

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Кафедра економічної кібернетики

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*з дисципліни*

***“ЕКОНОМЕТРИКА”***

для студентів економічних спеціальностей

( 16 )

1

Київ 2019

## ЗМІСТ

Тема 1. Предмет, методи і завдання дисципліни .....	3
Тема 2. Методи побудови загальної економетричної моделі.....	4
Тема 3. Мультиколінеарність та її вплив на оцінки параметрів моделі.....	6
Тема 4. Побудова нелінійних регресійних моделей.....	7
Тема 5. Гетероскедастичність .....	8
Тема 6. Автокореляція. Тест Дарбіна-Уотсона.....	11
Тема 7. Побудова економетричної моделі з гетероскедастичними або автокорельваними залишками. Узагальнений метод найменших квадратів .....	13
Тема 8. Економетричні моделі на основі системи структурних рівнянь .....	15
ЛІТЕРАТУРА.....	17

## Тема 1. Предмет, методи і завдання дисципліни

**Економетрика** - це наукова дисципліна, яка вивчає кількісні закономірності та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математико-статистичних методів та моделей.

**Об'єктом** економетрії є економічні системи, процеси та явища різного рівня складності: від окремого підприємства чи фірми до економіки галузей, регіонів, держави й світу загалом.

**Предмет** економетрії — це методи побудови та дослідження математико-статистичних моделей економіки, проведення кількісних досліджень економічних явищ, пояснення та прогнозування розвитку економічних процесів.

«Мета економетрики — емпіричний висновок з економічних законів. Економетрика доповнює теорію, використовуючи реальні дані для перевірки й уточнення відношень, що постулюються» (Е. Маленво).

**Метою** економетричного дослідження є аналіз реальних економічних систем і процесів, що в них відбуваються, за допомогою економетричних методів і моделей, їх застосування при прийнятті науково обґрунтованих управлінських рішень.

**Основне завдання** економетрії — оцінити параметри моделей з урахуванням особливостей вхідної економічної інформації, перевірити відповідність моделей досліджуваному явищу і спрогнозувати розвиток економічних процесів.

Основні етапи економетричного аналізу

Процес економетричного моделювання складається з таких кроків:

- 1) вибір конкретної форми аналітичної залежності між економічними показниками (специфікація моделі) на підставі відповідної економічної теорії;
- 2) збирання та підготовка статистичної інформації;
- 3) оцінювання параметрів моделей;
- 4) перевірка адекватності моделі та достовірності її параметрів;
- 5) застосування моделі для прогнозування розвитку економічних процесів з метою подальшого керування ними.

**Економетрична модель** – це логічний (звичайно математичний) опис того, що економічна теорія вважає особливо важливим при дослідженні певної проблеми.

Ознаки економетричної моделі

Як правило, модель має форму рівняння чи системи рівнянь, що характеризують виокремлені дослідником взаємозалежності між економічними показниками.

Економетрична модель, що пояснює поведінку одного показника, складається з одного рівняння, а модель, що характеризує зміну кількох показників, – із такої самої кількості рівнянь.

В економетричній моделі завжди присутні стохастичні залишки, ймовірнісні характеристики залишків моделі зумовлюють якість тієї чи іншої аналітичної форми моделі.

**Економетрична модель** – це функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками, причому залежно від причинних зв'язків між ними один чи кілька із цих показників розглядаються як залежні змінні, а інші – як незалежні.

У загальному випадку рівняння в економетричній моделі має вигляд:

де  $Y$  – результат або залежна змінна, змінування якої описує дане рівняння;  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – фактори, або незалежні змінні, що визначають поведінку  $Y$ . Змінна  $u$  містить ту частину руху  $Y$ , що не пояснюється змінними  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , і має випадковий характер. Символ  $f$  відображує аналітичний вид зв'язку між досліджуваними змінними.

Процес опису явища чи процесу, тобто вибір аналітичної форми моделі, називається специфікацією моделі.

Таким чином, специфікація моделі – це аналітична форма залежності між економічними показниками

Незалежні змінні  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , що задані заздалегідь чи за межами моделі, називаються **екзогенними змінними (регресорами)**. Залежна змінна  $Y$ , що визначається як розв'язок рівняння, називається **ендогенною змінною (регресандом)**.

Функція  $f$  у кожному конкретному випадку окрім змінних  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , містить ще щонайменше деякі коефіцієнти, що поєднують змінні у певних співвідношеннях і визначають структуру рівняння. Ці коефіцієнти називаються **параметрами моделі**.

Визначення значень коефіцієнтів (параметрів) обраної форми статистичного зв'язку змінних на підставі відповідних статистичних даних називається **параметризацією рівняння регресії або оцінюванням параметрів**.

**Змінні** – це економічні величини, що можуть набувати певних значень з деякої множини допустимих величин.

**Параметри** – це сталі коефіцієнти. Хоча вони не завжди відомі, та все ж у будь-якій ситуації вони мають фіксоване значення.

Параметри можна назвати "незмінними" (інколи відомими, інколи невідомими), що пов'язують змінні в рівняннях. Ці рівняння, а отже, і параметри визначають структуру моделі вони вказують на характер припустимих співвідношень між змінними.

Економетричні моделі можуть бути статичними та динамічними. У статичних моделях зв'язки розглядаються у фіксований момент часу і часові зміни в них ролі не відіграють.

У динамічній моделі, навпаки, взаємозв'язки вивчаються в розвитку й час є необхідним фактором змін.

Моделі розрізняють також за рівнем агрегування змінних (мікро та макроекономічні показники), за способом відображення змінних (у постійних чи поточних цінах, у абсолютних значеннях чи приростах показників), за кількістю змінних (одно- чи багатофакторні моделі), за кількістю рівнянь (одне чи кілька), за часом спостережень (річні, квартальні чи місячні дані).

Класифікують моделі також за призначенням та метою використання (аналітичні, імітаційні, прогностичні).

( 16 )

## Тема 2. Методи побудови загальної економетричної моделі

4

**Економетрична модель** — це функція чи система функцій, що кількісно описує залежність між соціально-економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші — незалежними.

Етапи побудови економетричної моделі

**Крок 1.** Знайомство з економічною теорією, висунення гіпотези взаємозв'язку. Чітка постановка задачі.

**Крок 2.** Специфікація моделі. Використовуючи всі ті види функцій, які можуть бути застосовані для вивчення взаємозв'язків, необхідно сформулювати теоретичні уявлення і прийняті гіпотези у вигляді математичних рівнянь. Ці рівняння встановлюють зв'язки між основними визначальними змінними, припускаючи, що решта змінних є випадковими.

Етапи побудови економетричної моделі

**Крок 3.** Формування масивів вихідної інформації згідно з метою та завданнями дослідження.

**Крок 4.** Оцінка параметрів економетричної моделі методом найменших квадратів. Аналіз залишків дає змогу відповісти на запитання: чи не суперечить специфікація моделі застосуванню ІМНК.

Етапи побудови економетричної моделі

**Крок 5.** Якщо деякі передумови застосування ІМНК не виконуються, то для подальшого аналізу треба замінювати специфікацію або застосовувати інші методи оцінювання параметрів.

**Крок 6.** Верифікація моделі та її оцінок параметрів.

**Крок 7.** Прогноз на основі моделі.

**Економетрична модель базується** на єдності двох аспектів — теоретичного, якісного аналізу взаємозв'язків та емпіричної інформації. Теоретична інформація знаходить своє відображення у специфікації моделі.

**Специфікація моделі** — це аналітична форма економетричної моделі на основі досліджуваних чинників. Вона складається з певного виду функції чи функцій, що використовуються для побудови моделей, має ймовірнісні характеристики, які притаманні стохастичним залишкам моделі.

Вид функціональної залежності між змінними встановлюється на підставі накопичуваного досвіду економетричних досліджень, теоретичного аналізу взаємозв'язків або на підставі характеру розташування точок на координатній площині.

**Передумови застосування методу найменших квадратів (ІМНК)**

— кожне значення випадкової складової рівняння  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , є випадковою величиною і математичне сподівання залишків  $u_i$  дорівнює нулю:

— компоненти вектора залишків некорельовані (лінійно незалежні) між собою і мають сталу дисперсію:

- пояснюючі змінні (регресори, фактори моделі) некорельовані із залишками;
- пояснюючі змінні некорельовані між собою.
- Оцінка параметрів лінійної моделі

Рівняння лінійної регресії має наступний вигляд:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m,$$

де  $\hat{y}$  — оцінка математичного сподівання залежної (пояснюваної) змінної моделі,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — незалежні (пояснюючі) змінні моделі (фактори),  $a_0, a_1, a_m$  — параметри вибіркової регресії.

**Визначити оцінки  $a_0$  і  $a_1$**  можна декількома способами:

- 1) вирішити систему нормальних рівнянь,
- 2) по явним формулами,
- 3) матричним способом.

Формула розкладу дисперсії має вигляд

■  $TSS = ESS + RSS$ , (Total Sum of Squares, Residual Sum of Squares and Explained Sum of Squares)

Значення коефіцієнта детермінації задовольняє умові  $0 \leq R^2 \leq 1$  і показує частку дисперсії (коливання) результативної ознаки  $Y$ , яка пояснюється побудованою моделлю. Значення  $1-R^2$  характеризує частку дисперсії (коливання) результативної ознаки  $Y$ , яка припадає на чинники невраховані в моделі.

Щоб побудовану модель можна було використовувати для економічного аналізу і прогнозу середня відносна помилка апроксимації  $E_{ср.отн.}$  повинна бути менше 7% -10% (в залежності від рівня моделі: макро- або мікрорівень).

Тісноту зв'язку між змінними вивчає лінійний коефіцієнт парної кореляції ( $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ ):

Адекватність моделі перевіряється за допомогою F-критерію Фішера, який перевіряє нульову гіпотезу:  $H_0=0$  про статистичну незначущість рівняння регресії. Для цього порівнюємо фактичне  $F_{\text{факт.}}$  і критичне F-значення критерію Фішера  $F_{\text{табл}}$  при ступенях свободи  $\nu_1 = m$ ,  $\nu_2 = n-m-1$  і рівні значущості  $\alpha$ .  
 Якщо  $F_{\text{розр}} > F_{\text{табл}} = F_{\alpha, m, n-m-1}$ , то рівняння статистично значимо (з надійністю  $1 - \alpha$ ), тобто модель адекватна.

### Тема 3. Мультиколінеарність та її вплив на оцінки параметрів моделі

Одна з передумов застосування методу найменших квадратів до оцінювання параметрів лінійних багатofакторних моделей – відсутність лінійних зв'язків між незалежними змінними моделі. Якщо такі зв'язки існують, то це явище називають **мультиколінеарністю**.

**Суть мультиколінеарності** полягає в тому, що в багатofакторній регресійній моделі дві або більше незалежних змінних пов'язані між собою лінійною залежністю.

**Мультиколінеарність незалежних змінних (факторів) призводить до:**

– зміщення оцінок параметрів моделі, які розраховуються за методом найменших квадратів.

– збільшення дисперсії та коваріації оцінок параметрів, обчислених за методом найменших квадратів

– збільшення довірчого інтервалу (оскільки збільшується середній квадрат відхилення параметрів)

– незначущість t-статистик

**Мультиколінеарність незалежних змінних (факторів) призводить до:**

– зниження точності оцінюваних параметрів;

– оцінки параметрів моделі не є заможними (невелике збільшення кількості спостережень призводить до значних змін в оцінках параметрів);

– економічна інтерпретація параметрів рівняння регресії ускладнена, так як деякі з його коефіцієнтів можуть мати неправильні, з точки зору економічної теорії, знаки і невиправдано великі значення.

**Ознаки мультиколінеарності** (16)

– наявність високих значень парних коефіцієнтів кореляції  $r_{x_i x_j} \geq 0,8$ ;

– визначник матриці  $X^T X$  близький до нуля;

– істотне наближення коефіцієнта множинної кореляції до одиниці;

– наявність малих значень оцінок параметрів моделі при високому рівні коефіцієнта детермінації  $R^2$  і F-критерію Фішера;

– суттєва зміна оцінок параметрів моделі при додатковому введенні в неї нової пояснювальної змінної;

– різка зміна значень параметрів при збільшенні числа спостережень.

**Для визначення мультиколінеарності здебільшого застосовують такі тести**

– F-тест, запропонований Глобером і Фарраром (інша назва: побудова допоміжної регресії);

– Характеристичні значення та умовний індекс.

У випадку виявлення наявності мультиколінеарності існує декілька простих шляхів її усунення. Основними серед них є наступні.

1. Вилучення змінної (або змінних) з моделі. При цьому з моделі вилучається одна із змінних колінеарної пари. Слід зазначити, що таке вилучення змінних можливе тільки у випадку, коли це не суперечить логіці економічних зв'язків. У протилежному випадку це може призвести до помилки специфікації.



2. Зміна аналітичної форми економетричної моделі. Іноді заміна однієї функції регресії іншою (наприклад, лінійної нелінійною), якщо це не суперечить апріорній інформації, дає змогу уникнути явища мультиколінеарності.

3. Збільшення спостережень. З точки зору теорії, мультиколінеарність та невелика кількість спостережень у вибірці – це одна і та ж проблема. Тому збільшення спостережень у статистичній вибірці або використання іншої статистичної вибірки може усунути, або принаймні зменшити вплив мультиколінеарності.

4. Перетворення статистичних даних. Позбутися мультиколінеарності можна і шляхом наступних перетворень вихідних даних стосовно пояснюючих змінних:

- замість самих даних узяти їхні відхилення від середніх;
- замість абсолютних значень даних взяти відносні значення;
- стандартизувати змінні.

5. Використання додаткової первинної інформації. Аналіз і використання первинної додаткової інформації інколи дозволяє зняти проблему мультиколінеарності.

#### Тема 4. Побудова нелінійних регресійних моделей

У багатьох практичних випадках моделювання економічних явищ і процесів лінійними економетричними моделями дає цілком задовільний результат і може використовуватися для аналізу і прогнозування. Однак внаслідок різноманіття і складності економічних явищ і процесів обмежитися застосуванням тільки лінійних моделей неможливо. Багато економічних залежностей, як свідчить економічна теорія, не є лінійними по суті, і тому їх моделювання лінійними залежностями, безумовно, не дасть позитивний результат. У цьому випадку необхідно використовувати **нелінійні економетричні моделі**.

Нелінійна економетрична модель - це регресійна модель, яка встановлює нелінійну залежність між економічними показниками, один з яких є залежною (пояснюваною) змінною, а інші - незалежними (пояснюючими) змінними.

За методами оцінювання параметрів у нелінійні економетричні моделі поділяються на два типи:

- нелінійні за факторами, але лінійні за параметрами;
- нелінійні за факторами і за параметрами.

Економетричні моделі, які є нелійними за факторами, але лінійними за параметрами називаються **квазілінійними**.

Квазілінійні моделі є більш простим і привабливим варіантом нелінійних моделей. Їх привабливість пояснюється тим, що оцінки параметрів таких моделей можуть бути отримані методами лінійного регресійного аналізу. Прикладом такої моделі може бути модель попиту, для якої функція попиту має наступний вигляд:

$$Q = p_0 + p_1P + p_2P^2$$

де **Q** - попит; **P** - ціна; **p<sub>0</sub>**, **p<sub>1</sub>** і **p<sub>2</sub>** - параметри моделі.

Нелінійні за факторами і за параметрами економетричні моделі є більш складними і оцінювання їх параметрів, як правило, виконується методами нелінійного регресійного аналізу. Прикладом такої моделі може бути модель, яка описує залежність між об'ємом надходжень до бюджету і податковою ставкою на основі відомої **кривої Лаффера**:

$$Y = a \cdot e^{-bx}$$

де **Y** - податкові надходження; **x** - податкова ставка; **a**, **b** і **c** - параметри моделі.

Порівнюючи лінійні і нелінійні економетричні моделі можна зробити наступні висновки.

1) Лінійна класична регресійна модель і відповідні методи оцінювання її параметрів, тестування і прогнозування в цілому теоретично краще обгрунтовані, ніж нелінійні.

2) Відносно простоти обчислювального апарату, лінійна модель регресії також не перевершена ніякими іншими типами моделей.

Виходячи із сказаного у сучасній практиці економетричного моделювання при необхідності застосування нелінійних моделей практикуються наступні два підходи:

1) замість складної нелінійної функціональної залежності навіть з невеликою кількістю факторів намагаються застосувати лінійну регресійну функцію з великою кількістю факторів ;

2) за допомогою математичних перетворень намагаються звести (перетворити) нелінійну функцію на лінійну.

Процес приведення нелінійної регресійної моделі до лінійної називається **лінеаризацією**, а сама модель **лінеаризованою** або **лінійною формою**. Для лінеаризованих моделей повністю зберігається вся методологія економетричного дослідження, яка була розглянута у попередній темі для загальної лінійної регресійної моделі. Можливість лінеаризації моделі залежить від типу нелінійної моделі.

## Тема 5. Гетероскедастичність

Одним з основних припущень класичної лінійної регресії, яке дозволяє коректно застосувати для оцінювання параметрів моделі МНК, є припущення про сталість дисперсії стохастичної складової  $E_1$ , тобто припущення про **гомоскедастичність** стохастичної складової економетричної моделі.

Гомоскедастичністю називається явище, при якому дисперсія стохастичної складової економетричної моделі є сталою (незмінною) для кожного окремого спостереження або групи спостережень.

Слід зазначити, що гомоскедастичність слід розглядати не тільки як явище, а і як **властивість** стохастичної складової моделі. Суть гомоскедастичності полягає в тому, що варіація кожної випадкової величини  $E_1$  навколо її математичного сподівання не залежить від значення незалежних змінних  $x$ . Таким чином дисперсія випадкової величини  $E_1$  залишається сталою незалежно від малих чи великих значень факторів.

Графічно випадок гомоскедастичності для простої лінійної регресії можна представити наступним чином (рис. 1). Як видно з цього рисунку гомоскедастичність характеризується тим, що випадкові відхилення залежної змінної моделі  $y$  від прямої регресії, які характеризують дисперсію величини  $E_1$ , розташовані в межах деякого шару **сталой ширини**. Таким чином дисперсія стохастичної складової моделі  $E$  не змінює свого значення при переході від малих значень пояснюючої змінної  $x$  до великих і залишається сталою в усьому діапазоні зміни значень пояснюючої змінної. Такий же ефект спостерігається і у випадку множинної регресії.



$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$$

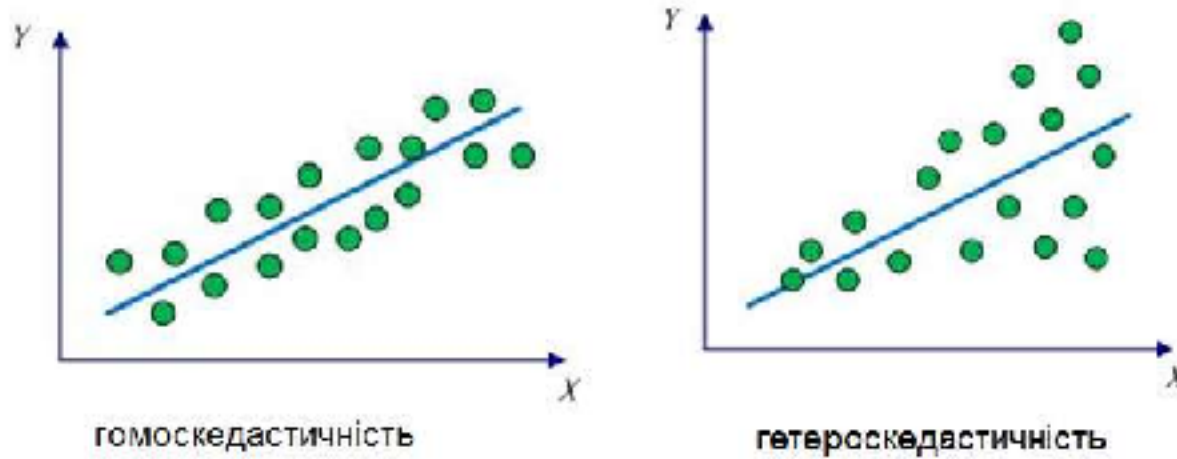


Рис. Випадок гомоскедастичності та гетероскедастичності

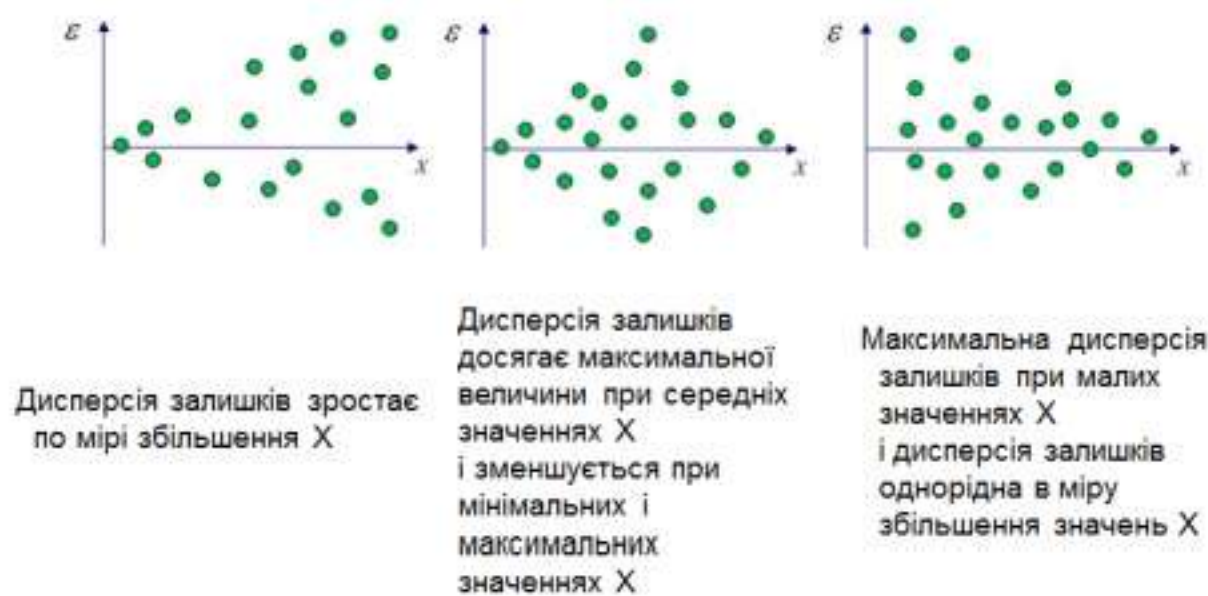
Якщо гомоскедаст не має місце **гетероскедастичність**.

Гетероскедастичністю називається явище, при якому дисперсія стохастичної складової моделі змінює своє значення від одного спостереження до іншого, або від однієї групи спостережень від другої

Суть гетероскедастичності полягає в тому, що значення дисперсії випадкової величини  $\varepsilon$  залежить від значень незалежної змінної  $x$ , тобто у цьому випадку можна записати:

$$A = f(x_1, x_2, \dots, x_m), i = 1, 2, \dots, n$$

Графічно випадки гетероскедастичності для випадку простої лінійної регресії можна представити таким чином:



Дисперсія залишків зростає по мірі збільшення  $X$

Дисперсія залишків досягає максимальної величини при середніх значеннях  $X$  і зменшується при мінімальних і максимальних значеннях  $X$

Максимальна дисперсія залишків при малих значеннях  $X$  і дисперсія залишків однорідна в міру збільшення значень  $X$

Рис. Випадки гетероскедастичності

З явищем гетероскедастичності приходиться часто зустрічатися у багатьох економетричних дослідженнях. Наявність гетероскедастичності можна прогнозувати при відповідному досвіді і виходячи з аналізу економічних показників, які включаються до економетричної моделі.

Оцінки параметрів моделі, отримані ІМНК в умовах гетероскедастичності будуть незміщеними, обґрунтованими, але **неефективними**, тобто вони будуть мати велику дисперсію. Використання таких оцінок призводить до наступних негативних наслідків :

- збільшення інтервалів довіри параметрів;
- помилки при використанні t-тестів і F-тестів ;
- неефективність прогнозів, тобто отримання прогнозів з дуже великим

інтервалом довіри .

Зрозуміло, що гетероскедастичність є серйозною проблемою, тому необхідно вміти її виявляти і робити оцінювання параметрів іншими методами.

Як і у випадку мультиколінеарності немає єдиних правил і методів для виявлення гетероскедастичності, а є різноманітні тести. До основних з них належать наступні тести :

- 1) тест на основі графічного аналізу залишків.
- 2) тест на основі М-критерію ;
- 3) тест Глейсера ;
- 4) тест на основі коефіцієнта рангової кореляції Спірмена ;
- 5) параметричний тест Голдфелда - Квондта ;
- 6) непараметричний тест Голдфелда - Квондта ;

Тестування гетероскедастичності на основі графічного аналізу залишків. Цей тест є найпростішим з усіх і достатньо наочним, оскільки дає можливість візуально визначити наявність гетероскедастичності. Тест умовно можна розбити на два етапи.

**На першому етапі** на основі статистичної вибірки і припущень про відсутність гетероскедастичності будується класична економетрична модель і обчислюються залишки  $e_i$ , ( $i = 1, n$ ) .

**На другому етапі** виконуються дослідження квадратів залишків  $e^2$ , ( $i = 1, n$ ) і робиться висновок про наявність або відсутність гетероскедастичності. Для цього будуються графіки різних типів. Для парної лінійної моделі будується графік  $e^2 = f(x)$  . Для моделі багатофакторної лінійної регресії найбільш розповсюдженими є графіки залежності або графіки  $e^2 = f(x_i)$ , де  $x_i$  - пояснююча змінна, яка гіпотетично може впливати на дисперсію залишків. Якщо неможливо однозначно визначитися з такою змінною графіки  $e = f(x_i)$  будуються для всіх пояснюючих змінних моделі. Метою побудови таких графіків є встановлення наявності або відсутності систематичності у зміні квадратів залишків  $e^2$  при зміні значення залежної змінної моделі  $y$  , або пояснюючої змінної  $X_j$ . Звичайно  $e^2$  - це тільки оцінки невідомих  $S^2$  , але вони можуть успішно використовуватися, особливо при великих вибірках.

Найбільше відомим є **формальний критерій, запропонований С. Голдфелдом і Р. Квандтом**. При проведенні перевірки з цього критерію слід припускати, що стандартне відхилення ( $\sigma_i$ ) розподілу ймовірностей  $U_i$  пропорційне значенню  $x$  в цьому спостереженні. Запропоновано також, що випадковий член розподілений нормально і не піддається автокореляції.

(16)

Всі  $n$  спостережень у вибірці упорядковуються за значенням  $x$ , після чого оцінюються окремі регресії для перших  $n'$  і для останніх  $n''$  спостережень; середні  $(n - 2n')$  спостережень відхиляються. Якщо припущення відносно природи гетероскедастичності доцільне, то дисперсія  $U$  і в останніх  $n''$  спостереженнях буде більшою, ніж в перших  $n'$ , і це буде відображено в сумі квадратів залишків в двох вказаних "часткових" регресіях. Визначаємо суми квадратів залишків в регресіях для перших  $n'$  і останніх  $n''$  спостережень відповідно через  $RSS_1$  і  $RSS_2$ . Розраховуємо відношення  $RSS_2/RSS_1$ , яке має F-розподіл з  $(n' - k - 1)$  і  $(n'' - k - 1)$  ступенями свободи, де  $k$  – число пояснювальних змінних в регресійному рівнянні. Потужність критерію залежить від вибору  $n'$  по відношенню до  $n$ . Грунтуючись на результатах деяких проведених експериментів, С. Голдфелд і Р. Квандт стверджують, що  $n'$  повинно складати порядок 11, коли  $n = 30$ , і порядку 22, коли  $n = 60$ . Якщо в моделі знаходиться більше однієї пояснювальної змінної, то спостереження повинні упорядковуватися за тією з них, яка, як запропоновано, пов'язана з  $\sigma_i$  і  $n'$  повинна бути більшою, ніж  $k + 1$  (де  $k$  – число пояснювальних змінних).

Метод Голдфелда-Квандта може бути також використаний для перевірки на гетероскедастичність при припущенні, що  $\sigma_i$  обернено пропорційний  $x_i$ . При цьому використовується подібна процедура, що і розглянута вище, проте тестова статистика зараз є показником  $RSS_1/RSS_2$ , який знову має F-розподіл з  $(n' - k - 1)$  і  $(n'' - k - 1)$  ступенями свободи.

## Тема 6. Автокореляція. Тест Дарбіна-Уотсона

Одним з основних припущень класичного лінійного регресійного аналізу є припущення щодо відсутності взаємозв'язку між значеннями стохастичної складової моделі  $\varepsilon$  в різних спостереженнях, тобто припущення

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Якщо це припущення порушується - виникає явище, яке носить назву **автокореляції залишків**.

**Автокореляція залишків** – це залежність між послідовними значеннями стохастичної складової моделі.

У випадку автокореляції залишків маємо:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0, \quad i \neq j,$$

і, у випадку гетероскедастичності, формально можна записати :

$$M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 S$$

де  $\sigma^2$  - деяка невідома константа,  $S$  – відома квадратна, додатково визначена матриця розміреністю  $n \times n$ .

Але на відміну від випадку гетероскедастичності матриця  $S$  не є діагональною, а є повною, діагональ якої містить одиниці, оскільки дисперсія випадкової величини  $\varepsilon$  в цьому випадку є сталою, а інші елементи, як було показано у попередній темі представляють собою ненульові коваріації значень випадкової величини  $\varepsilon$  в різних спостереженнях. Слід також зазначити, що вигляд і „наповнення” матриці  $S$  залежать від виду залежності між залишками.

У загальному випадку залежність між значеннями стохастичної складової  $\varepsilon$  в різних спостереженнях для випадку автокореляції можна подати наступним чином:

$$\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + \rho_2 \varepsilon_{i-2} + \dots + \rho_s \varepsilon_{i-s} + u_i,$$

де  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$  – коефіцієнти автокореляції 1, 2 і s-го порядку відповідно ;

$u_i$  – випадкова величина, яка відповідає усім припущенням класичного лінійного регресійного аналізу – тобто вона розподілена за нормальним законом із сталою дисперсією і має нульове математичне сподівання.

Найпростішим і найбільш поширеним є випадок автокореляції залишків, коли залежність між послідовними значеннями стохастичної складової описують так звану **авторегресійною схемою першого порядку – AR(1)**, яка має наступний вигляд :

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + u_i, \quad (-1 \leq \rho \leq 1).$$

Якщо  $\rho$  додатне ( $\rho > 0$ ), то автокореляція залишків є **позитивною**, якщо  $\rho$  від'ємне ( $\rho < 0$ ), то автокореляція залишків є **негативною**. При  $\rho = 0$  автокореляція залишків відсутня.

Графічно випадки позитивної і негативної автокореляції залишків, а також її відсутності можна представити наступним чином



Рис. Графічна ілюстрація автокореляції залишків

Коефіцієнт автокореляції  $\rho$  у виразі не може бути визначеним безпосередньо, оскільки неможливо визначити дійсні (у генеральній сукупності спостережень) значення випадкової величини  $\varepsilon_i$ . Але його можна оцінити звичайним методом найменших квадратів (МНК) на основі відомих залишків для статистичної вибірки. Тоді отримаємо :

$$\hat{\rho} = \frac{\text{cov}(e_{i-1}, e_i)}{\text{var}(e_{i-1})} \approx \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1} \cdot e_i}{\sum_{i=1}^n e_i^2} .$$

На практиці ж замість частіше обчислюють наступну оцінку коефіцієнта автокореляції  $\rho$ :

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n e_{i-1} \cdot e_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1} \cdot e_i}{\sum_{i=1}^n e_i^2} .$$

Оцінку називають ще **циклічним коефіцієнтом автокореляції**.

Автокореляція залишків найчастіше спостерігається у наступних двох випадках :

1) коли економетричну модель будують на основі часових рядів (у цьому випадку, якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної, то буде спостерігатися і кореляція між послідовними значеннями стохастичної складової  $\varepsilon$ , особливо ,якщо використовуються лагові змінні) ;

2) коли допущена помилка специфікації економетричної моделі – до моделі не включена істотна пояснююча змінна.

При наявності автокореляції залишків в принципі можна оцінити параметри узагальненої економетричної моделі звичайним однокроковим методом найменших квадратів (МНК). Але отримані при цьому оцінки параметрів будуть **неефективними**. Негативними наслідками цього, як і у випадку гетероскедастичності, будуть:

- 1) завищені значення дисперсії параметрів моделі ;
- 2) помилки при використанні t – тестів і F – тестів ;
- 3) неефективність прогнозів, тобто отримання прогнозів з дуже великою дисперсією.

Оскільки автокореляція є негативним явищем, потрібно вміти його тестувати. На даний час найбільш розповсюдженими тестами, які використовуються для тестування автокореляції залишків, є наступні статистичні тести :

- 1) тест Дарбіна - Уотсона ;
- 2) тест фон Неймана ;
- 3) тест на основі нециклічного коефіцієнта автокореляції ;
- 4) тест на основі циклічного коефіцієнта автокореляції .

Найбільш відомим і поширеним тестом перевірки моделі на наявність автокореляції залишків є тест Дарбіна-Уотсона. Цей тест використовується для авторегресійних схем 1-го порядку і має наступний алгоритм .

#### **Алгоритм тесту Дарбіна - Уотсона**

**Крок 1.** Виходячи з відсутності автокореляції залишків на основі методу найменших квадратів будується економетрична модель і обчислюються її залишки  $e_i (i = \overline{1, n})$ .

**Крок 2.** Розраховується статистика (критерій) Дарбіна-Уотсона за наступною залежністю :



$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

**Крок 3.** Задаючись рівнем значимості  $\alpha$ , для числа факторів моделі  $m$  і числа спостережень  $n$  за статистичними таблицями DW - розподілу Дарбіна-Уотсона, визначаються два значення  $d_L$ , і  $d_U$ .

**Крок 4.** Будується зони автокореляційного зв'язку, які схематично можна представити в наступному вигляді:

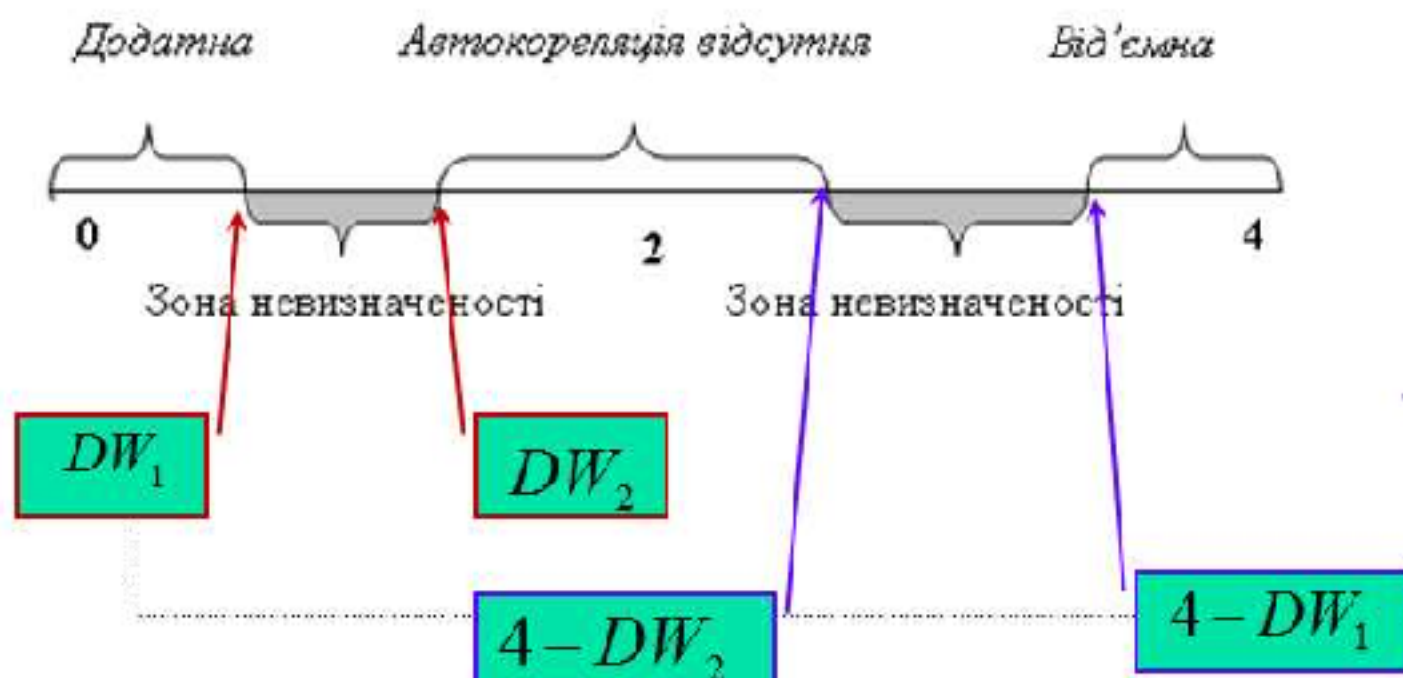


Рис. Зони автокореляційного зв'язку

**Крок 5.** На основі розрахункового значення критерію DW роблять висновок щодо наявності або відсутності автокореляції залишків :

- якщо  $0 < DW < d_L$  - це свідчить про наявність позитивної автокореляції залишків ;
- якщо  $4 - d_L < DW < 4$  - це свідчить про наявність негативної автокореляції залишків;
- якщо  $d_L \leq DW \leq d_U$  а́а́  $4 - d_U \leq DW \leq 4 - d_L$  - неможливо зробити висновок ні про наявність, ні про відсутність автокореляції залишків ;
- якщо  $d_U < DW < 4 - d_U$  - автокореляція залишків відсутня .

### Тема 7. Побудова економетричної моделі з гетероскедастичними або автокорельованими залишками. Узагальнений метод найменших квадратів

Одним із припущень класичного регресійного аналізу є припущення про незалежність випадкових величин  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тобто якщо це припущення порушується, то ми маємо справу з явищем, яке називається автокореляцією залишків.

Для оцінювання параметрів економетричних моделей з автокорельованими залишками в основному використовуються наступні методи:

- 1) метод Ейткена (УМНК) ;
- 2) метод перетворення вихідної інформації ;
- 3) метод Кочрена – Оркатта ;



4) метод Дарбіна .

Перші два методи використовують у випадку, коли залишки задовольняють авторегресійній схемі першого порядку, третій і четвертий - можна застосовувати тоді, коли залишки описуються за авторегресійною схемою вищого порядку.

Розглянемо докладніше метод Ейткена (узагальнений метод найменших квадратів). Цей метод (як і у випадку гетероскедастичності) базується на перетворенні вихідної моделі з урахуванням коваріації залишків (дисперсійно-коваріаційної матриці залишків) у модель без корельованих залишків, до якої потім застосовується метод найменших квадратів.

Нехай в економетричній моделі  $Y = XB + \varepsilon$  випадкова величина задовольняє авторегресійній схемі першого порядку  $\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + u_i, (-1 \leq \rho \leq 1)$ , де  $u_i$  – нормально розподілені залишки. Тоді оператор оцінювання параметрів моделі, як і у випадку гетероскедастичності, буде мати вигляд :

$$B = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y ,$$

де матриця  $S$  має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim S = n \times n .$$

Параметр  $\rho$  наближено можна визначити на основі залишків вибіркової моделі, оціненої за звичайним методом найменших квадратів. З цією метою розраховують так званий **скоригований циклічний коефіцієнт кореляції** :

$$r_{\text{скор}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=2}^n e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^n e_i^2} + \frac{m+1}{n} .$$

Тоді параметри  $\rho$  дорівнюють:

$$\rho \approx r_{\text{скор}} . \quad (16)$$

Оскільки коваріація залишків  $\rho^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ ) у матриці  $S$  при  $\alpha > 2$  часто наближається до нуля, у практичних розрахунках зразу ж можна визначити матрицю  $S^{-1}$ , обернену до матриці  $S$  :

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim S = n \times n .$$

Використання виразу значно полегшує і прискорює розрахунки оцінок параметрів моделі.

Найкращий незміщений лінійний точковий прогноз у випадку автокореляції залишків обчислюється за наступною залежністю :

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} B + \rho \hat{e}_n ,$$

де  $B$  – вектор оцінок параметрів моделі, отриманих узагальненим методом найменших квадратів прогнозованих значень пояснюючих змінних моделі.

Інтервальні прогнози у випадку автокореляції залишків обчислюють за такими ж самими залежностями, як і у випадку гетероскедастичності.

## Тема 8. Економетричні моделі на основі системи структурних рівнянь

Всі економетричні моделі і задачі, які розглядалися у попередніх темах зводилися до розгляду **окремих** економічних явищ і процесів, які характеризувалися **односторонніми** стохастичними причинними залежностями (зв'язками) між економічними показниками. Ці зв'язки моделювалися тільки однією регресією  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тобто у цих моделях вивчався вплив декількох факторів тільки на один показник. Слід також відмітити, що у цих моделях залежні змінні розглядалися одночасно як ендогенні змінні, а пояснюючі (незалежні) змінні моделі виступали як екзогенні змінні.

В реальному економічному житті економічні явища і процеси, як правило взаємозв'язані і взаємозалежні. Тому в економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, які описують **багатосторонні одночасні зв'язки** між економічними явищами. Економетричні моделі таких задач представляють собою вже не одне рівняння а систему рівнянь, кожне з яких моделює один із взаємозв'язаних процесів, явищ. Рівняння, які складають систему можуть мати як стохастичний, так і детермінований характер. Стохастичні зв'язки між економічними показниками описуються за допомогою регресійних рівнянь, а детерміновані - тотожностями і не містять випадкових величин.

Основною особливістю такої системи рівнянь є те, що ендогенні змінні моделі в одних рівняннях можуть розглядатися як пояснюючі (незалежні) змінні, а у інших - як залежні і навпаки, тобто між економічними показниками (змінними) економетричної моделі у вигляді системи рівнянь існує як прямий, так і зворотній зв'язок.

Система рівнянь, що описує наявність одночасних багатосторонніх зв'язків між економічними показниками називається **системою одночасних рівнянь**.

Економетричні моделі на основі системи одночасних рівнянь називаються економетричними симульативними моделями.

Система одночасних рівнянь, яка безпосередньо описує структуру взаємозв'язків між змінними моделі називається структурною формою симульативної моделі.

Структурні рівняння виражають ендогенні змінні моделі як функції інших ендогенних змінних, екзогенних змінних і випадкових величин. Наведені вище приклади симульативних моделей подають їх саме у структурній формі.

Виходячи з визначення і особливостей структурної форми системи одночасних рівнянь можна зробити наступні висновки.

1. Параметри **a** і **b** структурної форми відображають **прямий вплив** кожного фактора на залежну змінну і, як правило, мають відповідний економічний зміст (гранична норма заміщення, коефіцієнт еластичності, гранична схильність до споживання і т.і.). Внаслідок цього структурна форма симульативної моделі використовується для **економіко - математичного аналізу**.

2. Структурна форма симульативної моделі внаслідок порушення розглянутого вище припущення класичного лінійного регресійного аналізу не дозволяє оцінити структурні параметри моделі **a** і **b** і використовувати її для прогнозування.

Система одночасних рівнянь, у якій всі ендогенні змінні виражені як функції лише екзогенних попередньо визначених змінних і випадкових величин називається **приведеною формою** симульативної моделі

Виходячи з визначення і особливостей приведеної форми системи одночасних рівнянь можна зробити наступні висновки.

1. Кожний параметр приведеної форми  $g_j$  представляє собою мультиплікатор і складається з різних коефіцієнтів (параметрів) структурної форми. Параметри-

мультиплікатори приведеної форми утворюють мультиплікаторну матрицю  $R$ . Мультиплікатори приведеної форми вимірюють загальний вплив (прямий та непрямий) попередньо визначених екзогенних змінних на ендогенні змінні, в той час як структурні параметри вимірюють тільки прямий вплив.

2. В правих частинах рівнянь приведеної форми немає жодної взаємозалежної змінної. Тому будь-яке рівняння приведеної форми може використовуватись окремо для прогнозу відповідної залежної змінної. Внаслідок цього приведену форму ще називають прогнозною формою, підкреслюючи тим самим основне призначення рівнянь цієї форми - прогнозування.

( 16 )

## ЛІТЕРАТУРА

1. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Підручник. – К.: КНЕУ, 2006. -528 с.
2. Економетрія: Навч. посіб./ В.І. Жлуктенко, Н.К. Водзянова, С.С. Савіна, О.В. Колодінська. — К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. — 552 с.
3. Назаренко О.М. Основи економетрики: Підручник. – К.: «Центр навчальної літератури», 2005. – 392 с.
4. Вербик Марно Путеводитель по современной эконометрике. Пер. с англ. Б.А. Банникова. Науч. ред. и предисл. С.А. Айвазяна. М.: Научная книга. 2008. – 616 с.
5. Тихомиров Н.П., Дорорхнина Е.Ю. Эконометрика: Учебник / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорорхнина – М.: Издательство “Экзамен”, 2003. – 512 с.
6. Эконометрика: учебник / под ред. д-ра экон. наук, проф. В.С. Мхитаряна, – М.: Проспект, 2009. – 384 с.
7. 3.1.7. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 294с.
8. 3.1.8. Грубер Й. Эконометрия: Том 1. Введение в эконометрию Том 2. Эконометрические прогнозные и оптимизационные модели. - Киев: Астарта, 2006. – 397 с.
9. 3.1.9. Гурова К.Д., Сивый В.Б. Эконометрия / Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов и преподавателей. – Харьков: Константа, 2007. – 92 с.
10. 3.1.10. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. – М.: Дело, 2006. – 400 с.
11. 3.1.11. Лавріненко Н.М. Основи економіко-математичного моделювання: навч. посіб. / Н.М. Лавріненко, С.М. Латинін, В.В. Фортуна, О.І. Бескровний.– Л.: Магнолія 2006, 2010. – 540 с.