УДК 621.39:004.621.3

О.В. Одіяненко,
В.О. Хорошко, д.т.н., професор
Д.В. Чирков, к.т.н., доцент,
Я.Л. Шатило

ВИЯВЛЕННЯ НЕБЕЗПЕЧНИХ СИГНАЛІВ ПРИ РАДІОМОНІТОРИНГУ

У статті розглянуто методи розкладання небезпечних сигналів при радіомоніторингу об'єктів по системі функціональних операторів. Сформульовано чотири твердження.
Ключові слова: *небезпечні сигнали, радіомоніторинг, система функціональних операторів.*

В статье рассмотрены методы разложения опасных сигналов при радиомониторинге объектов по системе функциональных операторов. Сформулированы четыре утверждения.
Ключевые слова: *опасные сигналы, радиомониторинг, система функциональных операторов.*

Methods of the decomposition of dangerous signals for objects radiomonitoring by the system of functional operators are considered. Four assertions are formulated.
Keywords: *dangerous signals, radiomonitoring, system of functional operators.*

Радіомоніторинг є комплексом заходів, спрямованих на реалізацію спостереження, аналізу та прогнозування станів безпеки на об'єкті, який захищається, або з якого передбачається несанкціоноване отримання інформації. Класична сучасна система радіомоніторингу характеризується принципом виявлення можливого каналу витоку інформації, сферою застосування і методами, які використовуються для виявлення каналів витоку [1].

Таким чином, актуальним є дослідження питань виявлення небезпечних сигналів (сигналів, які несуть інформацію) при радіомоніторингу як з теоретичної, так і з практичної сторони. Синтез оптимальних систем виявлення і обробки складних сигналів істотно можна спростити при розкладанні контрольованих процесів, що спостерігаються, за системою лінійно незалежних функцій. У роботі "Основи системного аналізу" [1] показана можливість розкладання випадкових величин за системою функцій, утворених від цих же випадкових величин.

У статті розглядається запропоноване розкладання небезпечних сигналів при радіомоніторингу об'єктів по системі функціональних операторів.

Виконаємо узагальнення, розглянуте і запропоноване в [1], розкладання на класи функціональних операторів з постійними коефіцієнтами.

Як базові функції розглянемо безліч $H = \{\eta_i(t), i = \overline{1,S}\}$, що складається з S незалежних випадкових процесів, $\eta_i(t)$, заданих реалізаціями тривалістю T.

Аналізований випадковий процес $\xi(t)$ і процеси $\eta_i(t) \in H, i=\overline{1,S}$, для узагальнення результатів, припускаємо комплексними. Оцінку процесу $\xi(t)$ виконаємо поліноміальним оператором

$$Z_S(t) = \sum_{i=1}^{S} \frac{K_i}{T} \int_{t-T}^{t} \eta_i(t)dt + k_0\,,$$

(1)

де $k_i, i=\overline{0,S}$ – невідомі вагові коефіцієнти.

На підставі виразу (1) сформулюємо визначення.

Визначення. Оператор вигляду (1) назвемо стаціонарним функціональним поліномом з постійними коефіцієнтами порядку S.

Вважаючи, що процеси $\xi(t)$ і $\eta_i(t)$, $i=\overline{1,S}$ є стаціонарними і стаціонарно пов'язаними, вимагатимемо незміщеної оцінки (1). Для центрованого випадкового процесу $\xi(t)$ ця вимога дозволяє (1) знайти

$$K_0 = -\sum_{i=1}^{S} \frac{K_i}{T} \int_{t-T}^{t} m_i dt\,, \tag{2}$$

де $m_i = M\{\eta_i(t)\}$ – моментна функція першого порядку випадкового процесу $\eta_i(t), i=\overline{1,S}$. Тут і далі $M\{\bullet\}$ означає операцію обчислення математичного сподівання від величини $\{\bullet\}$.

Зробивши підстановку (2) в (1), отримаємо

$$Z_S(t) = \sum_{i=1}^{S} \frac{K_i}{T} \int_{t-T}^{t} \Theta_i(t)dt\,, \tag{3}$$

де $\Theta_i(t) = \eta_i(t) - m_i$ – центрований випадковий процес.

Дисперсію різниці випадкових процесів $\xi(t)$ і $Z_S(t)$ (помилку апроксимації) будемо характеризувати величиною

$$\delta_S^2 = M\left\{\left|\xi(t) - Z_S(t)\right|^2\right\} = \delta^2 - \sum_{i=1}^{S} \frac{k_i^*}{T} \int_{t-T}^{t} R_{1,i}^{\xi,\Theta}(t,x)dx - \\ - \sum_{i=1}^{S} \frac{k_i}{T} \int_{t-T}^{t} R_{i,1}^{\Theta,\zeta}(x,t)dx + \sum_{i=1}^{S} k_i^* k_j \int_{t-T}^{t} \int_{t-T}^{t} F_{ij}^{\Theta}(x,\nu)dxd\nu\,, \tag{4}$$

де $(\bullet)^*$ – комплексне об'єднання величини $(\bullet)$; δ^2 – дисперсія процесу $\xi(t)$;

$R_{1,i}^{\xi,\Theta}(t,x) = \left[R_{i,1}^{\Theta,\zeta}(x,t)\right]^* = M\left\{\xi^*(t)\Theta_i(x)\right\}$ – спільна моментна функція другого порядку випадкових процесів $\xi^*(t)$ и $\Theta_i(x)$; $F_{ij}^{\Theta}(x,\nu)$ – моментна функція другого порядку двомоментного розподілу випадкових процесів $\Theta_i(x)$ и $\Theta_i(\nu)$.

Прийняті допущення стаціонарності процесів $\xi(t)$ і $\Theta(t)$, $i=\overline{1,S}$ і їх центрованість дозволяє розглядати величину δ_S^2 в (4) як дисперсію оцінки (1), величина якої не залежить від значення t.

Враховуючи, що для стаціонарних процесів моментні функції двомоментного розподілу залежать від різниці моментів, що розглядаються, і змінивши порядок інтегрування в двократному інтегралі, після інтегрування (4) отримуємо

$$\delta_S^2=\delta_\xi^2-\sum_{i=1}^{S}k_i^*G_{1,i}-\sum_{i=1}^{S}k_i\,G_{1,i}^*+\sum_{i,j=1}^{S}k_i^*k_j\Phi_{i,j}\,, \qquad (5)$$

де введені додаткові позначення:

$$G_{1,i}=\frac{1}{T}\int_0^T R_{1,i}^{\xi,\Theta}(z)dz\,,$$

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|z|}{T})F_{ij}^{\Theta}(z)dz. \qquad (6)$$

На підставі проведених досліджень сформулюємо таке твердження.

Твердження 1. Величина

$$D_S^2=\sum_{i,j=1}^{S}k_i^*k_j\Phi_{i,j} \qquad (7)$$

являє собою невід'ємну ермітову форму для будь-яких значень вектора $k=\left[k_i\right]_{i=\overline{1,S}}^T$.

Спочатку відзначимо, що матриця $\Phi=\left[\Phi_{i,j}\right]_{i,j=\overline{1,S}}$ є ермітовою, оскільки $\Phi_{i,j}=\Phi^*_{j,i},\, i=\overline{1,S}$. Це випливає з подання елементів матриці Ф еквівалентною (6) рівністю, отриманою з рівнянь (5) та (4),

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{T^2}M\left\{\int_{t-T}^{t}\int_{t-T}^{t}\Theta_i^*(x)\Theta_j^*(\nu)dxd\nu\right\}=$$
$$=\frac{1}{T^2}\left[\int_{t-T}^{t}\int_{t-T}^{t}M\left\{\Theta_i^*(x)\Theta_j^*(\nu)\right\}dxd\nu\right]^*=\Phi^*_{j,i},\,i,\,j=\overline{1,S}\,. \qquad (8)$$

Перетворення в (8) можливі, оскільки операція інтегрування лінійна, а розглянуті інтеграли при остаточному Т мають кінцеве значення.

Підставляючи рівність (8) в (7), отримаємо

$$D_S^2 = M\left\{\sum_{i,j=1}^{S}\frac{k_i^* k_j}{T^2}\int_{t-T}^{t}\Theta_i^*(x)dx\int_{t-T}^{t}\Theta_i(\nu)d\nu\right\} = M\left[\left|\sum_{i=1}^{S}\frac{k_i}{T}\int_{t-T}^{t}\Theta_i^*(x)dx\right|^2\right] \geq 0.$$

Тим самим показана невід'ємна визначеність ермітової форми D_S^2, а значить, і позитивна напіввизначеність ермітової матриці Ф, а значить, і позитивна напіввизначеність ермітової матриці.

Твердження 2. При цій матриці Ф мінімальне значення дисперсії D_S^2 визначається вектором $K^0 = \left[k_i, i = \overline{1,S}\right]^T$, знайденим з рішення рівняння

$$\Phi K^0 = G, \tag{9}$$

де $G = \left[G_{1,i}, \overline{1,S}\right]^T$ – матриця-стовпець.

Матрична рівність (9) є математичною формою запису леми [3] про ортогональні проекції. Для підтвердження цього розглянемо n – мірний унітарний простір, E_n утворений реалізаціями випадкових процесів (векторами простору E_n). У просторі E_n введемо операцію скалярного добутку.

$$(x,y) = M\{x^*(t), y(t)\},$$

де $x(t), y(t) \in E_n$.

Ця операція, як відомо, задовольняє всім аксіомам скалярного добутку і з урахуванням змісту рівності (6), дозволяє задати матриці Ф і *G* в (9) елементами

$$\Phi_{i,j} = (\nu_i, \nu_i), G_{1,i} = (\xi, \nu), i, j = \overline{1,S}, \tag{10}$$

де $\nu_k = \dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\Theta_k(z)dz, k = i, j$.

Таким чином, матриця Ф є матрицею Грама [4]. Умова твердження $\det\Phi\rangle 0$ дозволяє розглядати вектори $\nu_i, i = \overline{1,S}$ як систему лінійно незалежних векторів (базис) підпростору $E_S \subset E_n$ при $n \geq S$. Тим самим рівність (9) можна інтерпретувати як умову ортогональності вектора помилки апроксимації $\varepsilon(t) = \xi(t) - Z_S(t) \perp K^0$ підпростору $E_S\left[\varepsilon(t) \perp E_S\right]$.

За лемою про ортогональні [5] проекції отримуємо, що вектор

$$K^0 = \Phi^{-1}G, \tag{11}$$

де Φ^{-1} – матриця, зворотна матриці Ф, виведена з (9) і є проекцією вектора $\xi(t) \in E_n$ в підпросторі E_S. Цей вектор забезпечує мінімальну дисперсію помилки δ_S^2.

У більш детальному записі рівняння (9) має вигляд системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{S} k_i \Phi_{ij} = G_{1,i}, i = \overline{1,S}. \tag{12}$$

З рішенням за формулою Крамера отримаємо

$$k_i = \frac{\Delta_{S,j}}{\Delta_S}, j = \overline{1,S}, \tag{13}$$

де $\Delta_S = \det \Phi$ – визначник матриці Грама s-го порядку; $\Delta_{S,j}$ – визначник матриці, отриманої з матриці Грама заміною j-го стовпця стовпцем G.

На підставі *Твердження 2* сформуємо слідство.

Слідство. Для безлічі $H = \{\eta_i(t), i = \overline{1,S}\}$ випадкових процесів $\eta_i(t)$ незалежних від випадкового процесу $\xi(t)$ для всіх $i = \overline{1,S}$ при $\det \Phi \rangle 0$, оптимальне значення коефіцієнтів k_i визначається матрицею-стовпцем $K^0 \equiv 0$.

Під незалежними випадковими процесами будемо розуміти такі процеси x (t) і y (t), для яких виконується умова

$$M\{x(t)y(\nu)\} = M\{x(t)\}M\{y(\nu)\}. \tag{14}$$

У цьому випадку умова (14) призводить до матриці-стовпця *G*=0, оскільки процес $\xi(t)$ є центрованим. Для матриці *G*=0 з (11) маємо тривіальне і єдине рішення рівності (9).

Для тривіального рішення з (5) отримаємо дисперсію помилки апроксимації випадкового процесу $\xi(t)$ стаціонарного функціонального полінома вигляду (1), що дорівнює дисперсії δ_ξ^2. З геометричної точки зору результат легко можна пояснити. Вектор $\xi(t) \in E_n$ при *G*=0 є ортогональним підпростору E_S, натягнутому на базис $\nu_i, i = \overline{1,S}$. Тому проекція $\xi(t)$ на підпросторі E_S дорівнює нульовому вектору, а вектор помилки $\varepsilon(t) = \xi(t)$.

Твердження 3. Оптимальний вектор $K^0 = \left[k_i, i = \overline{1,S}\right]^T$, визначений з системи (12), задовольняє рівності

$$\sum_{j=1}^{S} k_i^* k_i \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^{S} k_i^* G_{1,i} = \sum_{i=1}^{S} k_i^* G_{1,i}^*. \tag{15}$$

Перша рівність в (15) виходить з системи (12) при множенні кожного рівняння на $k_i, i = \overline{1,S}$ з наступним підсумовуванням отриманих рівностей.

Відповідно до *твердження* 1 ермітова форма в (15) є дійсною величиною. Тому, застосовуючи операцію комплексного сполучення до правої частини першої рівності (15), отримаємо запис другої рівності.

Враховуючи вирази (15) і (16), отримуємо наступні рівності для знаходження дисперсії помилки апроксимації:

$$\delta_s^2 = \delta_\xi^2 - \sum_{i=1}^{S} k_i^* G_{1,i} = \delta_\xi^2 - \sum_{j=1}^{S} k_i^* k_i \Phi_{ij}. \tag{16}$$

Використовуючи у виразі (16) позначення, введене в твердження 1, при оптимальному векторі K^0 можна записати

$$\delta_s^2 = \delta_\xi^2 - D_S^2 . \tag{17}$$

Згідно з виразом (17) при оптимальному векторі K^0 дисперсія δ_ξ^2 визначається значенням, яке дорівнює дисперсії процесу D_S^2 і залежить від порядку S стаціонарного функціонального полінома. Для розгляду цієї залежності доцільно отримати канонічну форму подання ермітової форми D_S^2 у виразі (7). Введемо величину

$$L_S = D_S^2 - D_{S-1}^2, S = 1,2,..., \tag{18}$$

яка при $D_0^2 = 0$ визначає приріст величини D_S^2 в порівнянні із значенням D_{S-1}^2.

Користуючись рівнянням (18), можна записати:

$$D_S^2 = D_S^2 - D_{S-1}^2 + D_{S-1}^2 - D_{S-2}^2 + ... + D_1^2 - D_0^2 = \sum_{i=1}^{S} L_i . \tag{19}$$

Твердження 4. При оптимальному векторі $K^0 = [K_1, K_2, ..., K_n]^T$ в оцінці виразу (1) величина $L_n, n = \overline{1, S}$ невід'ємно визначена і знаходиться з виразу

$$L_n = \frac{|\Delta_{n,n}|^2}{\Delta_n \Delta_{n-1}}, \Delta_0 \equiv 1 . \tag{20}$$

Використовуючи для елементів вектора K^0 порядку $n = \overline{1, S}$ значення $k_i, i = \overline{1, S}$, записані в вигляді (13), отримаємо наступну величину $L_n = D_m^2 - D_{m-1}^2$, яку із застосуванням рівності (15) можна визначити з виразу

$$L_n = \frac{1}{\Delta_n \Delta_{n-1}} \left\{ \Delta_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{n,k} G_{1,k}^* - \Delta_n \sum_{k=1}^{n} \Delta_{n-1,k} G_{1,k}^* \right\} . \tag{21}$$

Розкладаючи визначники $\Delta_{n,k}$ і $\Delta_{n-1,k}$ за елементами k-го стовпця, маємо

$$\Delta_{p,k} = \sum_{j=1}^{p} G_{1,j} A_{j,k}^{(p)}, p = \overline{n-1, n}, k = \overline{1, p}, \tag{22}$$

де $A_{j,k}^{(p)}$ алгебраїчне доповнення елемента j-го рядка і p-го стовпця в матриці Грама p-го порядку.

Підставляючи вираз (22) в (21), отримаємо

$$L_n = \frac{1}{\Delta_n \Delta_{n-1}} \sum_{k,j=1}^{n} \left[A_{j,k}^{(n)} \Delta_{n-1} - A_{j,k}^{(n-1)} \Delta_n \right] G_{1,j} G_{1,k}^* . \tag{23}$$

Об'єднання двох сум у виразі (22) виконано шляхом додавання доданків виду

$$\sum_{j=1}^{n} G_{1,j} G_{1,k}^{*} A_{j,n}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} G_{1,n} G_{1,k}^{*} A_{n,k}^{(n-1)},$$

оскільки $A_{j,n}^{(n-1)} = A_{n,k}^{(n-1)} = 0,\ j,k = \overline{1,n}$, як n-го рядка і n-го стовпця в визначнику (n-1) порядку немає.

Використовуючи відоме з теорії визначників співвідношення [3], запишемо

$$A_{j,k}^{(n)} \Delta_{n-1} - A_{j,k}^{(n-1)} \Delta_{n} = \left[A_{j,n}^{(n)}\right]^{*} A_{j,n}^{(n)},\ j,k = \overline{1,n}$$

для елементів, записаних в квадратній дужці виразу (23), маємо

$$L_n = \frac{1}{\Delta_n \Delta_{n-1}} \sum_{j,k=1}^{n} G_{1,n} G_{1,k}^{*} \left[A_{k,n}^{(n)}\right]^{*} A_{j,n}^{(n)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_n \Delta_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} G_{1,n} A_{k,n}^{*} \right\}^{*} \sum_{j=1}^{n} G_{1,j} A_{j,n}^{(n)} = \frac{\left|\Delta_{n,n}\right|^2}{\Delta_n \Delta_{n-1}}, \qquad (24)$$

що відповідає (20).

Напіввизначеність виразу (20) випливає з його вигляду, оскільки граміан $\Delta_S \rangle 0$, вектор, що визначає K^0з виразу (11), згідно з умовами Сильвестра забезпечує позитивну визначеність граміанів $\Delta_n, n = \overline{1,S}$ _, n-го порядку.

Підставляючи вирази (20) в (19), маємо канонічну форму визначення величин

$$D_S^2 = \sum_{i=1}^{S} \frac{\left|\Delta_i\right|^2}{\Delta_i \Delta_{i-1}}. \qquad (25)$$

Вираз (25), підставлений в (17) і з урахуванням виразу (13), дозволяє отримати залежність δ_s^2 від величини S в простішому вигляді для проведення аналізу:

$$\delta_S^2 = \delta_\xi^2 - \sum_{i=1}^{S} \frac{\left|\Delta_{i,i}\right|^2}{\Delta_i \Delta_{i-1}} = \delta_\xi^2 - \left|k_i^{(i)}\right| \sum_{i=1}^{S} \frac{\Delta_i}{\Delta_i \Delta_{i-1}},$$

де $k_i^{(i)}$ і-й елемент вектора K^0, визначений з виразу (13) для порядку $S=i$.

Висновки

Проведені дослідження дозволяють робити розкладання небезпечних сигналів при радіомоніторингу об'єктів по системі функціональних операторів. При цьому отримані вирази дають можливість знаходити мінімальну помилку апроксимації випадкових ефірних процесів $\xi(t)$ стаціонарних функціональних поліномів з оптимальними значеннями постійних коефіцієнтів з відомим значенням матриць Φ і G. Оптимальною особливістю аналізу задачі апроксимації є її рішення без використання методу ортогоналізації векторів, що утворюють базис простору E_S.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Згуровський М.З.* Основи системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратов. – К. : Вид. група BHV, 2007. –544 с.
2. *Бейкер Дж.* Аппроксимация Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.
3. *Маклеллан Дж. Х.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов / Дж. Х. Макклеллан, Ч. М. Рейдер. – М. : Радио и связь, 1983. – 264 с.
4. *Баранов В.Л.* Моделювання фізичних процесів в інформаційній безпеці / В.Л. Баранов, М.В. Капустян, Р.М. Костюченко, В.О. Хорошко. – К. : Вид. ДУІКТ, 2009. – 175 с.
5. *Арфкен Г.* Математические методы в физике / Г. Арфкен. – М. : Атомиздат, 1970. – 712 с.

Отримано 08.02.2012