 Лінійні випадкові процеси

Лінійним процесом назвемо випадковий процес $\xi(t)$, $t \in T$, що допускає представлення у виді стохастичного інтеграла

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)\, d\eta(\tau) \tag{1.5}$$

де $\eta(\tau)$, $\tau \in (-\infty , \infty)$ - центрований випадковий процес другого порядку з незалежними приростами, а $\varphi(\tau, t)$ – дійсна, що інтегрується з вагою $d\rho(\tau) = M|d\eta(\tau)|^2$ у квадраті, функція, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau, t)|^2 d\rho(\tau) < \infty \quad \text{при всіх } t \in T \ . \qquad (1.6)$$

Якщо додатково припустити, що φ(τ, t) неперервна в середньоквадратичному по τ при всіх $t \in T$, то процес $\xi(t)$ є стохастично неперервним.

Лінійний процес є безмежно подільним випадковим процесом. Це означає наступне. Якщо процес $\xi(t)$ допускає інтегральне представлення виду (1.6), в якому η(τ) - гільбертів процес з незалежними приростами і безмежно подільною характеристичною функцією $f_\eta(u;\tau)$, а $\varphi(\tau, t)$ - задана числова функція, що інтегрується в квадраті з вагою, то процес $\xi(t)$ цілком описується парою $\{f_\eta(u;\tau),\varphi(\tau, t)\}$ і всі його скінченновимірні функції розподілу є безмежно подільними.

Відзначимо, що клас безмежно подільних розподілів замкнутий по відношенню до лінійних операцій над випадковими величинами, а так як $\eta(\tau)$ має всі скінченновимірні розподіли, що є безмежно подільними, то і будь-який вектор $\{\xi(t_1), \ldots , \xi(t_n)\}$ є безмежно подільним і при відсутності гауссівської компоненти має характеристичну функцію виду

$$f(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{t}) = exp\ \{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [exp\ (ix\boldsymbol{\omega}) - 1 - ix\boldsymbol{\omega}]\ L(d\tau, dx)\}\ ,$$

де вектори $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots ,t_n)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots ,u_n)$ і $\boldsymbol{\omega} = u_1\varphi(\tau, t_1) + u_2\varphi(\tau, t_2) + \ldots + u_n\varphi(\tau, t_n)$. Міра L- міра стрибків і часу пуассонівського процесу $\pi(\tau)$, тобто $L((\tau_1, \tau_2)\cdot A)$ - математичне сподівання кількості стрибків процесу $\pi(\tau)$ на часовому інтервалі $((\tau_1, \tau_2]$ зі значеннями в борелівській множині А (наприклад, за величиною між числами x_1 і x_2).

Надалі будемо розглядати породжуючий процес $\eta(t)$, $t \in (-\infty , \infty)$ як однорідний випадковий процес з незалежними приростами і характеристичною функцією виду (1.5). У цьому випадку, як показано в роботі [4], одновимірна характеристична функція процесу (1.6) може бути записана у вигляді

$$f_\xi(u; t) = exp\{i\hat{u}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)\ d(\tau) - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t)\ d\eta(\tau) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\hat{u}x\varphi(\tau,t)} - 1 - \frac{i\hat{u}x\varphi(\tau,t)}{1+x^2}]dL(x)d\tau\}. \qquad (1.7)$$

Представлення лінійного випадкового процесу у вигляді (1.5) неоднозначне. Коли процес $\xi_1(t)$ заданий невипадковим ядром $\varphi_1(\tau, t)$ і процесом, що породжує, $\eta_1(t)$, то можна визначити такі $\varphi_2(\tau, t)$ та $\eta_2(t)$, що побудований на основі останніх процес $\xi_2(t)$ буде стохастично еквівалентним у розумінні розподілів процесу $\xi_1(t)$.

Вираз (1.5), не можна розглядати як інтеграл Лєбега-Стілт`єса в силу того, що реалізації породжуючого процесу $\eta(t)$ є функціями необмеженої варіації і ніде не диференціюються. Тому інтегральне представлення варто розглядати як стохастичний інтеграл за випадковою ортогональною мірою, побудованої на приростах процесу $\eta(t)$ [6] .

Як і інші випадкові процеси, лінійний процес може бути в широкому або вузькому сенсах. Якщо $\eta(t)$ випадковий процес з некорельованими приростами, то процес $\xi(t)$ має назву лінійного процесу в широкому розумінні.

Клас лінійних процесів (1.5) (в широкому та вузькому розумінні) замкнутий щодо лінійних перетворень. Так, якщо випадковий процес $\xi(t)$ виду (1.5), що є математичною моделлю деякого сигналу, перетворюється лінійним пристроєм з імпульсною перехідною характеристикою $h(\tau, t)$, що задовольняє умовам фізичної реалізовності, то на виході маємо відгук

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)\xi(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)\varphi(\sigma, \tau)\, d\eta(\sigma)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)d\eta(\tau),$$

$t \in (-\infty , \infty)$

де $\varphi(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, t)\, \varphi(\sigma, \tau)\, d\sigma$ позначає невипадкове ядро лінійного випадкове процесу на виході лінійного пристрою. Загальний вид характеристичної функції (1.6) процесу (1.7) дозволяє робити повний аналіз: знаходити семiінваріанти, початкові і центральні моменти, щільність розподілу імовірностей і функцію розподілу відгуку $\zeta(t)$. Наприклад, n-й семiінваріант $æ_n[\xi(t)]$ випадкового процесу $\xi(t)$ представленого співвідношенням (1.1.3), може бути визначений на підставі співвідношення

$$æ_n[\xi(t)] = æ_n[\eta(1)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^n(\tau, t)d\tau\,, \tag{1.8}$$

де $æ_n[\eta(1)]$ - n-й семиінваріант випадкової величини $\eta(1)$ і, крім того, передбачається, що $\varphi(\tau, t)t \in L_n(-\infty\,, \infty)$. Скориставшись зв'язком, що існує між моментами і семиінваріантами [7] , можна обчислити, наприклад, математичне сподівання і кореляційну функцію процесу виду (1.6):

$$m(t) = M[\xi(t)] = æ_1[\eta(t)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)d\tau$$

та

$$R(t, s) = M\{[\xi(t)\text{-}m(t)][\xi(s)\text{-}m(s)]\} = æ_2[\eta(t)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)\, \varphi(\tau,s,t)d\tau\ .$$

Зазначимо, що для стаціонарного випадкового процесу ξ(t), який допускаєзображення в інтегральній формі виду (1.1.3), ядро залежить від різниці аргументів, тобто одержимо:

$$\xi(t)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)d\eta(\tau), \quad t \in(-\infty,\infty). \tag{1.9}$$

Лінійний випадковий процес виду (1.6) можна розглядати як узагальнений випадковий процес [8,9].

Ми говорили в основному про процеси, неперервні в часі. Якщо в нас дискретні значення, то ми говоримо о лінійній випадковій послідовності.

Лінійною випадковою послідовністю називається послідовність виду

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{t,\tau}\zeta_\tau,\ \tau \in \mathbf{Z},$$

де $\varphi_{t,\tau}$ - невипадкова функція (ядро зображення) двох дискретних аргументів, $\zeta_\tau, \tau \in \mathbf{Z}$ - породжуючий білий шум з дискретним часом.

Якщо білий шум у вузькому розумінні, то лінійна випадкова послідовність у вузькому розумінні, якщо білий шум у широкому, то послідовність називають лінійною у широкому розумінні.

РОЗДІЛ 2
ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ З ЛІНІЙНИМ ПРЕДСТАВЛЕННЯМ

При дослідженні роботи багатьох інформаційних систем доводиться враховувати різного роду випадкові впливи. Це пояснюється тим, що реальні фізичні системи працюють в умовах впливу завад, які мають випадковий характер.

Таким чиниом, для аналізу функціювання різних систем найбільш раціональною є ймовірністна інтепритація явищ, які в них відбуваються. Рішення цієї задачи багато в чому залежить від можливості представлення та математичного опису різних реальних завад.

Сюди відносяться дробовий шум, тепловий шум, відображення зондуючих імпульсів від поверхні, різного роду метеообразованій, турбулентні явища, радіоактивний розпад і т.п. Сюди ж відноситься великий клас випадкових імпульсних процесів, тобто таких процесів, в яких окремі "елементарні" випадкові складові не перекриваються в часі. Якщо ж імпульси слідують один за одним досить близько, то результати дії різних "елементарних" імпульсів накладаються і ми приходимо до флуктуаційних процесів.

Часто при завданні випадкових процесів використовують конструктивні методи [1]:

1) за допомогою характеристичних функцій або функціоналов;

2) за допомогою різного роду операторів;

3) за допомогою диференційних рівнянь.

Широко відомо динамічне представлення процесів на основі одиничної функції Хевісайда (дельта-функції). При цьому відгук лінійного пристрою можна представити у вигляді інтеграла згортки від впливу сигналу і імпульсної або перехідною характеристики пристрою. Таке ж інтегральне уявлення можна отримати в разі випадкових впливів типу білого шуму. При цьому ми отримуємо уявлення відгуку у вигляді стохастичного інтеграла (лінійного випадкового процесу), ядром якого є імпульсна характеристика пристрою.

Завдання за допомогою стохастичного інтегралу належить до контруктивних методів другого типу.

2.1. Представлення стаціонарних та нестаціонарних шумів лінійним процесом.

Загальновизнаним є підхід до опису різного роду шумів і завад як результуючого ефекту від дії великого числа елементарних імпульсів, обумовлених різними непідвладними детерминированному опису і обліку випадковими чинниками [22,23]. Якщо такі імпульси з'являються в часі регулярним чином, їх середньостатистичні характеристики не змінюються в часі, то такі шуми і завади можуть бути описані стаціонарними в широкому розумінні випадковими процесами. В іншому випадку ми маємо нестаціонарний процес.

Важливо, що в будь-який момент часу, $t_0 \in T$ где T - інтервал часу (кінцевий або нескінченний), на якому розглядається вихідний потік випадкових елементарних імпульсів, перетин результуючого процесу $\xi(t)\big|_{t=t0}$, є випадковою величиною, отримуваною в результаті накладення великого числа випадкових впливів. Якщо передбачити що ці випадкові елементарні дії є стохастичними незалежними в тому сенсі що ймовірність появи кожного імпульсу в даний момент часу не залежить від того, скільки і коли з'явилося імпульсів до розглянутого моменту часу і, крім того, самі елементарні імпульси задовольняють умові рівномірної асимптотичної малості (1.3), то випадкова величина $\xi(t)\big|_{t=t0}$, буде описуватися безмежно діленим розподілом. У багатьох практичних випадках з зазначені вище припущення щодо потоку елементарних імпульсів не є занадто обмежувальними.

Розглянемо тепер виходний випадковий результуючий процес $\xi(t)$. Цей процес буде описуватися безмежно подільним одновимірним розподілом та задовольняє принципу суперпозиції, тобто є лінійним. В цьому випадку і багатовимірні розподіли процесу $\xi(t)$ будуть безмежно подільні, і ми отримаємо опис шумів за допомогою безмежно подільного випадкового процесу $\xi(t), t \in T$.

Внесок, який вносить *і*-й випадковий імпульс в формуванні значення випадкового процесу $\xi(t)$ в момент часу $t \in T$. Тоді розглянутий випадковий процес можна записати у вигляді

$$\xi(t) = \sum_i \xi_i(t), \quad t \in T$$

де сума по *і* проходить за тими елементарним діям, які беруть участь у формуванні випадкової величини $\xi(t)$, де *t* - фіксований параметр.[18,19]

Якщо формування випадкового результуючого процесу $\xi(t), t \in T$ проходить у безінерційному середовищу, або інерційністю якого можна знехтувати, а елементарні впливи задовольняють умові стохастичної незалежності в сукупності, то процес $\xi(t), t \in T$ можна з високим ступенем адекватності описати моделлю процесу з незалежними приростами. Як вже говорилось, послідовність скінченновимірних функцій розподілу процесу з незалежними приростами $\xi(t)$, буде повністю визначена одномірною функцією розподілу. Для дискретного процесу з незалежними приростами $\xi(t)$, для визначення одновимірної функції розподілу $F_\xi(x;t_n), t_n \in T, -\infty < x < \infty$ можна скористатися одновимірними функціями розподілу $F_i(x_i)$ випадкових елементарних впливів. У цьому випадку функція $F_\xi(x;t_n)$ буде являти собою *n*-кратну згортку функцій розподілу $F_i(x_i)$.

Для безперервних випадкових процесів $x(t)$ слід скористатися відомими з математичної статистики методами визначення одновимірної функції розподілу $F_\xi(x;t_n)$.

Маючи функцією розподілу досліджуваного безмежно подільного процесу $\xi(t)$ можемо визначити характеристическую функцію, і відповідно, визначити трійку $\{\mu(t), \sigma(t), L(t,A)\}$, які задають канонічну форму характеристичної функції (1.13), в загальному випадку неоднорідного процесу з незазежними приростами.

Розглянемо тепер коли елементарні імпульси впливають на інерційну среду формування результуючого процесу. При цьому будемо припускати, що виконується принцип суперпозиції. В цьому випадку випадковий результуючий процес може бути описаний досить повно іншим представником класу безмежно подільних процесів, а саме випадковим лінійним процесом виду (1.4).

Дійсно, нехай на фізичну среду, яка формує випадковий процес $\xi(t)$ діє в момент часу t_i деякий випадковий елементарний імпульс, або інший випадковий елементарний вплив. Тоді ефект від впливу таких випадкових імпульсів можна описати деякою функцією $\phi(t_i,t)$, залежної від поточного часу t і моменту впливу t_i. Інтенсивність кожного елементарного відгуку

$$\alpha_{ti} = \int_{t_i}^{\infty} \varphi(t_i,t)\, dt$$

є випадковою величиною. У цих припущеннях випадковий результуючий процес, може бути записаний у такий спосіб

$$\xi(t) = \sum_{i:ti\in(-\infty,t]} \alpha_{ti}\phi(t_i,t),$$

тобто підсумовуються ефекти від впливу усіх імпульсів, що впливають на середовище формування до моменту часу t включно.

Розглянемо складний пуассонівський процес $\pi_1(t)$. Якщо точки зростання, або скачки цього процесу збігаються з моментами впливу на середу формування елементарних імпульсів і, крім того, величина 1-го стрибка дорівнює інтенсивності елементарного відгуку α_{ti} то приріст процесу $\pi_1(t)$ в інтервалі часу Δt запишеться у вигляді

$$\pi_1(t+\Delta t) - \pi_1(t) = \sum_{ti\in\{t,t+\Delta t\}} \alpha_{ti}$$

Тоді права частина співвідношення може бути переписана з використанням процесу $\pi_1(t)$ так:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(\tau,t)\, d\pi_1(\tau)$$

Таким чином, ми отримуємо представлення шумового процесу $\xi(t)$ лінійною моделлю. Якщо інтенсивності впливів імпульсів однакові $a_{t1} = a_{t2} = ...a$, то складний пуассоновский процес замінюється звичайним процесом Пуассона $\pi(t)$, всі скачки якого однакові і дорівнюють одиниці.[20,23]

В загальному випадку це описує нестаціонарний процес $\xi(t)$. Якщо ефект, викликаний окремим елементарним впливом не залежить від моменту впливу t_i, то елементарний відгук можна описати функцією одного аргументу $\varphi(t)$:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau - t)\, d\pi_1(\tau)$$

Таким чином, ми приходимо до опису стаціонарного шуму.

Якщо середнє число елементарних дій в одиницю часу стає дуже великим, тобто параметр λ випадкового процесу $\pi_1(t)$ прямує до нескінченності, то дисперсія $\sigma_\pi^2(t)$ процесу $\pi_1(t)$, також прагне до нескінченності. Однак, як показано в [17], центрований та нормований пуассоновский процес

$$\frac{\pi_1(t) - m_{\pi 1}(t),}{\sigma_{\pi 1}^2}, \quad m_{\pi 1}(t) = \mathbf{M}\, \pi_1(t),$$

прагне до винеровского w (t) а лінійний процес

$$\frac{\xi(t) - m_\xi(t)}{\sigma_\xi^2(t)},$$

де $m_\xi(t)$ і $\sigma_\xi^2(t)$ - середнє і дисперсія відповідно цього процесу, прагне до гаусcівського лінійного випадкового процесу $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, t)\, dw(\tau)$

На підставі такого роду лінійних моделей завжди можна виписати в явному вигляді *n*-мірну характеристическую функцію і використовуючи перетворення Фур'є знайти *n*-мірний розподіл.

2.2 Опис дробового шуму

Дробовий шум відноситься до флуктуаційних завад, тобто завад які зумовлені флуктуаціями (віпадкове відхилення фізичної величини від середнього значення) тих чи інших величин. Флуктуаційна завада являє собою неперервне коливання, яке змінюється випадково. Для неї характерне дуже мале число викідів, які перевершують середне значення більше ніж у 3-4 рази, але великі (принципово нескінченні викиди завжди є.

Дробовий шум виникає в зв'язку з випадковим характером еміссії та руху електронів. Наприклад потужність шуму в діоді в полосі частот Δf на нагрузці R

$$P = 2qI_0 R\Delta f \ ,$$

де q - заряд електрона, I_0 - середне значення току, який протікає через діод.

Щоб здійснити математичний опис дробового шуму, зробимо ряд припущень щодо характеру самих "елементарних" імпульсів, які формують дробовий шум і виникають в результаті руху окремого носія заряду.

Будемо вважати, що прилад почав працювати в нескінченно віддалений момент часу. Позначимо $\eta(t),\ \ t \in (-\infty, \infty)$ випадковий процес, значення якого в кожен момент часу t чисельно дорівнює кількості імпульсів, що з'явилися в інтервалі часу від $-\infty$ до t. Як відомо, миттєве значення випадкового процесу являє собою випадкову величину. Окремі елементарні імпульси з'являються в випадкові моменти часу, тому їх кількість, що з'явилося на інтервалі $(-\infty, t]$ представляє також випадкову величину, рівну $\eta(t)$.[30]

Будемо вважати, що процессс появи випадкових імпульсів задовольняє умови стаціонарності, ординарности і відсутності післядії. Стационарность процесу появи елементарних імпульсів передбачає, що ймовірність певної кількості імпульсів на інтервалах часу залежить лише від кількості цих імпульсів і тривалості часових інтервалів. Умова ординарности полягає в тому, що ймовірність появи на досить малому інтервалі часу більш ніж одного імпульсу є величина вищого порядка малості, ніж величина самого інтервалу Δt, тобто якщо $P_k(\Delta t)$ ймовірність появи до імпульсів на інтервалі Δt, то $P_k\,(\Delta t) = o(\Delta t)\ при\ k > 1$. Умова відсутності післядії полягає в тому, що ймовірність виникнення k_i імпульсів на інтервалі часу Δt_i не залежить від того, скільки випадкових імпульсів і яким чином з'явилося до моменту часу t_i.

Умова відсутності післядії призводить до того, що події, які складаються в тому, що на інтервалах часу $\Delta t_i,\ i=1,2,...,n$ з'явяться $k_i,\ i=1,2,...,n$ випадкових імпульсів, є взаємно незалежними

$$P_{k1,k2,...,kn}\left\{\Delta t_i;\, i=1,2,...,n\right\}=\prod_{i=1}^{n}P_{ki}(\Delta t_i).$$

Звичайно, всі зазначені вище припущення в деякій мірі спрощують фізику процесів, пов'язаних з утворенням дробового шуму. Однак, якщо електронний пристрій працює в сталому режимі, без зміни зовнішніх чинників (температури, тиску), при відсутності просторового заряду і т.п., то зазначені припущення виконуються з великим ступенем точності.

У цих припущеннях процес появи випадкових імпульсів $\eta(t)$ буде являти собою пуассоновский процес, значення якого в будь-якій точці *t* описується роз-поділом Пуассона

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

де $P_k(t)$ - ймовірність появи до імпульсів до моменту часу *t*; κ - параметр розподілу. Будемо позначати цей процес $\pi(t)$. Збільшення цього процесу $\pi(\Delta)=\pi(t+\Delta)-\pi(t)$ будь якому інтервалі $\Delta t\in(-\infty,\infty)$ чисельно дорівнюють кількості імпульсів, що з'явилися на цьому інтервалі, причому

$$M\,[\pi(\Delta)]=\lambda\cdot\Delta,$$
$$M\,[\pi(\Delta)]^2=\lambda\cdot\Delta+0(\Delta)$$

Крім того, процес $\pi(t)$ належить до класу процесів з незалежними приростами, що відповідає прийнятому припущенням про відсутність післядії в процесі виникнення випадкових імпульсів. Тобто процес можна використати для математичного опису дробового шуму.[27,28]

Розглянемо випадок, коли швидкості вильоту електронів або пересування інших носіїв заряду однакові. Нехай момент часу $t=t_i$, відповідає вильоту електрона з катода. Тоді при прольоті електрона від катода до анода в навантаженні виникає імпульс струму. Початком цього імпульсу будемо вважати момент вильоту електрона $t = t_i$. Так як швидкості вильоту електронів за припущенням однакові, то і імпульси струму в анодному ланцюзі при прольоті електронів від катода до анода будуть володіти однією і тією ж формою, амплітудою і тривалістю. Випадковими будуть лише моменти виникнення цих імпульсів. Нехай форма кожного імпульсу описується функцією $\varphi(t)$ з умовами:

1. Умова фізичної можливості $\phi(t) = 0 \; при \; t < 0$, тобто до моменту вильоту електрона з катода відповідний йому імпульс дорівнює нулю.

2. Імпульс має кінцевою енергією

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)\, dt < \infty$$

Зазначені умови для реальних імпульсів завжди виконуються.

Якщо припустити, що елемент, відповідає принципу суперпозиції, тобто імпульси складаються лінійним чином, то результуючий ефект, в момент часу $t \in (-\infty, \infty)$ від всіх, що з'явилися раніше (т.е. при $t_i < t$) імпульсів, дорівнює

$$\xi(t) = \sum_{\{i: ti < t\}} \varphi(t - t_i)$$

де t_i - всі можливі випадкові моменти часу, що відповідають появі імпульсів, що передують t. Як випливає з прийнятих припущень, час між моментами появи двох сусідніх імпульсів розподілено по експонентному закону, а середнє значення цього інтервалу часу дорівнює величині зворотного параметру λ пуассонівського розподілу, що характеризує процес виникнення імпульсів $\pi(t)$.

У правій частині співвідношення підсумовування проводиться по моментам появи імпульсів t_i, що виникають на інтервалі $(-\infty, t)$, кількість яких є випадковою величиною, яка визначається пуассоновским процесом з незалежними приростами $\pi(t)$. Приріст процесу $\pi(t)$ на інтервалі $(-\infty, t)$ можна назвати випадковою мірою. Причому, так як $\pi(t)$ - процес з незалежними приростами і якщо він центрован, то і міра для непересічних інтервалів буде ортогональною. Це означає

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\Delta_i),$$

де $\pi(\Delta_1)$ - прирост процесу $\pi(t)$ на інтервалі Δ_i і відповідає випадковій величині, що дорівнює кількості імпульсів, що з'явилися на інтервалі Δ_i.

Тоді результуючий ефект $\xi(t)$ від все що виникають до моменту *t* імпульсів, що виражається правою частиною можна переписати так [24]

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\,(t - t_i)\,\pi(\Delta_i)$$

Зменшуючи величину інтервалу Δ_i і спрямовуючи його до нуля, перейдемо від суми до інтеграла, дискретні t_i замінимо змінною τ, а Δ_i - дифференціалом $d\tau$, т.е.

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\,\pi(d\tau) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\,\pi(d\tau)$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\,\pi(d\tau)$$

Таким чином, ми отримуємо уявлення дробового шуму в вигляді лінійного випадкового процесу, що належить до класу безмежно подільних процесів. ядро $\varphi(t-\tau)$ описує форму імпульсу, що виникає в момент часу, і дорівнює значенню цього імпульсу в момент часу *t*. Процес появи випадкових імпульсів в часі описується пуасоновскім процесом $\pi(t)$, також належить до класу безмежно подільних процесів.

Ближчим до реального процесу дробового шуму і більш складним є той випадок, коли швидкості вильоту електронів різні. Тоді і ефект, що виникає в анодної навантаженні при переміщенні електрона буде для кожного електрона свій і буде носити випадковий характер. Можна вважати, для одного і того ж електронного приладу, що функції розподілу як швидкостей всіх вилітають, так і ефекту від прольоту кожного електрона однакові.[24]

Щоб здійснити опис дробового шуму для випадку з різними швидкостями вильоту електронів, будемо, як і раніше, вважати, що виконуються умови ординарности, стаціонарності і відсутності післядії і що ефект від прольоту кожного електрона описується функцією одного і того ж виду, але з різними миттєвими значеннями такої функції для різних електронів. У цьому випадку ефект в момент часу *t* від прольоту кожного електрона, що виник в момент, можна описати добутком однієї і тієї ж функції $\varphi(t-\tau)$ на значення деякого випадкового числа α_i (випадкове для даного електронного приладу, але має конкретне значення для певного *i*-го електрона).

Тоді результуючий ефект в момент часу *t* можна представити виразом

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{\{i:t_i<t\}} \alpha_i \phi(t-t_i)$$

Так як швидкості вильоту електронів тепер різні, то процес виникнення відповідних їм випадкових імпульсів буде описуватися складним пуассоновським процесом $\pi_1(t)$), величина стрибка якого в точці t_i дорівнює випадкової величини a_i характеризується деяким розподілом $F(x)$. Прирост процесу $\pi_1(t)$ на інтервалі Δt, на відміну від процесу $\pi\ (t)$, вже не дорівнює числу стрибків на цьому інтервалі, а дорівнює сумі випадкових величин a_i, .

$$\pi_1(+\Delta t) - \pi_1(t) = \pi(\Delta t) = \sum_{\{i:t_i\in[t,t+\Delta t)\}} a_i$$

Тоді

$$\tilde{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,\pi_1(d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,\pi_1(d\tau)$$

де в останній рівності враховано властивість елементарних імпульсів.

Ми розглядали дробовий шум, коли електронний прилад, який його породжує, працює в сталому режимі, тобто коли залишаються незмінними зовнішні умови, наприклад, температура, напруга живлення анодного ланцюга, струм розжарення катода і т.п. В цьому випадку дробовий шум буде являти собою стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$. Це найчастіше можливо в тому випадку, коли електронний прилад працює досить тривалий час.

Коли електронний прилад знаходиться в несталому режимі, тобто змінюються з часом його параметри, отримуємо нестаціонарний дробовий шум. Даний випадок тможна добре охарактеризувати за допомогою моделі лінійного випадкового процесу. При цьому форма кожного імпульсу описується функцією $\varphi(t_i,t)$, яка залежить вже від двох аргументів, тобто як від моменту виникнення імпульсу t_i так і від поточного моменту розгляду його *t*. Підставляючи функцію $\varphi(t_i,t)$ в співвідношення приходимо до подання нестаціонарного дробового шуму в вигляді лінійного випадкового процесу:

$$\hat{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)\,d\pi(\tau)$$

або

$$\hat{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)\,d\pi_1(\tau)$$

$$\varphi(\tau,t)=0 \quad при \quad \tau>1$$

Отримані уявлення дробового шуму в вигляді лінійного випадкового процесу дозволяють легко знайти імовірнісні характеристики цього процесу.

Так середнє значення дробового шуму, описуваного моделлю, визначиться з виразу

$$M\ \xi(t)=k_1[\pi(1)]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-\tau)\,d\tau=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\tau)\,d\tau,$$

а кореляційна функція

$$R(s)=M\left([\xi(t_1)-M\xi(t_1)]\cdot[\xi(t_2)-M\xi(t_2)]\right)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,\varphi(\tau+s)\,d\tau$$

де $s=|t_2-t_1|$

Дисперсія дробового шуму $D[\xi(t)]=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau)\,d\tau$

Одномірна характеристична функція

$$f(u)=M\ e^{iu\xi(t)}=\exp\left\{\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{iu\phi(t)}-1\right]d\tau\right\},-\infty<u<\infty$$

Одновимірну щільність розподілу процесу $\xi(t)$:

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-iux+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{iu\phi(t)}-1\right]d\tau\right\}du,-\infty<x<\infty$$

Головна проблема в описі дробових шумів пристроїв полягає в експериментальному підборі функціональної залежності, яка найбільш адекватно описує результуючий ефект від проходження відповідного носія елементарного електричного заряду через ділянку електричного кола.

Найбільш важливо те, що опис дробового шуму моделлю лінійного випадкового процесу добре узгоджується із фізикою його утворення.

2.3 Особливості опису $RC-$ та $RLC-$ шумів.

$RC-$ та $RLC-$ шуми можна вважати відгуками відповідних елетронних пристроїв.

Таке уявлення найбільш легко отримати якщо припустити що на вхід впливає процес типу білого шуму. Таке припущення в принципі можливо, якщо на вході лінійної системи діє випадковий процес з широким і рівномірним по частоті спектром. Ширина спектра сигналу повинна бути більше смуги пропускання і відповідні діапазони частот повинні перекриватися.

В математичному плані це означає наступне. Вхідний сигнал $x(t), t \in T$ лінійної системи має фінітний АЧС

$$S(\omega) = \begin{cases} 0 & при \quad \omega < \omega_н, \\ N & при \quad \omega_н \le \omega \le \omega_в, \\ 0 & при \quad \omega > \omega_в, \end{cases}$$

де N - деяке дійсне число.

АЧХ лінійної системи має вигляд:

$$K(\omega) = \begin{cases} 0 & при \quad \omega < \omega_1, \\ \psi & при \quad \omega_1 \le \omega \le \omega_2, \\ 0 & при \quad \omega > \omega_2, \end{cases}$$

Якщо виконується умова $\omega_н < \omega_1 \le \omega_2 < \omega_в$, то ми можемо продовжити функцію на всю числову вісь наступним чином $s(\omega) = N = const, -\infty < \omega < +\infty$.

Випадковий процес з таким енергетичним спектром і буде випадковим процесом типу білого шуму.

Як з фізичної, так і з математичної точок зору вплив процеса з обома енергетичними спектромами на лінійне пристрій еквівалентні, тобто, на виході отримаємо стохастически еквівалентні в рамках перших двох моментів відгуки. Тому припускаємо, що на лінійну систему надходить процес типу білого шуму $x(t) = \xi(t)$ з енергетичним спектром виду $s(\omega) = N = const, -\infty < \omega < +\infty$.

В класі процесів з незалежними приростами знайдемо процес $\eta(t), t \in T$, де $\xi(t)$ й $\frac{d\eta(t)}{dt}$ будуть володіти одними і тими ж ймовірносними характеристиками і задані на одному і тому ж імовірнісному просторі $\{\Omega, f, P\}$,

$$P\left[\xi(t) = \frac{d\eta(t)}{dt}\right] = 1, \quad t \in T$$

Імпульсну перехідну характеристику лінійної системи позначемо через $\phi(t)$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{j\beta(\omega)}\, e^{j\omega t} d\omega,$$

де $\beta(\omega)$ - фазочастотная характеристика лінійної системи.

Використовуючи інтеграл згортки знаходимо відгук

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-\tau)\,d\eta(\tau),$$

де враховано, що для фізично реальної системи виконується умова фізичної реалізованності $\phi(t)$ при $t < 0$.

Таким чином, бачимо, випадковий стаціонарний лінійний процес. Отримаємо відгук лінійної системи, параметри якої змінюються в часі. Так як в цьому випадку амплітудно-частотна характеристика системи, залежить від двох параметрів: частоти ω і часу t, тобто має вигляд $K(\omega;t)$. В цьому випадку відгук можна описати нестаціонарним лінійним випадковим процесом [24]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, t)\,d\eta(\tau)$$

где

$$\phi(\tau,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega,t)\, e^{j\beta(\omega,t)}\, e^{j\omega\tau} d\omega\,,$$

Розглянемо випадок, коли на вхід лінійної системи з імпульсною характеристикою $\phi(\tau,t)$, яка задовольняє умові фізичної реалізованності, впливає безмежно подільний випадковий процес $\tilde{\xi}(t)$ (Див. Рис. 2.1). Система здійснює деякий лінійне перетворення випадкового процесу $\tilde{\xi}(t)$ и на виході отримуємо відгук

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau,t)\,\tilde{\xi}(t)\, d\tau$$

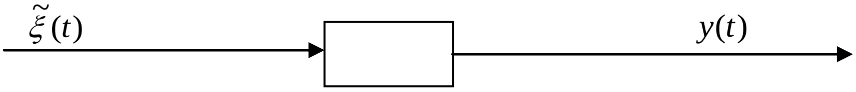

Рис. 2.1. Лінійна система

Так як випадковий процес $\tilde{\xi}(t)$ безмежно подільний, то йому завжди можна поставити у відповідність стохастически еквівалентний лінійний випадковий процес $\xi(t)$. Ц відбувається таким чином [18]. На вході досліджуваної системи умовно "добудовується" лінійна ланка з імпульсною перехідною функцією $\psi(\tau,t)$, на яку немає необхідності накладати умови фізичної реалізованності, тому що "добудовувана" ланка умовна і фізично не існує. Покладемо, що на вхід "добудованої" ланки надходить випадковий процес $\frac{d\eta(t)}{dt}$ типу білого шуму, де $\eta(t)$ - процес з незалежними приростами (рис. 2.2.)

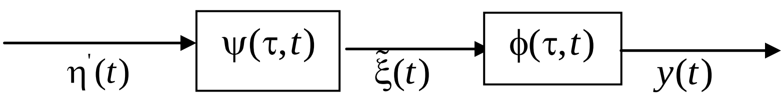

Рис. 2.2. Лінійна система з "добудованим" лінійним ланкою

Перехідну функцію $\psi(\tau,t)$ і випадковий процес $\eta(t)$ підбирають таким чином, щоб на виході "добудованої" ланки випадковий процес $\xi(t)$ був стохастично еквівалентен випадковому процесу $\tilde{\xi}(t)$. Критерієм стохастичної еквівалентності двох процесів зазвичай служить співвідношення

$$P\left\{\tilde{\xi}(t)=\xi(t)\right\}=1,$$

яке повинно виконуватися при будь-якому $t\in T$. Цей критерій еквівалентності можна замінити більш прийнятним для використання рівністю відповідних одновимірних розподілів або характеристичних функцій. Будемо виходити з рівності одновимірних характеристичних функцій процесів $\tilde{\xi}(t)$ и $\xi(t)$ т.е. $f_{\tilde{\xi}}(u;t)=f_{\xi}(u;t), -\infty<u<\infty.$

Тоді маємо систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} |t|\,\tilde{\mu}=\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)\,d\tau \\ |t|\,\tilde{\sigma}^2=\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^2(\tau,t)\,d\tau \\ |t|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\hat{i}ux}-1-\dfrac{i\hat{u}x}{1+x^2}\right)\tilde{d}L(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{\hat{i}ux\psi(\tau,t)}-1-\dfrac{i\hat{u}x\psi(\tau,t)}{1+x^2}\right]dL(x)\,d\tau \end{cases}$$

Завдання полягає в тому, щоб, знаючи трійку параметрів $\left\{\tilde{\mu},\tilde{\sigma},\tilde{L}(x)\right\}$, що визначають характеристичну функцію $f_{\tilde{\xi}}(u;t)$ впливу процесу $\hat{\xi}(t)$, знайти ядро $\psi(\tau,t)$ і параметри породжує процесу $\eta(t)$, тобто трійку параметрів $\{\mu,\sigma,L(x)\}$. Це вирішується не однозначно. Можна задатися невипадковим ядром $\psi_1(\tau,t)$ та визначити значення параметрів породжучого процесу $\{\mu_1,\sigma_1,L_1(x)\}$. Можна задатися породжуючим процесомє процесом $\eta(x)$, тобто зафіксувати трійку $\{\mu_2,\sigma_2,L_2(x)\}$ і підставивши їх, знайти явне вираження для ядра $\varphi_2(\tau,t)$. При цьому в загальному випадку ядро $\psi_1(\tau,t)$ не збігається з ядром $\psi_2(\tau,t)$, як і значення параметрів $\mu_1,\sigma_1,L_1(x)$ не збігаються з параметрами $\mu_2,\sigma_2,L_2(x)$. Та все ж при цьому виконуються співвідношення

$$P\{\xi_1(t)=\xi_2(t)\}=1;\qquad P\left\{\xi_1(t)=\tilde{\xi}(t)\right\}=1;\qquad P\left\{\xi_2(t)=\tilde{\xi}(t)\right\}=1,$$

де $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ задаються відповідно $\left\{\psi_1(\tau,t);\ \mu_1\sigma_1,L_1(x)\right\}$ та $\left\{\psi_2(\tau,t);\ \mu_2\sigma_2,\,L_2(x)\right\}$. В цьому і є неоднозначність задачі.

Таким чином, ставлячи собі або функцією $\psi(\tau,t)$, чи параметрами $\mu, \sigma, L(x)$, знаходимо невідомі параметри або функцію і отримуємо лінійне уявлення впливає процесу $\xi(t)$ (див. рис. 2.2):

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau,t)\, d\eta\,(\tau)$$

Знаходимо лінійне уявлення для відгуку лінійного ланки (рис. 2.1)

$$y(t) = \varphi(\tau,t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma,t)\, d\eta\,(\sigma) \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma,t)\, d\eta(\tau)$$

де ядро $K(\sigma,t)$ згортка

$$K(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma,t)\, \psi(\sigma,t-\tau)\, d\tau$$

РОЗДІЛ 3.
БАЗОВІ МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

При опису випадкового процесу використовюються в загальному випадку два підходи – це непараметричний опис статистик та, відповідно, параметричний.

3.1. Параметрична модель випадкового процесу.

В параметричній моделі використовується опис процесу через кореляційну функцію. Іноді виходячи із зв’язку спектральної щільності потужності та автокореляційної функції. Ми розглянемо підхід зв’язаний з каноничним розкладом випадкового процесу.

Випадковий процес $\xi(t)$ можна представити у вигляді

$$\xi(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t),$$

де U_k - коефіціенти розкладу випадкового процесу, $\varphi_k(t)$ - ортогональний невипадковий базис.

В якості крітерію адекватності можна взяти крітерій мінімуму середньоквадратичної похибки.

$$\Delta = M\left[\left\{\xi_M(t) - \xi(t)\right\}^2\right] = \min,$$

$$M\left[\xi_M(t)\right] = M\left[m_x(t)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} M\left(U_k\right)\varphi_k(t).$$

Для забезпечення рівності математичний очікувань моделі та процесу, необхідно рівність суми нулю. Це можливо коли усі випадкові величини U_k центровані. Подальша розробка моделі зводиться до пошуку U_k.

3.2 Параметричні моделі випадкових процесів.

Параметричний підхід зв'язан з використанням модельних представлень процесів, які повинні моделюватися, враховують властиві їм внутрішні закономірності.

Модель часового ряду, яка використовується для апроксимації багатьох стохастичних процесів з дискретним часом, описується виходом фільтру з лінійним розносним рівнянням (рис. 3.1)

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]u[n-k],$$

де $x[n]$ – послідовність на виході казуального фільтру, який формує спостережувані дані, $u[n]$– вхідна послідовність.

Системна функція $H(z)$ має раціональну форму

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

в якій поліноми визначаються наступним чином

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a(k) z^{-k},$$

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{q} b(k) z^{-k},$$

$$H(z) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} h(k) z^{-k}.$$

При цьому вважається, що нулі поліномів $A(z)$ та $B(z)$ знаходяться усередині одиничного кола в z- площині, тобто фільтр з мінімально-фазовий та стійкий.

Z-перетворення автокореляції вихідної послідовності $x[n]$ та автокореляції вхідного випадкового процесу $u[n]$ зв'язані співвідношенням

$$P_{xx}(z) = P_{uu}(z) H(z) H^*(1/z^*) = P_{uu}(z) \frac{B(z) B(1/z^*)}{A(z) A(1/z^*)}$$

Рис. 3.1 Функціональна схема параметричної моделі

Послідовність $u[n]$ поступає на вхід формуючого фільтру з дискретною СФ $H(z)$. На виході фільтру формується випадкова послідовність $x[n]$, властивості якої визначаються структурою та значеннями параметрів формуючого фільтру й властивостями вхідного сигналу $u[n]$.

Якщо потрібно змоделювати послідовність у вигляді аддитивної суміші параметричної моделі $x[n]$ та деякого впливу $\xi[n]$, то в схему додається джерело завади $\xi[n]$, яке формується окремим шумовим генератором (рис. 3.1), який не є составною частиною параметричної моделі.

В залежності від завдання поліномів A(z) та B(z) розглядають моделі ковзного середнього (КС), авторегресії (АР) та авторегресіїї-ковзного середнього (АРКС).

Вважатемемо, що порождающий процес це білий шум з нульовим середнім значенням та дисперсією p_w, так що $P_{uu}(z)=p_w$.

Якщо усі коефіцієнти $a(k)$, а відповідно і A(z), дорівнють нулю, то в нас модель ковзного середнього (КС або МА) з порядком q. Модель описує безінерційне перетворення випадкового процесу.

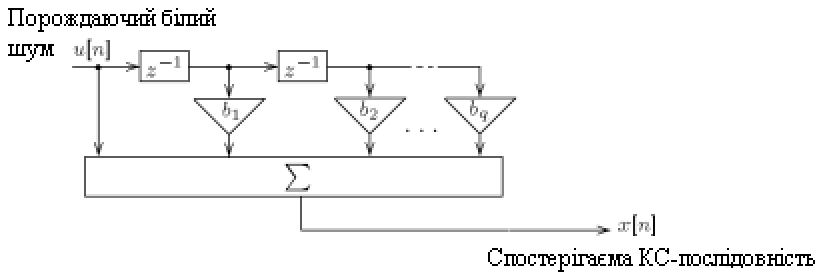

Рис. 3.2 Функціональна схема формування параметричної моделі КС(q)

$$x[n]=\sum_{k=1}^{q} b[k]u[n-k]+u[n]$$

Якщо коєфіцієнти $b(k)=0, k=1,2,\dots,p$ дорівнюють нулю, ми отримаємо авторегресійну модель порядку p.

$$x[n]=-\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k]+u[n]$$

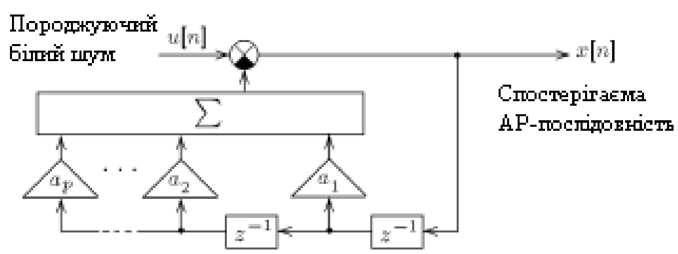

Рис. 3.3 Функціональна схема формування параметричної моделі АР(p)

Якщо присутні як елементи ковзного середнього, так і авторегресії. Тобто модель має вигляд

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]u[n-k].$$

То ми говоримо об моделі авторегресії-ковзного середнього з парядком (p,q) (АРКС(p,q)).

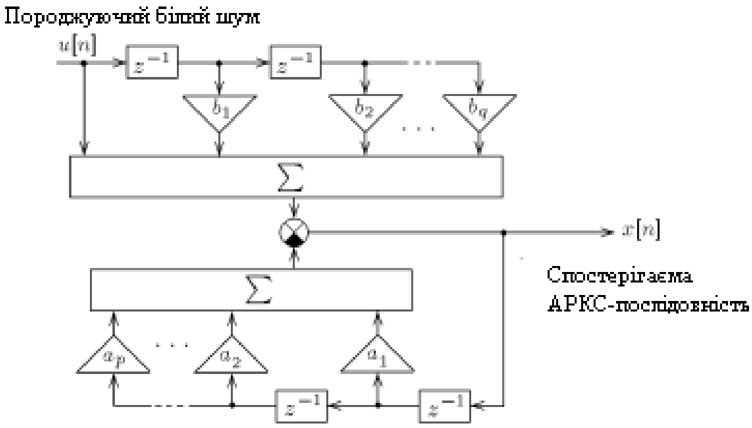

Рис. 3.4 Функціональна схема формування параметричної моделі АРКС(p,q)

3.3 Особливості моделювання ортогональних процесів

При моделюванні ортогональних процесів використовуються такіж самі методи, як і в загальному випадку. Але з деякими відмінностями, які враховують ортогональність вихідних процесів.

Звичайно, поліноми називаються ортогональними, якщо послідовність дійсних поліномів $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...$, а також будь-які два різних поліномуа цієї послідовності ортогональні в сенсі деякого скалярного добутку, який задан у просторі $L_{2,\rho}\left[a,b\right],\ f(x)\in L_{2,\rho}\left[a,b\right]$. (a,b) - інтервал ортогональності, $\rho(x)$ - міра, або весова функція.

$$\int_a^b \left| f(x)\right|^2 \rho(x)dx < \infty$$

Якщо в отриманому просторі скалярний добуток

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

дорівнює 0, то ці функції ортогональні.

Ортогональний базис вважається ортонормованим, якщо всі його елементи мають единичну норму

$$\left\| p_n \right\| = h_n = 1$$

$$< p_m, p_n >= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

При моделюванні випадкового процесу це отримується декількома способами. Головні це

- ортогоналізацією вже змодульованих процесів, наприклад за методом Грама-Шмідта;
- використання ортогональних фільтрів(ортогонального базису), в якості формуючого лінійного фільтра.

РОЗДІЛ 4
МОДЕЛЮВАННІЯ ГЕНЕРАТОРА ОРТОГОНАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Як ми вже говорили лінійна послідовність має вигляд

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j,t)\xi_j,$$

де $\varphi(j,t)$ - невипадкова функція двох дискретних аргументів, для якої задовольняється умова

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\varphi(j,t)\right|^2 < \infty, \quad \forall t \in Z,$$

$\xi_j,\ j \in Z$ - породжувальний білий шум з дискретним часом, який може бути білим шумом як у вузькому розумінні, так і у широкому.

Моментні функції послідовності:

$$m(t) = M\zeta(t) = \kappa_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j,t);$$

$$R(t,s) = M\left\{\left[\zeta(t) - m(t)\right]\left[\zeta(s) - m(s)\right]\right\} = \kappa_2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j,t)\varphi(j,s), \quad t,s \in Z$$

де κ_1, κ_2 - комулянти першого та другого порядків.

Якщо ми візьмемо стаціонарні лінійні випадкові послідовності, ядро яких $\varphi(j,t)$ залежить тільки від різниці аргументів $\varphi(j,t) = \varphi_{t-j} = \varphi(\tau), \tau = t - j$. Послідовніть у цьому випадку виглядає

$$\zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{t-j}\xi_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \xi_{t-j}, t \in Z,$$

Моментні функції

$$m(t) = \kappa_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j = m;$$

$$R(t,s) = \kappa_2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \varphi_{j+\tau} = R(\tau).$$

Візьмемо $\{\ldots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\ldots\}$ - дискретний стаціонарний білий шум з нульвим математичним сподіванням, а $\{\varphi_j(t), t = 0,1,\ldots,N-1,\ j = 0,1,\ldots,N-1\}$ - система ортогональних функцій Уолша в N-вимірному просторі ($N = 2^m$, $m = 1,2,\ldots$). Тоді послідовність $\{\zeta_0(t),\zeta_1(t),\ldots,\zeta_{N-1}(t)\}$ буде системою ортогональних дискретних стохастичних лінійних процесів

$$\zeta_k(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_k(t)\xi_{t-j},\ k = 0,1,\ldots,N-1$$

При цьому виконується співвідношення ортогональності

$$\left(\zeta_i, \zeta_j\right) = M\left\{\zeta_i(t), \zeta_j(t)\right\} = \kappa_2 \sum_{t=0}^{N-1} \varphi_i(t)\varphi_j(t) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ N\kappa_2 & i = j. \end{cases}$$

Реалізуємо це через лінійний фільтр зі СІХ (рис. 4.1), імпульсна характеристика якого збігається зі значенням відповідної функції Уолша. Для простоти моделювання візьмемо Уолша-Адамара.

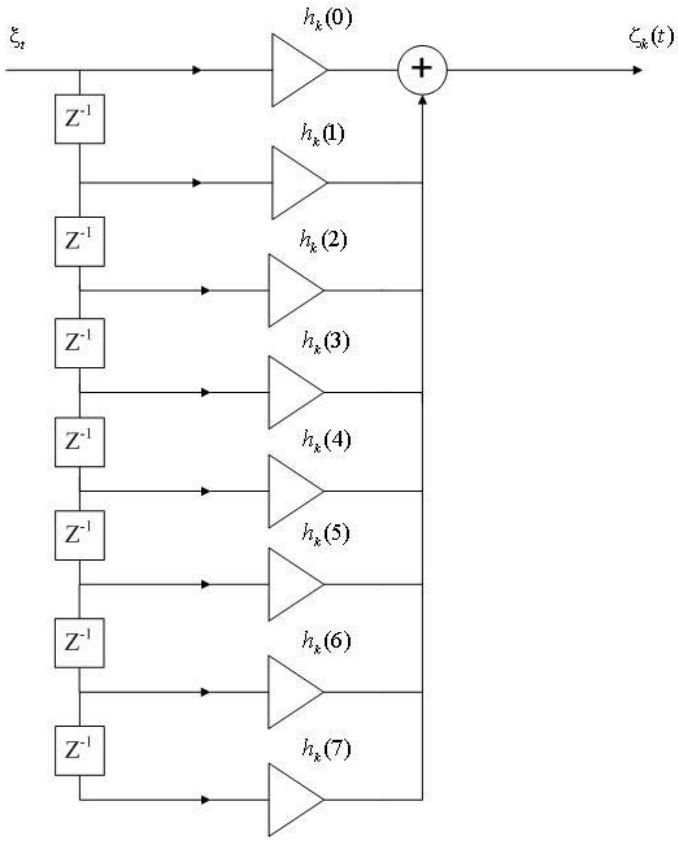

Рис. 4.1. Алгоритм лінійного фільтра

Матриця Уолша-Адамара

$$H_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

В Matlab это формируется функцией

```
hadamard(8);
```

Виділяємо відповідний рядок

```
b0=s(1,:)
```

Формуємо вхідний білий шум

```
x=randn(200,1)
```

И проводимо фільтрацію

```
y0=conv(b0,x);
```

Математичні сподівання та дисперсії

Реалізація	0	1	2	3	4	5	6	7
Математичне сподівання	0,011	0	$-2,1*10^{-17}$	$-1,9*10^{-17}$	$-3,14*10^{-17}$	$-2,57*10^{-17}$	$5,63*10^{-18}$	$3,22*10^{-17}$
Дисперсія	7,04	5,54	7,26	7,32	6,14	6,64	6,665	7,96

Проведемо переріз на $n = 10, 50, 100, 150, 200$

Математичні сподівання та дисперсії

Реалізація	10	50	100	150	200
Математичне сподівання	-1,29	0,599	0,22	-0,94	0,34
Дисперсія	6,05	3,55	5,92	3,09	9,03

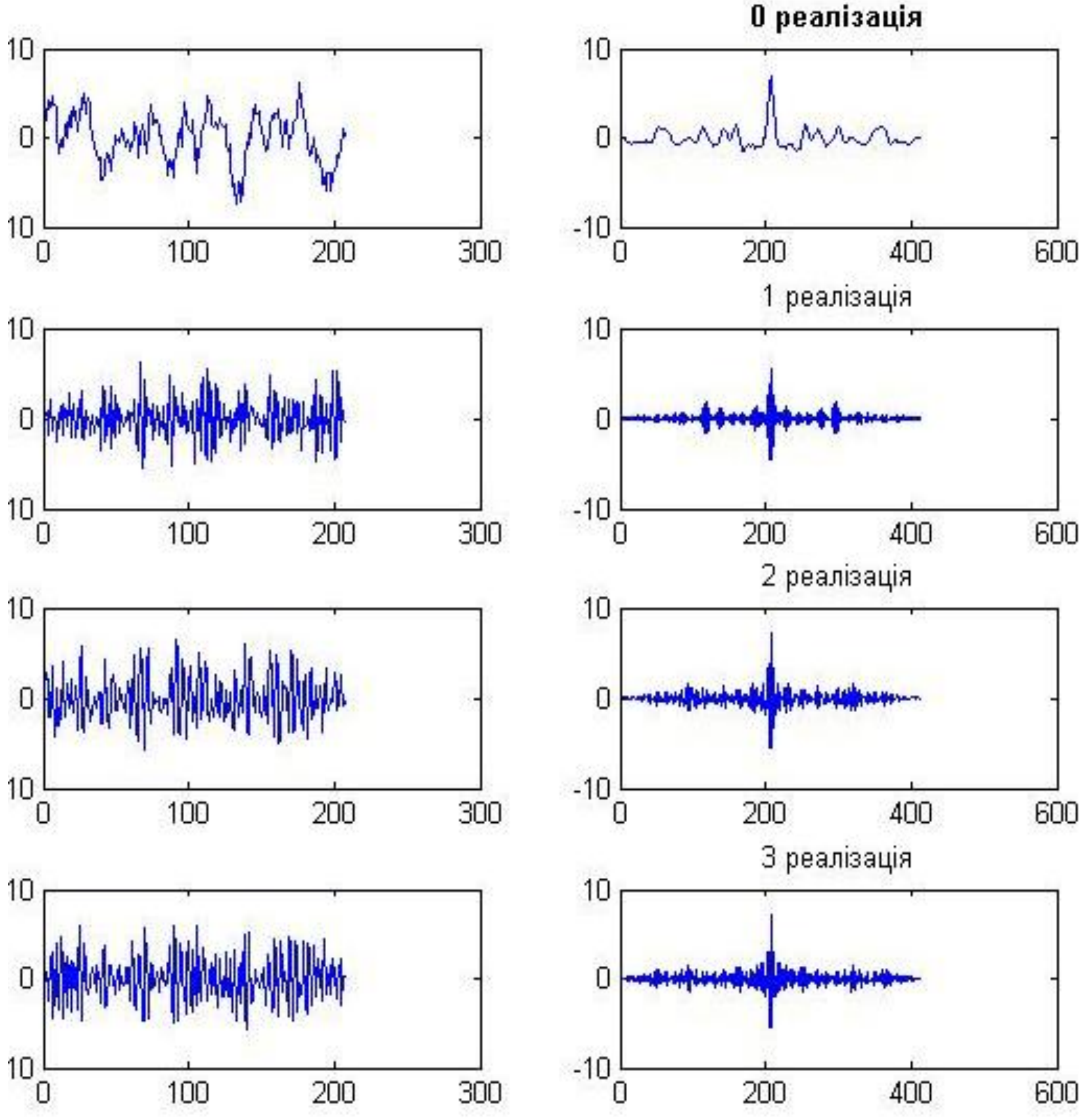

Рис 4.3 Випадкові процеси з функціями кореляції (0-3 реалізація)

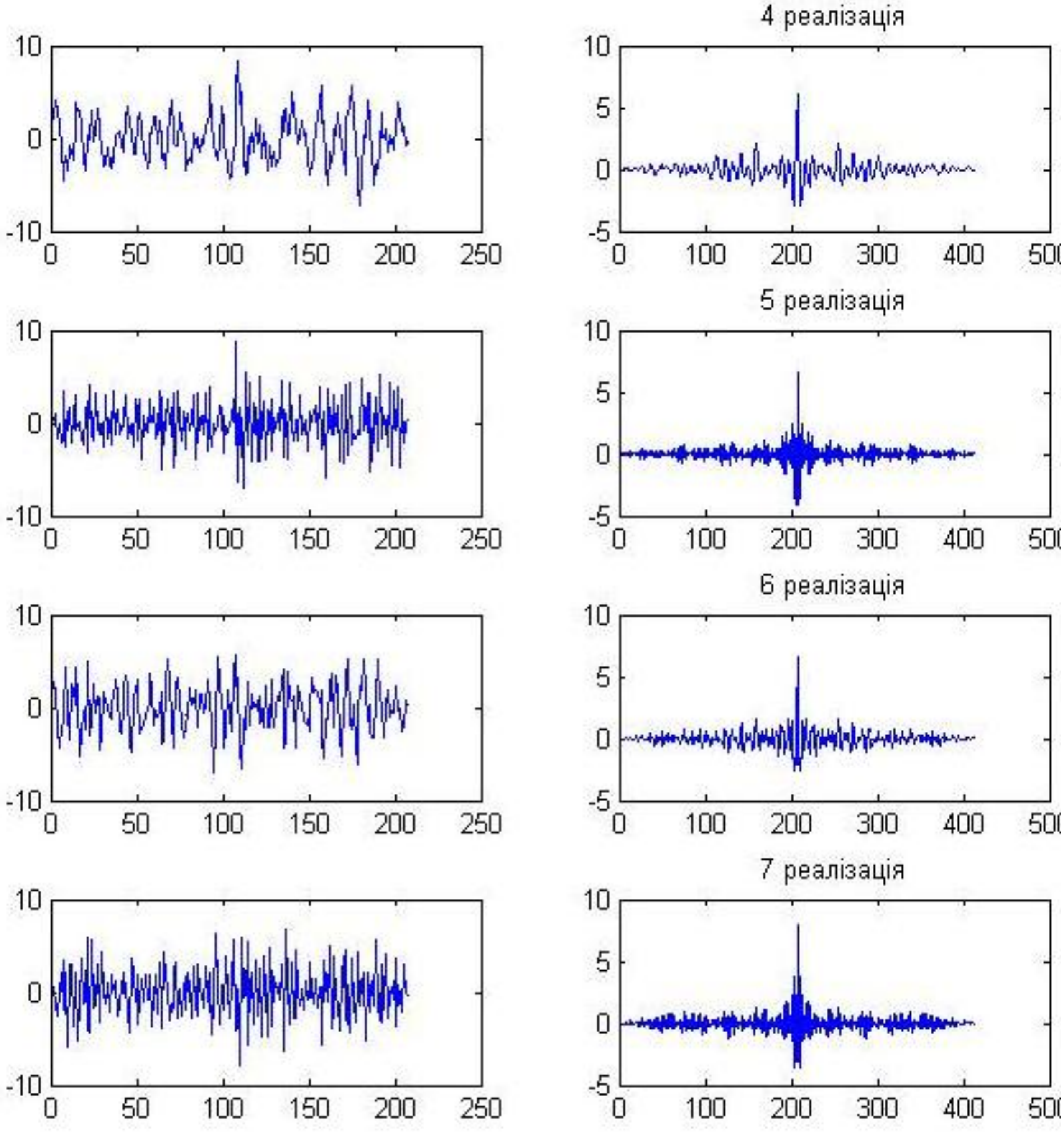

Рис 4.4 Випадкові процеси з функціями кореляції (0-3 реалізація)

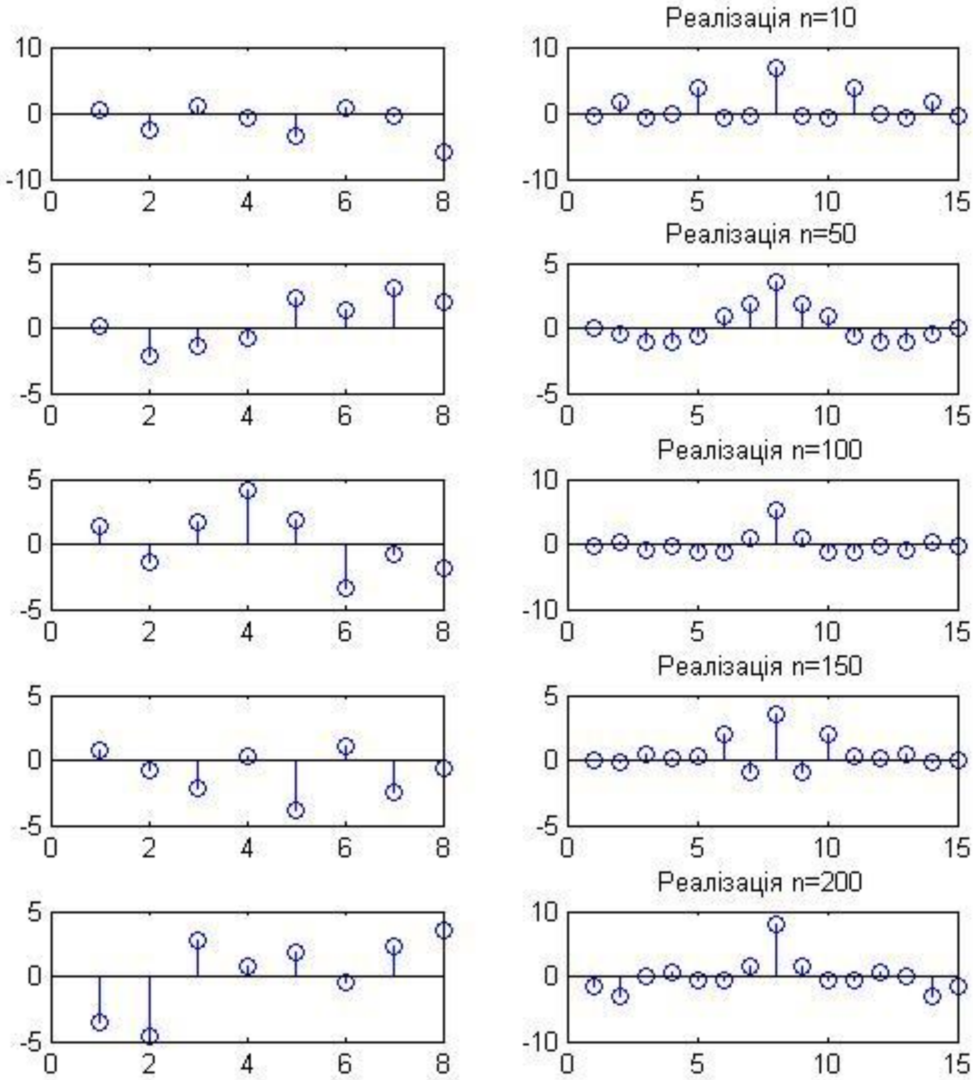

Рис 4.5 Перерізи з функціями кореляції

ВИСНОВОК

При дослідженні систем управління та обробки інформації при випадкових впливах насамперед виникає проблема адекватного опису реальних процесів і явищ,які мають випадкову природу та в умовах яких працюють системи. Також цей опис має бути зручним як в теоретичному плані, так і при моделюванні. Цим умовам відповідають безмежно подільні процеси. Зокрема, один з класів безмежно подільних процесів - лінійні випадкові процеси. Важливим є факт, що лінійні випадкові процеси, як моделі реальних процесів, дозволяють описувати стаціонарні і нестаціонарні процеси з гауссовими і негаусовими розподілами.

У літературі відомі необхідні і достатні умови для того, щоб граничні суми незалежних випадкових величин описувалися безмежно подільними розподілами, які можуть бути перенесені і на випадкові процеси. Тим більш, що ці умови, які призводять до безмежної подільності, не суперечать фізиці більшості реальних випадкових процесів і явищ, що виникають в системах обробки інформації.

Лінійні випадкові процеси виду можуть бути математичною моделлю процесів, що представляють собою відгуки лінійних пристроїв на вплив типу білого шуму $\eta(\tau)$, який є процесом з незалежними приростами. Невипадкове ядро перетворення $\varphi(\tau,t)$ є імпульсною функцією лінійного пристрою. Якщо система стаціонарна, тобто працює в сталому режимі, то ядро залежить тільки від різниці аргументів $\varphi(\tau\text{-}t)$. Наприклад це дробові шуми, та RC - і RLC – шуми в електронних пристроях.

У роботі було створено модель генерації реалізацій ортогональних лінійних випадкових процесів на лінійному фільтрі з імпульсною характеристикою, яка співпадає з функцією Уолша-Адамара. На фільтр був поданий стаціонарний білий шум, що дозволило побачити залежність зміни статистичних параметрів від зміни ядра (імпульсної характеристики фільтру).

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. МАРЧЕНКО Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения у радиотехнике. " Киев: Наук.думка, 1973. - 192 с.

2. СКОРОХОД А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. - М.: Наука, I986. - 320 с.

3. МАРЧЕНКО Б.Г.; ЩЕРБАК Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложения. - Киев: Наук.думка, 1975. - 144 с.

4. БОЙКО И.Ф., КРАСИЛЬНИКОВ А.И., МАРЧЕНКО Б.Г. Характеристические функции безгранично делимых законов распределения в задачах преобразования информации. – Киев: изд. Об-ва "Знание" УССР, 1980. - 24 с.

5. ЛУКАЧ Е. Характеристические функции. - М.: Наука, 1979. -424 с.

6. ШИРЯЕВ А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1980. - 576 с.

7. ГИХМАН И.И. , СКОРОХОД А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1977. - 366 с.

8. ВИНЕР Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. - И.: Изд-во иностр. лит. 1961. - 160 с.

9. ДАВЕНПОРТ В.Б., РУТ В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. - М.: Изд-во иностр. лит., I960. - 468 с.

10. КОЛМОГОРОВ А.Н.. ФОМИН С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. - 544 с.

11. ПРОХОРОВ Ю.В., РОЗАНОВ Ю.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.-496 с.

12. ЛОЭВ М. Теория вероятностей. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 720 с.

13. ПУГАЧЕВ В.С. Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления. - М.: Физматгиз, 1962. - 660с.

14. БОЙКО И.Ф.. МАРЧЕНКО Б.Г. Об одной системе ортогональных стохастических функционалов от процессов с независимыми приращениями // Радиотехническое оборудование аэропортов и воздушных трасс гражданской авиации. - Киев: Изд. КИИГА, 1978. вып.2.- С.7-12.

15. БОЙКО И.Ф. Решение нелинейных радиотехнических задач методом стохастических ортогональных разложений: Автореф. днссертации к.ф.-м.н. - Москва, 1982. - 22 с.

16. ЛЕВИН Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

17. ПУПКОВ К.А.. КАПАЛИН В.И.. ЮОНКО А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем., - М.: Наука , 1976. - 448 с.

18. ГНЕДЕНКО Б.В. Курс теории вероятностей: учебник/ Б.В. Гнеденко. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 438 с.

19. МАРМАРЕЛИС П.. МАРМАРЕЛИС В. Анализ физиологических систем. Метод белого шума. – М.: Мир. 1981. - 480 с.

20. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики, т.2. - М.: Наука, 1974. - 656 с.

22. ТИХОНОВ В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Радио и связь, t982. - 624 с.

23. ЛЕВИН Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2. - М.: Сов.радио, 1975. - 392 с.

24. РАДИОТЕХНИКА: Энциклопедия/ под ред. Ю.Л.Мазора, Е.А. Мачуского, В.И.Правды.– М.: Издательский дом «Додэка-XXI», 2002.–944 с.

25. БЕЗРУЧКО В.И., СМИРНОВ Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. – Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. – 320с.

26. ТИХОНОВ В.И., ХАРИСОВ В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

27. БУЛИНСКИЙ А.В., ШИРЯЕВ А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 408 с.

28. ДЕНИСЕНКО А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 704 с.

29. ПАНФІЛОВ І.П. та ін. Теорія електричного зв'язку: Підруч. для студентів вищ. навч. закл./ І.П. Панфілов, В.Ю.Дирда, А.В.Капацін – К.:Техніка, 1998. – 328 с.

30. СЕНЬО П.С. Випадкові процеси: Підручник. – Львів: Компакт-ЛВ, 2006 – 288 с.

31. ВОЛОЩУК Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 2. - Харків: «Компанія СМІТ», 2003. - 580 с.

32. БОЙКО И.Ф., МАРЧЕНКО Б.Г. Линейные случайные процессы и их приложения в статистической радиофизике./ Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів //Зб. наук. праць, частина 1, - Харків: ХІРЕ, 1992.

33. БОЙКО И.Ф. Стохастичні ортогональні розвинення дискретних випадкових сигналів/ Електроніка та системи управління. – 2005. – № 4(6). – с. 18 - 26

34. БОЙКО И.Ф., МУРКА І.М. Генератор реалізацій ортогональних лінійних стохастичних послідовностей на базі функцій Уолша./ Електроніка та системи управління. – 2007. - № 2(12). – С. 5 – 10

35. БОЙКО И.Ф., ІВАНИЦЬКИЙ Є. С. Лінійні випадкові процеси в теорії нелінійних систем/ Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM: тези доповідей НТК, м. Київ, 17 – 19 листопада 2014 р. – К.: НАУ, 2014. – С. 151