Лекція №1

Введення в теорію оптимального управління. Предмет дисципліни. Класифікація оптимальних систем управління. Статична і динамічна оптимізація. Основні відмінні риси теорії оптимального управління

1.Введення в теорію оптимального управління. Предмет дисципліни

Оптимальне управління - це завдання проектування системи, що забезпечує для заданого об'єкта управління або процесу закон управління або управляючу послідовність дій, які забезпечують максимум чи мінімум заданої сукупності критеріїв якості системи.

Для вирішення задачі оптимального управління будується математична модель керованого об'єкта або процесу, що описує його поведінку з плином часу під впливом керуючих впливів і власного поточного стану. Математична модель для задачі оптимального управління включає в себе: формулювання мети управління, виражену через критерій якості управління; визначення диференціальних або різницевих рівнянь, що описують можливі способи руху об'єкта управління; визначення обмежень на використовувані ресурси у вигляді рівнянь або нерівностей.

Найбільш широко при проектуванні систем управління застосовуються такі методи: варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна і динамічне програмування Беллмана.

Предметом теорії управління є закономірності управління як цілісного, комплексного компонента економіки. Теорія управління вивчає закони системи управління в цілому, закони синтезу її компонентів.

Закономірності управління як цілого - це насамперед закономірності формування системи управління: її структури, її кадрів, її технічної бази, її методів. їх вивчає теорія управління**.** Крім того, закони управління - це закономірності функціонування системи управління, взаємодії її елементів. їх також вивчає теорія управління.

Таким чином, саме теорія управління вивчає цілісні комплексні закономірності управління - і системні, і локальні. Цим обумовлений інтерес до теорії управління з боку працівників, які мають справу з управлінням у цілому, тобто для керівництва. Якщо теорія планування насамперед орієнтована на працівників планування, а бухгалтерський облік і статистика - на працівників облікових органів, то теорія управління - це насамперед наука для керівників.

2.Класифікація оптимальних систем управління

Найбільш широко при проектуванні систем управління детермінованими об'єктами зі звичайними параметрами, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, використовуються наступні методи: варіаційне числення, динамічне програмування Річарда Беллмана та принцип максимуму Понтрягіна.

2.1.Задача оптимального управління

Сформулюємо задачу оптимального управління:

- Рівняння стану: $\dot{x}(t) = a[x(t), u(t), t]$ (1.1).
- Граничні умови $x(t_0) = x_0^*$, $x(t_1) = x_1^*$ (1.2).
- Функціонал, що мінімізується: $\eta = \int_{t_0}^{t_1} F[x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau] d\tau$.

тут $x(t)$ — вектор стану $u(t)$ — управління, t_0, t_1 — початковий та кінцевий моменти часу.

Задача оптимального управління полягає в знаходженні функцій стану $x(t)$ та управління $u(t)$ для часу $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, які мінімізують функціонал.

2.2.Варіаційне числення

Розглянемо цю задачу як задачу оптимального управління як задачу Лагранжа варіаційного числення. Для знаходження необхідних умов екстремуму, треба застосувати теорему Ейлера-Лагранжа. Функція Лагранжа Λ має вигляд: $\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} (F[x(t), \dot{x}(t), t] + \lambda_1^T(t)(\dot{x}(t) - a[x(t), u(t), t]))dt + l$,

де $l = \lambda_2^T(x(t_0) - x_0^*) + \lambda_3^T(x(t_1) - x_1^*)$ — граничні умови.

Лагранжиан L має вигляд: $L[x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t] = F[x(t), \dot{x}(t), t] + \lambda_1^T(t)(\dot{x}(t) - a[x(t), u(t), t])$,

де λ_1, λ_2, λ_3 — n-вимірного вектора множників Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму, згідно цій теоремі, мають вигляд:

- стаціонарність по u: $\hat{L}_u = 0$, (1.3)
- стаціонарність по x, рівняння Ейлера: $\hat{L}_x - \frac{d}{dt}\hat{L}_{c\dot{x}} = 0$ (1.4)
-
- трансверсальність по x: $\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$, $\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$ (1.5)

•

Необхідні умови (3-5) складають основу для визначення оптимальних траєкторій. Записавши ці рівняння, отримаємо граничну задачу, де частина граничних умов задана у початковий момент часу, а останні граничні умови — в кінцевий момент. Методи рішення подібних задач детально розглядаються.

2.3.Принцип максимуму Понтрягіна

Необхідність принципу максимуму Понтрягіна виникає у випадку, коли в допустимому діапазоні управляюча змінна не може задовольнити необхідну умову (3), а саме $\hat{L}_u = 0$.

У цьому випадку умова (3) замінюється на умову
$$\min_{u \in U} L(t, x(t), \dot{x}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{x}(t), \hat{u}) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \min_{u \in U} \left(F(t, x(t), u) - \lambda(t) a(t, x(t), u)\right) = f(t) - \lambda(t) a(t). \quad (1.6)$$

У цьому випадку, згідно з принципом максимуму Понтрягіна, значення оптимального управління дорівнює значенню управління на одному з кінців допустимого діапазону. Рівняння Понтрягіна записують за допомогою функції Гамільтона H, яка визначається з відношення $H = F(t, x(t), u) - \lambda(t) a(t, x(t), u)$. Із рівнянь випливає, що функція Гамільтона H пов'язана з функцією Лагранжа L наступним чином: $L = H + \lambda(t)\dot{x}(t)$. Підставляючи L із останнього рівняння в рівняння (3-5), отримаємо необхідні умови, які тепер виражаються через функцію Гамільтона:

- рівняння управління по u: $\hat{H}_u = 0$, (1.7)
- рівняння стану: $\dot{x} = -\hat{H}_\lambda$, (1.8)
- спряжене рівняння: $\dot{\lambda} = \hat{H}_x$, (1.9)
- трансверсальність по x: $\lambda(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$, $\lambda(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$ (1.10)

Необхідні умови, що записані в такій формі, називаються рівняннями Понтрягіна.

2.4.Метод динамічного програмування

Метод динамічного програмування побудований за принципом оптимальності Беллмана, який формулюється наступним чином: оптимальна стратегія управління характеризується властивістю, що, який би не був початковий стан та управління на початку процесу, наступні управління повинні складати оптимальну стратегію управління відносно стану, отриманого після початкової стадії процесу.

3.Статична і динамічна оптимізація

За видом критерію задачі оптимізації поділяються на однокритеріальні та багатокритеріальні.

За видом ММ – статичної та динамічної оптимізації, при чому задачі статичної оптимізації, як правило, зводять до знаходження min або max функції багатьох змінних при заданих обмеженнях. При динамічній оптимізації критерій має форму функціоналу, а керування шукається в одному з двох видів: **u*(t)** – оптимальна програма (t – час); **u*(x)** – оптимальна стратегія (оптимальне стабілізуюче управління). Для технічних систем оптимальна стратегія завжди доречніша ніж оптимальна програма внаслідок: неточної реалізації ММ об’єкта; неточної реалізації початкових умов; неповної інформації про зовнішні дії, що діють на систему; неточної реалізація програмного управління. До того ж, оптимальна стратегія може бути побудована на моделях першого наближення (зокрема лінійних ММ), а для оптимальної програми необхідно найточніше завдання ММ.

Тут же, динамічна оптимізація може бути лінійною/нелінійною, стаціонарною/нестаціонарною, з зосередженими/розподіленими параметрами; з фіксованим/безкінечним часом керування; з вільною/закріпленою/рухомою кінцевою фазовою точкою *x(t1),* при чому в першому випадку *x(t1)* не задане, в другому *x(t1)* – скаляр (вектор), в третьому *x(t1)* – функція (вектор-функція).

Також динамічна оптимізація класифікується за характером зовнішніх дій – детермінована та стохастична.

В залежності від повноти інформації задачі оптимізації поділяються на: з повною інформацією про стан об’єкта, збурення та завдання; з неповною інформацією та погано визначені об’єкти.

Якщо в математичну модель об’єкт керування входить вектор збурень **z**, то в залежності від інформації про **z** розрізняють такі задачі:

- відома повна інформація про вектор **z** (наприклад, точно вимірюються), це задачі рівномірно-оптимальні;

- вектор **z** – випадковий процес з відомими статистичними характеристиками, це статистично-оптимальні задачі;

- відсутня інформація про вектор **z**, але відомі їх числові обмеження, це мінімакстно-оптимальні задачі. При цьому, якщо вектор **z** обмежений в деякій нормі, то говорять про робастні системи.