Алгебраїчні критерії в задачах управління.Керованість лінійних нестаціонарних систем. Область досяжності. Критерій керованості

1.Алгебраїчні критерії в задачах управління

Аналіз стійкості лінійних систем. Поняття, види і загальна умова стійкості.
Алгебраїчні критерії стійкості. Критерій Михайлова. Критерій Найквіста. Побудова областей стійкості. Вплив структури і передавального коефіцієнта системи на стійкість.
Оцінка якості управління. Поняття і показники управління. Наближена оцінка якості за частотними характеристиками. Інтегральні показники якості. Оцінка чутливості систем до параметричних збурень. Оцінка керованості і спостережливості багатомірного об’єкта. Метод розрахунку перехідних процесів на ЕОМ.
Синтез лінійних систем управління (основи структурно-параметричної оптимізації).
Основні поняття про синтез систем управління. Основні принципи синтезу алгоритмічної структури системи управління. Структурно-параметрична оптимізація систем без запізнення. Визначення параметрів налаштування типових регуляторів технологічних об’єктів із запізненням. Здійснення інваріантності в стабілізувальних і слідкуючих системах керування

2.Керованість лінійних нестаціонарних систем. Область досяжності. Критерій керованості

Розглянемо нестаціонарну динамічну систему (рис.1) з вектором стану $\mathbf{X}(t)$, керовану вектором управлінь $\mathbf{U}(t)$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \qquad (3.1)$$

де $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ — матриці, компоненти яких представляють відомі часу, безперервні і диференціюванні.

Продиференцюємо систему (1) n раз та отримаємо

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + 2\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{X}}(t) + (n-1)\mathbf{A}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{X}}(t) + g\mathbf{A}(t)\overset{(n-3)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots + q\overset{(k)}{\mathbf{A}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots$$

$$+\overset{(n-1)}{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t)] + \mathbf{B}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) + (n-1)\mathbf{B}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + q(n-1)\overset{(k)}{\mathbf{B}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + \overset{(n-1)}{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t),$$

де g, q,…,– третій, четвертий та інші (n – 2) коефіцієнти при відповідних доданках з виразу $(n+1)^n$.

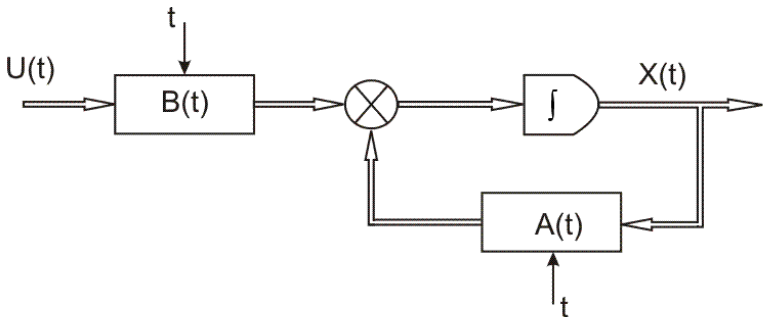


Рис. 1. Структурна схема нестаціонарної системи керування

Для встановлення залежностей між вектором координат та керування для формування критерію керованості нестаціонарних систем необхідно в правій частині останнього рівняння позбутись проміжних похідних вектора координат.

Проілюструємо запропонований підхід на прикладі стаціонарної системи виду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \qquad (3.2)$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матриці постійних коефіцієнтів;
це має вигляд після диференціювання n раз

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t);$$
$$\ddot{\mathrm{X}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\mathring{\mathbf{U}}(t);$$
$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\overset{(n-1)}{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t),$$

та підстановки першого рівняння в друге і т.д. отримуємо

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B}\mathring{\mathbf{U}}(t) + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{B}\overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{B}\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t).$$

Створимо блочну матрицю із n матриць при похідних $\mathbf{U}(t)$

$$\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right|,$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*(t)$

$$\mathbf{U}^*(t) = \left|\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) \quad \overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) \quad \ldots \quad \mathring{\mathbf{U}}(t) \quad \mathbf{U}(t)\right|^{\mathbf{T}},$$

запишемо

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^*(t)$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних систем.

Система n -го порядку виду (2) із початкового стану досягне заданого стану за кінцевий час, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$rank\mathbf{K} = n$.

Це означає, що матриця $\mathbf{K}$ має не менш ніж n незалежних стовпців.

Фізичний зміст критерію керованості полягає у тому, при його виконанні кожній керованій координаті динамічної системи відповідає невироджене значення керуючого впливу.

Для нестаціонарної системи властивість керованості буде залежати від часу, оскільки кожному фіксованому моменту руху (тобто фіксованому – стаціонарному режиму) буде відповідати своє значення компонентів блочної матриці $\mathbf{K}(t)$ та її рангу в момент часу t, тобто безпосередньо суті критерію керованості динамічної системи. Таким чином дослідження керованості буде базуватись на формуванні областей керованості для часових відрізків.

Продовжимо перетворення системи рівнянь (1)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathrm{X}}(t) = {}& \mathbf{A}^3(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + \\ & 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + 2\dot{\mathbf{B}}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{(4)}{\mathbf{X}}(t) = {}& \mathbf{A}^4(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}^2(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + \\ & + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \\ & + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \\ & + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + 3\dot{\mathbf{B}}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + 3\dot{\mathbf{B}}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t).\end{aligned}$$

Розглянемо порядок формування блочної матриці на прикладі системи четвертого порядку та сформуємо її із чотирьох матриць при похідних $\mathbf{U}(t)$.

Перший компонент матриці має вигляд

$$\mathbf{K_1}\,(t) = \mathbf{B}(t)$$

другий

$$\mathbf{K_2}(t) = \dot{\mathbf{B}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\,,$$

третій

$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\,,$$

четвертий

$$\mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}\,(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) +$$
$$+\, 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + (\underline{\mathrm{B}}t).$$

Таким чином, критерій керованості для системи четвертого порядку буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K}(t) = rank\left|\mathbf{K_1}(t) \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t)\right| = 4$$

та визначатись для кожного моменту часу t.

Для випадку, коли компоненти матриць $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ є явні лінійні функції часу, тобто пропорційні t, перші похідні становляться постійними, а другі і вищі похідні рівняються нулю. Тоді можна записати для відповідних компонентів блочної матриці:

перший компонент

$$\mathbf{K_1}\,(t) = \mathbf{B}(t)\,,$$

другий

$$\mathbf{K_2}\,(t) = \mathbf{B}^* + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\,,$$

третій

$$\mathbf{K_3}\,(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t)\,,$$

четвертий

$$\mathbf{K_4}\,(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*,$$

де $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ – постійні матриці, отримані як перші похідні матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Для системи n -го порядку блочна матриця $\mathbf{K}_n$ буде матричною функцією $\Im(\mathbf{A}^{(n-i)\,n-k}, \mathbf{B}^{(n-k)})$, де $k = 1,\ldots, n$; $i = 2,\ldots, n$.

Особливий та частий випадок є, коли компоненти матриці $\mathbf{B}$ мають постійні значення. Тоді маємо критерій керованості для системи четвертого порядку

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}\,(t) \quad \mathbf{K_3}\,(t) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t)\right| = 4\,,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{K_2}\,(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}\,;$$
$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B} + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}\,;$$
$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B} + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B} + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B} + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}.$$

При керування, яке є скалярною функцією часу, маємо замість матриці $\mathbf{B}$ вектор – рядок $\mathbf{b}$

$$\mathbf{B} = \left|b_1 \quad b_2 \ldots \quad b_{n-1} \quad b_n\right|^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}\,.$$

Критерій керованості для стаціонарної системи буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{b} \;\; \mathbf{Ab} \;\ldots\; \mathbf{A^{n-2}b} \quad \mathbf{A^{n-1}b}\right| = n\,.$$

Для нестаціонарної системи перший компонент блочної матриці має вигляд

$$\mathbf{K}_1(t) = \mathbf{b}(t)$$

другий

$$\mathbf{K}_2(t) = \dot{\mathbf{b}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t),$$

третій

$$\mathbf{K}_3(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathrm{b}}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \dot{\mathrm{b}}(t),$$

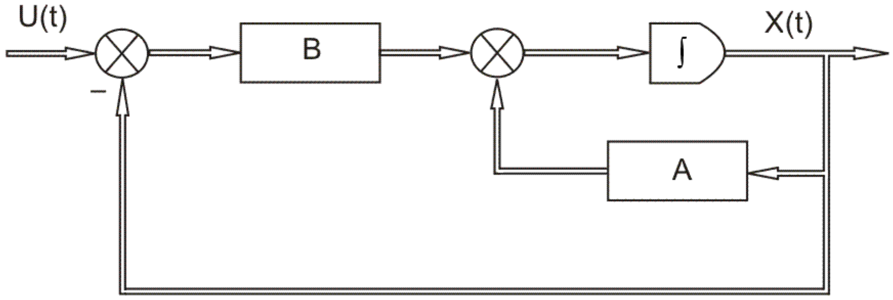
четвертий

$$\mathbf{K}_4(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathrm{b}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)+\dot{\mathrm{b}}(\mathrm{t}) +$$
$$3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\,\dot{\mathrm{b}}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \underset{.}{\mathrm{b}}(t).$$

В разі, коли матриця **A** є діагональною, всі компоненти котрої різні, для керованості системи достатньо вимоги, щоб вектор – рядок **b** не вміщував нульових компонентів.

КЕРОВАНІСТЬ ЗАМКНУТИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо стаціонарну лінійну динамічну систему, що описується векторно-матричним



рівнянням (2) та охоплюється головним одиничним зворотним зв’язком, тобто замкнену систему (рис. 2).

Рис. 2. Структурна схема замкнутої системи

В такому випадку рівняння (2) прийме вигляд

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{B}[(\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{BU}(t).$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B} \ \ldots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right| = n.$$

Для випадку, коли «жорсткий» зворотний зв’язок не є одиничним, а описується матрицею постійних параметрів **R,** векторно-матричне рівняння запишеться у вигляді

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BR})\mathbf{X}(t) + \mathbf{BU}(t).$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B}\ \mathbf{A} - \mathbf{BR})\mathbf{B}\ldots(\mathbf{A} - \mathbf{BR})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B}\ (\mathbf{A} - \mathbf{BR})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B} = n.\right|$$

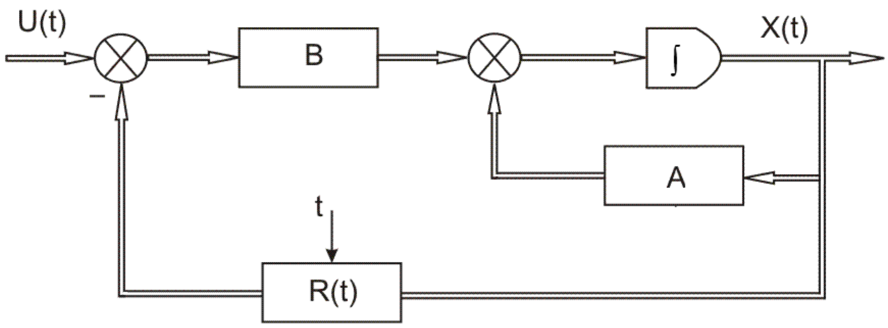


Рис. 3. Структурна схема замкнутої системи з «гнучким» зворотним зв’язком

В разі «гнучкого» зворотного зв'язку (рис.3) динамічна система (2) стає нестаціонарною, оскільки матриця **R** буде включати компоненти, що є функціями часу, т.ч.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\ ,$$

$$\text{де } \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\ .$$

Для систем четвертого порядку зі «гнучким» зворотним зв'язком при постійних компонентах матриці **A** та **B** будемо мати критерій керованості

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K_4}(t)\right| = 4\ ,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{K_2}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K_3}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^2(t)\mathbf{B} - 2\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K_4}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^3(t)\mathbf{B} + 2[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}.$$

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат $\mathbf{Y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}\mathbf{U}(\mathrm{t})$ **,** будемо мати для одиничного зворотного зв'язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t)\ ,$$

де $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C});\ \tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D})$.

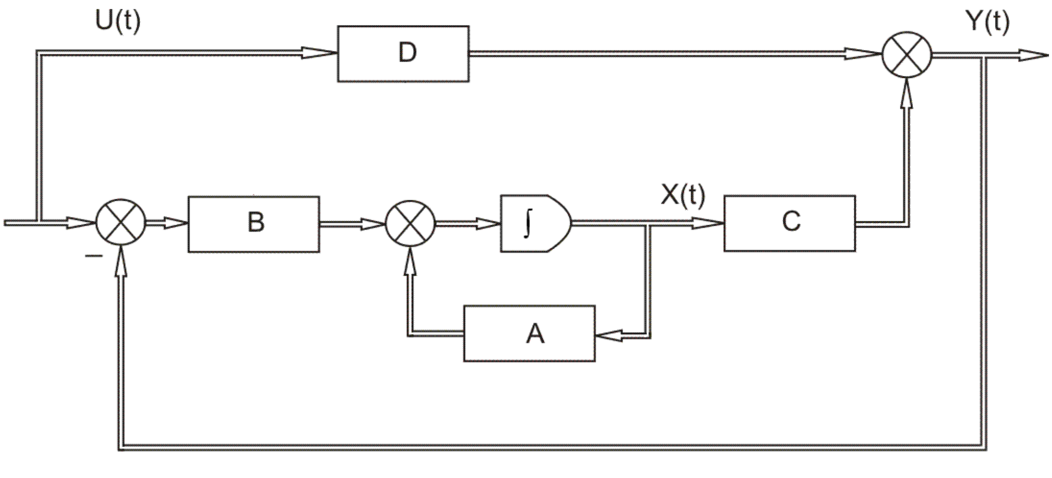


Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат $\mathbf{Y}(\mathrm{t}) = \mathbf{CX}(\mathrm{t}) + \mathbf{DU}(\mathrm{t})$ **,** будемо мати для одиничного зворотного зв'язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BD})\mathbf{U}(t) = \mathbf{AX}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t) ,$$

де $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{BC}); \tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BD})$.

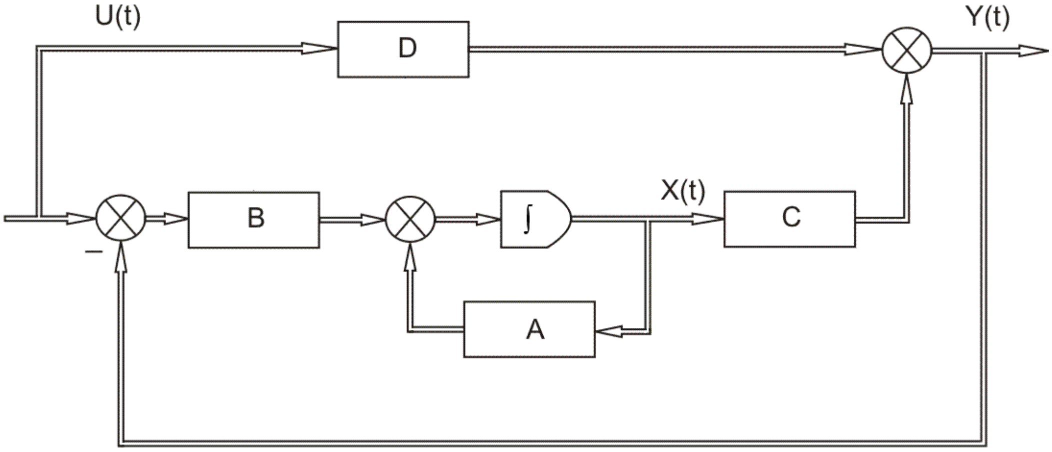


Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат

Для «жорсткого» зворотного зв'язку, що включає матрицю параметрів **R,** будемо мати

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t),$$

$$\text{де } \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}); \tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BRD}).$$

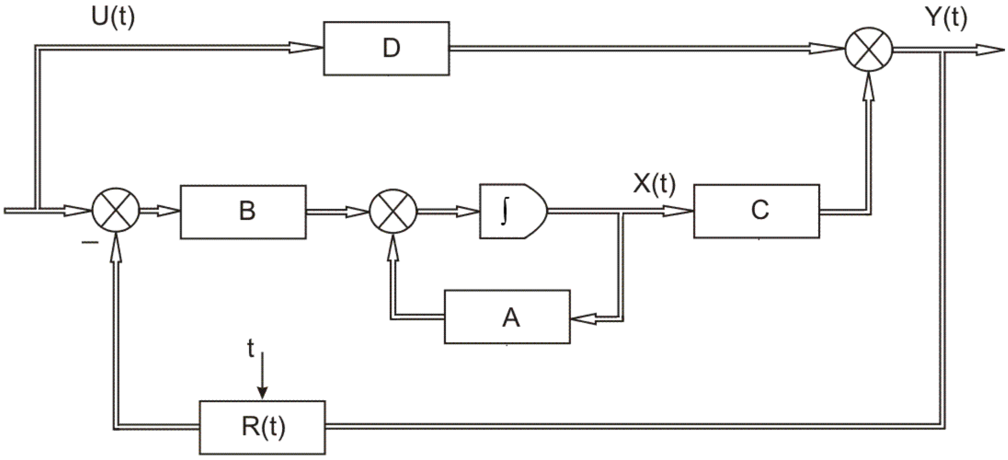


Рис. 5. Структурна схема системи, замкнутої «гнучким» зворотним зв'язком по вектору спостережуваних координат

При «гнучкому» зворотному зв'язку (рис. 5) запишемо

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{C}]\mathbf{X}(t) + [\mathbf{B} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{D}]\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) .$$

Критерії керованості для таких систем визначаться з уже відомих співвідношень.

КЕРОВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

При використанні різницевої схеми система рівнянь стаціонарної системи керування, що описується векторно-матричним рівнянням (2), запишеться наступним чином

$$\frac{\mathbf{X}[k+1]-\mathbf{X}[k]}{\Delta t}=\mathbf{AX}[k]+\mathbf{BU}[k],$$

де $k = 0,1,2,\ldots\ m$– порядок інтервалу дискретності;

Δt – інтервал часу дискретності.

Приймемо $\Delta t = 1$ та отримаємо

$$\mathbf{X}[k+1]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k], \tag{3.3}$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Для другої похідної маємо після підстановки та векторно-матричних перетворень

$$\mathbf{X}[k+2]-2\mathbf{X}[k+1]+\mathbf{X}[k]=\mathbf{A}(\mathbf{X}[k+1]-\mathbf{X}[k])+\mathbf{B}(\mathbf{U}[k+1]-\mathbf{U}[k]);$$

та запишемо для координати стану в $k+2$ інтервал дискретності

$$\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k]+\mathbf{BU}[k+1]=$$

$$=\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k]+\mathbf{BU}[k+1].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності аналогічним чином отримаємо

$$\mathbf{X}[k+3]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\mathbf{A}^2\mathbf{B})\mathbf{U}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k+1]+\mathbf{BU}[k+2].$$

Для вектору координат стану об’єкта керування в n – й інтервал дискретності будемо мати

$$\mathbf{X}[n]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^n\mathbf{X}[0]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})\mathbf{U}[0]+\ldots+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[n-2]+\mathbf{BU}[n-1].$$

Створимо блочну матрицю із n матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[i]$, де $i = 0,\ldots, n-1$;

$$\mathbf{K}=\left|\mathbf{B}\quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}\quad \ldots\quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A^{n-2}B}\quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A^{n-1}B}\right|,$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*[i]$

$$\mathbf{U}^*[i]=\left|\mathbf{U}[n-1]\quad \mathbf{U}[n-2]\quad \ldots\quad \mathbf{U}[1]\quad \mathbf{U}[0]\right|^{\mathbf{T}},$$

та запишемо

$$\mathbf{X}[n]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{\mathbf{n}}\mathbf{X}[0]+\mathbf{KU}^*[i]$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних дискретних систем.

Стаціонарна система n – го порядку виду (3) із будь-якого початкового стану досягне за допомогою керуючої сили будь-якого заданого стану за кінцеву кількість інтервалів дискретності, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$$rank\mathbf{K}=n\,.$$

Для нестаціонарної дискретної системи отримання критерію громіздкістю обчислювання, тому обмежимось системою третього компоненти матриці $\mathbf{B}$ постійними.

Запишемо для нестаціонарної дискретної лінійної системи

$$\mathbf{X}[k+1]=(\mathbf{A}[k]+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k] \tag{3.4}$$

при тих самих позначеннях, що для стаціонарної системи.

Для другої похідної будемо мати

$$\mathrm{X}[k+2]-2\mathrm{X}[k+1]+\mathrm{X}[k]=\mathrm{A}[k](\mathrm{X}[k+1]-\mathrm{X}[k])+$$

$$+(\mathrm{A}[k+1]-\mathrm{A}[k])\mathrm{X}[k]+\mathrm{B}(\mathrm{U}[k+1]-\mathrm{U}[k]);$$

та для $k+2$ інтервалу дискретності

$$\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}[k+1]+\mathbf{A}^2[k]+\mathbf{A}[k]+\mathbf{E}])\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k+1]+(\mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності запишемо

$$\mathbf{X}[k+3]=(\mathbf{A}[k+2]+\mathbf{A}^3[k]+3\mathbf{A}[k+1]\mathbf{A}[k]++\mathbf{A}[k+1]+\mathbf{A}[k]+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+$$

$$\mathbf{BU}[k+2]+(\mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k+1]+(\mathbf{B}+2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B}+\mathbf{A}^2[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Створимо блочну матрицю із трьох матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[k]$; $\mathbf{U}[k+1]$; $\mathbf{U}[k+2]$

$$\mathbf{K}[k+3]=\left|\mathbf{B}\quad \mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B}\quad \mathbf{B}+2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B}+\mathbf{A}^2[k]\mathbf{B}\right|$$

Алгебраїчні критерії в задачах управління.Керованість лінійних нестаціонарних систем. Область досяжності. Критерій керованості

1.Алгебраїчні критерії в задачах управління

Аналіз стійкості лінійних систем. Поняття, види і загальна умова стійкості. Алгебраїчні критерії стійкості. Критерій Михайлова. Критерій Найквіста. Побудова областей стійкості. Вплив структури і передавального коефіцієнта системи на стійкість.
Оцінка якості управління. Поняття і показники управління. Наближена оцінка якості за частотними характеристиками. Інтегральні показники якості. Оцінка чутливості систем до параметричних збурень. Оцінка керованості і спостережливості багатомірного об'єкта. Метод розрахунку перехідних процесів на ЕОМ.
Синтез лінійних систем управління (основи структурно-параметричної оптимізації).
Основні поняття про синтез систем управління. Основні принципи синтезу алгоритмічної структури системи управління. Структурно-параметрична оптимізація систем без запізнення.
Визначення параметрів налаштування типових регуляторів технологічних об'єктів із запізненням. Здійснення інваріантності в стабілізувальних і слідкуючих системах керування

2.Керованість лінійних нестаціонарних систем. Область досяжності. Критерій керованості

Розглянемо нестаціонарну динамічну систему (рис.1) з вектором стану $\mathbf{X}(t)$, керовану вектором управлінь $\mathbf{U}(t)$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)\,, \qquad (3.2.1)$$

де $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ — матриці, компоненти яких представляють відомі часу, безперервні і диференціюванні.

Продиференцюємо систему (1) n раз та отримаємо

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + 2\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{X}}(t) + (n-1)\mathbf{A}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{X}}(t) + g\mathbf{A}(t)\overset{(n-3)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots + q\overset{(k)}{\mathbf{A}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots$$

$$+ \overset{(n-1)}{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t)] + \mathbf{B}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) + (n-1)\mathbf{B}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + q(n-1)\overset{(k)}{\mathbf{B}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + \overset{(n-1)}{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t),$$

де g, q,…,– третій, четвертий та інші (n – 2) коефіцієнти при відповідних доданках з виразу $(n+1)^n$.

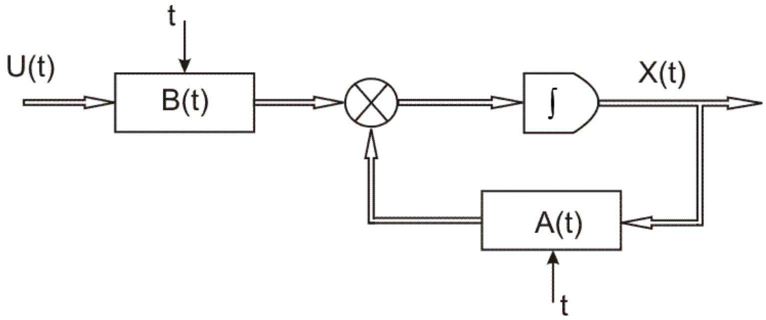


Рис. 1. Структурна схема нестаціонарної системи керування

Для встановлення залежностей між вектором координат та керування для формування критерію керованості нестаціонарних систем необхідно в правій частині останнього рівняння позбутись проміжних похідних вектора координат.

Проілюструємо запропонований підхід на прикладі стаціонарної системи виду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \qquad (3.2.2)$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матриці постійних коефіцієнтів;

запишемо

$$\mathbf{U}^*(t) = \left| \overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) \quad \overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) \quad \ldots \quad \mathring{\mathbf{U}}(t) \quad \mathbf{U}(t) \right|^{\mathbf{T}},$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^*(t)$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних систем.

Система n -го порядку виду (2) із початкового стану досягне заданого стану за кінцевий час, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$rank\mathbf{K} = n$ **.**

Це означає, що матриця $\mathbf{K}$ має не менш ніж n незалежних стовпців.

Фізичний зміст критерію керованості полягає у тому, при його виконанні кожній керованій координаті динамічної системи відповідає невироджене значення керуючого впливу.

Для нестаціонарної системи властивість керованості буде залежати від часу, оскільки кожному фіксованому моменту руху (тобто фіксованому – стаціонарному режиму) буде відповідати своє значення компонентів блочної матриці $\mathbf{K}(t)$ та її рангу в момент часу t, тобто безпосередньо суті критерію керованості динамічної системи. Таким чином дослідження керованості буде базуватись на формуванні областей керованості для часових відрізків.

Продовжимо перетворення системи рівнянь (1)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\ddot{\mathrm{X}}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) +$$
$$2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + 2\dot{\mathbf{B}}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\overset{(4)}{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^4(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}^2(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) +$$
$$+ 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) +$$
$$+ \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) +$$
$$+ 3\bar{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\mathring{\mathbf{U}}(t) + 3\dot{\mathbf{B}}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + 3\dot{\mathbf{B}}(t)\,\mathring{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t).$$

Розглянемо порядок формування блочної матриці на прикладі системи четвертого порядку та сформуємо її із чотирьох матриць при похідних $\mathbf{U}(t)$.

Перший компонент матриці має вигляд

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{B}(t)\,,$$

другий

$$\mathbf{K}_{\mathbf{2}}(t) = \dot{\mathbf{B}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\,,$$

третій

$$\mathbf{K}_{\mathbf{3}}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\,,$$

четвертий

$$\mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) +$$
$$+ 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + (\underline{\mathrm{B}}t).$$

Таким чином, критерій керованості для системи четвертого порядку буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K}(t) = rank\left|\mathbf{K_1}(t) \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t)\right| = 4$$

та визначатись для кожного моменту часу t.

Для випадку, коли компоненти матриць $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ є явні лінійні функції часу, тобто пропорційні t, перші похідні становляться постійними, а другі і вищі похідні рівняються нулю. Тоді можна записати для відповідних компонентів блочної матриці:

перший компонент

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{B}(t)\ ,$$

другий

$$\mathbf{K}_2(t) = \mathbf{B}^* + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\ ,$$

третій

$$\mathbf{K}_3(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t)\ ,$$

четвертий

$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*,$$

де $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ – постійні матриці, отримані як перші похідні матриць **A, B** .

Для системи n -го порядку блочна матриця $\mathbf{K}_n$ буде матричною функцією $\Im(\mathbf{A}^{(n-i)^{n-k}}, \mathbf{B}^{(n-k)})$, де $k = 1,\ldots, n$; $i = 2,\ldots, n$.

Особливий та частий випадок є, коли компоненти матриці **B** мають постійні значення. Тоді маємо критерій керованості для системи четвертого порядку

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K}_4(t)\right| = 4\ ,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{K}_2(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K}_3(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B} + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K}_4(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B} + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B} + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B} + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}.$$

При керування, яке є скалярною функцією часу, маємо замість матриці **B** вектор – рядок **b**

$$\mathbf{B} = \left|b_1 \quad b_2 \ \mathrm{K} \quad b_{n-1} \quad b_n\right|^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}\ .$$

Критерій керованості для стаціонарної системи буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \mathrm{L} \quad \mathbf{A^{n-2}b} \quad \mathbf{A^{n-1}b}\right| = n\ .$$

Для нестаціонарної системи перший компонент блочної матриці має вигляд

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{b}(t)\ ,$$

другий

$$\mathbf{K}_2(t) = \dot{\mathbf{b}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t)\ ,$$

третій

$$\mathbf{K}_3(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{b}(t) + 2\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \dot{b}(t)\ ,$$

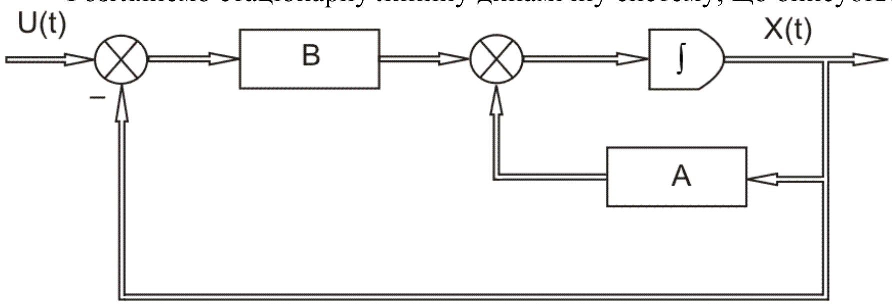
четвертий

$$\mathbf{K}_4(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{b}(t) + 2\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)+\dot{b}(\mathrm{t}) +$$
$$3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\ \dot{b}(t) + 3\bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \underset{.}{b}(t).$$

В разі, коли матриця **A** є діагональною, всі компоненти котрої різні, для керованості системи достатньо вимоги, щоб вектор – рядок **b** не вміщував нульових компонентів.

КЕРОВАНІСТЬ ЗАМКНУТИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо стаціонарну лінійну динамічну систему, що описується векторно-матричним



рівнянням (2) та охоплюється головним одиничним зворотним зв’язком, тобто замкнену систему (рис. 2).

Рис. 2. Структурна схема замкнутої системи

В такому випадку рівняння (2) прийме вигляд

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{B}[(\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{BU}(t) \ .$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left| \mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B} \quad \ldots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B} \right| = n \ .$$

Для випадку, коли «жорсткий» зворотний зв’язок не є одиничним, а описується матрицею постійних параметрів **R,** векторно-матричне рівняння запишеться у вигляді

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BR})\mathbf{X}(t) + \mathbf{BU}(t) \ .$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left| \mathbf{B} \ \mathbf{A} - \mathbf{BR})\mathbf{B} \ldots (\mathbf{A} - \mathbf{BR})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \ (\mathbf{A} - \mathbf{BR})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B} = n \ . \right|$$

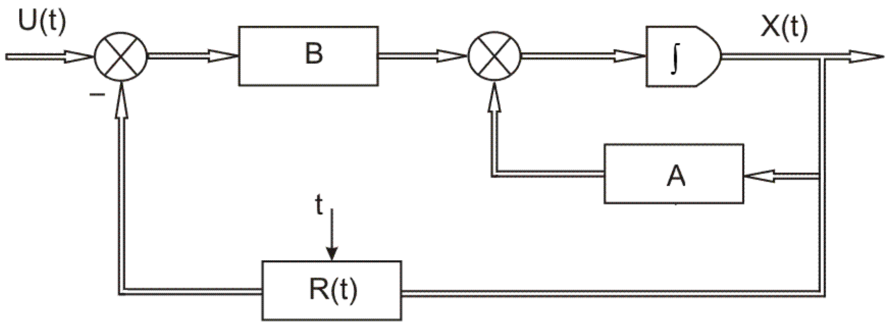


Рис. 3. Структурна схема замкнутої системи з «гнучким» зворотним зв’язком

В разі «гнучкого» зворотного зв’язку (рис.3) динамічна система (2) стає нестаціонарною, оскільки матриця **R** буде включати компоненти, що є функціями часу, т.ч.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\ ,$$

де $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)$.

Для систем четвертого порядку зі «гнучким» зворотним зв’язком при постійних компонентах матриці **A** та **B** будемо мати критерій керованості

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}\,(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K}_{\mathbf{4}}(t)\right| = 4\ ,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{2}}\,(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K_3}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^2(t)\mathbf{B} - 2\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}\ ;$$

$$\mathbf{K_4}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^3(t)\mathbf{B} + 2[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}.$$

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат $\mathbf{Y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \mathbf{D}\mathbf{U}(\mathrm{t})$ **,** будемо мати для одиничного зворотного зв’язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t)\ ,$$

де $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C});\ \tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D})$.

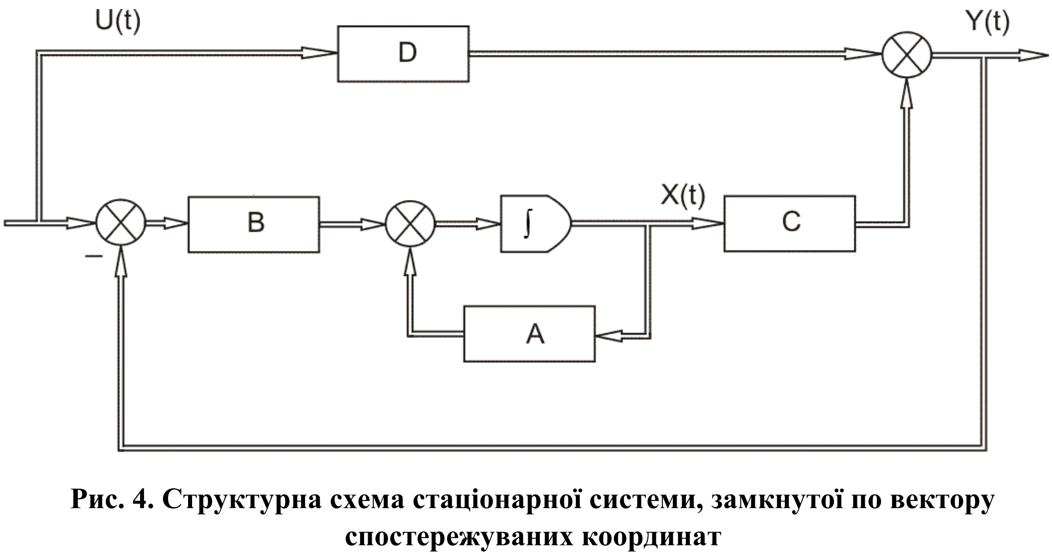


Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{CX}(t) + \mathbf{DU}(t)$ **,** будемо мати для одиничного зворотного зв’язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BD})\mathbf{U}(t) = \mathbf{AX}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t),$$

де $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{BC})$; $\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BD})$.

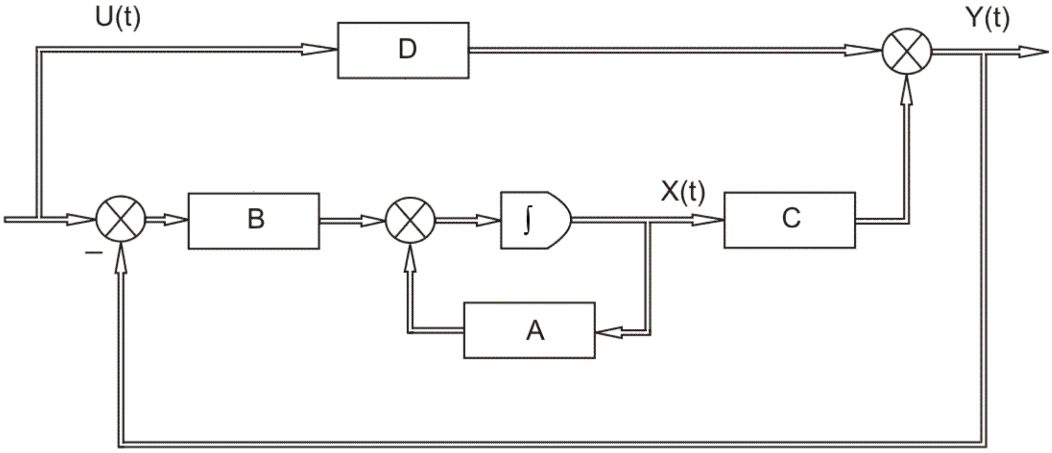


Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат

Для «жорсткого» зворотного зв’язку, що включає матрицю параметрів **R,** будемо мати

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t),$$

де $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC})$; $\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})$.

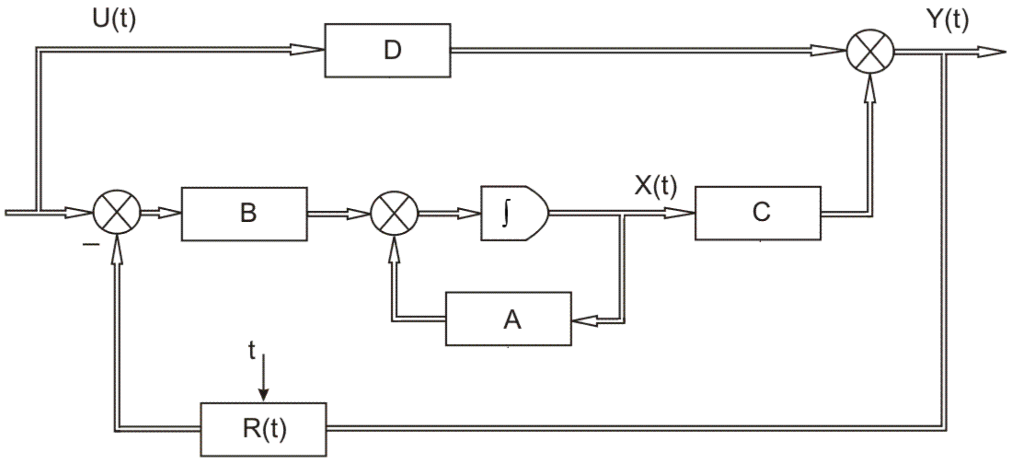


Рис. 5. Структурна схема системи, замкнутої «гнучким» зворотним зв’язком по вектору спостережуваних координат

При «гнучкому» зворотному зв’язку (рис. 5) запишемо

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{C}]\mathbf{X}(t) + [\mathbf{B} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{D}]\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t).$$

При використанні різницевої схеми система рівнянь стаціонарної системи керування, що описується векторно-матричним рівнянням (2), запишеться наступним чином Критерії керованості для таких систем визначаться з уже відомих співвідношень.

КЕРОВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

$$\frac{\mathbf{X}[k+1]-\mathbf{X}[k]}{\Delta t} = \mathbf{AX}[k] + \mathbf{BU}[k]\,,$$

де k = 0,1,2,… m– порядок інтервалу дискретності;

Δt – інтервал часу дискретності.

Приймемо Δt= 1 та отримаємо

$$\mathbf{X}[k+1] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}[k] + \mathbf{BU}[k]\,, \qquad (3.2.3)$$

де **E** – одинична матриця.

Для другої похідної маємо після підстановки та векторно-матричних перетворень

$$\mathbf{X}[k+2] - 2\mathbf{X}[k+1] + \mathbf{X}[k] = \mathbf{A}(\mathbf{X}[k+1] - \mathbf{X}[k]) + \mathbf{B}(\mathbf{U}[k+1] - \mathbf{U}[k]);$$

та запишемо для координати стану в $k+2$ інтервал дискретності

$$\mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k] + \mathbf{BU}[k+1] =$$

$$= \mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^2\,\mathbf{X}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k] + \mathbf{BU}[k+1].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності аналогічним чином отримаємо

$$\mathbf{X}[k+3] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^3\mathbf{X}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\mathbf{A}^2\mathbf{B})\mathbf{U}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k+1] + \mathbf{BU}[k+2].$$

Для вектору координат стану об'єкта керування в n – й інтервал дискретності будемо мати

$$\mathbf{X}[n] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^n\,\mathbf{X}[0] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})\mathbf{U}[0] + \ldots + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[n-2] + \mathbf{BU}[n-1].$$

Створимо блочну матрицю із n матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[i]$, де i = 0,…, n – 1;

$$\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB} \quad \ldots \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\,,\right|$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*[i]$

$$\mathbf{U}^*[i] = \left|\mathbf{U}[n-1] \quad \mathbf{U}[n-2] \quad \ldots \quad \mathbf{U}[1] \quad \mathbf{U}[0]\right|^{\mathbf{T}},$$

та запишемо

$$\mathbf{X}[n] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{\mathbf{n}}\,\mathbf{X}[0] + \mathbf{KU}^*[i]$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних дискретних систем.

Стаціонарна система n – го порядку виду (3) із будь-якого початкового стану досягне за допомогою керуючої сили будь-якого заданого стану за кінцеву кількість інтервалів дискретності, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$$rank\mathbf{K} = n\,.$$

Для нестаціонарної дискретної системи отримання критерію значно ускладнюється громіздкістю обчислювання, тому обмежимось системою третього порядку та приймемо компоненти матриці **B** постійними.

Запишемо для нестаціонарної дискретної лінійної системи

$$\mathbf{X}[k+1] = (\mathbf{A}[k] + \mathbf{E})\mathbf{X}[k] + \mathbf{BU}[k] \qquad (3.2.4)$$

при тих самих позначеннях, що для стаціонарної системи.

Для другої похідної будемо мати

$$\mathrm{X}[k+2] - 2\mathrm{X}[k+1] + \mathrm{X}[k] = \mathrm{A}[k](\mathrm{X}[k+1] - \mathrm{X}[k]) +$$

$$+ (\mathrm{A}[k+1] - \mathrm{A}[k])\mathrm{X}[k] + \mathrm{B}(\mathrm{U}[k+1] - \mathrm{U}[k]);$$

та для $k+2$ інтервалу дискретності

$$\mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A}[k+1] + \mathbf{A}^2[k] + \mathbf{A}[k] + \mathbf{E}])\mathbf{X}[k] + \mathbf{BU}[k+1] + (\mathbf{B} + \mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності запишемо

$$\mathbf{X}[k+3] = (\mathbf{A}[k+2] + \mathbf{A}^3[k] + 3\mathbf{A}[k+1]\mathbf{A}[k] + +\mathbf{A}[k+1] + \mathbf{A}[k] + \mathbf{E})\mathbf{X}[k] +$$

$$\mathbf{BU}[k+2] + (\mathbf{B} + \mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k+1] + (\mathbf{B} + 2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B} + \mathbf{A}^2[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Створимо блочну матрицю із трьох матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[k]$; $\mathbf{U}[k+1]$; $\mathbf{U}[k+2]$

$$\mathbf{K}[k+3] = \left|\mathbf{B} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A}[k]\mathbf{B} \quad \mathbf{B} + 2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B} + \mathbf{A}^2[k]\mathbf{B}\right.$$

та запишемо критерій керованості для дослідженої нестаціонарної дискретної системи (4) в $k+3$ інтервал дискретності

$$rank\mathbf{K}[k+3] = 3. \qquad (3.2.5)$$

Процедура визначення критерію показує, що для висновку о повній керованості дискретної нестаціонарної системи необхідно провести аналіз керованості кожної з n координат стану. В той же час для переводу системи (4) з нульового стану ($k = 0$) в заданий стан по довільній траєкторії за три інтервали дискретності необхідно виконання умови (5).