$$\sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} \le z_i, i = 1,2,...,m+1 \text{ (спрос)},$$

положительные целые числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{i=1}^{m+1} z_i .$$

Данная модель транспортной задачи имеет n+m+1 переменных. Для ее решения может быть использована одна из модификаций симплекс-метода (метод потенциалов) [7].

Проведенные исследования позволяют оценить стойкость многорубежной комплексной системы технической защиты против действий злоумышленника. Причём полученные результаты дают возможность с достаточно высокой точностью оценить эффективность распределения ресурсов ТСЗИ между рубежами защиты при направленном и сконцентрированном преодолении определённого рубежа.

Список литературы

1. ДСТУ 3396.0-96. Захист інформації. Технічний захист інформації. Основні положення.
2. ДСТУ 3396.1-96. Захист інформації. Технічний захист інформації. Порядок проведення робіт.
3. Шорошев В. В., Ильницкий А. Е. Основы стратегии защиты информации в компьютерных системах / Бизнес и безопасность, 2000, №2.-с.6-7.
4. Хорошко В. А. Модель системы защиты информации./ Захист інформації,1999, №1.-с.5-11.
5. Арфкен Г. Математические методы в физике. - М.: Атомиздат, 1970.-712 с.
6. Мину М. Математическое программирование. – М.: Наука, 1990.-488 с.
7. Сторский В. П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975.-768 с.

Поступила 25.04.2003г.

УДК 004.56.021.2: 510.22 (045)
А.Г. Корченко, В.А. Рындюк

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НА ОСНОВЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В настоящее время все чаще при решении различных прикладных задач применяют аппарат теории нечетких множеств (НМ). Эта тенденция повлияла на создание моделей принятия решений в области информационной безопасности. Первым шагом при создании таких моделей является формализация нечетких понятий и отношений, используемых при описании их элементов. В этой связи важным является вопрос построения функции принадлежности (ФП) НМ по результатам опроса экспертов (ЭО) или путем анализа статистических данных. Этому вопросу посвящен ряд работ [1-7], в которых описывались прямые и косвенные методы формирования ФП одним или группой экспертов. Для эффективного решения подобных задач необходимо сделать правильный выбор нужного метода, учитывая при этом следующие факторы: способ представления исходных данных (ИД), необходимых для реализации метода; класс получаемой ФП [8]; и возможные методы дальнейшей обработки ФП образующихся НЧ [9].

Исследуем совокупность перечисленных факторов при рассмотрении косвенных методов построения ФП на основе парных сравнений степеней принадлежности одним экспертом. К ним относятся методы: количественного парного сравнения (КПС), количественного парного сравнения с нахождением частного (КПСЧ), количественного парного сравнения с определением корня квадратного (КПСК), наименьших квадратов (ПСНК) и парного сравнения на основе ранговых оценок (ПСРО).

Метод КПС [2, 3, 4] состоит в следующем. Пусть $\underset{\sim}{A}$ - нечеткое подмножество из n элементов вида

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)/x_1, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)/x_2, ..., \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)/x_n \right\}.$$

Необходимым условием для всех элементов множества $\underset{\sim}{A}$ является равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 1.$$

Степень принадлежности элементов множеству определяется посредством парных сравнений, а количество вопросов к эксперту составляет n(n-1)/2. По его оценкам формируется матрица парных сравнений

$$A = \|a_{ij}\|, \tag{2}$$

где значение a_{ij}, выбирается из табл. 1(оценка элемента x_i по сравнению с x_j с точки зрения свойств $\underset{\sim}{A}$).

Для обеспечения согласованности мнений экспертов принимается $a_{ij} = 1/a_{ji}$. После формирования матрицы A необходимо найти собственный вектор матрицы w = ($\omega_1, \ldots, \omega_n$), решая уравнение Aw = λw, где λ – собственное значение матрицы. Вычисленные значения, составляющие собственный вектор, принимаются в качестве степени принадлежности элементов x множеству $\underset{\sim}{A}$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \omega_i, \ i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Так как, по определению [3] всегда выполняется равенство Aw = nw, тогда найденные значения тем точнее, чем ближе λ_{max} к n. Отклонение λ_{max} от n служит мерой согласованности суждений экспертов, решающих поставленную задачу, т.е. используется как мера полезности (правильности) результата [2].

Таблица 1

Шкала для определения матрицы суждений

Оценка важности	Качественная оценка	Примечание
1	Одинаковая значимость	По данному критерию альтернативы имеют одинаковый ранг
3	Слабое превосходство	Соображения о предпочтении одной альтернативы перед другой малоубедительны

Продолжение таблицы 1

5	Сильное (или существенное) превосходство	Имеются надежные доказательства существенного превосходства одной альтернативы
7	Очевидное превосходство	Существуют убедительные свидетельства в пользу одной альтернативы
9	Абсолютное превосходство	Свидетельство в пользу предпочтения одной альтернативы перед другой в высшей степени убедительно
2,4, 6, 8	Промежуточные значения	Используются, когда необходим компромисс

Пример 1. Пусть $X = \{5, 7, 8, 10\}$ - множество, определяющее количество символов длины секретного ключа. Требуется построить НМ $\underset{\sim}{A}$, формализующее понятие "достаточная длина секретного ключа для обеспечения конфиденциальности информации составляет семь символов".

Матрица парных сравнений длин ключа, пронумерованных в порядке представления во множестве X, имеет вид:

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 & 1 \\ 9 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 1/7 & 1 & 7 \\ 1 & 1/9 & 1/7 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обратимся к решению задачи нахождения собственных значений $(A\text{-}\lambda E)w = 0$. Эта неоднородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы $A\text{-}\lambda E$ равен нулю. Найдем его:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/9 & 1/3 & 2 \\ 9 & 1-\lambda & 7 & 9 \\ 3 & 1/7 & 1-\lambda & 7 \\ 1 & 1/9 & 1/7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\,\lambda^3 + 2\lambda^2 - 0.57\lambda + 0.111$$

и приравняем к нулю. Уравнение имеет решение: $\lambda_{max} = 4.003$. Найдем собственный вектор:

$$\begin{Vmatrix} 1-4.003 & 1/9 & 1/3 & 2 \\ 9 & 1-4.390 & 7 & 9 \\ 3 & 1/7 & 1-4.003 & 7 \\ 1 & 1/9 & 1/7 & 1-4.003 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

Далее вводится условие нормировки: $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1$. Полученная система

$$\begin{cases} -3.003\omega_1 + 0.111\omega_2 + 0.333\omega_3 + 2\omega_4 = 0; \\ 9\omega_1 - 3.003\omega_2 + 7\omega_3 + 9\omega_4 = 0; \\ 3\omega_1 + 0.142\omega_2 - 3.003\omega_3 + 7\omega_4 = 0; \\ \omega_1 + 0.111\omega_2 + 0.142\omega_3 - 3.003\omega_4 = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Для нахождения собственного вектора w вместо одного из уравнений системы используется условие нормировки. В результате решения системы получаем собственный вектор:

$$\omega_1 = 0.042;\ \omega_2 = 0.718;\ \omega_3 = 0.191;\ \omega_4 = 0.049\ \ (\text{при } \lambda_{max} = 4.003).$$

Таким образом, степени принадлежности элементов x множеству $\underset{\sim}{A}$ будут равны: $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 0.042$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 0.718$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0.191$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 0.049$.

Полученная ФП представлена на рис. 1 сплошной линией, а ее нормализованный вид - пунктиром.

Отклонение λ_{max} от n, служащее мерой правильности результата, в данном случае равно $\lambda_{max} - n = 4.003 - 4 = 0.003$.

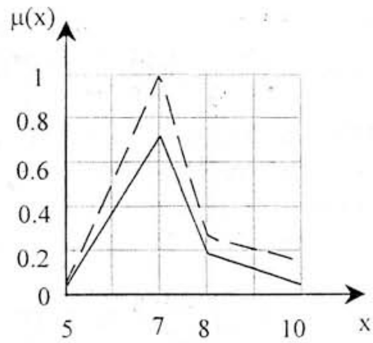

Рис.1

В рассматриваемом методе ИД для построения матрицы суждений выбираются на основании табл. 1, а полученная ФП, в соответствии с [8], может иметь субнормальный; выпуклый; унимодальный, полимодальный либо толерантный; дискретный и непараметрический вид, что, в частности, подтверждается полученными данными (см. рис.1).

Как следует из описания метода, определение весовых коэффициентов с помощью нахождения вектора матрицы парных сравнений является довольно трудоемкой задачей, к тому же при увеличении числа сравниваемых величин размерность формируемой матрицы возрастет, что существенно усложнит нахождение ее собственного значения и, соответственно, решение поставленной задачи.

Для решения практических задач в работе [5] предлагается метод КПСК, в котором ФП (весовые коэффициенты) определяют путем расчета среднего геометрического из соотношения

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \omega_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\ ;\ j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где a_{ij} – коэффициенты матрицы парных сравнений.

Пример 2. Рассмотрим задачу из предыдущего примера, тогда, соответственно, матрица парных сравнений будет аналогична рассмотренной выше. Весовые коэффициенты (согласно (6)) определяются как:

$$\omega_1 = \sqrt[4]{1\times 1/9\times 1/3\times 1} = 0.439;\ \ \omega_2 = \sqrt[4]{9\times 1\times 7\times 9} = 4{,}88;$$
$$\omega_3 = \sqrt[4]{3\times 1/7\times 1\times 7} = 1.316;\ \ \ \omega_3 = \sqrt[4]{1\times 1/9\times 1/7\times 1} = 0.355,$$

а после нормализации получим: $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 0.089$;

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 1$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0.269$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 0.073$.

В этом методе ИД представляют собой сформированную на основе экспертного опроса матрицу парных сравнений, взятую из примера 1, и тогда классы образующихся ФП будут такими же, как в предыдущем методе, что также видно из примера 2 (рис. 2).

В работе [6] предлагается еще один метод нахождения ФП на основе составленной (см. пример 1) матрицы парных сравнений - КПСЧ.

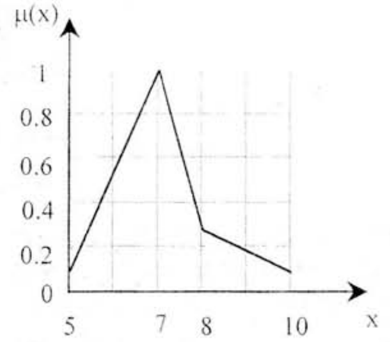

Рис. 2

Для определения значений ФП $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ здесь используют формулу:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \frac{a_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}},$$

где $i, j \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, причем j - выбирается произвольно. Другими словами, для определения величин $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$, $i \in I$ необходимо зафиксировать произвольно выбранный столбец j, $j \in I$, матрицы A и вычислить отношения величин элементов a_{ij} к сумме величин всех элементов столбца j. При правильно проведенном экспертом опросе выбор столбца j практически не влияет на правильность определения ФП. Рассмотрим пример.

Пример 3. Используя матрицу парных сравнений из примера 4, получим:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 1/(1+9+3+1) = 0.071;\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 9/(1+9+3+1) = 0.643;$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 3/(1+9+3+1) = 0.214;\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 1/(1+9+3+1) = 0.071.$$

Образованная ФП представлена на рис. 3 сплошной линией, а ее нормализованный вид - пунктиром. Как видим, в данном методе используются те же ИД, что и в КПС, но вычисления являются менее трудоемкими, а получаемые ФП будут иметь такой же вид, как и в методе КПС.

В [7, 2] описан метод ПСНК для получения значений ФП по матрице бинарных отношений (2), т.е. искомые значения получаются путем решения оптимизационного уравнения

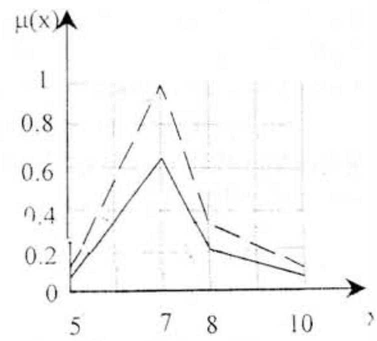

Рис. 3

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{\omega_i}{\omega_j}\right)^2 \to \min;\ \sum \omega_i = 1,\ \omega_i > 0.$$

В работе говорится о близости оценок степени принадлежности, полученных методами наименьших квадратов и поиска собственного вектора. ИД формируются здесь аналогично предыдущим методам. Соответственно будет аналогичен и вид получаемых ФП.

Данный метод достаточно трудоемок и поэтому для решения практических задач почти не применяется.

В работе [5] предложен метод ПСРО, где в качестве ИД также используется матрица парных сравнений. Здесь алгоритм построения ФП состоит из следующих этапов:

- задание лингвистической переменной (ЛП);
- определение универсального множества, на котором задается ЛП;

- задание совокупности нечетких термов $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ которые используются для оценки переменной;
- формирование для каждого терма S_j следующей матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_2}{r_1} & \frac{r_3}{r_1} & \ldots & \frac{r_n}{r_1} \\ \frac{r_1}{r_2} & 1 & \frac{r_3}{r_2} & \ldots & \frac{r_n}{r_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{r_1}{r_n} & \frac{r_2}{r_n} & \frac{r_3}{r_n} & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где $r_n(x_i)$ – ранг элемента $x_i \in X$, характеризующий значимость этого элемента в формировании свойства, описываемого термом S;

- вычисление элементов ФП для каждого терма по формулам:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = \left(1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1} + \ldots + \frac{r_n}{r_1}\right)^{-1},$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 + \frac{r_3}{r_2} + \ldots + \frac{r_n}{r_2}\right)^{-1}, \qquad (8)$$

. . . .

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n) = \left(\frac{r_1}{r_n} + \frac{r_2}{r_n} + \frac{r_3}{r_n} + \ldots + 1\right)^{-1};$$

- нормализация полученных ФП.

Полученные формулы (8) дают возможность вычислять ФП двумя независимыми путями:

1) по абсолютным оценкам уровней r_i, $i = \overline{1, n}$, которые определяются по 9-ти бальной шкале (1 – наименьший ранг, 9 – наибольший ранг);

2) по относительным оценкам рангов $a_{ij} = r_j / r_i$ где $i, j = \overline{1, n}$.

Главным преимуществом данного метода является то, что, в отличие от метода КПС, он не требует решения характеристического уравнения. Полученные соотношения дают возможность вычислять ФП с использованием ранговых оценок, которые несложно получить при экспертном опросе. Для экспертных оценок элементов этой матрицы можно использовать 9-ти бальную шкалу Саати (см. табл. 1). Отличается этот метод от предложенного в [3, 4] еще и тем, что в результате опроса формируется только одна k-я строка матрицы парных сравнений, т.е. элементы a_{kj}, $k, j = \overline{1, n}$, а остальные (вследствие свойства транзитивности данной матрицы [5]) легко определяются на основании известной строки по формуле: $a_{ij} = a_{kj} / a_{ki}$, $j = \overline{1, n}$.

Пример 4. Задачу из примера 1 решим ПСРО методом. Матрица парных сравнений, согласно условиям метода, будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9/1 & 9/3 & 1 \\ 1/9 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 3/9 & 3/1 & 1 & 3/9 \\ 1 & 9/1 & 9/3 & 1 \end{bmatrix}$$

По формуле (8) определим степени принадлежности элементов НМ $\underset{\sim}{A}$:

$\mu_A(x_1) = (1+9/1+9/3+1)^{-1} = 0.071$; $\mu_A(x_2) = (1/9+1+1/3+1/9)^{-1} = 0.643$;

$\mu_A(x_3) = (3/9+3+1+3/9)^{-1} = 0.214$; $\mu_A(x_4) = (1+9/1+9/3+1)^{-1} = 0.071$,

которые после нормализации [8] будут иметь вид: $\mu_A(x_1) = 0.111$; $\mu_A(x_2) = 1$; $\mu_A(x_3) = 0.333$; $\mu_A(x_4) = 0.111$. Полученная ФП представлена на рис. 4.

В этом методе ИД формируются на основе ранговых оценок. Как и в предыдущих методах (КПС, КПСК, КПСЧ, ПСНК) здесь можно использовать шкалу для определения матрицы суждений (табл.1), а полученные ФП могут иметь нормальную; выпуклую; унимодальную, полимодальную либо толерантную; дискретную и непараметрическую форму, что, в частности, видно на рис. 4.

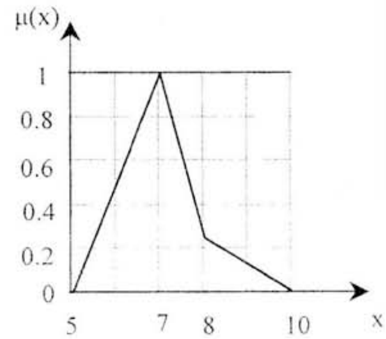

Рис. 4

При проведении исследований для каждого метода были рассмотрены различные виды задач с целью проверки возможности получения (на основе описанных методов) определенных в работе [8] классов НЧ. Также, исходя из условий описанных методов и решения практических задач, были оценены сложность получения экспертной информации (СПЭИ) и трудоемкость ее обработки (Т).

Результаты этих исследований занесены в итоговую табл. 2, где используются следующие сокращения для вида получаемых НЧ: НР - нормальные, СН - субнормальные, ВП - выпуклые, НВ - невыпуклые, УМ - унимодальные, ПМ - полимодальные, ТЛ - толерантные, ДС - дискретные, НП - непрерывные, ПР - параметрические.

Анализируя табл. 2, можно заметить, что все методы, кроме ПСРО, образуют одинаковые классы ФП. Отличие состоит лишь в формировании нормальных и субнормальных НЧ, т.к. метод ПСРО, в отличие от остальных, предполагает обязательную нормализацию полученных ФП.

К тому же методы КПСК, КПСЧ и ПСРО менее громоздки, чем КПС и, значит, более быстрые, что говорит о возможности их применения для решения практических задач, в случаях, когда не предусматривается определение согласованности суждений экспертов.

Итак, в результате исследования методов получения ФП на основе количественных парных сравнений, приходим к выводу, что для каждого из них могут быть определены классы ФП [8], образующиеся при реализации этих методов и далее, пользуясь результатами работы [9], может быть выбран приемлемый метод обработки НЧ.

Таблица 2

Метод	СПЭИ	Т	Источник данных (способ получения информации)	Вид получаемых НЧ (ФП)									
				НР	СН	ВП	НВ	УМ	ПМ	ТЛ	ДС	НП	ПР
КПС	1	1	ЭО, формирование матрицы парных сравнений	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
КПСК	1	0	ЭО, формирование матрицы парных сравнений	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
КПСЧ	1	0	ЭО, формирование матрицы парных сравнений	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ПСРО	1	0	ЭО, формирование матрицы парных сравнений на основе ранговых оценок	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0

Список литературы

1. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В., Слядзь Н.Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений, - М.: Радио и связь, 1989.- 304 с.

2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. - М.: Наука, 1986. - 312 с.

3. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. -М.: Радио и связь, 1993.- 320 с.

4. Борисов А.Н., Крумберг О.А., И.П. Федоров. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. Рига: Зинатне, 1990г.

5. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации.- Винница: Изд-во "Универсум Винница ", 1999. - 320 с.

6. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Расплывчатые ситуационные модели принятия решений: Учебное пособие. - Таганрог: ТРТИ, 1986.- 92 с.

7. Chu A.T. W., Kalaba R.E., Spingarn J. A comparison of two methods for determining the veights of belonging to fuzzy sets. - Journal of Optimization Theory and Applications, 1979, v.27, p. 531 - 538.

8. Корченко А.Г., Рындюк В.А., Пацира Е.В. Классификация нечетких чисел для рационального применения в методах и моделях систем защиты информации // Матеріали V Міжнародн. науково-практичної конф. "Безперка інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах".- К.: Видавництво "Інтерлінк", НДЦ "ТЕЗІС" НТУУ "КПІ", 2002. - С. 57.

9. Корченко А.Г., Рындюк В.А., Мелешко Е.А., Пацира Е.В. Исследование нечетких операций для применения в системах защиты информации // Матеріали V Міжнародн. науково-практичної конф. "Безпека інформації в інформаційно-телекомунікаційних системах".- К.: Вид-во "Інтерлінк", НДЦ "ТЕЗІС" НТУУ "КПІ", 2002. - С. 56.

Поступила 15.05.2003г.