

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
Национальный авиационный университет**

**А.А. Зеленков В.М. Синеглазов**

**БОРТОВЫЕ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.  
ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ  
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ**

**Киев 2010**

УДК 629.735.051 – 52.018.7:519.2(02)  
ББК 052 – 057.0  
3484

*Рецензенты:*

**В.И. Скурихин** – д-р т. н., проф., академик НАНУ;

**В.В. Васильев** – д-р т. н., проф., чл.-кор. НАНУ;  
(Национальный авиационный университет)

*Утверждено на заседании Ученого совета института электроники и систем управления Национального авиационного университета  
(протокол № от . . 2010 г.)*

Рассмотрены вероятностно – статистические методы анализа результатов летных и статистических испытаний, а также данных эксплуатационного контроля высоконадежных отказоустойчивых систем управления с целью определения оценок основных показателей надежности функционирования их аппаратных и программных средств, использующие как классический, так и байесовский подходы параметрического и непараметрического оценивания.

Для специалистов в области фундаментальной обработки результатов испытаний сложных динамических систем управления, инженеров, занимающихся исследованием надежности технических объектов, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

**Зеленков О.А.**

3484 Борові системи автоматичного керування. Оцінка надійності за результатами випробувань : монографія / О.А. Зеленков, В.М. Синеглазов.– К.: Вид. Нац. авіац. Ун-ту “НАУ – друк”, 2010.– 276 с. (Рос. мовою).

ISBN 978 – 966 – 598 – 611– 9

Розглянуті імовірносно – статистичні методи аналізу результатів льотних і статистичних випробувань, а також дані експлуатаційного контролю високонадійних відмовостійких систем управління з метою визначення оцінок основних показників надійності функціонування їх апаратних та програмних засобів, які використовують як класичний, так і байесовський підходи параметричного і непараметричного оцінювання.

Для спеціалістів в галузі фундаментальної обробки результатів випробувань складних динамічних систем управління, інженерів, які займаються дослідженням надійності технічних об'єктів, а також для аспірантів та студентів старших курсів відповідних спеціальностей.

УДК 629.735.051 – 52.018.7:519.2(02)

ББК 052 – 057.0

© Зеленков А.А., Синеглазов В.М., 2010

ISBN 978 – 966 – 598 – 611– 9

© НАУ, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННЫХ БОРТОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....	7
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ .....	18
1.1. Основные понятия .....	18
1.2. Сложные невосстанавливаемые системы. Основное соединение элементов .....	20
1.3. Сложные невосстанавливаемые системы. Основное соединение элементов .....	21
1.4. Восстанавливаемые системы .....	24
1.5. Автоматическое восстановление вычислительного процесса .....	30
1.6. Математические модели надежности с учетом процессов автоматического восстановления .....	34
1.7. Математические модели процессов автоматического восстановления .....	42
2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ .....	51
2.1. Биномиальное распределение .....	51
2.2. Отрицательный биномиальный закон .....	55
2.3. Распределение Пуассона .....	56
2.4. Гамма – распределение .....	59
2.5. Распределение Эрланга .....	61
2.6. Показательное (экспоненциальное) распределение .....	63
2.7. Распределение Вейбулла .....	64
2.8. Бета – распределение .....	68
2.9. Равномерное распределение .....	71
2.10. Усеченное нормальное распределение .....	71
2.11. Логарифмически нормальное распределение .....	73
2.12. Обратное гауссовское распределение .....	75
2.13. DN – распределение .....	76
2.14. DM – распределение .....	79
3. БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НАДЕЖНОСТИ ...	80
3.1. Концепция байесовской оценки .....	80
3.2. Параметрическая оценка надежности .....	87
3.2.1. Показательное распределение .....	88
3.2.1.1. Байесовская оценка параметра показательного распределения .....	88
3.2.1.2. Байесовская оценка вероятности безотказной работы .....	99

3.2.1.3.	Байесовская оценка вероятности безотказной работы при неполной априорной информации .....	104
3.2.1.4.	Байесовская оценка в случае априорного доверительного интервала .....	112
3.2.2.	Распределение Вейбулла .....	115
3.2.3.	Распределение Пуассона .....	118
3.2.4.	DN – распределение .....	121
3.3.	Непараметрическая оценка надежности .....	125
3.3.1.	Априорное бета – распределение .....	126
3.3.2.	Равномерное априорное распределение .....	131
3.3.3.	Обобщенное априорное бета – распределение .....	133
3.3.4.	Байесовская оценка параметра надежности при неполной априорной информации .....	144
3.3.5.	Байесовская оценка в случае априорного доверительного интервала на параметр надежности .....	149
3.4.	Квазипараметрическая оценка надежности .....	151
3.5.	Байесовская эмпирическая оценка надежности .....	173
3.5.1.	Параметрическое оценивание .....	174
3.5.2.	Непараметрическое оценивание .....	183
4.	4. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ ПАРАМЕТРОВ .....	192
4.1.	Точечные и доверительные оценки .....	192
4.1.1.	Показательное распределение .....	192
4.1.2.	Распределение Вейбулла .....	202
4.1.3.	Гамма – распределение .....	208
4.1.4.	Бета – распределение .....	209
4.1.5.	Оценки максимального правдоподобия стандартных распределений .....	210
4.2.	Непараметрическая оценка характеристик надежности ....	213
4.3.	Параметрическая оценка законов распределения .....	216
4.4.	Непараметрическая оценка законов распределения .....	226
5.	5. НАДЕЖНОСТЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ БОРТОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....	239
5.1.	Особенности программного обеспечения бортовых систем управления .....	239
5.2.	Основные показатели надежности ПО .....	247
5.3.	Графовая модель оценки надежности ПО .....	249
5.4.	Оценка комплексных показателей надежности ПО .....	259
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	272



## ВВЕДЕНИЕ

На протяжении двух последних десятилетий на воздушных судах гражданской авиации внедряются комплексы пилотажно – навигационного оборудования. Прогресс в области микроэлектроники позволил промышленности разработать новые концепции проектирования, которые привели к созданию цифровой авиационной электроники большой степени интеграции – интегрально – модульной авиационной электроники (ИМА). Технология ИМА позволяет создать бортовые отказоустойчивые системы управления, которые способны решать различные задачи управления самолетом в условиях возникновения потока отказов с автоматическим восстановлением работоспособности.

Функциональные возможности бортовых систем управления реализуются прикладным программным обеспечением, а сами прикладные программы являются функциональными элементами в блочной архитектуре ИМА. Повышение системной эффективности функционирования перспективных самолетов достигается на всех стадиях жизненного цикла, т.е. на этапах проектирования, летных и наземных испытаний, а также в эксплуатации.

Разработаны и разрабатываются нормативные требования к параметрам надежности, непосредственно или косвенно связанные с условиями обеспечения достаточного уровня безопасности. Как известно, уровень безопасности полета определяется уровнем летной годности самолета, т.е. свойством самолета выполнять полет во всем диапазоне ожидаемых условий эксплуатации (в том числе и при расчетных отказах). Автоматизация управления полетом на всех этапах должна обеспечивать, прежде всего, повышение уровня безопасности в сложных метеоусловиях.

Очевидно, что использование стохастических моделей, отражающих процесс функционирования объекта управления в реальной среде, приводит к необходимости получения большого объема экспериментальных данных.

При создании новых систем управления для перспективных самолетов проводятся и будут проводиться различные виды наземных и летных испытаний, начиная с математического моделирования и заканчивая эксплуатационными испытаниями. Все они направлены на достижение единой цели, заключающейся в

улучшении характеристик системы управления и установления ее соответствия заданным требованиям по надежности для обеспечения безопасности полета. При этом одной из основных задач является оценка надежности функционирования системы управления на всех этапах полета, получаемая по результатам всех видов испытаний, а также подтверждения этой оценки при эксплуатации системы управления.

Все это говорит о том, что требуется хорошо развитый математический аппарат для определения вероятностных характеристик с необходимой достоверностью и позволяющий провести анализ соответствия бортовой системы управления поставленным требованиям. При этом не менее важной становится задача метрологического обеспечения статистических измерений вероятностных характеристик и развития эффективных процедур их определения по результатам всех видов испытаний.

В последнее время в прикладной математической статистике развиваются новые направления, которые служат источником методов статистической обработки данных при решении задач по оценке надежности функционирования сложных динамических систем. К этим направлениям относится байесовская методология оценки надежности технических систем с использованием параметрических и непараметрических алгоритмов оценивания.

Расширение возможностей статистической обработки данных связано с развитием методологии статистических измерений, совершенствованием математических методов, а также широким внедрением специального программного обеспечения, разработанного для решения прикладных задач статистического оценивания и проверки статистических гипотез.

Предлагаемая книга построена на применении методов математической статистики и теории случайных процессов с целью разработки практически реализуемых вычислительных алгоритмов и программного обеспечения для статистической обработки результатов испытаний сложных систем автоматического управления с учетом специфики обрабатываемой статистической информации и возможностей имеющейся вычислительной техники.

## ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННЫХ БОРТОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Решение стоящих перед гражданской авиацией задач требует дальнейшего повышения регулярности и безопасности полетов. Именно этим объясняется большой размах работ по созданию нового поколения бортовых цифровых систем управления для магистральных самолетов.

Создаваемые цифровые системы управления на основе интегрально-модульной авиационной электроники позволяют реализовать широкие возможности автоматизации всех этапов полета самолетов. Авиационная электроника высокой технологии, называемая авионикой, представляет собой высокоорганизованный комплекс оборудования со своим программным обеспечением и взаимодействующими самолетными системами.

Авионике свойственны новые принципы: модульная конструкция, общая отказоустойчивая обработка информации и гибкий самолетный интерфейс.

Область применения систем автоматического управления с повышенным уровнем надежности постоянно расширяется, так как во многих случаях отказ системы может привести к большим материальным потерям или даже к угрозе жизни людей. Это в полной мере относится к бортовым системам управления. Под современной бортовой системой автоматического управления понимается программно – аппаратный комплекс, состоящий из вычислительной системы, операционной системы, прикладных программных средств и исполнительных устройств.

Надежность, хотя и является важным и ответственным свойством, представляет лишь одну соответствующую характеристику качества системы. Надежность, как правило, рассматривается во взаимосвязи с иными свойствами системы такими как точность управления и безопасность.

Очевидно также, что надежность не является свойством, которое можно придать готовой системе. Оно обеспечивается рядом мер, принимаемых на всех этапах, начиная от создания системы и заканчивая условиями ее эксплуатации. Однако, главным образом оно определяется качеством проектирования системы.

С проблемой надежности связаны следующие практические задачи:

- статистическая оценка и анализ надежности действующих систем управления с целью получения априорной информации для анализа надежности систем автоматического управления следующего поколения;
- усовершенствование методов аналитической оценки надежности;
- испытания на надежность создаваемых систем управления и сложных автоматизированных комплексов;
- прогнозирование надежности;
- оптимизация технических решений по обеспечению надежности при проектировании, создании и эксплуатации систем автоматического управления;
- моделирование динамики отказов и автоматического восстановления как аппаратных, так и программных средств.

Математический аппарат теории надежности основан на таких разделах современной математики, как теория случайных процессов, теория вероятностей и математическая статистика, теория массового обслуживания, теория графов, теория оптимизации, теория принятия статистических решений.

Источниками отказов могут быть неисправности и ошибки любого из компонентов вычислительной системы, а также искажения передаваемых данных. Процесс функционирования любой системы может рассматриваться как последовательность переходов из одного состояния в другое. Отказы – это переходы, которые ведут в ошибочные (или неисправные) состояния, из которых система может перейти в состояние проявления неисправности. Причиной перехода системы в неисправное состояние всегда является отказ внутри ее. Возможны два вида отказов: отказы элементов и структурные отказы. Отказ элемента вызывается неисправным состоянием элемента (пробой диода, искажение блока данных при записи и т.п.). Структурные отказы вызываются неправильным взаимодействием исправных элементов (неправильное соединение электронных элементов, несоответствие фактических параметров в операторе вызова подпрограммы типам

формальных параметров в ее описании и т.п.). Различие между двумя видами внутренних отказов существенны с точки зрения отказоустойчивости: отказы элементов легче обнаруживаются и исправляются, чем структурные отказы. Аппаратные отказы по большей части первого вида, а программные – второго. Это объясняется тем, что в сложных системах аппаратура значительно проще, чем программное обеспечение, из-за меньшего количества составляющих элементов, взаимосвязей и состояний, так что ошибка проекта аппаратуры – событие достаточно редкое.

При создании сложного программного обеспечения уже упоминавшиеся трудности спецификации приводят к тому, что в программах неизбежно содержатся ошибки, не выявленные при тестировании и отладке, что делает уровень надежности программного обеспечения ниже, чем у аппаратуры.

Таким образом, для повышения уровня надежности системы управления до значений, задаваемых нормативными требованиями, необходимо принимать специальные меры, которые можно условно разделить на два направления: предупреждение отказов и обеспечение отказоустойчивости.

Меры первого направления имеют целью исключить ошибки при разработке вычислительной системы, увеличить безотказность и долговечность ее элементов (испытания и тестирование аппаратуры, облегчение режимов нагрузки электронных компонентов, верификация, тестирование и отладка прикладных программ). Необходимо отметить, что абсолютная безотказность элементов аппаратуры и безошибочность программ недостижимы ввиду физического старения компонентов и высокой сложности программного обеспечения.

Меры второго направления обеспечивают свойство отказоустойчивости, т.е. способность обнаруживать отказы и устранять или уменьшать их последствия и продолжать исправное функционирование (возможно с худшими показателями качества или, если это невозможно, утрачивать функции в порядке, обратном приоритету). Другими словами, отказоустойчивостью называется способность оборудования продолжать работать с установленными характеристиками после того, как произойдет один или несколько отказов. Отказ может представлять собой неисправность компонентов аппаратуры или дефект, допущенный

при реализации аппаратуры или программного обеспечения. Термин «продолжающаяся работа» охватывает диапазон определений от полной работоспособности всех функций до различных установленных уровней пониженной способности выполнять работу.

Если в отказоустойчивой системе модуль или функция в модуле отказывают, система управления может автоматически осуществить реконфигурацию, чтобы нейтрализовать неисправность, а затем продолжать удовлетворительно работать до запланированного технического обслуживания, во время которого отказавший модуль может быть отремонтирован или заменен. На сегодняшний день философия технического обслуживания строится на желании иметь планируемые интервалы технического обслуживания. Для достижения планового технического обслуживания необходимо установить зоны удержания неисправности по всей архитектуре бортовой системы автоматического управления. При использовании этого подхода появляется возможность быстрого обнаружения любой неисправности и изоляции ее до данной зоны удержания неисправности. Каждая из этих зон должна обнаруживать и объявлять достоверность выдаваемых ею данных всем потребителям. Такой подход позволяет системе точно сообщать о своем техническом состоянии и дает возможность достигать таких целей в техническом обслуживании, которые раньше были недостижимы.

Общий принцип обеспечения отказоустойчивости систем управления – резервирование ресурсов (как на функциональном уровне, так и резервирование компонентов): аппаратных, временных, информационных и программных, причем в комбинированной форме. Функциональная готовность гарантируется предоставлением многочисленных путей для передачи данных от их источников к местам обработки, требуемой для приемников данных, будь то индикатор, исполнительное устройство или другое функциональное устройство. Резервирование компонентов конечно же необходимо, но упор делается на гораздо более широкое использование техники удержания отказа, чтобы позволить другим компонентам в системе продолжать функционировать в присутствии неисправности.

Аппаратная отказоустойчивость достигается варьированием ресурсов для получения отказоустойчивой конфигурации (выбор среднего значения, голосование и т.п.). Программная отказоустойчивость достигается с помощью  $N$  – вариантного программирования, повторения последней операции, повторное выполнение программы и т.п.

Требование обеспечения отказоустойчивости оказывает существенное влияние на конструкцию оборудования. Для того, чтобы система продолжала работать, необходимо или иметь резервирование ресурсов или иерархию задач, приносимых в жертву. Должны быть обеспечены также механизмы контроля переключения для распознавания отказа и предоставления пути реконфигурации.

Действия по обеспечению отказоустойчивости разбиваются на два этапа: обнаружение неисправного состояния средствами контроля (отказавшие элементы должны быть определены и изолированы) и восстановление исправного состояния (ресурсы системы должны быть перестроены таким образом, чтобы устранить остаточное влияние отказа на работу системы).

Основными чертами отказоустойчивой бортовой системы управления являются:

- максимальная попарная связанность отдельных модулей системы высокоскоростными дублированными шинами данных (трехкратное резервирование), дублированными источниками питания (четырёхкратное резервирование) для обеспечения непрерывного электропитания блоков (подсистем), обеспечивающих вычислительные ресурсы и интерфейс, необходимый для всех прикладных программ;

- наличие копий операционной системы и прикладных программ в памяти каждого процессора или групп процессоров в обрабатывающем модуле, имеющих собственную память и каналы ввода – вывода и способных заменять друг друга с целью возможного выполнения основной функции тремя независимыми процессорами, трижды объединенными по своим входам, рис.В.1.

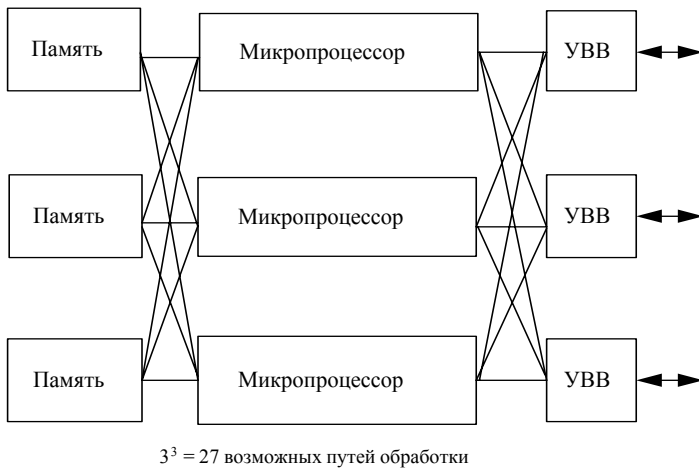


Рис. В.1

- возможность контроля работоспособности и восстановления системы на уровне как аппаратных, так и программных модулей, а также системы в целом при работе в реальном масштабе времени; при этом контроль функционирования отказоустойчивой системы с целью выявления ошибок может проводиться как на сигнальном уровне (схемы с дублированием, мажоритарные схемы с голосованием), так и на функциональном уровне (контроль критического времени выполнения модулем некоторого процесса, контроль объема памяти, занимаемой некоторой прикладной программой, контроль основного вычислительного процесса с помощью дополнительного вычислительного процесса с последующим сравнением), а также на тестовом уровне;

- использование самых современных универсальных (в смысле взаимозаменяемости) микропроцессоров;

- разбиение основного процесса на ряд подпроцессов (по количеству микропроцессоров или подсистем), в каждом из которых используется принцип дублирования.



Переход от первого этапа ко второму происходит по специальному сигналу при обнаружении отказа определенного типа. В этом случае вычислительная система начинает выполнять соответствующую программу, в которой задан алгоритм восстановления.

Восстановление возможно путем отката – возврата процесса к исправному состоянию, предшествовавшему переходу в неисправное состояние, или путем исправления – перевода процесса в исправное состояние без возврата к предыдущему состоянию. Для возможности отката нужно запоминать некоторые состояния процесса – потенциальные точки возврата, называемые точками восстановления. При откате существенным образом задействуется временной резерв, ибо для возврата к нормальной работе процесс повторяет пройденную последовательность состояний. Очевидно, что откат – эффективное средство борьбы со сбоями.

Исправление гораздо менее универсально, чем откат, так как основано на знании специфики процесса для нейтрализации неисправности.

К другим возможным способам восстановления относятся маскирование отказа путем голосования, реконфигурация (например, выполнение альтернативной версии программы, возможно более грубой) и мягкий останов.

Что касается программного обеспечения, то оно не изнашивается и, следовательно, не имеет зависимости частоты отказов от времени. Техника реализации программного обеспечения содействует обеспечению общей отказоустойчивости бортовой системы управления. Наиболее широко применяется  $N$  – вариантное программирование. В этом случае для организации отказоустойчивости независимо разрабатываются по общим техническим условиям два или больше вариантов программного обеспечения для выполнения одной и той же задачи. Эти варианты могут выполняться последовательно одним и тем же процессором, но обычно они выполняются параллельно на отдельных процессорах (иногда на различных типах процессоров, как дополнительная мера по обеспечению отказоустойчивости).

Таким образом, создаваемые интегрированные бортовые системы управления должны пройти целый комплекс испытаний,

как наземных, так и летных, с целью оценки их соответствия заданным требованиям, а также подтвердить характеристики точности и надежности в процессе эксплуатационного контроля.

*Характеристики надежности аппаратуры:*

- вероятность безотказной работы;
- средняя наработка до отказа;
- интенсивность отказов;
- параметр потока отказов;
- среднее время восстановления;
- резервирование (структурное, параметрическое, функциональное, информационное);
- реконфигурация динамическая и статическая;
- среднее время между отказами;
- параметр потока восстановлений;
- коэффициент готовности;
- коэффициент оперативной готовности;
- среднее время до первого отказа;
- количество отказов за заданное время;
- количество восстановлений и вероятность восстановления за заданное время.

*Характеристики надежности ПО:*

- вероятность правильного выполнения алгоритма при наличии ошибок в программе (корректность ПО);
- вероятность правильного выполнения алгоритма при наличии отказов и сбоев технических средств (устойчивость ПО);
- среднее время выполнения алгоритма;
- среднее число ошибок в программе на одну команду;
- среднее время восстановления;
- вероятность превышения длительностью восстановления (после возникновения отказа) порогового значения между отказом и сбоем.
- алгоритмический контроль входного и выходного потока информации;
- логический контроль;
- реконфигурация;
- N-вариантное программирование;

- тестовый контроль процессоров и памяти;
- диагностическое тестирование;

Оптимизация процесса исследования надежности бортовых систем управления требует решения комплекса сложных научно-технических проблем, к числу которых относится разработка математического и программного обеспечения обработки результатов испытаний (наземных, включая статическое моделирование и летные) и данных эксплуатации. В то же время применение методов экспериментального статистического анализа связано не только с разработкой их теоретических и методических основ, но и с созданием и развитием инструментальных средств реализации в виде управляемой базы данных, рис В.2.

Современные технологии разработки бортовых систем управления и их программного обеспечения требуют и соответствующего информационного обеспечения как процесса разработки и испытаний, так и процесса эксплуатации. Анализ и классификация задач, решаемых на стадии эксплуатации, свидетельствует об их тесной связи с задачами на стадии разработки. В то же время номенклатура задач, решаемых на этапе эксплуатации, имеет собственную специфику, которая должна найти отражение в информационном обеспечении этого процесса, основывающемся на базе данных, как на едином информационном ресурсе [22].

Информационное сопровождение испытаний и эксплуатации авионики обеспечивает:

- сбор, обработку и анализ данных испытаний о точности процессов автоматического управления на различных этапах полета;
- сбор, обработку и анализ данных о надежности бортовой системы управления и её программного обеспечения;
- регистрацию, систематизацию и классификацию отказов техники и программного обеспечения на этапе испытаний и эксплуатации для каждого экземпляра воздушного судна данного типа;
- обработку и анализ полученной информации с целью прогнозирования технического состояния воздушного судна;

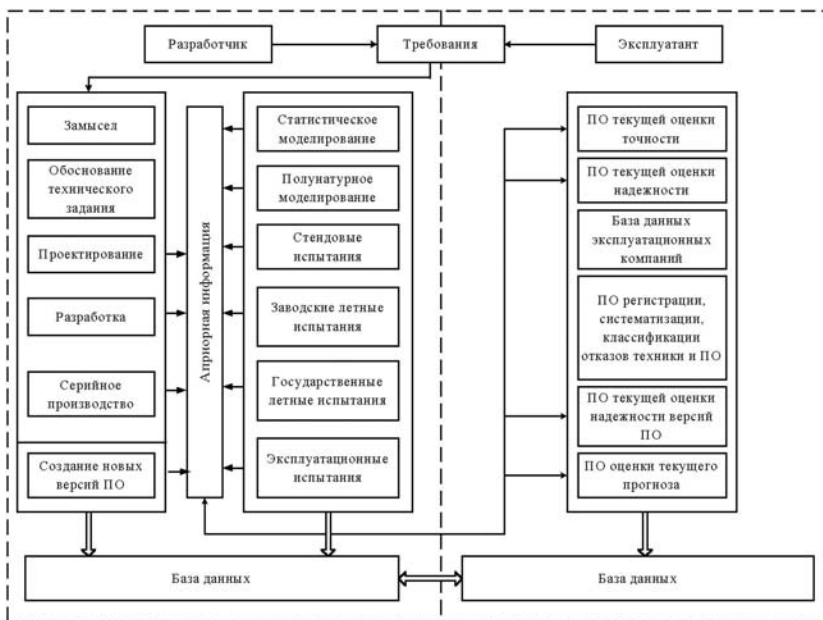


Рис В.2. Структурная схема мониторинга бортовых систем

- передачу необходимой информации эксплуатационным компаниям, разработчикам систем управления и ПО.

Одним из наиболее важных этапов информационного сопровождения является этап статистической обработки экспериментальных данных. При этом можно рассматривать как классический подход, использующий только результаты реальных испытаний, так и байесовский подход, который позволяет получить оценку надежности (или оценку параметров, связанных с надежностью) на основе как объективных данных (результатов испытаний), так и некоторой априорной информации, которая количественно (в той или иной степени) задается инженером – исследователем, учитывающим опыт разработчика, результаты статистического моделирования и аналитического решения. Введение априорной информации позволяет существенно сократить объем испытаний при получения заданной величины оценки надежности с требуемой точностью (особенно в тех случаях, когда система управления должна обеспечить высокий

уровень надежности – 0,999 и более). Однако необходимо помнить, что при малом количестве летных испытаний ошибки в задании априорной информации существенно влияют на достоверность получаемых оценок. Поэтому вопросы рационального выбора априорной информации (ее количественного описания) приобретают в этих условиях первостепенное значение.

Очевидно, что для получения достоверных статистических выводов относительно характеристик надежности необходимо применять параллельную обработку данных, используя классический и байесовский подходы (применяя параметрические и непараметрические методы обработки), рис.В.3..

Кроме того, обеспечение требуемого уровня безопасности полётов самолётов в условиях сниженных минимумов посадки определяет постановку проблемы создания эффективных методов оценки соответствия систем управления заданным требованиям, которые должны быть составной частью процесса сертификации систем управления.

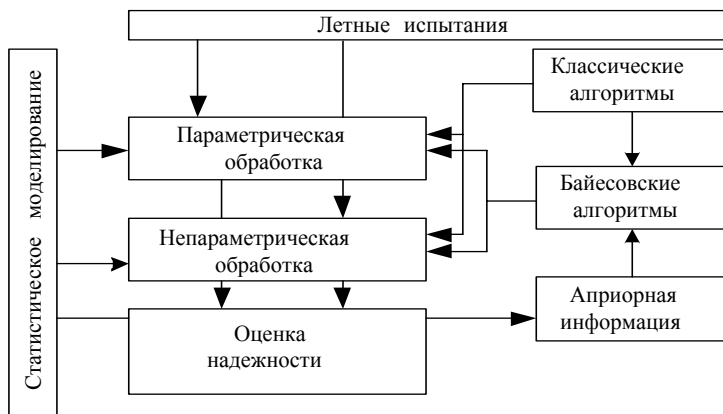


Рис.В.3. Схема обработки результатов испытаний

Все указанные характеристики определяются на основе статистической обработки экспериментальной информации, полученной на различных этапах испытаний, в том числе и на этапе статистического моделирования.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

## 1.1. Основные понятия

Поскольку причины отказов весьма разнообразны и проявляются неоднозначно, наработку системы можно считать случайной величиной.

Основополагающей характеристикой является функция распределения наработки  $X$ :

$$F(t) = P\{X \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Функция  $F(t)$  определяет вероятность того, что отказ системы произойдет до момента  $t$ , вследствие чего  $F(t)$  есть вероятность отказа, часто обозначаемая как  $Q(t)$ .

Вероятностью безотказной работы  $\bar{F}(t) = R(t)$  называют вероятность того, что на отрезке  $[0, t]$  не наступит отказ системы:

$$R(t) = 1 - F(t) = P\{X > t\}.$$

Если функция  $F(t)$  дифференцируема, то ее первая производная

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

называется плотностью распределения. Очевидно, что

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Важнейшие числовые характеристики наработки:

- математическое ожидание наработки (средняя наработка):

$$m = T = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} t dF(t) = -\int_0^{\infty} t dR(t).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$T = -\int_0^{\infty} t dR(t) = \left| \begin{array}{l} t = u \\ dR(t) = dv \\ dt = du \\ v = R(t) \end{array} \right| =$$

$$= -\left[ tR(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} R(t) dt \right] = \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

- дисперсия наработки

$$D = \int_0^{\infty} [t - m]^2 dF(t) = \int_0^{\infty} t^2 dF(t) - m^2.$$

Если  $X_1$  и  $X_2$  - взаимно независимые случайные наработки с функциями распределения  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , то функция распределения суммы  $X = X_1 + X_2$  определяется соотношением

$$F(t) = \int_0^t F_1(t-x) dF_2(x) = \int_0^t F_2(t-x) dF_1(x),$$

а плотность распределения равна

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-x) f_2(x) dx = \int_0^t f_2(t-x) f_1(x) dx.$$

Функции  $F(t)$  и  $f(t)$  называются свертками соответственно функций и плотностей распределения.

Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  определяется соотношением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Интегрируя обе части соотношения, получаем

$$R(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \lambda(x) dx \right\}.$$

Накопленная интенсивность отказов  $\Lambda(t)$  равна

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx.$$

Тогда

$$\Delta(t) = -\ln R(t).$$

Вероятность безотказной работы системы  $P(t_1, t_2)$  в интервале времени  $(t_1, t_2)$  представляет собой условную вероятность безотказной работы до момента времени  $t_2$  при условии, что до момента  $t_1 < t_2$  отказа не произошло. Как известно, значение условной вероятности события  $A$  при условии  $B$  определяется как

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Тогда

$$P(t_1, t_2) = \frac{P(t_2)}{R(t_1)} = \exp \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right\}.$$

## 1.2. Сложные невосстанавливаемые системы. Основное соединение элементов

- Вероятность безотказной работы:

$$R(t) = \prod_{k=1}^n R_k(t).$$

- Вероятность отказа:

$$Q(t) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - Q_k(t)].$$

Для случая, когда

$$\sum_{k=1}^n Q_k \ll 1,$$

можно использовать приближенное соотношение

$$Q(t) \approx \sum_{k=1}^n Q_k(t)$$

с погрешностью, не превышающей величины [12]



$$\frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n Q_k(t) \right]^2.$$

• Вероятность безотказной работы, определяемая через интенсивности отказов:

$$\begin{aligned} P(t) &= \prod_{k=1}^n P_k(t) = \prod_{k=1}^n \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_k(t) dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) \right] dt \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(t).$$

Для случая, когда  $\lambda_k(t) = const = \lambda_k$

$$P(t) = \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \lambda_k \right\}, \quad \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

• Средняя наработка до отказа для случая  $\lambda_k = const$ :

$$T = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}, \quad \frac{1}{T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k}.$$

### 1.3. Сложные невосстанавливаемые системы. Параллельное соединение элементов

Если параллельная система состоит из одного основного и  $(n - 1)$  резервных элементов, которые находятся в нагруженном резерве, то для наработки  $X$ :

$$\begin{aligned} P\{X > t\} &= 1 - P\{X \leq t\} = 1 - P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, \\ X_n \leq t\} &= 1 - P\{X_1 \leq t\} P\{X_2 \leq t\} \dots P\{X_n \leq t\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$R(t) = 1 - F_1(t)F_2(t)\dots F_n(t) = 1 - Q_1(t)Q_2(t)\dots Q_n(t).$$

Если элементы системы стохастически эквивалентны и имеют одинаковую функцию распределения наработки

$$F_1(t) = F_i(t), \quad i = 1, n, \text{ то}$$

вероятность отказа определяется выражением

$$Q(t) = [F_1(t)]^n,$$

вероятность безотказной работы равна

$$R(t) = 1 - [F_1(t)]^n,$$

средняя наработка равна

$$T = \int_0^{\infty} [1 - [F_1(t)]^n] dt.$$

Если интенсивность отказов не изменяется во времени ( $\lambda_i(t) = \lambda_0$ ), то соответствует экспоненциальному закону распределения, то:

$$Q(t) = [1 - e^{-\lambda_0 t}]^n, \quad R(t) = 1 - [1 - e^{-\lambda_0 t}]^n,$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{Q'(t)}{1 - Q(t)} = \\ &= \frac{\lambda_0 n e^{-\lambda_0 t} [1 - e^{-\lambda_0 t}]^{n-1}}{1 - [1 - e^{-\lambda_0 t}]^n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\infty} [1 - [1 - e^{-\lambda_0 t}]^n] dt = \left| \begin{array}{l} 1 - e^{-\lambda_0 t} = x, \quad dx = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} dt \\ t = 0 \rightarrow x = 0, \quad t = \infty \rightarrow x = 1 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{e^{-\lambda_0 t}} dx = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \int_0^1 (1 + x + \dots + x^{n-1}) dx = \frac{1}{\lambda_0} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

Другие точные выражения для средней наработки параллельных систем существуют лишь для немногих интересных для практики функций распределения с элементами, имеющими одинаковое распределение наработки.

Для случая, когда функция  $F_1(t)$  имеет монотонно возрастающую интенсивность отказов  $\lambda_0(t)$  и если площадь под касательной к функции  $R_1(t)$  (для  $t \geq 0$ ) в точке  $t_0 = T$  меньше чем площадь под кривой  $R_1(t)$ , то

$$Q_1^{-1}\left(\frac{1}{n-1}\right) \leq T \leq Q_1^{-1}\left(\frac{0,56}{n+1}\right),$$

где  $Q_1^{-1}(x)$  – функция, обратная к  $R_1(t)$  [59], рис. 1.1.

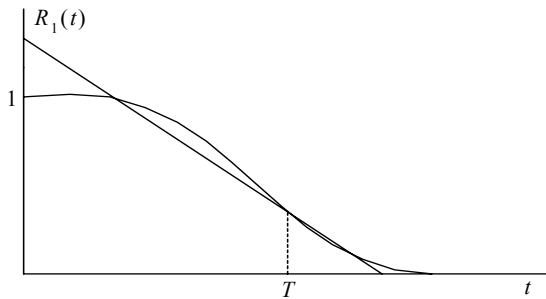


Рис. 1.1. Определение средней наработки

Если система состоит из  $k$  рабочих элементов и  $(n - k)$  элементов, которые находятся в нагруженном резерве (система « $k$  из  $n$ »), то очевидно, что система работоспособна, если работают, по крайней мере,  $k$  из  $n$  ее элементов. Если элементы стохастически эквивалентны, то вероятность безотказной работы определяется как

$$R(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [Q_i(t)]^{n-1} [R_i(t)]^i.$$

Для случая  $\lambda_0 = const$ , т.е. когда  $Q(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$ , средняя наработка определяется соотношением

$$T = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{1+i}.$$

Для систем, которые образованы последовательным включением параллельных систем или параллельным включением последовательных систем, вероятности безотказной работы могут быть рассчитаны по приведенным выше формулам.

#### 1.4. Восстанавливаемые системы

После каждого отказа система восстанавливается (путем аппаратного или программного восстановления). Будем считать, что время восстановления значительно меньше времени между отказами. Поток отказов (последовательность отказов, происходящих один за другим в случайные моменты времени) может быть охарактеризован либо числом отказов  $N(t)$  на промежутке времени  $(0, t)$ , либо последовательностью непрерывных случайных наработок между отказами.

Случайные времена отказов  $\tau_1, \tau_2, \dots$  имеют один и тот же закон распределения  $F(t)$ , так что:

$$F(t) = P\{\tau_n < t\}.$$

Моменты отказов  $t_1 = \tau_1, t_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots, t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$  образуют случайный поток (поток восстановлений). При этом:

$$M\{\tau_n\} = T_0 = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt,$$

$$D\{\tau_n\} = 2 \int_0^{\infty} t[1 - F(t)] dt - T_0^2.$$

Величина  $N(t)$  определяется из условия

$$t_{N(t)} < t \leq t_{N(t)+1},$$

т.е.

$$N(t) = \max\{k : t_k \leq t\}, \quad N(t) = 0, \quad t < t_1.$$

Неравенство  $t_k \leq t$  выполняется тогда, когда  $N(t) \geq k$ .

Следовательно

$$F_k(t) = P\{t_k \leq t\} = P\{N(t) \geq k\}.$$

Так как

$$P\{N(t) \geq k\} = P\{N(t) = k\} + P\{N(t) \geq k + 1\},$$

то

$$P_k(t) = P\{N(t) = k\} = F_k(t) - F_{k+1}(t)$$

и, в частности,

$$P_0(t) = P\{N(t) = 0\} = 1 - F(t).$$

Функция восстановления  $H(t) = M\{N(t)\}$  определяет среднее число отказов, происшедших до момента  $t$ :

$$\begin{aligned} H(t) &= M\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n F_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \end{aligned}$$

т.е.

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Функция  $H(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению [40]

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t - \tau) dF(\tau).$$

Зная  $H(t)$  легко определить основные характеристики процесса восстановления:

- дисперсия числа отказов

$$D\{N(t)\} = 2 \int_0^t H(t - \tau) dH(\tau) + H(t) - H^2(t),$$

- среднее число отказов на участке  $(t_1, t_2)$

$$H(t_1, t_2) = H(t_2) - H(t_1).$$

Среднее число отказов за единицу времени характеризуется плотностью восстановления  $h(t)$  (параметр потока отказов):

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} = \omega(t).$$

Очевидно, что

$$\omega(t) = h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \quad f_n(t) = F_n'(t).$$

Как правило, параметр потока отказов после некоторой наработки  $t = t_0$  становится постоянным

$$\omega(t) = \omega = \text{const}, \quad t \geq t_0.$$

Параметр потока отказов можно рассматривать как плотность вероятности отказа системы для рассматриваемого момента времени. По своему содержанию понятия «интенсивность отказов» (для невозстанавливаемых систем) и «параметр потока отказов» (для восстанавливаемых) – совершенно различные. Плотность восстановления  $h(t) = \omega(t)$  приближенно равна безусловной вероятности отказа за единицу времени (которая достаточно мала). Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  есть условная вероятность отказа за единицу времени при условии, что до момента времени  $t$  отказов не было. Однако в важном частном случае ( $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ ) они численно совпадают, т.е.  $\omega = \lambda$ .

• Среднее время между отказами (период от наработки до наработки) определяется соотношением

$$T_0 = \frac{t_2 - t_1}{H(t_2) - H(t_1)}.$$

Рассмотренные величины  $P_k(t)$ ,  $H(t)$  и  $\omega(t)$  могут быть использованы при решении таких задач надежности, как определение числа запасных элементов или числа «запасных» путем обработки информации, которых с вероятностью, не меньшей  $\gamma$ , хватит на время  $t$  в случае отказов соответствующих компонентов. Чтобы число отказов не превосходило некоторое значение  $n$ , необходимо выполнение условия:

$$P\{N(t) \leq n\} \geq \gamma$$

или

$$P\{N(t) > n\} < 1 - \gamma.$$

Так как

$$P\{N(t) \geq n\} = P\{t_n < t\} = F_n(t),$$

то из условия

$$F_{n+1}(t) < 1 - \gamma$$

определяется наименьшее значение  $n$ . Здесь

$$F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(t - \tau) dF(\tau), \quad F_1(t) = F(t)$$

Определим выражения для  $P_k(t)$ ,  $H(t)$  и  $\omega(t)$  для некоторых законов распределения, широко используемых на практике.

*Экспоненциальный закон.* В этом случае

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$P_k(t) = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

$$H(t) = \lambda t, \quad \omega(t) = \lambda = \omega.$$

*Нормальный закон.* Предполагая, что  $\sigma \ll T_0$  (см. раздел 2.10.), можно записать, что

$$F_n(t) = \Phi\left[\frac{t - nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right], \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx,$$

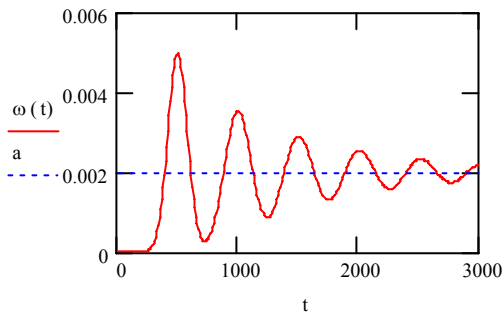
$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left[\frac{t - nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right],$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{(t - nT_0)^2}{2\sigma^2 n}\right\}.$$

График  $\omega(t)$  показан на рис. 1.2 для случая

$$T_0 := 500 \quad \sigma := 80 \quad a := \frac{1}{T_0} \quad t := 0, 10.. 3000$$

$$\omega(t) := \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot \sigma}} \cdot \exp \left[ \frac{-(t - n \cdot T_0)^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot n} \right]$$



$$T_0 = 500 \text{ ч}, \quad \sigma = 80 \text{ ч}$$

Рис.1.2. График потока отказов

*Гамма-распределение.* Плотность этого распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$f_n(t) = \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t},$$

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^{n\alpha} x^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda x} dx,$$



$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Необходимо отметить, что определить функцию восстановления для большинства имеющих на практике значение распределений наработки невозможно, поэтому применяют численные методы решения уравнений восстановления. Большое практическое значение имеют приближенные оценки. В частности, с учетом того, что

$$F_n(t) = P\{t_n < t\} \leq P\{\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t\},$$

или

$$F_n(t) \leq F^n(t),$$

можно записать

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t) = \frac{F(t)}{1-F(t)}.$$

Так как  $H(t) \geq F(t)$ , то получаем неравенство для оценки  $H(t)$ :

$$F(t) \leq H(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)}.$$

Это соотношение позволяет получить приемлемые оценки для функции восстановления, если  $F(t) \ll 1$ , т.е. для достаточно малых значений  $t$ .

При больших значениях  $t$  число восстановлений  $N(t)$  распределено приблизительно нормально с математическим

ожиданием  $M\{N(t)\} = \frac{t}{T_0}$  и дисперсией  $D\{N(t)\} = \frac{\sigma^2 t}{T_0^3}$  [12]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{N(t) - \frac{t}{T_0}}{\sigma \sqrt{t T_0^{-3}}} > x \right\} = 1 - \Phi(x),$$

откуда следует, что число отказов на интервале  $[0, t]$  заключено с вероятностью  $\gamma$  внутри интервала:

$$\frac{t}{T_0} - u_{1-\gamma} \frac{\sigma\sqrt{t}}{2\sqrt{T_0^3}} \leq N(t) \leq \frac{t}{T_0} + u_{1-\gamma} \frac{\sigma\sqrt{t}}{2\sqrt{T_0^3}},$$

где  $u\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$  - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\frac{1-\gamma}{2}$ .

Для односторонней оценки:

$$N(t) < \frac{t}{T_0} + u_{1-\gamma} \frac{\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{T_0^3}}.$$

Знание асимптотического распределения случайной величины  $N(t)$  при больших  $t$  позволяет, помимо всего, ответить на вопрос: каково минимальное число запасных блоков (элементов) или резервных информационных путей обработки данных для безотказной работы системы на интервале  $(0, t]$  с заданной доверительной вероятностью  $\gamma$ .

Очевидно, что надежность отказоустойчивой системы зависит от отказов аппаратуры и программного обеспечения, а отказоустойчивость – от процессов восстановления.

### **1.5. Автоматическое восстановление вычислительного процесса**

Надежность отказоустойчивой системы управления зависит не только от отказов отдельных элементов, сбоев, ошибок в программном обеспечении, но и от способов автоматического контроля, реализующих ту или иную его глубину, способов диагностирования, реконфигурации и восстановления информации, участвующей в вычислительном процессе. В частности, способ восстановления вычислительного процесса после обнаружения ошибки зависит от того, вызвана она сбоем или отказом, т.е. при появлении ошибки, выявленной схемами контроля, необходимо классифицировать причину ошибки.

Рассмотрим основные термины и определения, используемые при описании процессов восстановления.

*Отказ* – событие, заключающееся в нарушении работоспособности системы из-за отказов компонентов, при которых выполнение управляющих программ не может быть продолжено с помощью имеющихся программных и аппаратных средств автоматического восстановления в течении максимально допустимого времени нахождения системы в отказовом состоянии.

*Сбой* – самоустраняющийся отказ системы, приводящий к кратковременной утрате ее работоспособности, требующий принятия специальных мер для устранения последствий в виде искажения части данных, хранимых в памяти системы.

*Внезапный отказ* – скачкообразное изменение одного или нескольких параметров (например, возрастание сопротивления цепи вследствие ее обрыва, электрический пробой диода, конденсатора и т.п.). Внезапные отказы, имеющие случайный характер, достаточно хорошо описываются экспоненциальным законом распределения.

*Постепенный отказ* – постепенное изменение нескольких взаимосвязанных параметров, приводящее к таким их значениям, при которых система оказывается в неработоспособном состоянии. Постепенные отказы, возникающие в результате необратимых физико-химических изменений физических параметров элементов, как правило, описывается нормальным законом ( $DN$  - распределением).

*Безотказность* – свойство системы сохранять работоспособность (выполнять свои функции с эксплуатационными показателями не хуже заданных) в течение требуемого интервала времени непрерывно без вынужденных перерывов. Безотказность определяется количеством и безотказностью элементов, режимом их работы, наличием резервирования, параметрами окружающей среды и др.

*Отказоустойчивость* – свойство системы, обеспечивающее обнаружение ошибки, выявление ее характера (случайная или постоянная), изоляцию неисправности, реконфигурацию системы и восстановление вычислительного процесса. В отличие от безотказности отказоустойчивость зависит только от структуры системы и не зависит от показателей надежности элементов, входящих в систему. При рассмотрении отказоустойчивости не

существенны любые ошибки в определении показателей надежности элементов.

Различают два типа отказоустойчивости: к отказам, возникающим в процессе функционирования в реальном масштабе времени, и к отказам из-за ошибок разработки программного обеспечения. Первый тип имеет довольно большую историю развития, сложившиеся архитектурные решения и основан на введении избыточности в виде аппаратных, информационных и программных копий [65].

Второй тип не может использовать принцип дублирования, так как при ошибках разработки все однотипные устройства будут иметь одни и те же врожденные дефекты. В этом случае используется принцип  $N$  – вариантного программирования (используются не копии, а независимо разработанные программные средства, удовлетворяющие требованиям к системе).

Отказоустойчивость системы оценивается вероятностью автоматического восстановления в случае возникновения отказов отдельных компонентов, т.е. глубиной защищенности системы от отказов и количеством отказов компонентов, после которых еще не требуется вмешательства программы технического обслуживания.

В практике устранения ошибок и отказов встречаются два основных способа устранения их последствий: маскирование ошибочных действий и реконфигурация системы.

*Маскирование* – способ устранения последствий отказов, состоящий в том, что избыточная информация скрывает действие ошибочной информации благодаря особенностям схемных решений и организации вычислительного процесса с использованием статистических средств устранения ошибок – средств маскирования [49, 61]: корректирующие коды, схемы с голосованием, использующие нечетное число блоков, выполняющих одни и те же вычислительные операции и т.п.

Восстановление путем маскирования выполняется в том случае, когда ошибка обнаружена средствами контроля логического уровня и, следовательно, не успела распространиться.

*Постепенная деградация* – свойство системы, обеспечивающее сохранность работоспособности за счет ухудшения рабочих параметров, что позволяет отсрочить

техническое обслуживание. Системы с постепенной деградацией сохраняют работоспособность за счет того, что имеют альтернативные алгоритмы выполнения операций, которые обеспечивают обработку информации с помощью других аппаратных средств (при условии отказа основных) с возможным ухудшением характеристик процесса (например, увеличение времени выполнения операции, снижение точности получаемого результата и т.п.).

*Автоматическая реконфигурация* – изменение состава и способа взаимодействия программных и аппаратных средств системы, обеспечивающее устойчивость к отказам, возникающим во время функционирования, за счет исключения отказавших программных или аппаратных компонентов и восстановления работоспособного состояния путем передачи отказавших функций другим аппаратным или программным средствам. Например, реконфигурация может состоять из таких этапов, как перемещение операционной системы в резервную область памяти, где нет отказов (или в область памяти другого процессора с возможным, но допустимым ухудшением его характеристик), переотображение адресов памяти с целью исключения отказавшего модуля, динамическая реконфигурация периферийных устройств при отказе некоторых из них и т.п.

Различают два типа реконфигурации: статическую и динамическую. При статической реконфигурации происходит отключение неисправных компонентов, при этом система делится на две части: активную – непосредственно участвующую в работе системы и пассивную – охватывающую отказавшие компоненты системы и отключенные в ходе реконфигурации.

Динамическая реконфигурация по принципу проведения делится на следующие виды:

- замещение (поддержка запасом);
- дублирование;
- постепенная деградация (снижение вычислительных способностей).

Если система имеет маскирующую избыточность как часть схемы динамической реконфигурации, то удаление отказавших компонентов можно отложить до наступления следующего отказа,

когда общее количество отказавших компонентов станет угрожающим в смысле возникновения немаскированной ошибки.

*Автоматическое восстановление системы* – автоматическое восстановление работоспособности за счет ее реконфигурации. Оценивается средним (максимальным) временем восстановления, не превышающим времени, при котором система считается отказавшей. На аппаратном уровне восстановление реализуется путем использования дополнительных (резервных) элементов. На программном уровне осуществляется восстановление информации о состоянии системы, необходимой для продолжения ее работы. В этом случае к основным способам восстановления относятся: повторение операции или последнего действия на различных уровнях (команд или микрокоманд), возвращение к контрольной точке, повторное выполнение программы и т.п.

### **1.6. Математические модели надежности с учетом процессов автоматического восстановления**

При теоретических исследованиях и расчетах надежности сложных систем управления случайные процессы отказов и восстановлений можно представлять в виде марковского процесса. Надежность системы зависит в основном от отказов аппаратных средств и программного обеспечения, а отказоустойчивость от процессов восстановления. Очевидно, что отказ в системе (а значит и восстановление) может состояться в любой момент времени, т. е. система управления функционирует в непрерывном времени. Если время перехода системы из одного состояния в другое распределено в соответствии с экспоненциальным законом, то такая система может быть представлена моделью в виде марковского процесса с непрерывным временем. Как уже отмечалось, в задачах оценки надежности замена распределения на экспоненциальное не приводит к серьезным ошибкам.

В непрерывных марковских процессах вместо переходной вероятности  $p_{ij}$  рассматривают интенсивность переходов  $\lambda_{ij}$ , представляющую собой математическое ожидание числа переходов в единицу времени, т.е. как предел отношения вероятности

перехода за время  $\Delta t$  из состояния  $z_i$  в состояние  $z_j$  к временному промежутку  $\Delta t$ :

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Для однородного марковского процесса интенсивность перехода не зависит от времени.

В [32] предлагается один из вариантов модели состояний отказоустойчивой вычислительной системы в виде ориентированного графа, рис.1.3.

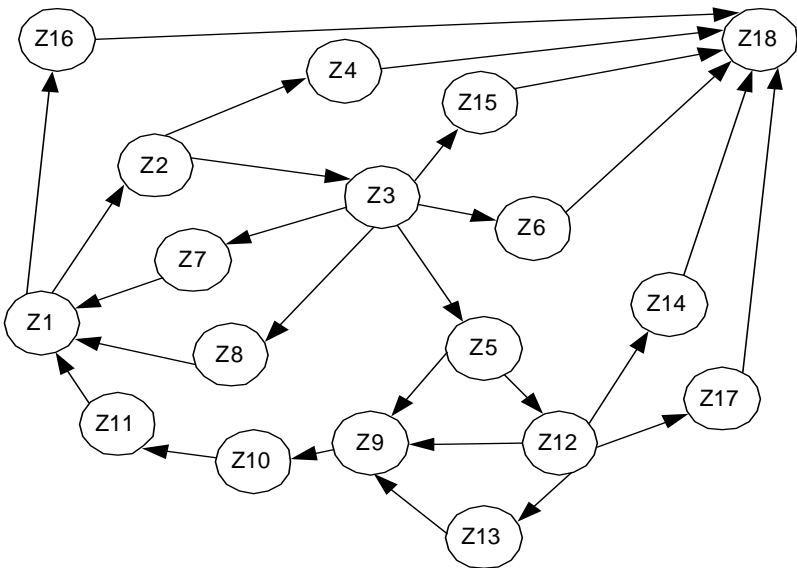


Рис. 1.3. Ориентированный граф отказоустойчивой системы  
Возможные состояния системы:

- $z_1$  – полностью работоспособное состояние;
- $z_2$  – в системе есть ошибка (сбой или отказ);
- $z_3$  – ошибка обнаружена;

- $z_4$  – ошибка не обнаружена;
- $z_5$  – ошибка локализована;
- $z_6$  – ошибка не локализована;
- $z_7$  – повторение последней операции;
- $z_8$  – ошибка маскирована;
- $z_9$  – возвращение системы (вычислительного процесса) к контрольной точке;
- $z_{10}$  – информация восстановлена;
- $z_{11}$  – повторение (продолжение) вычислительного процесса, начиная с контрольной точки;
- $z_{12}$  – отказавший модуль (элемент) отключен;
- $z_{13}$  – резервный модуль (элемент) введен (или резервный путь обработки информации);
- $z_{14}$  – резервы системы исчерпаны;
- $z_{15}$  – во время восстановления системы возникла другая ошибка;
- $z_{16}$  – автоматические средства восстановления отказами;
- $z_{17}$  – средства коммутации резервов отказами;
- $z_{18}$  – отказ системы управления.

Интенсивность переходов может быть определена как

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\bar{t}_{ij}},$$

где  $\bar{t}_{ij}$  – среднее время осуществления  $j$ -го события при переходе системы из состояния  $z_i$  в состояние  $z_j$  (например,  $\bar{t}_{12}$  – средняя наработка системы на отказ или сбой).

Для определения показателей надежности системы достаточно определить вектор вероятностей состояний

$$\vec{P}(t) = \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\}.$$



Если интервалы времени между событиями имеют экспоненциальный закон распределения, то плотность распределения времени нахождения системы в состоянии  $z_i$  определяется как

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

и в каждый конкретный момент времени  $t$  система находится в состоянии  $z_i$  с вероятностью  $P_i(t)$ , при этом

$$\sum_i P_i(t) = 1.$$

Искомый вектор  $\vec{P}(t)$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(t) = \Lambda \vec{P}(t),$$

которое представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), которую можно решить при заданных начальных условиях  $\vec{P}(0)$  и матрице интенсивностей переходов  $\Lambda$ .

При составлении дифференциальных уравнений можно использовать граф состояний системы. В левой части каждого уравнения стоит производная  $\frac{dP_i}{dt}$ , а в правой части – столько слагаемых, сколько стрелок связаны непосредственно с данным состоянием. Если стрелка направлена в данное состояние, то слагаемое имеет знак плюс. Каждое слагаемое равняется произведению плотности потока событий, который переводит систему по данной стрелке, на вероятность того состояния, из которого выходит стрелка ( $\lambda_{ij} P_i(t)$ ). Например, для системы, граф которой показан на рис.1.4, система дифференциальных уравнений имеет вид:

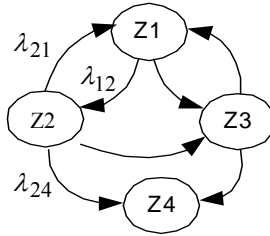


Рис.1.4. Ориентированный граф

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24})P_2(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{34})P_3(t);$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t).$$

Количество уравнений уменьшается на единицу, если учесть, что для любого  $t$

$$\sum_i P_i(t) = 1.$$

Если в графе системы состояний без выхода нет, то возможен стационарный режим, который характеризуется стационарными вероятностями. Чтобы найти эти вероятности, приравнивают к нулю все производные и решают систему линейных алгебраических уравнений. Найденные стационарные вероятности характеризуют средний промежуток времени нахождения системы в этом состоянии при достаточно большем времени наблюдения.

Математическая модель может быть решена с помощью преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} s\vec{P}(s) - \vec{P}(0) &= \Lambda\vec{P}(s), \\ \vec{P}(s) &= [s - \Lambda]^{-1}\vec{P}(0), \end{aligned}$$

где

$$P_i(s) = \int_0^{\infty} P_i(t)e^{-st} dt.$$

Зная изображения  $P_i(s)$  можно определить оригиналы  $P_i(t)$  с использованием обратного преобразования Лапласа.

Вероятность безотказной работы системы определяется из выражения

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i(t) = 1 - P_n(t).$$

Поскольку

$$P(s) = \int_0^{\infty} P(t)e^{-st} dt,$$

то для  $s = 0$

$$P(s)|_{s=0} = \int_0^{\infty} P(t)dt = T,$$

где  $T$  - среднее время работы системы до первого отказа.

Пусть, например, граф состояний системы управления описывает процесс ее постепенной деградации за счет отказов элементов и процесс ее автоматического восстановления, рис.1.5.

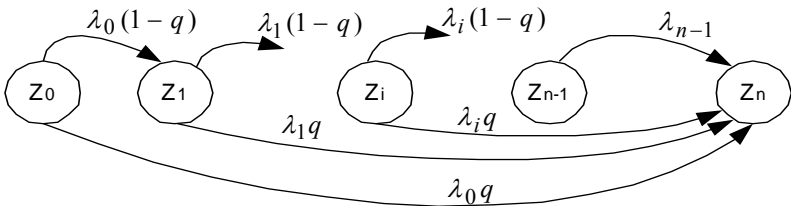


Рис.1.5. Ориентированный граф постепенной деградации системы

Пусть  $q$  – вероятность отказа средств автоматического восстановления, т.е. с вероятностью  $q$  система переходит в состояние отказа (состояние  $z_n$ ), а начальные условия распределяются следующим образом:  $P(0) = 1$ ,  $P_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda_1 P_1(t) + \lambda_0(1-q)P_0(t); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + q \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i P_i(t). \end{aligned}$$

После преобразования Лапласа получаем:

$$\begin{aligned} sP_0(s) - P_0(0) &= -\lambda_0 P_0(s); \\ sP_1(s) &= -\lambda_1 P_1(s) + \lambda_0(1-q)P_0(s); \\ &\dots\dots\dots \\ sP_n(s) &= -\lambda_{n-1}P_{n-1}(s) + q \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i P_i(s), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{P(0)}{s + \lambda_0} = \frac{1}{s + \lambda_0}, \\ P_1(s) &= \frac{\lambda_0(1-q)}{s + \lambda_1} P_0(s) = \frac{\lambda_0(1-q)}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_i(s) &= \frac{(1-q)^i \prod_{j=0}^{i-1} \lambda_j}{\prod_{j=0}^i (s + \lambda_j)}. \end{aligned}$$

Известно, что изображение

$$F(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s + a_i)}$$

имеет своим оригиналом функцию

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-a_i t}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_k - a_i)}.$$

Это соотношение позволяет определить переходные вероятности  $P_i(t)$ :

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= e^{-\lambda_0 t}, \\
 P_1(t) &= \frac{\lambda_0(1-q)}{\lambda_0 - \lambda_1} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_0 t}], \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_i(t) &= (1-q)^i \prod_{j=0}^{i-1} \lambda_j \sum_{p=0}^i \frac{e^{-\lambda_p t}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^i (\lambda_k - \lambda_p)}, \quad i = \overline{2, n-1} \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_n(t) &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t).
 \end{aligned}$$

Среднее время безотказной работы равно:

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} P(s) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(s) \Big|_{s=0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1-q)^i}{\lambda_i},$$

а вероятность безотказной работы системы определяется соотношением:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t).$$

Подставляя значения  $P_i(t)$  получаем:

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t} + \sum_{i=1}^{n-1} (1-q)^i \prod_{j=0}^{i-1} \lambda_j \sum_{p=0}^i \frac{e^{-\lambda_p t}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^i (\lambda_k - \lambda_p)}.$$

Отметим, что случай  $q = 0$  соответствует полному автоматическому восстановлению за счет включения резервных элементов и резервных путей обработки информации (но без ремонта, т.е. сбой или отказ приводит к реконфигурации системы и она переходит в другое состояние, при этом система имеет  $(n - 1)$  работоспособных состояний при последовательных отказах или сбоях). Случай  $q = 1$  соответствует полностью не резервированной системе, т.е. в случае отказа компонента система сразу переходит в состояние отказа.

Рассмотрения отказоустойчивая система управления имеет большую вероятность безотказной работы при малом времени эксплуатации  $t$ , что видно из выражения для  $P(t)$ .

Если ремонт бортовой системы управления целесообразно проводить на основной базе, имеющей необходимое оборудование для выполнения качественного обслуживания, то оценку вероятности безотказной работы можно определить за время, равное времени полета самолета в некоторый аэропорт назначения и назад к основной базе. В частности, в соответствии с требованиями, предъявляемыми к отказоустойчивым структурам авионики, необходимо, чтобы все функции управления продолжали выполняться в течении 250 часов после первого отказа с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,99$ .

### **1.7. Математические модели процессов автоматического восстановления**

Для эффективной количественной оценки надежности функционирования отказоустойчивой технической системы на этапах ее проектирования (в частности, при статистическом моделировании временных показателей надежности для произвольных законов распределения временных интервалов

между отказами (восстановлениями) используются соответствующие математические модели. Функционирование бортовой системы управления характеризуется тем, что в каждый момент времени обработка входной информации реализуется вполне определенными модулями, при этом в каждый момент времени некоторые узлы работоспособны, а некоторые могут восстанавливаться. Если каждому возможному множеству работоспособных (или отказавших) модулей поставить в соответствие множество состояний системы, то отказы и восстановления модулей будут отражаться переходами системы из одного состояния в другое.

Так как система может принимать конечное число состояний, а переходы системы из одного состояния в другое возможны в любые случайные моменты времени (отказ любого элемента может произойти в любой момент времени и окончание восстановления этого элемента или подключения нового пути обработки информации также может произойти в любой момент времени), то математической моделью системы может быть непрерывная марковская цепь, если поведение системы после произвольного момента времени зависит только от состояния, в котором цепь находилась после предыдущего перехода.

Если времена перехода системы из одного состояния в другое распределены по показательному закону, то этот случай соответствует марковской модели. Необходимо отметить, что результаты статистических исследований указывают на то, что в большинстве случаев замена неэкспоненциального распределения времени восстановления на экспоненциальное приводит к незначительным погрешностям [2, 9, 12, 13].

Процесс восстановления системы для общего случая показан на рис. 1.6.

Автоматическое восстановление в системах управления обеспечивает их высокую степень надежности и отказоустойчивости, однако большое разнообразие процессов восстановления приводит к некоторым трудностям построения модели этих процессов.

Как правило, для оценки точности аналитических моделей, построенных на различных предположениях и допущениях

(например, на предположениях о виде закона распределения времени восстановления, о независимости процессов отказов -

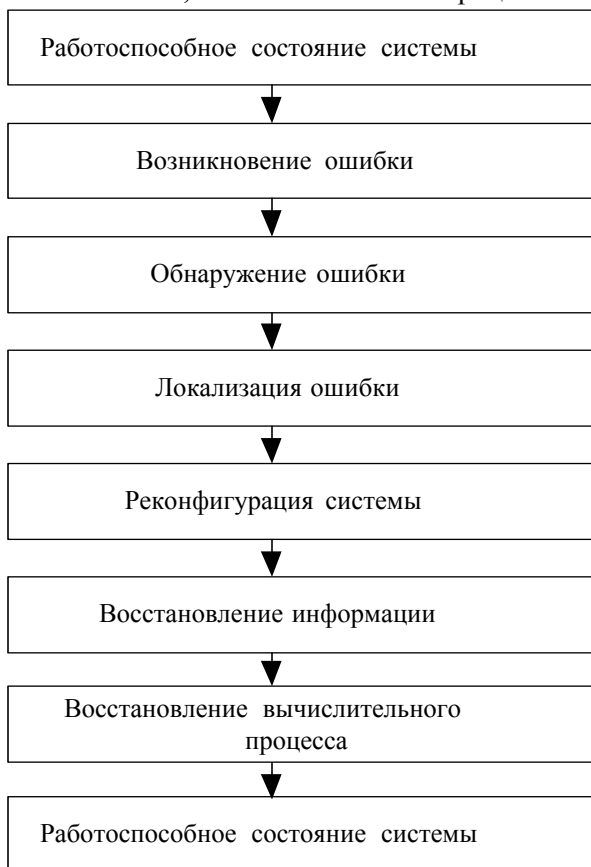


Рис.1.6. Процесс восстановления системы

восстановлений), используются методы имитационного или статистического моделирования.

На этапах проектирования и разработки отказоустойчивых систем управления многие параметры процесса восстановления неизвестны и могут быть получены только путем моделирования, при этом можно варьировать типами законов распределения



временных интервалов  $\tau_B$ , руководствуясь теми или иными физическими соображениями.

В [33, 67] рассматривается один из вариантов графовой модели (рис.1.7) процесса автоматического восстановления некоторой гипотетической системы, включающий все возможные процессы восстановления, применяемые в реальных системах.

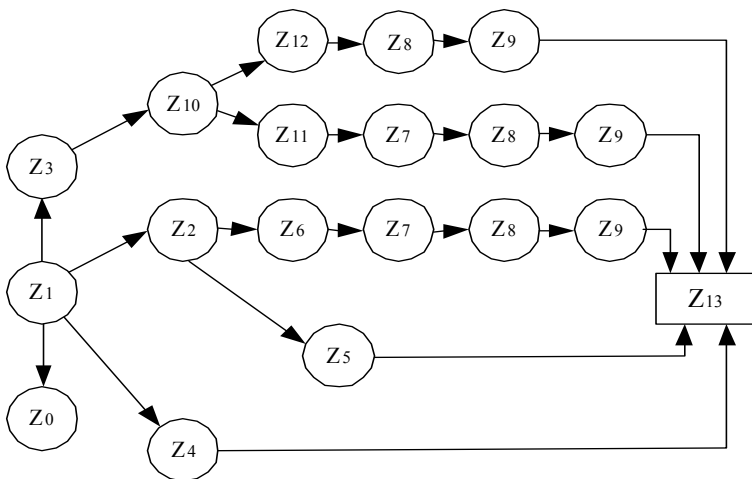


Рис.1.7. Граф процесса автоматического восстановления

В рассматриваемой модели приняты следующие обозначения:

- $z_0$  – система находится в состоянии отказа;
- $z_1$  – в системе возникла ошибка;
- $z_2$  – ошибка обнаружена аппаратными средствами контроля;
- $z_3$  – ошибка обнаружена программными средствами контроля;
- $z_4$  – ошибка маскирована средствами пассивной отказоустойчивости;

- $z_5$  – аппаратными средствами проводится многократное повторение операции, которое оказалось успешным (устранение сбоя);
- $z_6$  – многократное повторение операции оказалось неуспешным (устойчивый отказ);
- $z_7$  – проведение автоматической реконфигурации;
- $z_8$  – восстановление информации, которая должна быть записана в памяти процессора на момент обнаружения отказа (информация, соответствующая последней контрольной точке, записывается в дублирующий процессор);
- $z_9$  – возобновление вычислительного процесса с контрольной точки;
- $z_{10}$  – система находится в состоянии тестовой проверки с целью подтверждения устойчивого отказа;
- $z_{11}$  – подтверждение устойчивого отказа;
- $z_{12}$  – устойчивого отказа нет;
- $z_{13}$  – продолжение вычислительного процесса.

Очевидно, что рассмотренный ориентированный граф может отражать процесс восстановления как отдельного функционального модуля, который имеет дополнительное аппаратное и программное оборудование для резервирования элементов и путей обработки информации, так и всей системы.

Очевидно, что время перехода из одного состояния в другое является случайной величиной. После каждого отказа какого-либо элемента работоспособность системы восстанавливается (переход по одному из маршрутов от состояния  $z_1$  к состоянию  $z_{13}$ ) за некоторое случайное время  $\tau_B$  с функцией распределения  $F(\tau_B)$ .

Существует критическое время восстановления  $\tau_{кр}$  вследствие функционирования системы в реальном масштабе времени, превышение которого означает отказ системы. Интервалы времени, соответствующие каждому этапу процесса восстановления, могут быть определены исходя из быстродействия системы. Вероятности

разветвления по дугам 1-2 и 1 - 3 могут быть определены в соответствии с долей аппаратуры, контролируемой средствами аппаратного и программного контроля соответственно.

Наиболее важными количественными оценками процесса восстановления является:

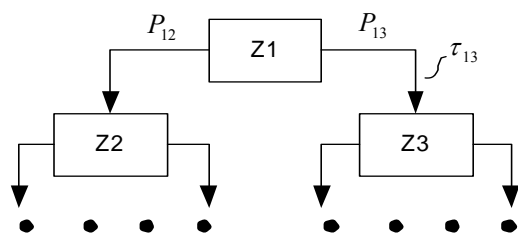
- минимальное время восстановления функционального модуля (ФМ);
- максимальное время восстановления ФМ;
- среднее время восстановления, определяемое как среднеарифметическое по всевозможным маршрутам графа из состояния  $z_1$  в состояние  $z_{13}$ ;
- дисперсия времени восстановления;
- функция (плотность) распределения времени восстановления.

На рис.1.8 показан один из вариантов имитационного моделирования процесса автоматического восстановления, который может быть реализован программно с помощью соответствующих алгоритмов [23].

Блоки 1-8 определяют ту или иную реализацию маршрута на вероятностном графе автоматического восстановления. Блок 11 определяет время восстановления  $k$ -го маршрута. Блок 12 определяет суммарное время успешных восстановлений и их количество за время моделирования, объем которого также фиксируется.

Процесс моделирования начинается с установки кода первой вершины графа (блок 1), который определяет в записанных массивах соответственно наименьшее значение переходной вероятности ( $p_{12}$  или  $p_{13}$  такие, что  $p_{12} + p_{13} = 1$ ), соответствующее этой вершине, в массиве I наименьший номер вершины графа, которая связана с текущей вершиной графа (в данном случае с  $z_1$ ), в массиве II номер второй (смежной) вершины, связанной с текущей. Пусть, например, блоком 6 сформирована непрерывная случайная величина  $r_i$  (из равномерного на  $[0,1]$  распределения) такая, что  $r_i \leq p_{13}$ , т.е. в

графе реализовалась дуга (переход), отвечающая переходу  $p_{13}$  к вершине  $z_3$ , которая становится текущей. Блоком 9 формируется непрерывная случайная величина с заданным законом распределения, которая определяет случайное время  $\tau_{13}$  перехода



между соседними состояниями (вершинами) графа, рис.1.9.

Рис.1.9. Переход между соседними состояниями

Номер вершины  $z_3$  передается в блок 1 и далее моделируется переход из третьей вершины к следующей вдоль реализуемого маршрута.

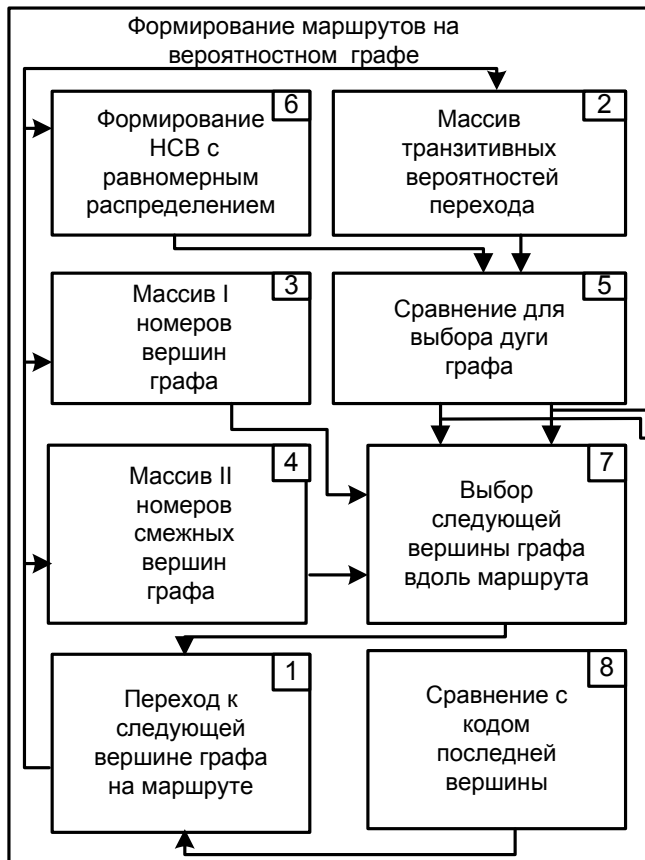
Если же в блоке 6 реализовалась случайная величина  $r_i$  такая, что  $r_i \leq p_{12}$ , то произойдет переход к вершине  $z_2$  с моделированием времени  $\tau_{12}$ , а в блоке 1 установится номер второй вершины. Далее процесс повторяется и реализуется конкретная реализация маршрута прохождения вероятностного графа.

После прохождения последней вершины графа (блок 8 сравнивает номера текущей и последней вершин графа) в блоке 1 снова устанавливается код первой вершины графа  $z_1$  и формируется новая реализация маршрута.

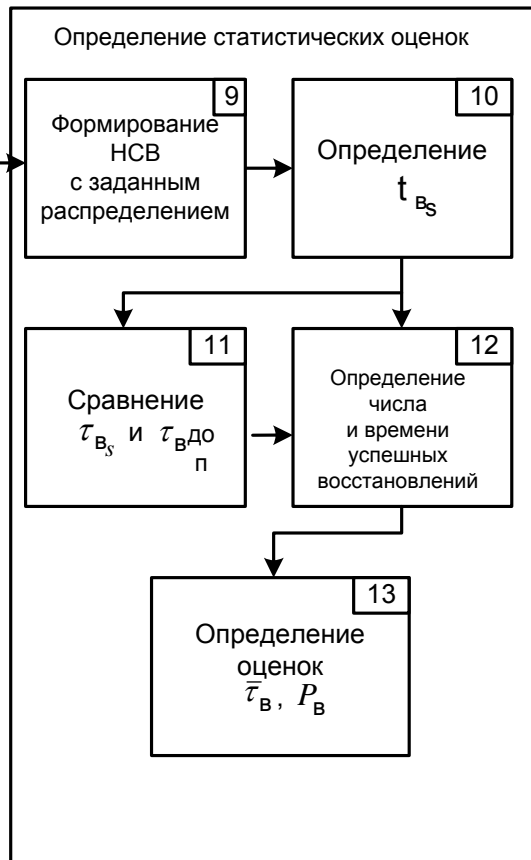
Блок 10 определяет время восстановления реализованного маршрута  $\tau_{вк}$ . Если это время меньше, чем заданное допустимое время  $\tau_{в доп}$ , то такая реализация считается успешной.

Результатом моделирования заданного объема являются оценки среднего времени восстановления  $\bar{\tau}_B$  и вероятности успешного восстановления  $P_B$ .

Отметим, что анализ процесса автоматического восстановления отказоустойчивой системы, представленной суперпозицией отдельных функциональных модулей, каждый из которых обладает собственными средствами восстановления, можно провести путем декомпозиции, т.е. моделирование проводится для каждого функционального модуля в отдельности. В этом случае может быть проведена сравнительная оценка качества процесса восстановления для каждого модуля с целью определения их потенциальных возможностей и/или возможного перераспределения аппаратных и программных средств контроля и восстановления.



50



## 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Тесная взаимосвязь между показателями надежности позволяет вычислить значение всех показателей, зная плотность распределения  $f(t)$  или функцию распределения  $F(t)$  наработки до отказа. Эти функции могут определяться на основании экспериментальных данных (результаты испытаний или эксплуатации), методами статистического моделирования или расчетным путем.

Как правило, при определении характеристик надежности обычно предполагают, что эти функции подчиняются одному из известных законов распределения, причем выбираются законы, характеризующиеся небольшим количеством числовых параметров. Ниже рассматриваются наиболее часто используемые распределения.

### 2.1. Биномиальное распределение

Это распределение определяет случайное число появления некоторого события в последовательности из независимых испытаний, когда вероятность появления этого события в одном испытании равна  $p$  (соответственно вероятность не появления события  $q = 1 - p$ ), при этом вероятность  $p$  остается неизменной при многократности повторения испытаний.

Очевидно, что число появления событий представляет собой случайную величину  $\mu$  с распределением вероятностей, которое называют биномиальным:

$$P\{\mu = k / n; p\} = P_n(k) = P_{k,n} = \\ = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Например, если вероятность отказа системы управления в течении некоторого времени  $T$  равна 0,01 ( $p = 0,01$ ), то вероятность отказа ровно трех систем из 10 находящихся в эксплуатации равна:

$$P\{k = 3/10; 0,1\} = P_{3,10} = \frac{10!}{3!7!} 0,01^3 0,99^7 \approx 0,112 \cdot 10^{-3}.$$

В тех случаях, когда требуется определить вероятность того, что событие появится не меньше  $m$  раз при  $n$  испытаниях, используется соотношение

$$R_{m,n} = \sum_{k=m}^n P_{k,n} = \sum_{k=m}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad m \geq \frac{n+1}{2}.$$

В случае, когда определяется вероятность того, что событие появится меньше, чем  $m$  раз:

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad m < \frac{n+1}{2}.$$

В случае, когда определяется вероятность того, что событие появится хотя бы один раз (т.е. не меньше чем один раз):

$$R_{1,n} = 1 - P_{0,n} = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n.$$

**Пример.** Вероятность отказа канала системы управления за некоторое время  $T$  равна  $p = 0,01$ . Для повышения надежности введено два идентичных канала ( $n = 3$ ), работающих параллельно. Система выходит из строя, когда отказывают все три канала. Вероятность этого события равна:

$$P_{3,3} = C_3^3 p^3 q^0 = p^3 = 10^{-6}.$$

Тогда вероятность безотказной работы системы равна:

$$P = 1 - P_{3,3} = 1 - 10^{-6} = 0,9_6.$$

Вероятность того, что количество наступлений события лежит в пределах от  $k_1$  до  $k_2$  определяется выражением:

$$\begin{aligned} P_n(k_1 \leq k \leq k_2) &= P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2) = \\ &= \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P(0 \leq k \leq k_2) - P(0 \leq k \leq k_1),$$

а вероятность

$$P_n(0 \leq k \leq m) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$



Известно, что значения функции биномиального распределения  $P\{\mu \leq m/n; p\}$  в целочисленных точках  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  совпадают со значениями функции В – распределения  $I_{1-p}(n-m, m+1)$ :

$$\begin{aligned} P\{\mu \leq m/n; p\} &= \sum_{k=0}^m P_n(k) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= I_{1-p}(n-m, m+1), \end{aligned}$$

где  $I_p(a, b)$  – функция В – распределения, определяемая как

$$\begin{aligned} I_p(a, b) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \\ I_p(a, b) &= 1 - I_{1-p}(b, a). \end{aligned}$$

Биномиальный закон распределения используется при оценке надежности элементов и сложных систем одноразового применения (космическая техника и вооружение), при описании функционирования систем массового обслуживания, при оценке надежности отказоустойчивых систем управления с использованием байесовских алгоритмов.

На рис.2.1 показан график огибающей дискретного биномиального распределения для значений  $n = 100$ ,  $p = 0,9$ .

Функция  $P_n(k)$  является функцией целочисленного аргумента  $k$ . Она достигает максимума при некотором значении  $k_0$  ( $k_0$  – наиболее вероятное число появлений события), зависящего как от  $n$ , так и от  $p$ .

Чтобы определить  $k_0$  рассмотрим отношение:

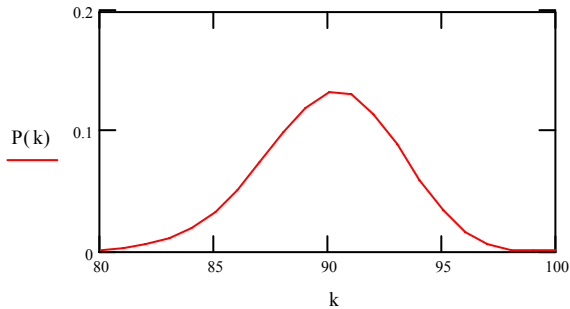
$$\begin{aligned} \frac{P_n(k)}{P_{n-1}(k)} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \\ &= \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{1-p} = \frac{(n+1)p - kp}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $[(n+1)p] = k_0$ , где  $[\cdot]$  – целая часть числа.  
 Если  $(n+1)p$  – целое, то

$$P_n(k_0) = P_n(k_0 - 1).$$

$$n := 100 \quad P := 0.9 \quad k := 80, 81..100$$

$$P(k) := \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k}$$



$$P(85) = 0.033 \quad P(90) = 0.132 \quad P(95) = 0.034$$

Рис.2.1. Огибающая биномиального распределения

Основные числовые характеристики биномиального распределения:

- математическое ожидание

$$m = \sum_{k=0}^n P_n(k)k = np,$$

- дисперсия

$$D = \sum_{k=0}^n P_n(k)k^2 - m^2 = npq.$$

Доверительный интервал  $[\underline{P}, \overline{P}]$  для параметра  $p$  определяется из выражений:

$$\begin{cases} I_P(k, n-k+1) = 1-\beta, \\ I_{\bar{P}}(k+1, n-k) = \beta, \end{cases}$$

где  $k$  – число испытаний, в которых событие произошло,  $\beta$  – заданный коэффициент доверия. При этом интервал  $[P, \bar{P}]$  соответствует доверительной вероятности  $\gamma = 2\beta - 1$ .

**Пример.** В 100 независимых испытаниях отказов системы не наблюдалось. Очевидно, что  $\underline{P} = 0$ . Тогда верхняя граница доверительного интервала для неизвестной вероятности отказа с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,9$  ( $\beta = 0,95$ ) определяется выражением

$$I_{\bar{P}}(k+1, n-k) = \beta.$$

В программном обеспечении Mathcad имеется функция, определяющая соответствующий квантиль  $B$  – распределения:

$$\bar{P} \rightarrow \text{qbeta}(\beta, k+1, n-k) \rightarrow \text{qbeta}(0.95, 1, 100) = 0.29513.$$

Таким образом, доверительный интервал равен

$$[\underline{P}, \bar{P}] = [0, 0.29513].$$

## 2.2. Отрицательный биномиальный закон

Описывает распределение числа испытаний до  $k$  – го появления события (включая последнее испытание):

$$P\{v(k) = x\} = C_{x-1}^{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, \dots$$

Здесь  $x$  – число испытаний, при котором впервые осуществилось заданное число появления события.

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание

$$m = \frac{k}{p},$$

- дисперсия

$$D = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

Модель отрицательного биномиального распределения часто применяется в задачах оптимального резервирования элементов,

при определении долговечности системы, имеющей  $k - 1$  резервных (автоматически подключающихся) элементов.

### 2.3. Распределение Пуассона

Это распределение порождается следующим образом. Некоторые события приходят в случайные моменты времени, непрерывно распределенные по оси времени. Последовательность таких событий представляет собой поток событий. При этом факт наступления события в данном эксперименте (испытании) не зависит от того, сколько раз и в какие моменты времени оно осуществлялось в прошлом, и не влияет на будущее, а вероятность  $p$  появления одного события в течение бесконечно малого промежутка времени  $(t, t + \Delta t)$  также бесконечно малая величина порядка  $\Delta t$ . Кроме того, вероятность появления больше одного события в течение интервала  $(t, t + \Delta t)$  также бесконечно малая величина по сравнению с  $\Delta t$ . Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения, когда вероятность  $p$  в единичном эксперименте очень мала, и число экспериментов  $n$ , проводимых в единицу времени, достаточно велико ( $p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ), так что произведение  $np$  стремится к некоторой постоянной величине  $\lambda$  ( $np \rightarrow \lambda$ ). Именно поэтому закон Пуассона называется законом редких событий.

Очевидно, что число событий, появляющихся в течение любого интервала времени  $(t_0, t)$ , представляет собой дискретную случайную величину  $X$  с возможными значениями  $0, 1, 2, \dots$ , т.е. для интервала времени  $(t_0, t)$  имеется счетное множество элементарных событий: ни одного в этом интервале, одно, два и т.д. Обозначим вероятность того, что  $X$  примет значение  $m$  как  $P_m(t_0, t) = P_m(t)$ , т.е.

$$P\{X = m\} = P_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Определим эту вероятность следующим образом::

$$\begin{aligned}
P\{X = m\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n}{m!} \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \right] = \\
&= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$P\{X = m\} = P_m(t) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

т.е. распределение Пуассона числа  $X$  событий, появляющихся в течении данного интервала времени  $(t_0, t)$  зависит только от одного параметра  $\lambda$ .

Параметр  $\lambda$  интерпретируется как среднее число событий, происходящих в этом интервале в единицу времени.

Функция распределения Пуассона при целых положительных  $m$  определяется выражением

$$F(m, \lambda) = P\{X < m\} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda},$$

так что

$$P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = F(m+1, \lambda) - F(m, \lambda).$$

Для вычисления значений  $F(m, \lambda)$  в целочисленных точках  $m = 1, 2, \dots$  можно использовать соотношение

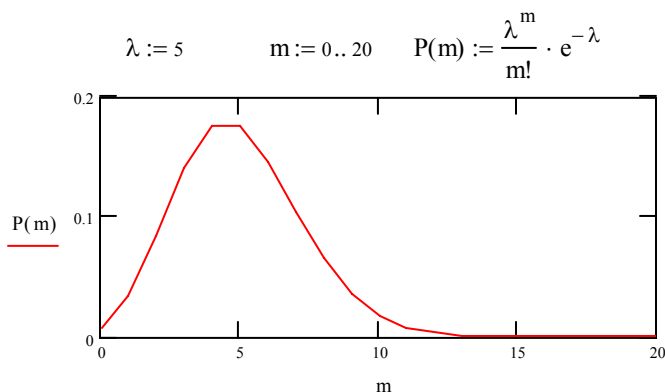
$$F(m, \lambda) = P\{X \leq m / \lambda\} = \sum_{i=0}^m \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = P(2\lambda, 2m+2),$$

где  $P(a, b)$  – интеграл вероятностей  $\chi^2$  – распределения с  $b$  степенями свободы.

Очевидно, что

$$P\{X = m / \lambda\} = P(2\lambda, 2m + 2) - P(2\lambda, 2m)$$

На рис.2.2. показана огибающая дискретного распределения Пуассона для различных значений  $m$  при  $\lambda = 5$ .



$$P(2) = 0.084 \quad P(3) = 0.14 \quad P(4) = 0.175 \quad P(5) = 0.175$$

Рис.2.2. Огибающая распределения Пуассона

Основные часовые характеристики

$$m = \sum_{k=0}^n P_n(k)k = np = \lambda, \quad D = \lambda.$$

Доверительный интеграл  $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$  для параметра определяется из решения уравнений:

$$\begin{cases} P(2\underline{\lambda}, 2X) = \beta \\ P(2\bar{\lambda}, 2X + 2) = 1 - \beta, \end{cases}$$

где  $X$  - случайная величина, подчиняющаяся распределению Пуассона,  $\beta$  – коэффициент доверия. При этом интервал  $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$  соответствует доверительной вероятности  $\gamma = 2\beta - 1$ .

**Пример.** При испытаниях 500 одинаковых систем с восстановлением отказавших в течение 100 часов было

зарегистрировано 5 отказов. Определить доверительные пределы для среднего значения числа отказов  $\mu$  за один час (интенсивность отказов) и за сто часов с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,9$ .

Предположим, что число отказов подчиняется распределению Пуассона

$$P\{X = k / \lambda = \mu t\} = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}, \quad k = 5,$$

определим доверительный интервал для параметра  $\lambda = \mu t$ :

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2} \chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2k), \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} \chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2k+2),$$

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2} 3,94 = 1,97; \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} 21,026 = 10,513$$

Таким образом интенсивность отказов находится в интервале

$$\frac{\underline{\lambda}}{5 \cdot 10^4} \leq \mu \leq \frac{\bar{\lambda}}{5 \cdot 10^4}, \quad 0,394 \cdot 10^{-4} \leq \mu \leq 2,103 \cdot 10^{-4}.$$

## 2.4. Гамма-распределение

Это распределение непрерывной случайной величины используется в задачах теории надежности и теории массового обслуживания. Случайная величина  $X$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ), если  $X$  распределена непрерывно с плотностью вероятности:

$$f(x / \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0,$$

и функцией распределения

$$F(x; \alpha, \beta) = \int_0^{\beta x} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t} dt$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма - функция, определяемая соотношением

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du, \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1), \alpha > 1.$$

Кроме того  $\Gamma(n) = (n-1)!$  для всех натуральных  $n$ .

Начальные моменты распределения определяется из соотношения

$$m_k = \beta^{-k} \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(\alpha)},$$

так что математическое ожидание ( $k = 1$ ) равно

$$m = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

а дисперсия (второй центральный момент при  $k = 2$ ) определяется соотношением

$$D = m_2 - m^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{(\alpha + 1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Параметр  $\alpha$  называют параметром формы, а параметр  $\beta$  – параметром масштаба. На рис. 2.3. показаны плотности гамма – распределения для  $\beta = 1$  и различных значениях параметра  $\alpha$ .

$f(\alpha = 2)$     $f1(\alpha = 3)$     $f2(\alpha = 5)$

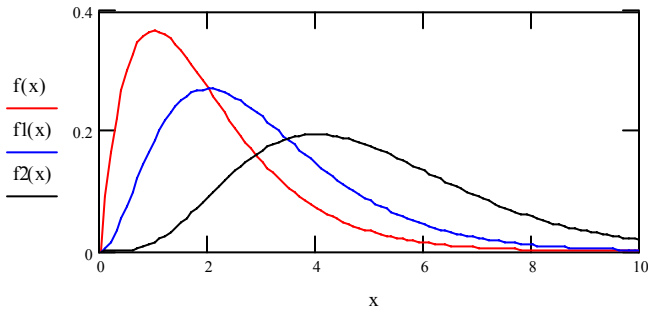


Рис.2.3. Плотности гамма-распределения

График плотности гамма – распределения с увеличением параметра формы приближается к нормальному.

Как известно, интенсивность случайной величины определяется выражением:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$



На практике, если  $1 - F(t)$  является функцией наработки, то  $\lambda(t)$  называется интенсивностью отказов.

Для гамма – распределения:

$$\lambda(t) = \frac{\beta(\beta t)^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}(\alpha)},$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\alpha) = \int_0^t \beta(\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

или

$$\lambda(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha) \int_{\beta t}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} dx}.$$

Интенсивность отказов для гамма – распределения является возрастающей функцией при  $\alpha > 1$  и убывающей при  $\alpha < 1$ .

В общем случае с вероятностной точки зрения гамма – распределение определяет время, необходимое для появления ровно  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) независимых событий, если они происходят с постоянной интенсивностью  $\beta$ . Гамма – распределение во многих случаях описывает распределение времени безотказной работы резервированных систем, при этом параметр  $\alpha$  имеет целочисленное значение и равен суммарному количеству объектов. Гамма – распределение очень часто используется как априорное распределение, сопряженное, например к функции правдоподобия выборки из экспоненциального распределения с неизвестным значением параметра.

Если  $\alpha = n$  – произвольное целое положительное число, то гамма – распределение представляет собой распределение Эрланга порядка  $n$  с параметром  $\beta$ .

## 2.5. Распределение Эрланга

Распределение Эрланга порядка  $n$  с параметром  $\beta$  имеет плотность распределения

$$f(t) = \beta \frac{(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x}$$

Распределение имеет следующие характеристики:

- математическое ожидание  $m = \frac{n}{\beta}$ ,
- дисперсия  $D = \frac{n}{\beta^2}$ ,
- интенсивность отказов (в случае, если наработка подчиняется распределению Эрланга)

$$\lambda(t) = \frac{\beta(\beta t)^{n-1}}{(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}}$$

Интенсивность отказов для распределения Эрланга является монотонно возрастающей функцией.

На рис. 2.4 показаны графики плотности распределения Эрланга.

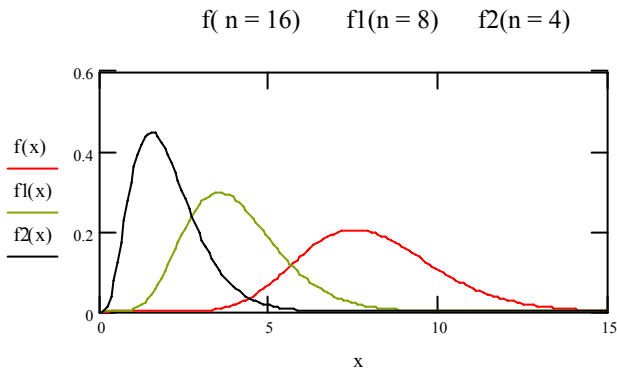


Рис.2.4. Плотности распределения Эрланга

Распределение Эрланга ( $k - 1$ ) – го порядка широко применяется в расчетах надежности систем управления. В [64] установлено, что при помощи данного распределения можно получить математическое описание случайной длительности

выполнения алгоритмов управления. Вычислительный процесс в системе можно рассматривать в виде так называемого простого процесса восстановления [63, 64], когда поступающий поток заявок является простейшим. Эти заявки хранятся в буферной памяти, по окончании обслуживания предыдущей заявки осуществляется переход к обслуживанию очередной хранящейся в очереди заявки, а длительность обслуживания заявки распределена по закону Эрланга.

## 2.6. Показательное (экспоненциальное) распределение

Это распределение является наиболее используемым, поскольку существенно упрощается расчет характеристик надежности за счет того, что анализируются «не стареющие» системы с экспоненциально распределенной наработкой (период нормальной эксплуатации, характеризующийся приблизительно постоянной интенсивностью отказов). Экспоненциальный закон (и только он) обладает тем важным свойством, что вероятность безотказной работы системы на данном временном интервале  $(t, t + \Delta t)$  не зависит от времени предшествующей работы  $t$ , а зависит только от длины интервала  $\Delta$ .

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

плотность распределения равна

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

среднее значение и дисперсия определяются как

$$m = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$D = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - m^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

интенсивность отказов равна

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

На рис.2.5 показаны график плотности распределения для значения  $\lambda = 0,001$ .

Показательному распределению подчиняются случайные длины интервалов между последовательными моментами наступления событий в пуассоновском потоке. Экспоненциальное распределение не подходит для описания наработки системы, если происходит много приработочных отказов или существенны явления старения, что приводит к значительному изменению интенсивности отказов.

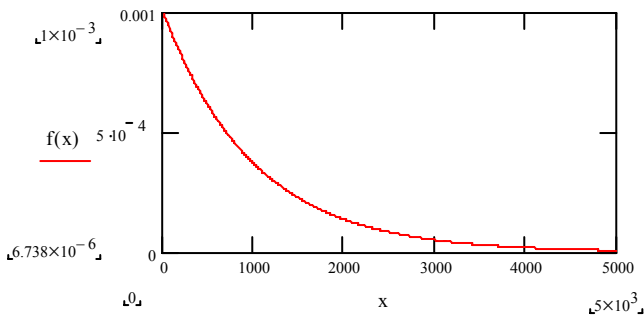


Рис.2.5. Плотность показательного распределения

С экспоненциальным законом хорошо согласуются законы распределения времени между отказами для сложных восстанавливаемых систем, состоящих из многих блоков. Это объясняется тем, что закон распределения интервалов между соседними событиями в потоке редких случайных событий, составленном из многих независимых потоков с любыми характеристиками, теоретически сходится к экспоненциальному [2].

Экспоненциальное распределение можно применять, если при эксплуатации объекта отсутствуют доминирующие процессы разрушения, приводящие к отказам.

Использование показательного закона очень часто позволяет получить оценку снизу для показателей надежности объектов, отказы и восстановления которых не подчиняются экспоненциальному закону. Например, это всегда справедливо для

стареющих объектов. Показательное распределение может использоваться и по отношению ко времени восстановления [46].

## 2.7. Распределение Вейбулла

Выразим вероятность безотказной работы через интенсивность отказов. Так как интенсивность отказов определяется выражением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

то с учетом того, что

$$f(t) = F'(t), \quad \bar{F}(t) = 1 - F(t), \quad F(t) = 1 - \bar{F}(t),$$

получаем

$$\lambda(t) = -\frac{d\bar{F}(t)}{dt} \frac{1}{\bar{F}(t)}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\int_0^t \frac{d\bar{F}(t)}{dt} \frac{1}{\bar{F}(t)} dt = -\int_0^t \frac{d\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} = -\ln \bar{F}(t),$$

откуда

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t) dt\right\}$$

или

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t) dt\right\}.$$

Таким образом, вид функции интенсивности  $\lambda(t)$  определяет функцию распределения  $F(t)$ . Как показывает экспериментальные данные в широком классе случаев функция  $\lambda(t)$  имеет характерный вид (убывание (приработка) – постоянство (период нормальной эксплуатации при низком уровне интенсивности) – возрастание (старение и износ)). Очевидно, что каждому периоду соответствует свой вид функции  $\lambda(t)$  и, следовательно, свой закон распределения.

Вот почему в теории надежности вводят степенную зависимость, описывающую поведение  $\lambda(t)$  :

$$\lambda(t) = \lambda_0 \alpha t^{\alpha-1},$$

при этом значения  $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$  соответствуют указанным выше периодам изменения  $\lambda(t)$ .

Подставляя зависимость  $\lambda(t)$ , получаем распределение

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda_0 \alpha t^{\alpha-1} dt\right\} = 1 - \exp\{-\lambda_0 t^\alpha\},$$

$$f(t) = F'(t) = \alpha \lambda_0 t^{\alpha-1} \exp\{-\lambda_0 t^\alpha\}, \quad t \geq 0,$$

которое называется распределением Вейбулла (частный случай  $\alpha = 1$  соответствует показательному распределению).

Основные числовые характеристики:

- среднее значение  $m = (\lambda_0)^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ ,
- дисперсия  $D = (\lambda_0)^{-\frac{2}{\alpha}} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$ ,
- интенсивность отказов  $\lambda(t) = \left[ t(\lambda_0)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha-1} \alpha(\lambda_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

При  $\alpha > 1$  распределение Вейбулла характеризуется возрастающей во времени интенсивностью отказов. Такое распределение удобно использовать для оценки надежности быстро стареющих объектов, в частности, при ускоренных испытаниях. Непрерывное распределение Вейбулла можно применять для описания времени между сбоями устройств [63]. При этом коэффициент формы  $\alpha$  меньше единицы ( $\alpha = 0,6 - 1$ ).

На рис.2.6 показаны графики плотностей распределения для различных значений  $\alpha = 2$  и  $\alpha = 2,5$  при  $\lambda_0 = 10^{-4}$ . При  $\alpha = 1$

распределение Вейбулла представляет собой экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda_0$ .

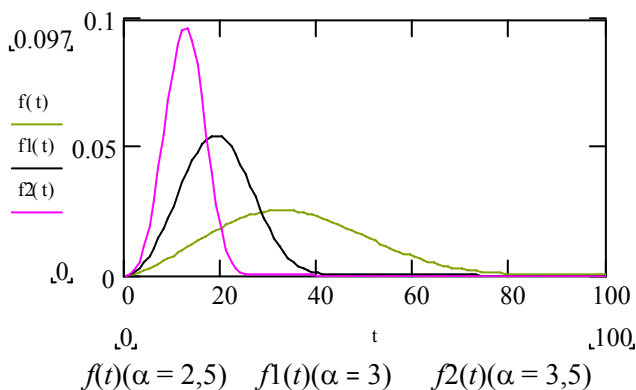


Рис.2.6. Плотности распределения Вейбулла

Распределение Вейбулла часто принимается в качестве модели для времени безотказной работы некоторых элементов, если интенсивность их отказов изменяется во времени.

Частным случаем распределения Вейбулла является распределение Релея (при  $\alpha = 2$  и  $\lambda_0 = \frac{1}{2\sigma^2}$ ), для которого интенсивность отказов – линейная возрастающая функция времени

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sigma^2} t.$$

Во всех случаях подчеркивается, что распределение Релея происходит от нормального. Функция и плотность распределения записываются в виде:

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma^2} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

На рис.2.7 показаны графики плотности распределения для различных значений  $\sigma$ .

Распределение Вейбулла является одним из возможных предельных распределений для минимума независимых случайных

величин [16, 44]. В частности, оно является одним из предельных распределений наработки последовательной системы.

$$f(t)(\sigma = 3) \quad f(t)(\sigma = 6) \quad f(t)(\sigma = 9)$$

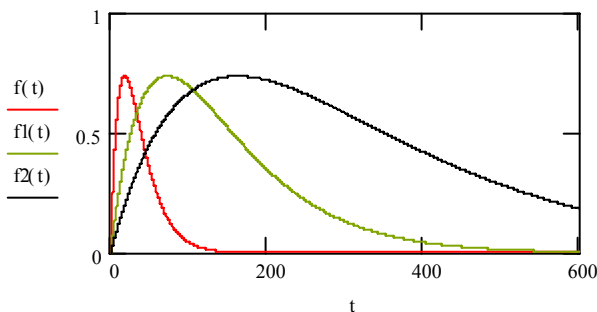


Рис.2.7. Плотности распределения Релея

При статистическом оценивании наработки, имеющей распределение Вейбулла, часто оказывается полезной следующая зависимость: если наработка  $X$  имеет распределение Вейбулла с параметрами  $(\lambda_0)^{\frac{1}{\alpha}}$  и  $\alpha$ , то величина  $Y = \ln X$  имеет функцию распределения

$$P\{Y \leq t\} = 1 - \exp\left\{-\exp\left\{\frac{t - \xi}{\delta}\right\}\right\},$$

где  $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln \lambda_0$ ,  $\delta = \frac{1}{\alpha}$ .

Функция распределения такого вида называется предельным распределением первого типа с параметрами  $\xi$  и  $\delta$ .

## 2.8. Бета-распределение

Это распределение описывает случайные величины, ограниченные в определенном диапазоне, и в зависимости от конкретных значений его параметров может принимать самые



различные формы. Бета-распределение является «самовоспроизводящимся» распределением и может быть использовано при оценивании по алгоритму Байеса. Кроме того, это распределение обладает еще одним очень важным свойством: при изменении случайной величины в ограниченном диапазоне  $[\alpha, \beta]$  при  $\alpha \geq 0, \beta \leq 1$  максимум энтропии соответствует бета – распределению. В частности, при пользовании алгоритма Байеса аппроксимация априорного распределения бета – распределением приводит к получению «наихудших» оценок, т.е. к тому, что полученные оценки не будут завышенными.

Двупараметрический закон бета – распределения обладает весьма высокой гибкостью и общностью: в частности, через функцию бета – распределения могут быть вычислены такие часто используемые распределения как  $F$  – распределение Фишера, биномиальное, отрицательное – биномиальное и др.

Функция бета – распределения  $I_x(\alpha, \beta)$  зависит от двух положительных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  и определяется на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ :

$$I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt,$$

где  $B(\alpha, \beta)$  –  $B$  – функция Эйлера, определяемая соотношением:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Плотность распределения:

$$f(x/\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}.$$

Основные числовые характеристики бета – распределения:

- математическое ожидание  $m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$

- дисперсия  $D = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$

На рис.2.8, 2.9 показаны графики плотностей распределения для различных значений  $\alpha$  и  $\beta$ .

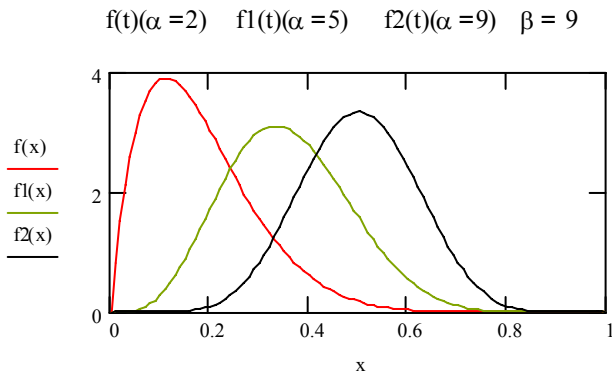


Рис.2.8. Плотности бета – распределения для различных  $\alpha$

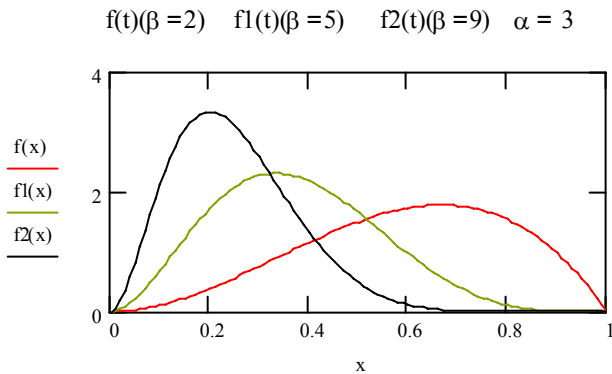


Рис.2.9. Плотности бета – распределения для различных  $\beta$

В частном случае  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  бета – распределения представляет собой равномерное распределение случайной величины на отрезке  $[0,1]$ .

## 2.9. Равномерное распределение

Случайная величина считается распределенной равномерно на отрезке  $[a, b]$ , если ее функция распределения определяется выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

а плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & x < a, x > b. \end{cases}$$

В теории надежности равномерное распределение используется при описании априорного распределения параметров, характеризующих надежность технической системы в байесовских алгоритмах в условиях полного отсутствия априорной информации об этом распределении.

Числовые характеристики:

- математическое ожидание

$$m = \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2},$$

- дисперсия

$$D = \int_a^b x^2 f(x)dx - m^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

## 2.10. Усеченное нормальное распределение

Так как наработка до отказа является неотрицательной величиной, то проводится усечение нормального распределения (в точке  $t = 0$ ), так что область возможных значений случайной величины  $T$  есть  $(0, \infty)$ . Функция и плотность распределения в этом случае записываются в виде:

$$F(t) = \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx, \quad t > 0$$

$$f(t) = \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где коэффициент  $c$  выбирают из условия, что площадь под кривой  $f(t)$  равна единице:

$$c = \frac{1}{1 - \Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right)},$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция стандартного (нормированного) нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание

$$\tau = m + \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right\},$$

- дисперсия

$$\begin{aligned} D &= \sigma^2 - \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ m + \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right\} \right] \exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right\} = \\ &= \sigma^2 - \frac{c\sigma\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Интенсивность отказов возрастает и при  $t \rightarrow \infty$  становится линейной функцией:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)} \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

На рис.2.10 показаны графики плотностей распределения для различных значений  $m$  при  $\sigma = 1$ .

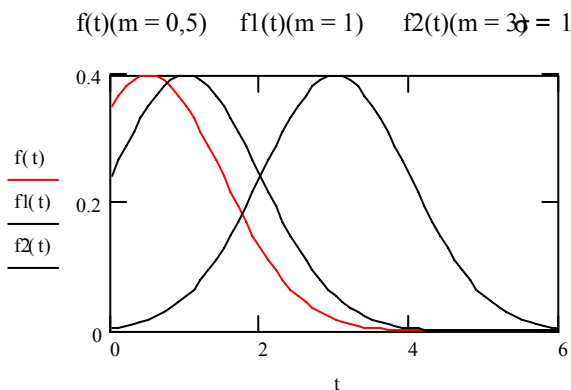


Рис.2.10. Плотности усеченного нормального распределения

Если коэффициент  $c \rightarrow 1 \left( \frac{m}{\sigma} \rightarrow \infty \right)$ , то характеристики усеченного нормального распределения стремятся к характеристикам нормального распределения. Практически совпадение достаточно близкое при  $c > 3$ . Поэтому на практике усечение распределения целесообразно применять при  $m < 3\sigma$ .

Следует подчеркнуть, что для усеченного нормального распределения параметр  $m$  уже не имеет физического смысла среднего значения случайной величины.

Нормальное распределение может использоваться при исследовании надежности объектов, отказы которых обусловлены действием какого-то одного доминирующего фактора.

### 2.11. Логарифмически нормальное распределение

Если величина  $Y = \ln X$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ , то случайная величина  $X$  распределена логарифмически нормально. Функция и плотность распределения записываются в виде:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{\ln x} \exp\left\{-\frac{(t - \ln m)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = \Phi\left\{\frac{\ln x - m}{\sigma}\right\},$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание

$$M[X] = M = \exp\left\{m + \frac{\sigma^2}{2}\right\},$$

- дисперсия

$$D[X] = D = \exp\{2m + \sigma^2\} \left\{ \exp(\sigma^2) - 1 \right\}.$$

На рис.2.11 показаны графики плотности распределения для различных значений  $m$  (при  $\sigma = 1$ ).

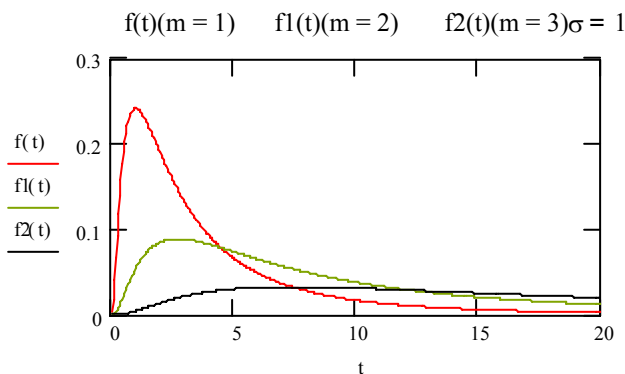


Рис.2.11. Плотности логарифмически нормального распределения

Интенсивность отказов определяется выражением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

и является не монотонной функцией.

Логарифмически нормальное распределение мало пригодно для описания распределения наработки, но играет важную роль при определении распределения времени восстановления, при определении долговечности системы, которая эксплуатируется в режиме износа и старения.

## 2.12. Обратное гауссовское распределение

Неотрицательная случайная величина имеет обратное гауссовское распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , если ее функция и плотность распределения имеют вид:

$$F(t) = \Phi\left[\frac{\beta t - \alpha}{\sqrt{t}}\right] + e^{2\alpha\beta} \Phi\left[-\frac{\alpha + \beta t}{\sqrt{t}}\right],$$

$$f(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\left[\frac{(\alpha - \beta t)^2}{2t}\right]\right\},$$

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание  $M[X] = m = \frac{\alpha}{\beta}$ ,
- дисперсия  $D[X] = D = \frac{\alpha}{\beta^2}$

На рис.2.12 показаны графики плотности распределения для различных значений  $\beta$  при  $\alpha = 1$ .

Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  не монотонна при этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \frac{\beta}{2}.$$

Если ввести параметры  $\mu$  и  $\theta$  как

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \theta = \frac{1}{\alpha^2},$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\theta\mu}},$$

то плотность обратного гауссовского распределения может быть записана в виде

$$f(t; \theta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3 \theta}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\mu^2 t \theta}\right\},$$

а функция распределения определяется выражением

$$F(t; \theta, \mu) = \int_0^t f(x; \theta, \mu) dx = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3 \theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2 x \theta}\right\} dx.$$

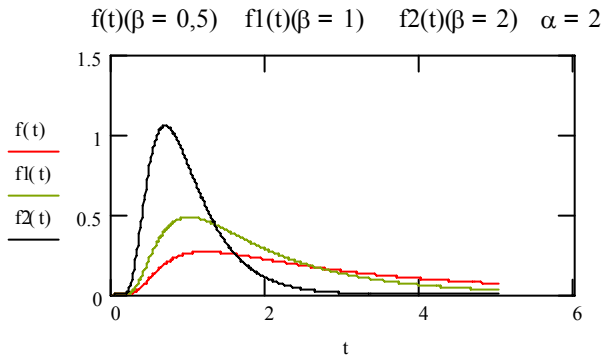


Рис.2.12. Плотность обратного гауссовского распределения

Обратное гауссовское распределение целесообразно использовать в качестве распределения наработки, когда работоспособность системы зависит от нормально распределенного параметра, изменения которого во времени приводит к постепенному отказу.

### 2.13.DN – распределение

Если ввести новые параметры  $a$  и  $v$  такие, что

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{av}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{a}}{v},$$

то рассмотренные выше функции и плотность обратного гауссовского распределения принимают вид

$$F(t; a, v) = \Phi\left[\frac{at-1}{v\sqrt{at}}\right] + e^{\frac{2}{v^2}} \Phi\left[-\frac{at+1}{v\sqrt{at}}\right],$$



$$f(t; a, v) = \frac{1}{vt\sqrt{2\pi at}} \exp\left\{-\left[\frac{(1-at)^2}{2v^2 at}\right]\right\},$$

где  $a$  – средняя скорость процесса изменения определяющего параметра, характеризующего надежность элемента (блока, системы),  $v = \frac{b}{\sqrt{a}}$  – коэффициент вариации процесса,  $b^2$  –

средняя скорость изменения дисперсии определяющего параметра. Коэффициенты  $a$  и  $b$  являются коэффициентами стохастического дифференциального уравнения первого порядка [23, 58, 60,]:

$$dx(t) = adt + bd\xi(t).$$

Диффузия условной переходной вероятности  $f(t_0, x_0; t, x)$  описывается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь  $f(t_0, x_0; t, x)$  – плотность вероятности перехода из состояния  $x_0$  в момент времени  $t_0$  в состояние  $x$  в момент  $t$ .

Тогда плотность распределения времени до первого отказа определяется как [58]

$$f(t) = - \int_{-\infty}^1 \frac{\partial f(t_0, x_0; t, x)}{\partial t} dx,$$

где  $x = 1$  соответствует нормированному значению определяющего параметра, достигшего верхней границы допустимой области, так что

$$f(t; a, v) = \frac{1}{vt\sqrt{2\pi at}} \exp\left\{-\left[\frac{(1-at)^2}{2v^2 at}\right]\right\}.$$

Распределение  $f(t)$  соответствует немонотонному марковскому процессу и называется DN – распределением (Diffusive Nonmonotonic). DN – распределение является математической моделью отказов изделий электронной техники [60].

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание времени до отказа

$$M[T] = \frac{1}{a},$$

- дисперсия времени до отказа:

$$D[T] = \frac{v^2}{a^3}.$$

На рис.2.13, 2.14 показаны графики DN – распределения для различных значений  $a$  при  $v = 1$  и  $v = 0,5$ .

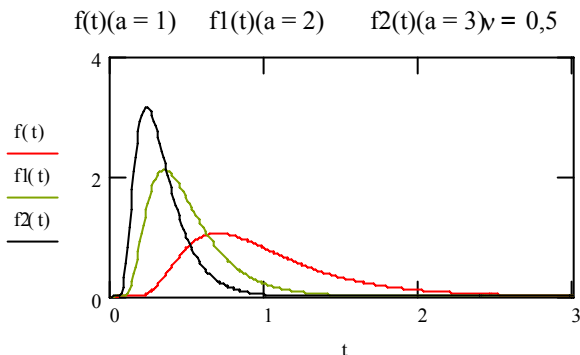


Рис.2.13. Плотности DN– распределения при  $v = 0,5$

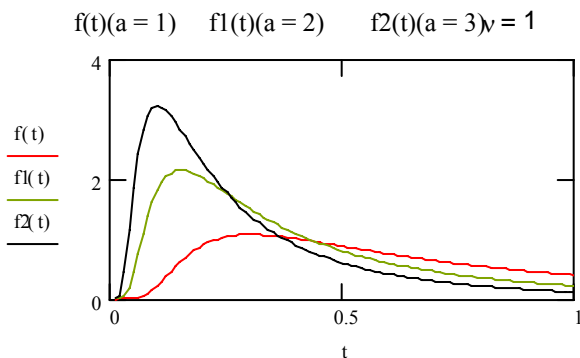


Рис.2.14. Плотности DN– распределения при  $v = 1$

## 2.14. ДМ – распределение

Это распределение описывает системы, содержащие электромеханические и механические элементы [50, 60]. Механические процессы деградации (механический износ) аппроксимируются марковским процессом с монотонными реализациями. ДМ – распределение (Diffusive Monotonik) имеет:

- функцию распределения

$$F(t) = \Phi \left[ \frac{at-1}{v\sqrt{at}} \right],$$

- плотность распределения

$$f(t) = \frac{1+at}{2vt\sqrt{2\pi at}} \exp \left\{ -\frac{(1-at)^2}{2v^2 at} \right\}.$$

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание  $M[T] = \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{v^2}{2} \right],$
- дисперсия  $D[T] = \frac{v^2}{a^2} \left[ 1 + \frac{5v^2}{4} \right].$

На рис.2.15 показан график ДМ – распределения для различных значений  $a$  при  $v = 0,5$ .

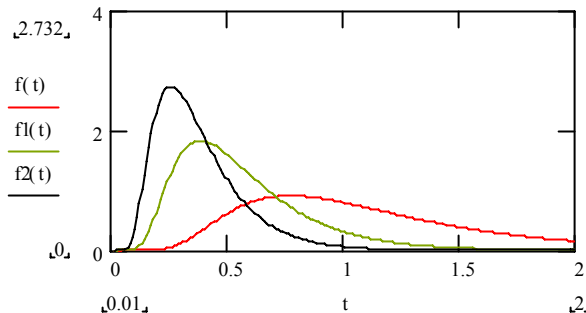


Рис.2.15. Плотности ДМ– распределения при  $v = 0,5$

### 3. БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НАДЕЖНОСТИ

### 3.1. Концепция байесовской оценки

Очевидно, что информационное сопровождение как этапа испытаний, так и этапа эксплуатации помимо решения ряда специфических задач обеспечивает регистрацию и накопление статистических данных, характеризующих поведение исследуемого объекта. Обработка статистических данных дает необходимую информацию для получения оценки некоторого параметра надежности (в общем случае многомерного).

Теорема Байеса дает апостериорную оценку параметра надежности с использованием эмпирических данных, а также априорной информации в виде некоторого закона распределения. Что касается априорных вероятностей, то не существует такого понятия, как «корректный выбор» априорной плотности  $h(\theta)$ . Действительный выбор  $h(\theta)$  зависит от индивидуального представления в свете информации и опыта, которые имеются в распоряжении исследователя в данный момент времени, позволяющие количественно оценить априорную информацию. Например, разработчик системы управления может указать верхний и нижний пределы, между которыми, по его мнению, находится значение интересующего параметра  $\theta$ .

Сущность байесовского оценивания заключается в следующем.

Пусть функция правдоподобия выборки (будем рассматривать одномерный параметр  $\theta$ ) –  $f(T/T_1, \dots, T_n)$ , априорная плотность распределения –  $h(\theta)$  и апостериорная плотность  $f\left(\theta/\vec{\tau}\right)$ ,  $\vec{\tau}$  – вектор экспериментальных данных.

Если априорная плотность  $h_1(\theta)$  имеет более сконцентрированный вид, чем функция правдоподобия, то тогда эти функции перемножаются для получения апостериорной плотности, априорная плотность доминирует и, следовательно, апостериорная плотность выглядит аналогично априорной, рис.3.1,а.

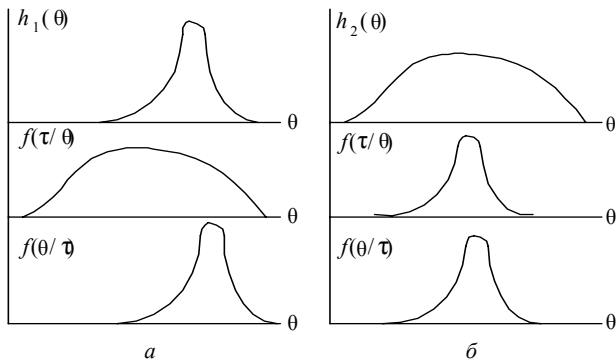


Рис.3.1. Получение апостериорной плотности распределения

Все это отражает тот факт, что единственное довольно неточное наблюдение не может оказывать большого воздействия на априорные представления, имеющие довольно основательные подтверждения вследствие своей высокой концентрации.

Если же функция правдоподобия имеет более сконцентрированный вид, чем априорная плотность  $h_2(\theta)$  (рис.3.1,б), то апостериорная плотность  $f(\theta/\tau)$  по виду приближается к функции правдоподобия и отражает тот факт, что если априорный представления довольно размыты, то даже несколько неточные наблюдения будут вызывать радикальный пересмотр априорных представлений.

Все это иллюстрирует фундаментальный принцип байесовского подхода: данные не создают представлений, они скорее видоизменяют существующие представления. В результате появления данных наблюдений происходит сближение видов обоих распределений, отражающих представления инженеров. Это движение в направлении согласования данных становится ущу более заметным, когда увеличивается объем экспериментальной информации. Весьма важным положением для байесовских методов является теорема Мизеса - Бернштейна о том, что если априорная плотность вероятности параметра непрерывна, то по

мере возрастания числа наблюдений (дополнительных испытаний) апостериорное распределение стремится к пределу, не зависящему от априорного распределения.

При использовании байесовской методологии необходимо знать функцию потерь  $W(\theta, \theta^*)$ , которая учитывает возможные потери в зависимости от ошибок при принятии неверных решений относительно параметра  $\theta$ . Байесовскую оценку параметра надежности  $\theta$  можно получить в результате минимизации апостериорного риска по всем возможным значениям параметра. Апостериорный риск есть среднее значение функции потерь при использовании всякой реализовавшейся выборки, элементы которой  $y_1, y_2, \dots, y_n$  распределены в соответствии с функцией правдоподобия.

Так как вследствие случайности экспериментального материала суждения о состояниях объекта также случайны, то максимум того, что можно сделать, – это построить условное распределение вероятностей этих суждений при условии задания той или иной выборки экспериментальных данных. Это является следствием известного положения, что распределение вероятностей случайных величин является единственной и предельно полной характеристикой этих величин. Такие условные вероятности  $f(y, \theta)$  называются апостериорными распределениями, так как их можно определить лишь после того, как были получены экспериментальные данные. Для того, чтобы найти явные выражения этих функций используется теорема Байеса, которая с помощью преобразования

$$f(\theta, y) = \frac{h(\theta)f(y, \theta)}{\int_{\Theta} h(\theta)f(y, \theta)d\theta}$$

позволяет получить апостериорное распределение  $f(\theta, y)$ , являющееся условным по отношению к априорной информации и эмпирическим данным. Знаменатель представляет собой некоторое число, постоянное для данной задачи и не зависящее от состояний объекта. Поэтому отношение

$$\beta = \frac{1}{\int_{\Theta} h(\theta) f(y, \theta) d\theta}$$

определяется из условий нормировки апостериорного распределения.

Для квадратичной функции потерь  $W(\theta, \theta^*) = (\theta - \theta^*)^2$  байесовская оценка равна апостериорному среднему [17, 21]:

$$\theta^* = \int_{\Theta} \theta f(\theta / y) d\theta,$$

а погрешность расчета оценивается с помощью дисперсии

$$D(\theta^*) = \int_{\Theta} \theta^2 f(\theta / y) d\theta - (\theta^*)^2.$$

Оценку  $\theta^*$  называют оценкой среднего риска, так как в этом случае вероятности значений  $\theta$ , больших или меньших  $\theta^*$ , одинаковы, т.е. апостериорное математическое ожидание в качестве оптимальной байесовской оценки не дает предпочтения ошибкам в зависимости от их величины. Эти соображения справедливы для любых априорных распределений параметра надежности, а также распределений самой измеряемой случайной величины.

Заметим, что байесовская оценка  $\theta^*$  определяется выборкой  $\tau$ , априорной плотностью  $h(\theta)$  и видом распределения  $f(x, \theta)$ , которое задает функцию правдоподобия.

Нижняя граница байесовского доверительного интервала  $\underline{\theta}$  скалярного параметра  $\theta$  определяется из уравнения

$$\int_{\underline{\theta}} f(\theta / y) d\theta = \gamma,$$

где  $\gamma$  – доверительная вероятность. Поскольку выбор не единственный, то необходимо обеспечить минимальную длину интервала для однозначного решения.

Как видно из определения, классический и байесовский доверительные интервалы имеют различную трактовку.

Классический доверительный интервал является случайным и с заданной доверительной вероятностью накрывает неизвестный параметр. Байесовский доверительный интервал имеет строгие границы, определяемые апостериорной плотностью и доверительной вероятностью  $\gamma$ .

Таким образом можно сделать следующий вывод. Информационная сущность обработки результатов испытаний становится до конца понятной в рамках статистической теории, в которой получаемая информация определяется разностью энтропий [21, 43] распределений вероятностей априорных и апостериорных (после испытаний) суждений о возможности системы. Тем самым признается случайность суждений, которая является прямым следствием случайности измерений. Если информации, содержащейся в экспериментальном материале, оказывается недостаточно, то необходимо либо уменьшить желаемую детальность суждений об объекте управления, либо увеличить информативность экспериментального материала, привлекая комплексирование методов и учитывая дополнительную априорную информацию, полученную из независимого эксперимента.

Априорная информация – один из факторов, обуславливающих эффективность обработки: при ее отсутствии измерения невозможно, при наличии в максимальном объеме (известном значении оцениваемой характеристики) – ненужно. Априорная информация определяет достижимую точность измерений и их эффективность. Хотя использование априорной информации при обработке данных является затруднительным (поскольку она с трудом поддается формальному описанию), однако ее полезность и необходимость не вызывает сомнений. Впрочем, «априорная опасность», возникающая из-за отсутствия априорных данных о статистических характеристиках в важных инженерных задачах, часто преувеличивается, так как исследователь на основании накопленного опыта в проектировании и испытании подобных систем управления уверенно оценивает максимальные случайные ошибки и некоторые статистические характеристики.



Если априорное распределение параметра  $\theta$  принадлежит такому семейству распределений, что при любом объеме экспериментальной информации (повторная выборка) апостериорное распределение параметра  $\theta$  также принадлежит этому же семейству, то такое семейство распределений с этим свойством называется замкнутым относительно процесса выбора или сопряженным семейством распределений. Такие семейства еще называют «самовоспроизводящимися», так как после коррекции на основе экспериментальных данных в соответствии с теоремой Байеса вид закона распределения не меняется.

В этом случае происходит существенное упрощение байесовских алгоритмов, которые могут быть записаны в рекуррентной форме, наиболее удобной для проведения расчетов.

В большинстве практических случаев априорные вероятности допустимо считать медленно меняющимися функциями состояния объекта по сравнению с аналогичными зависимостями для функций правдоподобия.

Часто можно заранее считать возможные состояния объекта равновероятными или почти равновероятными, что свидетельствует о весьма скудной априорной информации о состояниях объекта.

Вычислительная реализуемость байесовской процедуры показана на рис.3.2.

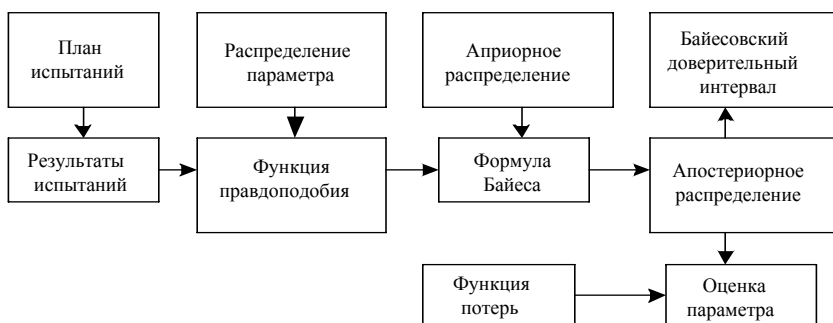


Рис.3.2. Общая схема байесовского алгоритма

*Формирование функции правдоподобия выборки.* Функции  $f(y/\theta)$  также имеют смысл условных плотностей распределения вероятностей экспериментальных данных при условии, что осуществилось одно из состояний объекта. Эти плотности, называемые функциями правдоподобия того или иного состояния объекта, определяются по заданной модели экспериментального материала (заданный план испытаний), используя законы теории вероятностей.

Выборка измерений может быть сформирована следующим образом. В качестве промежутка времени  $t_k$  можно считать время непрерывного полета самолета. Если в полете произошел отказ, то фиксируется время  $t_i^\circ$ . Если отказ не произошел, то фиксируется время полета  $t_i$  (цензурирование выборки). Вся информация накапливается в банке данных как по каждому самолету, так и по нескольким самолетам, оборудованным одинаковыми системами управления.

Таким образом, выборка измерений задается вектором

$$\vec{\tau} = \left( \vec{t}^\circ, \vec{t} \right) = \left( t_1^\circ, t_2^\circ, \dots, t_d^\circ, t_1, t_2, \dots, t_q \right), \quad d + q = n,$$

где  $n$  – объем измерений на текущий момент испытаний или контроля.

Плотность вероятности совместного появления результатов  $t_1^\circ, t_2^\circ, \dots, t_d^\circ$  при некотором значении параметра  $\theta$  будет равна произведению плотностей вероятностей элементов выборки, т.е.

$$f(t_1^\circ, t_2^\circ, \dots, t_d^\circ / \theta) = \prod_{i=1}^d f_i(t_i^\circ / \theta).$$

Так как вероятность события  $P\{X < x\} = F(x)$ , а вероятность  $P\{X > x\} = 1 - F(x)$ , то очевидно, что вероятность превышения величин  $t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{d+q}$  или  $t_1, t_2, \dots, t_q$  будет соответственно равна

$$F(t_1, t_2, \dots, t_q / \theta) = \prod_{j=1}^q [1 - F_j(t_j / \theta)].$$

Другими словами, оставшиеся  $n - d = q$  испытаний прекращены до отказа через время  $t_j$ . Вероятность этих событий определяется как

$$\prod_{j=1}^q \int_{t_j}^{\infty} f_j(t_j / \theta) dt = \prod_{j=1}^q [1 - F(t_j / \theta)],$$

т.е. отказ не фиксирован моментом  $t_j^\circ$  и может произойти в любое время от  $t_j$  до  $\infty$ .

Функция правдоподобия, пропорциональная вероятности реализации события  $\left( \vec{t}^\circ, \vec{t} \right)$  может быть записана как

$$f\left( \vec{\tau} / \theta \right) = \prod_{i=1}^d f_i(t_i^\circ / \theta) \prod_{j=1}^q [1 - F_j(t_j / \theta)].$$

Таким образом, функция  $f\left( \vec{\tau}, \theta \right)$  задает вероятность получения при извлечении выборки объема  $n$  именно наблюдений  $\left( t_1^\circ, \dots, t_d^\circ, t_1, \dots, t_q \right)$ . Поэтому, чем больше значение  $f\left( \vec{\tau}, \theta \right)$ , тем правдоподобнее (или более вероятна) система наблюдений  $\vec{\tau}$  при заданном значении параметра  $\theta$ .

Очевидно, что в случае отсутствия цензурирования данных функция правдоподобия имеет простой вид

$$f\left( \vec{\tau} / \theta \right) = \prod_{i=1}^n f_i(t_i / \theta).$$

### 3.2. Параметрическая оценка надежности

Как известно, параметрические методы в статистической обработке данных предназначаются для какого-нибудь параметрического семейства распределений с использованием его свойств. В этом случае функция распределения  $F(t, \Theta)$  (или плотность распределения  $f(t, \Theta)$ ) исследуемой случайной величины

считается известной с точностью до параметра  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ .  
 Байесовская процедура позволяет проводить как оценку параметров распределения, так и непосредственно оценку вероятности безотказной работы за некоторое время  $t_0$ :

$$R(t_0, \theta) = 1 - F(t_0, \theta).$$

Далее рассмотрим основные законы распределения, наиболее часто встречающиеся в практике оценки надежности технических объектов. Анализ методов оценки проведем с помощью работ [12, 54].

### 3.2.1. Показательное (экспоненциальное) распределение

Функция распределения наработки до отказа имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad \theta = \frac{1}{\lambda},$$

а плотность распределения задается выражением

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}},$$

#### 3.2.1.1. Байесовская оценка параметра показательного распределения

Пусть случайное время до первого отказа подчиняется экспоненциальному закону распределения:

$$f(t, T) = \frac{1}{T} \exp\left\{-\frac{t}{T}\right\},$$

где  $T$  – среднее время до первого отказа.

Пусть априорная плотность распределения времени  $T$  также подчиняется показательному закону

$$h(T) = \frac{1}{T_{ap}} \exp\left\{-\frac{T}{T_{ap}}\right\},$$

а измерения случайной величины  $T$  представлены выборкой

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_n).$$

Определим функцию правдоподобия:

$$f(T/T_1, T_2, \dots, T_n) = \frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i\right\},$$

так что апостериорная плотность вероятности определяется соотношением:

$$\begin{aligned} f(T/T_1, \dots, T_n) &= \frac{h(T)f(T_1, \dots, T_n/T)}{\int_0^\infty h(T)f(T_1, \dots, T_n/T)dT} = \\ &= \frac{\frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i\right\} \frac{1}{T_{ap}} \exp\left\{-\frac{T}{T_{ap}}\right\}}{\frac{1}{T_{ap}} \int_0^\infty \frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i\right\} \exp\left\{-\frac{T}{T_{ap}}\right\} dT} = \\ &= \frac{\frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right\}}{\int_0^\infty \frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right\} dT}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл в знаменателе выражения:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right\} dT &= \left| \begin{array}{l} \frac{T}{T_{ap}} = x, \frac{1}{T_{ap}} dT = dx \\ dT = T_{ap} dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{T_{ap}^{n-1}} \int_0^\infty \frac{1}{x^n} \exp\left\{-\left(x + \frac{1}{T_{ap}x} \sum_{i=1}^n T_i\right)\right\} dx. \end{aligned}$$

Имеет место соотношение [41, 51]:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp\left\{-px - \frac{q}{x}\right\} dx = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(px + \frac{q}{x}\right)\right\} dx =$$

$$= 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}\left(2\sqrt{pq}\right),$$

где  $K_{\alpha}(\cdot)$  – функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Примем,  $\alpha - 1 = -n$ ,  $p = 1$ ,  $q = a^2$ . Тогда рассматриваемый интеграл запишется в виде:

$$\int_0^{\infty} x^{-n} \exp\left\{-\left(x + \frac{a^2}{x}\right)\right\} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^n} \exp\left\{-\left(x + \frac{a^2}{x}\right)\right\} dx =$$

$$= 2\left(a^2\right)^{\frac{1-n}{2}} K_{1-n}(2a) = 2\frac{1}{a^{n-1}} K_{1-n}(2a)$$

Для рассматриваемого случая

$$a = \sqrt{\frac{1}{T_{ap}} \sum_{i=1}^n T_i}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{T^n} \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right\} dT =$$

$$= \frac{2}{T_{ap}^{n-1} \left[\frac{1}{T_{ap}} \sum_{i=1}^n T_i\right]^{\frac{n-1}{2}}} K_{n-1}\left[2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}} \sum_{i=1}^n T_i}\right],$$

а апостериорная плотность распределения времени  $T$  имеет вид:

$$f(T/T_1, \dots, T_n) = \frac{T_{ap}^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{1}{T_{ap}} \sum_{i=1}^n T_i \right]^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n T_i + \frac{T}{T_{ap}} \right) \right\}}{2T^n K_{n-1} \left[ 2 \sqrt{\frac{1}{T_{ap}} \sum_{i=1}^n T_i} \right]}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \bar{T}.$$

Тогда

$$f(T/T_1, \dots, T_n) = \frac{T_{ap}^{\frac{n-1}{2}} [n\bar{T}]^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{n\bar{T}}{T} + \frac{T}{T_{ap}} \right) \right\}}{2T^n K_{n-1} \left[ 2 \sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}.$$

Байесовская точечная оценка времени  $T$  определяется как апостериорное среднее (при квадратичной функции потерь)

$$\begin{aligned} T^* &= \int_0^{\infty} T f(T/T_1, \dots, T_n) dT = \\ &= \frac{T_{ap}^{\frac{n-1}{2}} [n\bar{T}]^{\frac{n-1}{2}}}{2K_{n-1} \left[ 2 \sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]} \int_0^{\infty} \frac{1}{T^{n-1}} \exp \left\{ - \left( \frac{n\bar{T}}{T} + \frac{T}{T_{ap}} \right) \right\} dT = \\ &= \frac{T_{ap}^{\frac{n-1}{2}} [n\bar{T}]^{\frac{n-1}{2}}}{2K_{n-1} \left[ 2 \sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right] T_{ap}^{n-2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \exp \left\{ - \left( x + \frac{n\bar{T}}{T_{ap}x} \right) \right\} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{ap}^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{n\bar{T}}{T_{ap}} \right]^{\frac{n-1}{2}} K_{n-2} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}{T_{ap}^{n-2} \left( \frac{n\bar{T}}{T_{ap}} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{n-1} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]} = \frac{T_{ap}^{n-1} \left[ \frac{n\bar{T}}{T_{ap}} \right]^{\frac{n-1}{2}} K_{n-2} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}{T_{ap}^{n-2} \left( \frac{n\bar{T}}{T_{ap}} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{n-1} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]} = \\
& = T_{ap} \sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \frac{K_{n-2} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}{K_{n-1} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}.
\end{aligned}$$

Таким образом, точечная оценка среднего времени до первого отказа определяется выражением:

$$T^* = \sqrt{nT_{ap}\bar{T}} \frac{K_{n-2} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}{K_{n-1} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}.$$

Проведя аналогичные рассуждения можно получить дисперсию оценки  $T^*$  в соответствии с выражением:

$$\begin{aligned}
D(T^*) &= \int_0^{\infty} (T - T^*)^2 f(T/T_1, \dots, T_n) dT = \\
&= \sqrt{nT_{ap}\bar{T}} \frac{K_{n-2} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]}{K_{n-1} \left[ 2\sqrt{\frac{n\bar{T}}{T_{ap}}} \right]} - (T^*)^2.
\end{aligned}$$



Графики апостериорной плотности распределения  $f(T/T_1, \dots, T_n)$  для объемов измерений 30, 50 и 100 при одной и той же оценке среднего времени до отказа  $\bar{T} = 200$  часов, полученной в этих испытаниях, и при априорной информации  $T_{ap} = 100$  часов показаны на рис. 3.3.

$T_c := 200$   $n1 := 30$   $n2 := 50$   $n3 := 90$   $T := 10, 11..400$   $T_a := 100$

$$f1(T) := \left[ \frac{\frac{n1-1}{T_a^{\frac{n1-1}{2}}} \cdot (n1 \cdot T_c)^{\frac{n1-1}{2}}}{2 \cdot T^{n1} \cdot \text{Kn}\left(n1 - 1, 2 \cdot \sqrt{\frac{n1 \cdot T_c}{T_a}}\right)} \right] \cdot \exp\left[-\left(\frac{n1 \cdot T_c}{T} + \frac{T}{T_a}\right)\right]$$

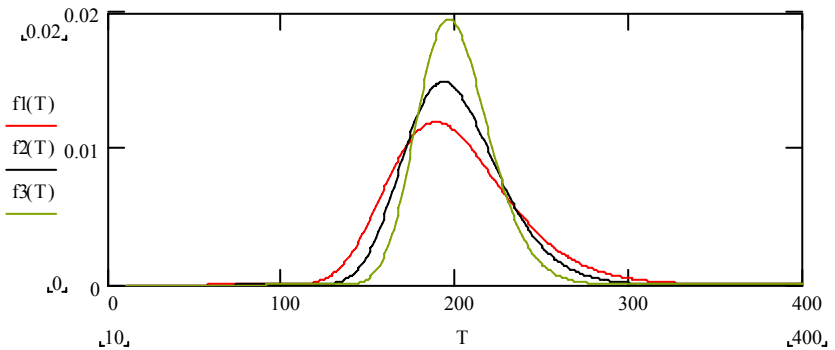


Рис.3.3. Графики апостериорной плотности

На рис.3.4 показаны графики апостериорной плотности  $f(T/T_1, \dots, T_n)$  при объеме измерений  $n = 100$ ,  $T_{ap} = 100$  час. для различных оценок среднего времени до отказа  $\bar{T} = 100, 150$  и  $200$  часов.

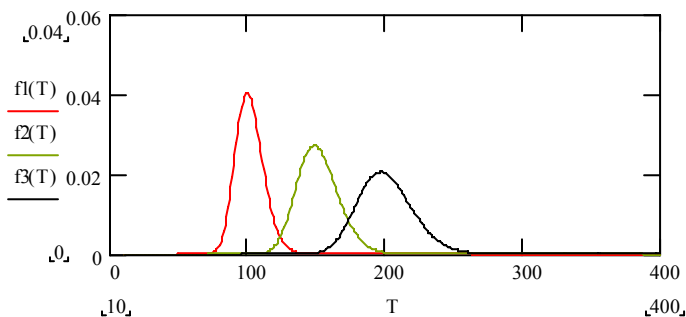
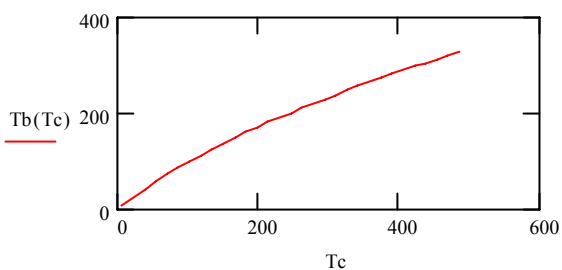


Рис.3.4. Графики апостериорной плотности для различных  $\bar{T}$

На рис.3.5 показана зависимость апостериорной точечной оценки  $T^*$  среднего времени до первого отказа (при  $T_{ap} = 50$  час.) от результатов наблюдений, представленных средней оценкой  $\bar{T}$  для сравнительно малого объема измерений ( $n = 10$ ), что характерно, например, для этапа эксплуатации при контроле характеристик надежности.



$$T_b(400) = 285.596$$

$$T_b(200) = 171.483$$

Рис.3.5. График зависимости  $T^* = f(\bar{T})$

Очевидно, что при малом объеме эксплуатационного контроля зависимость  $T^* = f(\bar{T}/T_{ap}, n)$  существенно нелинейная.

При малых значениях  $T_{ap}$  байесовская апостериорная оценка, учитывающая результаты эксплуатационных измерений, имеет значения достаточно пессимистичные. Например, при полученном значении  $\bar{T} (n = 10) = 400$  час., значение  $T_{ps}^* = 286$  час.

В табл. 3.1 приведены результаты расчета оценок  $T^*$ ,  $\sigma_T$  при  $T_{ap} = 100, 250$  часов для различных значений  $\bar{T}$ , полученных в выборке различных объемов  $n = 10 - 100$ .

Таблица 3.1

n	$T^*, \sigma_T$			
	$T_{ap} = 100$		$T_{ap} = 250$	
	$\bar{T} = 500$	$\bar{T} = 1000$	$\bar{T} = 500$	$\bar{T} = 1000$
10	406,046	667,332	492,994	857,416
	101,441	144,227	144,802	223,617
20	442,61	770,965	497,888	916,817
	86,019	133,707	107,753	183,76
30	458,565	823,654	499,004	941,244
	75,748	123,95	89,271	159,224
50	473,335	878,436	499,625	962,983
	62,81	108,892	69,857	129,874
100	485,888	931,168	499,903	980,772
	46,995	86,482	49,723	95,716

Рассмотрим еще один подход к оценке времени до первого отказа  $T$ , когда известна априорная информация об интенсивности отказов в предположении постоянства интенсивности отказов на выделенных интервалах наблюдения, что соответствует показательному распределению времени безотказной работы:

$$f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Пусть сформирована выборка наблюдений  $\vec{t} = (t_1^\circ, \dots, t_d^\circ; t_1, \dots, t_q)$ , где  $t_i^\circ$  – время до отказа,  $t_j$  – время цензурирования, при котором отказа не произошло, а  $d + q = n$ .

Тогда функция правдоподобия выборки определяется выражением:

$$f\left(\vec{t} / \lambda\right) \propto \prod_{i=1}^d f\left(t_i^{\circ}, \lambda\right) \prod_{j=1}^q [1 - F(t_j, \lambda)] = \lambda^d e^{-k\lambda},$$

где символ  $\propto$  – знак пропорциональности,  $k$  – суммарная наработка на отказ, равная

$$k = \sum_{i=1}^d t_i^{\circ} + \sum_{j=1}^q t_j.$$

Вид функции правдоподобия указывает на то, что сопряженной плотностью для параметра  $\lambda$  является плотность гамма – распределения [17]:

$$h(\lambda / \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta},$$

где параметр  $\alpha$  имеет смысл априорного количества отказов на суммарную наработку  $\beta$ .

В связи с тем, что искомым параметром является  $T = \frac{1}{\lambda}$ , необходимо определить плотность распределения  $h(T)$  по заданной плотности  $h(\lambda / \alpha, \beta)$ .

Известно, [52], что в случае непрерывной взаимнооднозначной зависимости  $Y = \varphi(X)$  между случайными величинами  $X$  и  $Y$  (функция  $\varphi(x)$  должна быть монотонна в области возможных значений случайной величины  $X$ ), совместная плотность вероятности определяется как

$$f(x, y) = f(x)\delta[y - \varphi(x)].$$

Для нахождения плотности вероятности  $f(y)$  необходимо провести интегрирование

$$f(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(u)\delta[y - \varphi(u)] du.$$

Проведем замену переменных

$$\varphi(u) = v,$$

так что

$$u = \psi(v), \quad du = \left| \psi'(v) \right| dv,$$

а интервал интегрирования  $(x_1, x_2)$  переходит в интервал  $(y_1, y_2)$ .  
В результате

$$f(y) = \int_{y_1}^{y_2} f[\psi(v)] \left| \psi'(v) \right| dv.$$

Используя свойство  $\delta$  – функции

$$\int_a^b \varphi(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = \varphi(x),$$

получаем

$$f(y) = f[\psi(y)] \left| \psi'(y) \right|.$$

Тогда априорная плотность для параметра  $T$  определится выражением

$$\begin{aligned} h(T / \alpha, \beta) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1}{T} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{T}} \left| \left[ (T)^{-1} \right] \right| = \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1}{T} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{T}} \frac{1}{T^2} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{T}}. \end{aligned}$$

Таким образом, апостериорная плотность для параметра  $T$  равна

$$\begin{aligned} f(T / \alpha, \beta, d, k) &= \frac{h(T / \alpha, \beta) f\left(\bar{t} / \frac{1}{T}\right)}{\int_0^\infty h(T / \alpha, \beta) f\left(\bar{t} / \frac{1}{T}\right) dT} = \\ &= \frac{\left( \frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{T}} \left( \frac{1}{T} \right)^d e^{-\frac{k}{T}}}{\int_0^\infty \left( \frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{T}} \left( \frac{1}{T} \right)^d e^{-\frac{k}{T}} dT} = \frac{\left( \frac{1}{T} \right)^{d+\alpha+1} \exp\left\{ -\frac{k+\beta}{T} \right\}}{\int_0^\infty \left( \frac{1}{T} \right)^{d+\alpha+1} \exp\left\{ -\frac{k+\beta}{T} \right\} dT}. \end{aligned}$$

Вычислим определенный интеграл в знаменателе, для чего сделаем замену переменной:

$$x = \frac{k + \beta}{T}, \quad \frac{1}{T} = \frac{x}{k + \beta}, \quad dx = -\frac{1}{T^2}(k + \beta)dT,$$

$$dT = -\frac{k + \beta}{x^2}dx.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^{d+\alpha+1} \exp\left\{-\frac{k + \beta}{T}\right\} dT =$$

$$= \frac{1}{(k + \beta)^{d+\alpha+1}} \int_0^{\infty} x^{d+\alpha+1} \exp\{-x\} \frac{k + \beta}{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{(k + \beta)^{d+\alpha}} \int_0^{\infty} x^{d+\alpha-1} \exp\{-x\} dx = \frac{\Gamma(\alpha + d)}{(k + \beta)^{d+\alpha}}.$$

Таким образом, апостериорная плотность распределения определяется выражением

$$f(T / \alpha, \beta, d, k) = \frac{(k + \beta)^{d+\alpha}}{\Gamma(\alpha + d)} \left(\frac{1}{T}\right)^{d+\alpha+1} \exp\left\{-\frac{k + \beta}{T}\right\}.$$

Очевидно, что полученное распределение является гамма – распределением с другими значениями параметров  $\alpha'$  и  $\beta'$  по сравнению с априорным распределением

$$f(T / \alpha', \beta', d, k) = \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha'+1} e^{-\frac{\beta'}{T}}$$

где  $\alpha' = \alpha + d$ ,  $\beta' = k + \beta$ .

Найдем байесовскую оценку  $T^*$ , оптимальную по критерию среднеквадратических потерь:

$$T^* = \int_0^{\infty} T f(T / \alpha', \beta', d, k) dT =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha'} e^{-\frac{\beta'}{T}} dT = \left| x = \frac{\beta'}{T}, \frac{1}{T} = \frac{x}{\beta'}, dT = -\frac{\beta'}{x^2} dx \right| = \\
 &= \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \frac{\Gamma(\alpha' - 1)}{(\beta')^{\alpha' - 1}} = \frac{\beta'}{\alpha' - 1} = \frac{k + \beta}{\alpha + d - 1}.
 \end{aligned}$$

На рис.3.6 показаны графики апостериорной плотности распределения  $f(T/\alpha', \beta', d, k)$  для случаев  $\alpha = 1, \beta = 100, k = 1000, d = 0$  и  $d = 1$ .

Точность оценки характеризуется ее дисперсией:

$$D(T^*) = \int_0^{\infty} T^2 f(T/\alpha', \beta', d, k) dT - \left\{ \frac{k + \beta}{\alpha + p - 1} \right\}^2.$$

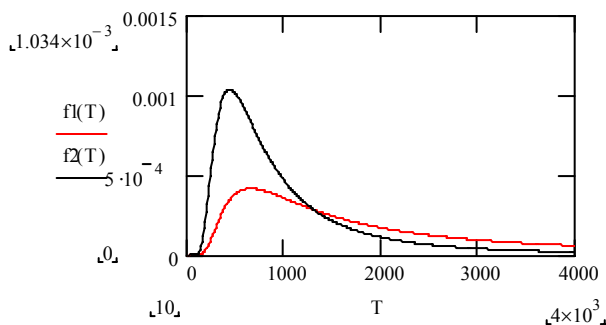


Рис.3.6. Графики апостериорной плотности для  $d = 0$  и  $d = 1$

### 3.2.1.2. Байесовская оценка вероятности безотказной работы

Вероятность безотказной работы определяется выражением

$$R(t_0, \lambda) = e^{-\lambda t_0}$$

и, следовательно, параметр распределения  $\lambda$  может быть определен как

$$\lambda(r) = -\frac{1}{t_0 \ln r}.$$

Тогда плотность распределения запишется в виде:

$$f(t, \lambda(r)) = f(t, r) = -\frac{1}{t_0} \ln r \exp\left\{\frac{t}{t_0} \ln r\right\} = -\frac{\ln r}{t_0} r^{\frac{t}{t_0}},$$

а функция распределения определится как

$$F(t, r) = 1 - \exp\left\{\frac{t}{t_0} \ln r\right\} = 1 - r^{\frac{t}{t_0}}.$$

Подставим эти выражения в функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} f(\vec{\tau}, r) &= \prod_{i=1}^d f_i(t_i^\circ, r) \prod_{j=1}^q [1 - F_j(t_j, r)] = \\ &= \prod_{i=1}^d \left[ -\frac{\ln r}{t_0} r^{\frac{t_i^\circ}{t_0}} \right] \prod_{j=1}^q r^{\frac{t_j}{t_0}} = \left[ -\frac{1}{t_0} \right]^d (\ln r)^d r^{\frac{1}{t_0} \sum_i t_i^\circ + \frac{1}{t_0} \sum_j t_j}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{1}{t_0} \left[ \sum_{i=1}^d t_i^\circ + \sum_{j=1}^q t_j \right] = \omega,$$

так что функция правдоподобия запишется в виде:

$$f(\vec{\tau}, r) = \left( -\frac{1}{t_0} \right)^d (\ln r)^d r^\omega,$$

где  $\omega$  – суммарная относительная наработка.

Таким образом достаточной статистикой по отношению к выборке  $\vec{\tau}$  является  $\{\omega, d\}$ .

В соответствии с теоремой Байеса апостериорная плотность определяется выражением:

$$f\left(r / \vec{\tau}\right) = \frac{h(r) f(\vec{\tau} / r)}{\int_R h(r) f(\vec{\tau} / r) dr}.$$



Тогда при квадратичной функции потерь можно определить:

- оценку вероятности безотказной работы

$$R^* = \frac{\int_0^1 r h(r) f\left(\frac{\tau}{r}\right) dr}{\int_0^1 h(r) f\left(\frac{\tau}{r}\right) dr} = \frac{\int_0^1 r^{\omega+1} (\ln r)^d h(r) dr}{\int_0^1 r^{\omega} (\ln r)^d h(r) dr},$$

- дисперсию оценки (ее точность)

$$\begin{aligned} D(R^*) &= \frac{\int_0^1 r^2 h(r) f\left(\frac{\tau}{r}\right) dr}{\int_0^1 h(r) f\left(\frac{\tau}{r}\right) dr} - (R^*)^2 = \\ &= \frac{\int_0^1 r^{\omega+2} (\ln r)^d h(r) dr}{\int_0^1 r^{\omega} (\ln r)^d h(r) dr} - (R^*)^2. \end{aligned}$$

- нижнюю границу байесовского доверительного интервала  $\underline{R}_\gamma$ :

$$\int_{\underline{R}_\gamma}^1 h(r) r^{\omega} (\ln r)^d dr = \gamma \int_0^1 h(r) r^{\omega} (\ln r)^d dr$$

как решение уравнения при заданной доверительной вероятности  $\gamma$ .

Если принять, что параметр надежности  $R$  имеет априорное равномерное распределение на интервале  $[R_H, R_B]$ , т.е.

$$h(r) = \frac{1}{R_B - R_H}, \quad R_H \leq r \leq R_B,$$

то выражения для соответствующих оценок принимают вид (при  $R_B = 1 = 1$ ):

$$R^* = \frac{\int_{R_H}^1 r^{\omega+1} (\ln r)^d h(r) dr}{\int_{R_H}^1 r^{\omega} (\ln r)^d h(r) dr},$$

$$D(R^*) = \frac{\int_{R_H}^1 r^{\omega+2} (\ln r)^d h(r) dr}{\int_{R_H}^1 r^{\omega} (\ln r)^d h(r) dr} - (R^*)^2,$$

$$\int_{\underline{R}_\gamma}^1 r^{\omega} (\ln r)^d dr = \gamma \int_{R_H}^1 r^{\omega} (\ln r)^d dr.$$

**Пример:**

$$R_n := 0.9 \quad d := 0 \quad w := 10$$

$$R := \frac{\int_{R_n}^1 r^{w+1} \cdot \ln(r)^d dr}{\int_{R_n}^1 r^w \cdot \ln(r)^d dr} \quad D := \frac{\int_{R_n}^1 r^{w+2} \cdot \ln(r)^d dr}{\int_{R_n}^1 r^w \cdot \ln(r)^d dr} - R^2$$

$$\frac{\int_{0.916326}^1 r^w \cdot \ln(r)^d dr}{\int_{R_n}^1 r^w \cdot \ln(r)^d dr} = 0.900002 \quad R = 0.958588 \quad \sqrt{D} = 0.028044$$

В табл. 3.2 и 3.3 приведены результаты расчета оценок  $R^*$ ,  $\sigma_R$  и  $\underline{R}_\gamma$  для случая безотказных испытаний ( $d = 0$ ) и испытаний с одним отказом ( $d = 1$ ) для различных значений

относительной наработки  $\omega$  и нижней границы  $R_H$  априорного распределения.

Таблица 3.2

$\omega$	$d = 0$			
	$R^*, \sigma_R, \underline{R}_\gamma$			
	$R_H = 0,9$	$R_H = 0,95$	$R_H = 0,98$	$R_H = 0,99$
10	0,958588 0,028044 0,916326	0,977126 0,0 143 33	0,990336 0,005767	0,995084 0,002886
50	0,981226 0,017639	0,984637 0,01241	0,991654 0,0056285	0,995417 0,0028684
100	0,990198 0,009696	0,990476 0,008964	0,993154 0,05241	0,995823 0,0028153
200	0,99505 0,004926	0,99505 0,0049177	0,9954 0,004149	0,996571 0,0026235

Таблица 3.3

$\omega$	$d = 1$			
	$R^*, \sigma_R, \underline{R}_\gamma$			
	$R_H = 0,9$	$R_H = 0,95$	$R_H = 0,98$	$R_H = 0,99$
10	0,939273 0,02482	0,968069 0,01213	0,986883 0,0047723	0,993387 0,0023718
50	0,964403 0,022	0,974531 0,01265	0,987846 0,004968	0,993619 0,002428
100	0,980513 0,013513	0,981975 0,011131	0,989129 0,0050771	0,993923 0,0024846
200	0,990124 0,006932	0,990141 0,0068768	0,991646 0,009803	0,994561 0,002539

### 3.2.1.3. Байесовская оценка вероятности безотказной работы при неполной априорной информации

Очень часто к началу государственных летных испытаний разработчик располагает неполной априорной информацией, что не позволяет однозначно задать априорное распределение параметра надежности. На практике этот случай соответствует тому, когда аналитическими методами теории надежности и методами статистического моделирования получено значение вероятности безотказной работы как априорной точечной оценки  $R_0$ .

Определим ядро функции правдоподобия как

$$\begin{aligned} f\left(\tau / \lambda\right) &= \prod_{i=1}^d f_i\left(t_i^{\circ}; \lambda\right) \prod_{j=1}^q \left[1 - F_j\left(t_j; \lambda\right)\right] = \\ &= \lambda^d \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^d t_i^{\circ}\right\} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^q t_j\right\} = \lambda^d e^{-\lambda \tau}, \end{aligned}$$

где

$$\tau = \sum_{i=1}^d t_i^{\circ} + \sum_{j=1}^q t_j, \quad d + q = n,$$

суммарная наработка.

В соответствии с теорией сопряженных априорных распределений [17] для выборки из экспоненциального распределения с неизвестным значением параметра  $\lambda$  сопряженной априорной плотностью для параметра  $\lambda$  является плотность гамма – распределения

$$h(\lambda) = h(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^{\alpha} e^{-\beta \lambda}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0,$$

где –  $\alpha$  и  $\beta$  неизвестные пока параметры.

Найдем апостериорную плотность параметра  $\lambda$  в соответствии с теоремой Байеса:

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda/\tau\right) &= \frac{h(\lambda; \alpha, \beta) f\left(\tau/\lambda\right)}{\int_{\Lambda} h(\lambda; \alpha, \beta) f\left(\tau/\lambda\right)} = \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \lambda^d e^{-\lambda\tau}}{\int_{\Lambda} \lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \lambda^d e^{-\lambda\tau}} = \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+d} e^{-\lambda(\tau+\beta)}}{\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha+d} e^{-\lambda(\tau+\beta)} d\lambda} = \left| \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-px} dx = \Gamma(a) p^{-a} \right| = \\
&= \frac{(\beta + \tau)^{\alpha+d+1}}{\Gamma(\alpha + d + 1)} \lambda^{\alpha+d} e^{-\lambda(\beta+\tau)},
\end{aligned}$$

где параметр  $\alpha$  имеет смысл априорного количества отказов, приходящихся на суммарную наработку  $\beta$ .

В [55, 56] рекомендуется для выбора параметров априорной плотности распределения использовать критерий апостериорного риска, т.е. в качестве  $h(\lambda; \alpha, \beta)$  необходимо выбирать такую априорную плотность, которая обеспечивает максимум функции апостериорного риска, т.е. наилучшее априорное распределение, которое приводит к наиболее пессимистическим в смысле апостериорного риска оценкам показателей надежности.

В этом случае задачу определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  можно определить как задачу максимизации апостериорной дисперсии показателя надежности  $R(t) = 1 - F(t)$ :

$$D_R(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} R^2(t, \lambda) f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda - \left[ \int_0^{\infty} R(t, \lambda) f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda \right]^2.$$

Кроме того, если известно только априорное значение вероятности безотказной работы  $R_0$  в течение времени  $t_0$ , то необходимо потребовать выполнение условия

$$\int_0^{\infty} R(t_0, \lambda) h(\lambda; \alpha, \beta) d\lambda - R_0 = 0,$$

которое свидетельствует о совпадении теоретического априорного среднего значения вероятности безотказной работы с величиной  $R_0$ .

Учитывая, что  $R^2(t_0) = \exp\{-2\lambda t_0\}$ , запишем эти условия в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 D_R(\alpha, \beta) &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{(\beta + \tau)^{\alpha+d+1}}{\Gamma(\alpha+d+1)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+d} e^{-\lambda(\beta+\tau+2t_0)} d\lambda - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\beta + \tau)^{2(\alpha+d+1)}}{[\Gamma(\alpha+d+1)]^2} \left[ \int_0^\infty \lambda^{\alpha+d} e^{-\lambda(\beta+\tau+t_0)} d\lambda \right]^2 \right\} = \\
 &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{(\beta + \tau)^{\alpha+d+1}}{\Gamma(\alpha+d+1)} \frac{\Gamma(\alpha+d+1)}{(\beta + \tau + 2t_0)^{\alpha+d+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\beta + \tau)^{2(\alpha+d+1)}}{[\Gamma(\alpha+d+1)]^2} \frac{[\Gamma(\alpha+d+1)]^2}{(\beta + \tau + t_0)^{2(\alpha+d+1)}} \right\} = \\
 &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \left[ \frac{\beta + \tau}{\beta + \tau + 2t_0} \right]^{\alpha+d+1} - \left[ \frac{\beta + \tau}{\beta + \tau + t_0} \right]^{2(\alpha+d+1)} \right\} ; \\
 \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\lambda(\beta+t_0)} d\lambda &= \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\beta + t_0)^{\alpha+1}} = \left[ \frac{\beta}{\beta + t_0} \right]^{\alpha+1} = R_0 .
 \end{aligned}$$

Таким образом, задача определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  состоит в выполнении условий:

$$\begin{aligned}
 D_R(\alpha, \beta) &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \left[ \frac{\beta + \tau}{\beta + \tau + 2t_0} \right]^{\alpha+d+1} - \left[ \frac{\beta + \tau}{\beta + \tau + t_0} \right]^{2(\alpha+d+1)} \right\} ; \\
 R_0 &= \left[ \frac{\beta}{\beta + t_0} \right]^{\alpha+1} .
 \end{aligned}$$

Перед тем как оценить параметр  $R$  проведем оценку интенсивности отказов  $\lambda$ , считая, что априорное значение  $\lambda_0$  известно.

Тогда аналогично проведенным выше рассуждениям запишем два уравнения:

$$\begin{aligned}
 D_\lambda(\alpha, \beta) &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \int_0^\infty \lambda^2 f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda - \left[ \int_0^\infty \lambda f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda \right]^2 \right\} = \\
 &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{(\beta + \tau)^{\alpha+d+1}}{\Gamma(\alpha + d + 1)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+d+2} e^{-\lambda(\beta+\tau)} d\lambda - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{(\beta + \tau)^{\alpha+d+1}}{\Gamma(\alpha + d + 1)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+d+1} e^{-\lambda(\beta+\tau)} d\lambda \right]^2 \right\} = \\
 &= \max_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{(\alpha + d + 1)(\alpha + d + 2)}{(\beta + \tau)^2} - \frac{(\alpha + d + 1)^2}{(\beta + \tau)^2} \right\} = \max_{\alpha, \beta} \frac{\alpha + d + 1}{(\beta + \tau)^2} ; \\
 &\quad \boxed{\int_0^\alpha \lambda h(\lambda; \alpha, \beta) d\lambda = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda\beta} d\lambda =} \\
 &\quad = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\alpha+1}{\beta} = \lambda_0 .
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
 D_\lambda(\alpha, \beta) &= \max_{\alpha, \beta} \left[ \frac{\alpha + d + 1}{(\beta + \tau)^2} \right], \\
 \lambda_0 &= \frac{\alpha + 1}{\beta}.
 \end{aligned} \right.$$

Задача нахождения оценки  $\lambda^*$  может быть решена аналитически.

Представляя параметр  $\beta$  как  $\beta = \frac{\alpha+1}{\lambda_0}$  определим

$$D_\lambda(\alpha, \beta) = D_\lambda\left(\alpha, \frac{\alpha+1}{\lambda_0}\right)$$

$$D_\lambda\left(\alpha, \frac{\alpha+1}{\lambda_0}\right) = \frac{\alpha+d+1}{\left(\frac{\alpha+1}{\lambda_0} + \tau\right)^2} = \lambda_0^2 \frac{\alpha+d+1}{(\lambda_0\tau + \alpha+1)^2},$$

наибольшее значение которой соответствует решению поставленной задачи. Определим производную  $D'_\lambda$ :

$$\begin{aligned} D'_\lambda &= \lambda_0^2 \frac{(\lambda_0\tau + \alpha+1)^2 - 2(\alpha+d+1)(\lambda_0\tau + \alpha+1)}{(\lambda_0\tau + \alpha+1)^4} = \\ &= \lambda_0^2 \frac{\lambda_0\tau - 2d - 1 - \alpha}{(\lambda_0\tau + \alpha+1)^3}. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция  $D_\lambda\left(\alpha, \frac{\alpha+1}{\lambda_0}\right)$  имеет максимум, когда

$$D'_\lambda = 0.$$

Таким образом определяем

$$\alpha_0 = \lambda_0\tau - 2d - 1$$

и, следовательно,

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0 + 1}{\lambda_0} = \tau - \frac{2d}{\lambda_0}.$$

Общее решение поставленной задачи поиска оптимальных значений параметров  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  имеет вид:

$$(\alpha_0, \beta_0) = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{\lambda_0}\right], & \lambda_0 \leq \frac{2d+1}{\tau} \\ \left[\lambda_0\tau - 2d - 1, \tau - \frac{2d}{\lambda_0}\right], & \lambda_0 > \frac{2d+1}{\tau} \end{cases}.$$



Оценка интенсивности отказов  $\lambda^*$  и ее дисперсия  $D(\lambda^*)$  (точность) могут быть определены из выражений:

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \int_0^{\infty} \lambda f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda = \frac{(\beta_0 + \tau)^{\alpha_0 + d + 1}}{\Gamma(\alpha_0 + d + 1)} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha_0 + d + 1} e^{-\lambda(\beta_0 + \tau)} d\lambda = \\ &= \frac{(\beta_0 + \tau)^{\alpha_0 + d + 1}}{\Gamma(\alpha_0 + d + 1)} \frac{\Gamma(\alpha_0 + d + 2)}{(\beta_0 + \tau)^{\alpha_0 + d + 2}} = \frac{\alpha_0 + d + 1}{\beta_0 + \tau}, \\ D(\lambda^*) &= \frac{\alpha_0 + d + 1}{(\beta_0 + \tau)^2}.\end{aligned}$$

В [36] показано, что для полностью определенной априорной информации (параметры  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  априорной плотности известны) байесовская верхняя  $\gamma$ -доверительная граница определяется выражением:

$$\bar{\lambda}_\gamma = \frac{\chi_{1-\gamma, 2(\alpha_0 + d + 1)}^2}{2(\beta_0 + \tau)},$$

где  $\chi_{1-\gamma, (\cdot)}^2$  – соответствующий квантиль  $\chi^2$  – распределения.

Оценка вероятности безотказной работы  $R^*$  может быть определена по апостериорной плотности параметра  $\lambda$ , так как  $R(t_0) = 1 - F(t_0; \lambda) = \exp\{-\lambda t_0\}$ :

$$\begin{aligned}R^* &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t_0} f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda = \frac{(\beta_0 + \tau)^{\alpha_0 + d + 1}}{\Gamma(\alpha_0 + d + 1)} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha_0 + d} e^{-\lambda(\beta_0 + \tau + t_0)} d\lambda = \\ &= \frac{(\beta_0 + \tau)^{\alpha_0 + d + 1}}{\Gamma(\alpha_0 + d + 1)} \frac{\Gamma(\alpha_0 + d + 1)}{(\beta_0 + \tau + t_0)^{\alpha_0 + d + 1}} = \left[ \frac{\beta_0 + \tau}{\beta_0 + \tau + t_0} \right]^{\alpha_0 + d + 1}.\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения могут быть проделаны и для определения дисперсии оценки  $R^*$ :

$$D(R^*) = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t_0} f\left(\lambda/\tau\right) d\lambda - (R^*)^2 =$$

$$= \left[ \frac{\beta_0 + \tau}{\beta_0 + \tau + 2t_0} \right]^{\alpha_0 + d + 1} - \left[ \frac{\beta_0 + \tau}{\beta_0 + \tau + t_0} \right]^{\alpha_0 + d + 1}.$$

Для определения нижней  $\gamma$ -доверительной границы для оценки  $R^*$  можно использовать тот факт, что

$$\Pr\{R(t_0) \geq \underline{R}_\gamma(t_0)\} = P\{\bar{\lambda}_\gamma \leq \lambda\}.$$

Тогда :

$$\underline{R}_\gamma - \exp\{-\bar{\lambda}_\gamma t_0\} = \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\gamma, 2(\alpha_0 + d + 1)}^2}{2(\beta_0 + \tau)} t_0\right\}.$$

В табл.3.4 и 3.5 приведены результаты расчета оценок  $R^*$  и  $\underline{R}_\gamma$  в зависимости от априорной оценки  $R_0$  и суммарной

относительной наработки  $\omega = \frac{\tau}{t_0}$  (для случая безотказных

испытаний ( $d = 0$ ) и случая одного отказа ( $d = 1$ )). Доверительная вероятность  $\gamma = 0,9$ .

Таблица 3.4

$\omega$	$d = 0$			
	$R_0 = 0,99$	$R_0 = 0,995$	$R_0 = 0,999$	$R_0 = 0,9995$
10	0,99095	0,99525	0,99901	0,99950
	0,97919	0,98907	0,99772	0,99885
20	0,99179	0,99546	0,99902	0,99950
	0,98092	0,98956	0,99774	0,99886
50	0,99336	0,99960	0,99905	0,99951
	0,98472	0,99081	0,99781	0,99888
75	0,99430	0,99637	0,99907	0,99952
	0,98689	0,99165	0,99786	0,99889
100	0,99501	0,99667	0,99909	0,99952
	0,98852	0,99234	0,99791	0,99890
200	0,99667	0,99750	0,99917	0,99955
	0,99234	0,99425	0,99808	0,99895

Таблица 3.5

$\omega$	$d = 1$			
	$R_0 = 0,99$	$R_0 = 0,995$	$R_0 = 0,999$	$R_0 = 0,9995$
10	0,98198	0,99052	0,99802	0,99901
	0,96510	0,98160	0,99615	0,99807
20	0,98347	0,99095	0,99804	0,99901
	0,96797	0,98243	0,99619	0,99808
50	0,98675	0,99203	0,99810	0,99902
	0,97432	0,98453	0,99630	0,99810
75	0,98864	0,99275	0,99814	0,99904
	0,97796	0,98593	0,99639	0,99813
100	0,99005	0,99336	0,99818	0,99905
	0,98069	0,98710	0,99647	0,99815
200	0,99335	0,99501	0,99833	0,99909
	0,98710	0,99031	0,99676	0,99823

В расчетах учтено, что при  $\lambda_0 \leq \frac{2d+1}{\tau}$ , т.е. при выполнении

условия (при  $\lambda_0 = -\frac{1}{t_0} \ln R_0$ )

$$-\ln R_0 \leq \frac{2d+1}{\omega}$$

оптимальные параметры определяются как

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \frac{1}{\lambda_0},$$

так что оценки  $R^*$  и  $\underline{R}_\gamma$  определяются из соотношений

$$R^* = \left[ \frac{\tau + \beta_0}{t_0 \left( \frac{\tau + \beta_0}{t_0} + 1 \right)} \right]^{d + \alpha_0 + 1} = \left| \begin{aligned} & \frac{\tau + \beta_0}{t_0} = \omega - \frac{1}{\ln R_0} \\ & = \frac{\omega \ln R_0 - 1}{\ln R_0} \end{aligned} \right| = ,$$

$$= \left[ \frac{\omega \ln R_0 - 1}{\ln R_0 (\omega + 1) - 1} \right]^{d+1},$$

$$\underline{R}_\gamma = \exp \left\{ - \frac{\chi_{1-\gamma, 2(d+1)}^2}{2 \left( \omega - \frac{1}{\ln R_0} \right)} \right\}.$$

В том случае, когда выполняется условие

$$-\ln R_0 > \frac{2d+1}{\omega}$$

оценки  $R^*$  и  $\underline{R}_\gamma$  определяются из соотношений:

$$R^* = \left[ \frac{2\omega \ln R_0 + 2d}{\ln R_0 (2\omega + 1) + 2d} \right]^{-(\omega \ln R_0 + d)},$$

$$\underline{R}_\gamma = \exp \left\{ - \frac{\chi_{1-\gamma, 2[-2(\omega \ln R_0 + d)]}^2}{2 \left( 2\omega + \frac{2d}{\ln R_0} \right)} \right\}.$$

#### 3.2.1.4. Байесовская оценка в случае априорного доверительного интервала на параметр надежности

Более общим случаем частичной априорной определенности является случай, когда оценивается величина вероятности безотказной работы  $R(t)$  находится в интервале  $[\underline{R}, 1]$  с доверительной вероятностью  $\gamma$ . Например, рассмотренная выше точечная оценка  $R_0$ , полученная путем теоретических расчетов (или статистического моделирования), может находиться в указанном интервале степень доверия к которому может определяться полнотой теоретической модели надежности.

Тогда можно записать, что

$$\Pr\{\underline{R} \leq R(t_0) \leq 1\} \geq \gamma.$$

Вследствие монотонной зависимости  $R = \exp\{-\lambda t\}$  априорный доверительный интервал для  $\lambda$  имеет вид  $[0, \bar{\lambda}]$ , где

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{t_0} \ln R.$$

Согласно определению доверительного интервала для априорной плотности распределения  $h(\lambda)$  параметра  $\lambda$  можно записать:

$$\int_0^{\bar{\lambda}} h(\lambda) d\lambda \geq \gamma.$$

Как и ранее, априорная плотность  $h(\lambda)$ , сопряженная с ядром экспоненциального правдоподобия, задается выражением

$$h(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \lambda^\alpha e^{-\lambda\beta}.$$

Для нахождения значений параметров априорной плотности  $\alpha$  и  $\beta$  можно записать два уравнения (по аналогии с рассмотренным выше случаем):

$$D_\lambda(\alpha_0, \beta_0) = \max_{\alpha, \beta} \frac{d + \alpha + 1}{(\tau + \beta)^2},$$

$$\int_0^{\bar{\lambda}} h(\lambda) d\lambda = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{\bar{\lambda}} \lambda^\alpha e^{-\lambda\beta} d\lambda \geq \gamma$$

или

$$\int_0^{\bar{\lambda}} \lambda^\alpha e^{-\lambda\beta} d\lambda \geq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta^{\alpha+1}} \gamma.$$

В случае безотказных априорных «испытаний»  $\alpha_0 = 0$ , что свойственно высоконадежным отказоустойчивым системам, эти уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} D_{\lambda}(0, \beta_0) = \max_{\beta > 0} \frac{d+1}{(\tau + \beta)^2}, \\ \int_0^{\bar{\lambda}} e^{-\lambda\beta} d\lambda \geq \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}.$$

Решение второго уравнения имеет вид:

$$\int_0^{\bar{\lambda}} e^{-\lambda\beta_0} d\lambda = \frac{1}{\beta_0} \left[ 1 - e^{-\bar{\lambda}\beta_0} \right]$$

или

$$\frac{1}{\beta_0} \left[ 1 - e^{-\bar{\lambda}\beta_0} \right] = \frac{\gamma}{\beta_0}.$$

Следовательно

$$-\bar{\lambda}\beta_0 = \ln(1 - \gamma),$$

откуда

$$\beta_0 = -\frac{\ln(1 - \gamma)}{\bar{\lambda}} = \left| \bar{\lambda} = -\frac{1}{t_0} \ln \underline{R} \right| = \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln \underline{R}} t_0.$$

При известных параметрах  $\alpha_0 = 0, \beta_0$ , априорная плотность параметра  $\lambda$  является известной, поэтому оценку параметров надежности можно осуществить по выше приведенным формулам:

$$R^* = \left[ \frac{\tau + \beta_0}{\tau + \beta_0 + t_0} \right]^{d+1} = \left[ \frac{\omega \ln \underline{R} + \ln(1 - \gamma)}{\ln \underline{R}(\omega + 1) + \ln(1 - \gamma)} \right]^{d+1},$$

$$D(R^*) = \left[ \frac{\omega \ln \underline{R} + \ln(1 - \gamma)}{\ln \underline{R}(\omega + 2) + \ln(1 - \gamma)} \right]^{d+1},$$

$$\underline{R}_{\gamma} = \exp \left\{ -\frac{\chi_{1-\gamma, 2(d+1)}^2}{2[\omega \ln \underline{R} + \ln(1 - \gamma)]} \ln \underline{R} \right\}.$$

В табл.3.6 представлены результаты расчета оценок  $R^*$  для различных значений характеристик априорной информации  $\underline{R}$  и  $\gamma$ ,

а также экспериментальных данных, заданных статистиками

$$\omega = \frac{\tau}{t_0} \text{ и } d = 0.$$

Таблица 3.6

$\omega$	$\gamma = 0,9$		$\gamma = 0,95$		$\gamma = 0,99$	
	$=0,95$	$=0,99$	$=0,95$	$=0,99$	$=0,95$	$=0,99$
10	0,98211	0,99583	0,98559	0,99676	0,99008	0,99787
20	0,98482	0,99600	0,98741	0,99687	0,99097	0,99791
50	0,98957	0,99643	0,99086	0,99713	0,99290	0,99804
75	0,99173	0,99672	0,99256	0,99733	0,99397	0,99813
100	0,99314	0,99697	0,99373	0,99749	0,99476	0,99821
200	0,9959	0,99767	0,99614	0,99801	0,99656	0,99848
	3					

### 3.2.2. Распределение Вейбулла

В этом случае функция и плотность распределения времени безотказной работы имеют вид:

$$F(t; \lambda, \alpha) = 1 - \exp\{-\lambda t^\alpha\},$$

$$f(t; \lambda, \alpha) = F'(t; \lambda, \alpha) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} \exp\{-\lambda t^\alpha\},$$

а вероятность безотказной работы за время  $t_0$  определяется выражением

$$R = \exp\{-\lambda t_0^\alpha\},$$

откуда

$$\lambda = -\frac{1}{t_0^\alpha} \ln r.$$

Определим функцию правдоподобия выборки

$$f\left(\overline{\tau} / r, \alpha\right) = \prod_{i=1}^d f\left(t_i^\circ; \lambda, \alpha\right) \prod_{j=1}^q [1 - F(t_j; \lambda, \alpha)] =$$

$$= \left(-\frac{1}{t_0^\alpha}\right)^d (\ln r)^d \alpha^d \left[\prod_{i=1}^d t_i^\circ\right]^{\alpha-1} \prod_{i=1}^d r^{\left(\frac{t_i^\circ}{t_0}\right)^\alpha} \prod_{j=1}^q r^{\left(\frac{t_j}{t_0}\right)^\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -\frac{1}{t_0} \frac{1}{t_0^{\alpha-1}} \right)^d (\ln r)^d \alpha^d \left[ \prod_{i=1}^d t_i^\circ \right]^{\alpha-1} r^{\sum_{i=1}^d \left( \frac{t_i^\circ}{t_0} \right)^\alpha} r^{\sum_{j=1}^q \left( \frac{t_j}{t_0} \right)^\alpha} = \\
&= \left( -\frac{1}{t_0} \right)^d (\ln r)^d \alpha^d \left[ \prod_{i=1}^d \frac{t_i^\circ}{t_0} \right]^{\alpha-1} r^{\sum_{i=1}^d \left( \frac{t_i^\circ}{t_0} \right)^\alpha + \sum_{j=1}^q \left( \frac{t_j}{t_0} \right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega(\alpha) = \sum_{i=1}^d \left( \frac{t_i^\circ}{t_0} \right)^\alpha + \sum_{j=1}^q \left( \frac{t_j}{t_0} \right)^\alpha, \quad \prod_{i=1}^d \frac{t_i^\circ}{t_0} = \mu.$$

Тогда функция правдоподобия запишется в виде:

$$f\left( \vec{\tau} / r, \alpha \right) = \left( -\frac{1}{t_0} \right)^d \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^\omega (\ln r)^d.$$

Если параметры  $r$  и  $\alpha$  распределены равномерно в соответствующих интервалах  $[R_H, 1]$  и  $[\alpha_H, \alpha_B]$ , то при квадратичной функции потерь можно определить:

$$\begin{aligned}
R^* &= \frac{\int_{R_H}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)+1} (\ln r)^d d\alpha}{\int_{R_H}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)} (\ln r)^d d\alpha}, \\
D(R^*) &= \frac{\int_{R_H}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)+2} (\ln r)^d d\alpha}{\int_{R_H}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)} (\ln r)^d d\alpha} - (R^*)^2,
\end{aligned}$$

а уравнение для определения байесовской нижней доверительной границы имеет вид:



$$\int_{R_\gamma}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)} (\ln r)^d d\alpha = \gamma \int_{R_H}^1 dr \int_{\alpha_H}^{\alpha_B} \alpha^d \mu^{\alpha-1} r^{\omega(\alpha)} (\ln r)^d d\alpha.$$

**Пример.** С помощью моделирования сформированы массивы относительных наработок (вероятность безотказной работы определяется за время  $t_0 = 100$  часов)  $\{r1_i\}$  и  $\{r2_i\}$  при двух отказах ( $d = 2$ ), т.е. массив состоит из двух элементов:

$$r00 := \text{rweibull}(10, 2) \cdot 1000 \quad r1 := \frac{r00}{100}$$

$$r0 := \text{rweibull}(2, 2) \cdot 1000 \quad r2 := \frac{r0}{100}$$

$$Rn := 0.95 \quad a1 := 1 \quad a2 := 2 \quad d := 2 \quad \gamma := 0.9 \quad t0 := 100$$

$$w(a) := \sum_{i=1}^{10} (r1_i)^a + \sum_{i=1}^d (r2_i)^a \quad m := \prod_{i=1}^d r2_i$$

$$R := \frac{\int_{Rn}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)+1} \cdot \ln(r)^d da dr}{\int_{Rn}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)} \cdot \ln(r)^d da dr} \quad R = 0.987417$$

$$D(R) := \frac{\int_{Rn}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)+2} \cdot \ln(r)^d da dr}{\int_{Rn}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)} \cdot \ln(r)^d da dr} - R^2 \quad S(R) := \sqrt{D(R)}$$

$$S(R) = 9.820874 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\int_{0.973185}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)} \cdot \ln(r)^d da dr}{\int_{Rn}^1 \int_{a1}^{a2} a^d \cdot m^{a-1} \cdot r^{w(a)} \cdot \ln(r)^d da dr} = 0.900002 \quad R\gamma := 0.973185$$

Априорно известно, что вероятность безотказной работы равномерно распределена в интервале  $[0,95; 1]$ , а параметр формы  $\alpha$  – в интервале  $[1, 2]$ . Расчет оценок  $R^*$ ,  $D[R^*]$  и  $\underline{R}_\gamma$  при  $\gamma = 0.9$  проведен в соответствии с полученными выше соотношениями.

### 3.2.3. Распределение Пуассона

Пусть во время эксплуатационного контроля бортовых систем управления фиксируется выборка количеств отказов  $k_1, k_2, \dots, k_m$  (отказы по  $m$  самолетам). Будем считать, что отказы будут достаточно редкими и могут быть описаны распределением Пуассона [26], т.е. число отказов, появляющихся в течение некоторого интервала времени определяется соотношением:

$$P(k, \Lambda) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda},$$

где  $k$  – количество отказов,  $\Lambda$  – математическое ожидание (среднее число) количества отказов в данном интервале времени, например, за время  $T$ , т.е.  $\Lambda = \lambda T$ , где  $\lambda$  – среднее количество отказов в единицу времени (средняя плотность или интенсивность отказов).

Тогда, если  $k_1, k_2, \dots, k_m$  – случайная выборка из распределения Пуассона, то функция правдоподобия при некотором значении параметра  $\Lambda$  будет равна:

$$f(k_1, \dots, k_m / \Lambda) = \prod_{i=1}^m \frac{\Lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\Lambda} = \frac{\Lambda^k}{\prod_{i=1}^m k_i!} e^{-\Lambda m}, \quad k = \sum_{i=1}^m k_i.$$

Чтобы провести байесовскую оценку, нужно задать вид априорной плотности вероятностей  $h(\Lambda)$  для параметра  $\Lambda$ , который может быть любым действительным положительным числом. В качестве сопряженного априорного распределения параметра  $\Lambda$  можно взять плотность гамма – распределения

$$h(\Lambda) = \frac{\beta^\alpha \Lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\Lambda}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Варьируя значениями  $\alpha$  и  $\beta$  можно генерировать разнообразные виды кривых, т.е. можно подобрать такой вид

кривой, которая будет отражать размещение и разброс действительных априорных представлений. Параметры априорного распределения могут быть представлены как количество отказов ( $\alpha$ ) и время ( $\beta T$ ), в течении которого эти отказы произошли в априорном смысле. Если параметры априорной надежности представлены, например, некоторым средним значением  $m_\Lambda$  и разбросом  $\delta_\Lambda^2$ , то параметры  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть рассчитаны по среднему значению  $\frac{\alpha}{\beta}$  и дисперсии  $\frac{\alpha}{\beta^2}$  гамма – распределения. В этом случае:

$$\alpha = \frac{m_\Lambda^2}{\delta_\Lambda^2}, \quad \beta = \frac{m_\Lambda}{\delta_\Lambda^2},$$

где  $\delta_\Lambda$  может быть предварительно рассчитана как  $\frac{1}{6}$  предполагаемого интервала для  $\Lambda$ .

Для конкретно выбранных  $\alpha$  и  $\beta$  теорема Байеса определяет апостериорную плотность параметра  $\Lambda$  как

$$\begin{aligned} f(\Lambda / k_1, \dots, k_m) &= \frac{\Lambda^k e^{-\Lambda m} \Lambda^{\alpha-1} e^{-\beta \Lambda}}{\int_0^\infty \Lambda^k e^{-\Lambda m} \Lambda^{\alpha-1} e^{-\beta \Lambda} d\Lambda} = \\ &= \frac{\Lambda^{k+\alpha-1} e^{-\Lambda(\beta+m)}}{\int_0^\infty \Lambda^{k+\alpha-1} e^{-\Lambda(\beta+m)} d\Lambda} = \left| \int_0^\infty x^{a-1} e^{-px} dx = \Gamma(a) p^{-a} \right| = \\ &= \frac{(\beta+m)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha)} \Lambda^{k+\alpha-1} e^{-\Lambda(\beta+m)} \end{aligned}$$

которая также является гамма – распределением с новыми параметрами  $\alpha' = k + \alpha$ ,  $\beta' = \beta + m$ .

Апостериорная оценка определяется как математическое ожидание апостериорного распределения при квадратичной функции потерь:

$$\Lambda^* = \int_0^{\infty} \Lambda f(\Lambda / k_1, \dots, k_m) d\Lambda = \frac{(\beta + m)^{k+\alpha}}{\Gamma(k + \alpha)} \int_0^{\infty} \Lambda^{k+\alpha} e^{-\Lambda(\beta+m)} d\Lambda =$$

$$= \frac{(\beta + m)^{k+\alpha}}{\Gamma(k + \alpha)} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{(\beta + m)^{k+\alpha+1}} = \frac{k + \alpha}{\beta + m}$$

Если задать некоторое значение  $P_{\text{тр}}$  требуемой вероятности безотказной работы за время  $t_0$ , то можно определить доверительную вероятность  $\gamma$ , с которой контролируемый параметр надежности  $P$  принадлежит интервалу  $[P_{\text{тр}}, 1]$ , такому, что  $P > P_{\text{тр}}$ . Тогда

$$\Pr\{P > P_{\text{тр}}(t_0)\} = \Pr\{\Lambda \leq \Lambda_1\} = \int_0^{\Lambda_1} f(\Lambda / k_1, \dots, k_m) d\Lambda,$$

так что

$$\frac{(\beta + m)^{k+\alpha}}{\Gamma(k + \alpha)} \int_0^{\Lambda_1} \Lambda^{k+\alpha+1} e^{-\Lambda(\beta+m)} d\Lambda = \gamma$$

Если предположить, что  $\Lambda_1$ , определяется как  $\Lambda_1 = -\ln P_{\text{тр}}$ , то в табл.3.7 приведены расчеты доверительной вероятности  $\gamma$  для случая, когда априорная информация о надежности системы представлена априорной плотностью распределения  $h(\Lambda / \alpha, \beta)$  с параметрами  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 100$  (рис.3.7).

Таблица 3.7

$\beta + m$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 0$	$k = 1$
	$P_{\text{тр}} = 0,95$		$P_{\text{тр}} = 0,95$	
150	0,996	0,9826	0,8053	0,5836
175	0,9987	0,9936	0,8678	0,6857
200	0,9996	0,9978	0,9113	0,7678
225	0,99988	0,9992	0,9411	0,8315
250	0,99996	0,9997	0,9612	0,8796
300	0,999997	0,99997	0,9835	0,9407

$$a := 2 \quad b := 100 \quad \Lambda := 0,0001..0.1$$

$$h(\Lambda) := \frac{b^a \cdot \Lambda^{a-1} \cdot e^{-b \cdot \Lambda}}{\Gamma(a)}$$

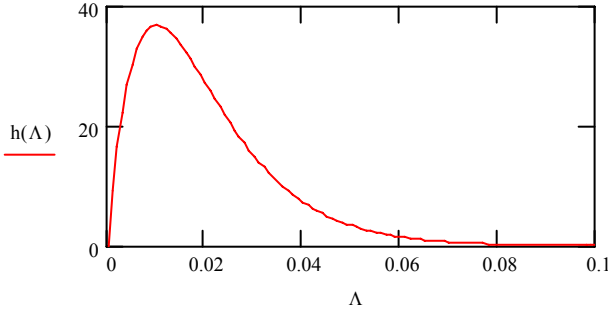


Рис.3.7. График априорного распределения параметра  $\Lambda$

### 3.2.4. DN – распределение

Функция распределения записывается в виде:

$$F(t; a, v) = \Phi \left[ \frac{at-1}{v\sqrt{at}} \right] + e^{\frac{2}{v^2}} \Phi \left[ -\frac{at+1}{v\sqrt{at}} \right],$$

а плотность распределения определяется выражением

$$f(t; a, v) = \frac{1}{vt\sqrt{2\pi at}} \exp \left\{ -\frac{(1-at)^2}{2v^2 at} \right\},$$

где  $v$  – коэффициент вариации,  $a$  – некоторая константа.

Обозначим вероятность безотказной работы в течение некоторого интервала времени  $T$  как

$$P\{\xi > T\} = R(t) = R,$$

где  $\xi$  – случайное время безотказного функционирования системы. Тогда

$$P\{\xi > T\} - 1 - P\{\xi < T\} = 1 - F(t; a, v) = R(T; a, v),$$

так что

$$R(t; a, v) = 1 - \Phi \left[ \frac{aT-1}{v\sqrt{aT}} \right] + e^{\frac{2}{v^2}} \Phi \left[ -\frac{aT+1}{v\sqrt{aT}} \right]$$

Решая полученное уравнение относительно коэффициента  $a$  для заданных значений  $T$  и  $v$  (например, используя алгоритм метода наименьших квадратов в диапазоне изменения  $R$  от 0,9 до 0,9999), получаем уравнение аппроксимирующей зависимости

$$\tilde{a}(R) = k_0 + k_1 R + k_2 R^2 + \dots + k_m R^m$$

с интерполяцией между узловыми точками [27].

Для заданных  $v$  и  $T$  функция правдоподобия запишется в виде:

$$f\left(\vec{\tau} / R\right) \propto \prod_{i=1}^d \left\{ \frac{1}{v t_i \sqrt{2\pi \tilde{a}(R) t_i}} \exp \left[ -\frac{\left(1 - \tilde{a}(R) t_i\right)^2}{2v^2 \tilde{a}(R) t_i} \right] \right\} \times \\ \times \prod_{j=1}^q \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{\tilde{a}(R) t_j - 1}{v \sqrt{\tilde{a}(R) t_j}} \right] - e^{\frac{2}{v^2}} \Phi \left[ -\frac{\tilde{a}(R) t_j + 1}{v \sqrt{\tilde{a}(R) t_j}} \right] \right\} \propto L\left(\vec{\tau}, R\right).$$

Пусть априорная информация о параметре надежности  $R$  предполагает его равномерное распределение в интервале  $[R_H, R_B]$ , так что

$$h(R) = \frac{1}{R_B - R_H}$$

Тогда оценка параметра надежности  $R^*$  при квадратичной функции потерь определяется выражением

$$R^* = \frac{\int_{R_H}^{R_B} RL\left(\vec{\tau}, R\right) dR}{\int_{R_H}^{R_B} L\left(\vec{\tau}, R\right) dR},$$

а апостериорная оценка дисперсии (точность оценки  $R^*$ ) равна:

$$D(R^*) = \frac{\int_{R_H}^{R_B} R^2 L(\overleftarrow{\tau}, R) dR}{\int_{R_H}^{R_B} L(\overleftarrow{\tau}, R) dR} - (R^*)^2.$$

Нижняя граница  $\underline{P}_\gamma$  байесовского доверительного интервала с заданным уровнем доверия  $\gamma$  определяется из решения уравнения:

$$\int_{\underline{R}_\gamma}^{R_B} L(\overleftarrow{\tau}, R) dR = \gamma \int_{R_H}^{R_B} L(\overleftarrow{\tau}, R) dR.$$

**Пример 1.** В процессе эксплуатационного контроля зафиксированы следующие наработки (в часах):

$$\begin{aligned} \overleftarrow{t} &= \{2560, 2900\}, \quad d = 2 \\ t &= \{2100, 3000, 4500, 3200, 2700, 3500, 4200, 2900, 3350, 3900\} \\ q &= 10, \end{aligned}$$

т.е. два испытания завершились отказом, а десять – приостановками.

Априорно известно, что вероятность безотказной работы  $R$  равномерно распределена в промежутке  $[0,97; 1]$ , а коэффициент вариации  $v$  можно принять равным 1. Определить апостериорную оценку  $R^*$  за время  $T = 1000$  час.

В соответствии с вышеприведенными соотношениями для расчета оценок получаем:

$$R^* = 0,9896.$$

Нижняя граница доверительного интервала с уровнем доверия  $\gamma = 0,95$  соответственно равна  $\underline{P}_\gamma = 0,9733$ :

В табл.3.8 приведены результаты расчета оценки  $R^*$  на основании приведенных выше результатов испытаний для различных значений числа отказов  $d = 0, 1, 2$  и значений нижней границы  $\underline{R}$  априорной плотности распределения.

Таблица 3.8

$d$	$\underline{R} = 0$	$\underline{R} = 0,97$	$\underline{R} = 0,99$
0	0,99021	0,99339	0,99678
1	0,98622	0,99122	0,99601
2	0,98346	0,98963	0,99547

**Пример 2.** Текущая информация эксплуатационного контроля представлена в табл.3.9.

Таблица 3.9

$d$	$\overline{t}^0$	$\overline{t}$
0	–	2100, 3000, 4500, 3200, 2700, 3500, 4200, 2900, 3300, 3900
1	2560	2100, 3000, 4500, 3200, 2700, 3500, 4200, 2900, 3300, 3900
2	2560, 2900	2100, 3000, 4500, 3200, 2700, 3500, 4200, 2900, 3300, 3900

Для заданного времени наработки  $T = 1000$  час. И заданном коэффициенте вариации  $v = 1$  определить оценку вероятности безотказной работы  $R^*$  для значений  $d = 0, 1, 2$ .

1. Рассмотрим случай, когда априорная информация задана бета – распределением с параметрами  $a = 49$  и  $b = 1, 2, 3$  на интервале  $[0, 1]$ :

$$h(P) = B(a, b)P^{a-1}(1-P)^{b-1} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}P^{a-1}(1-P)^{b-1}.$$

Оценка параметра  $R^*$  при квадратичной функции потерь определяется в соответствии с выражением:

$$R^* = \frac{\int_0^1 RR^{a-1}(1-R)^{b-1}L\left(\overline{\tau}, R\right)dR}{\int_{R_H}^{R_B} R^{a-1}(1-R)^{b-1}L\left(\overline{\tau}, R\right)dR}.$$

Результаты расчета приведены в табл.3.10.



Таблица 3.10

$d$	$a = 49$		
	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$
0	0,99484	0,98592	0,97598
1	0,99271	0,98384	0,97401
2	0,99126	0,98230	0,97265

2. Априорная информация задана обобщенным бета – распределением на интервале  $[\underline{P}, \bar{P}] = [\underline{R}, 1]$ . Оценка  $R^*$  определяется из выражения:

$$R^* = \frac{\int_0^1 R \left( \frac{R - \underline{R}}{1 - \underline{R}} \right)^{a-1} \left( \frac{1 - R}{1 - \underline{R}} \right)^{b-1} L(\tau, R) dR}{\int_{R_H}^{R_B} \left( \frac{R - \underline{R}}{1 - \underline{R}} \right)^{a-1} \left( \frac{1 - R}{1 - \underline{R}} \right)^{b-1} L(\tau, R) dR}.$$

Результаты расчета оценки  $R^*$  при  $\underline{R} = 0,99$  приведены в табл.3.11.

Таблица 3.11

$d$	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$
0	0,99984	0,99966	0,99949
1	0,99978	0,99961	0,99943
2	0,99974	0,99956	0,99938

### 3.3. Непараметрическая оценка надежности

Рассмотрим непараметрический байесовский подход к оценке надежности, который может быть применен, например, при эксплуатационном контроле надежности бортовых систем управления. Требования к надежности легко представить двумя альтернативными классами, разбивая пространство возможных состояний на два интервала:

$$\rho_1 = [P_1, 1]; \quad \rho_2 = [0, P_2], \quad P_1 > P_{тр} > P_2.$$

Текущая информация о надежности каждого объекта контроля накапливается в базе данных (в общем случае по каждому самолету в отдельности), при этом достаточной статистикой

является количество отказов  $d$ . Статистика имеет биномиальное распределение, так что функция правдоподобия имеет вид

$$f(d/n, P) = C_n^{n-d} P^{n-d} (1-P)^d .$$

Как уже отмечалось, достаточная статистика определяет тот факт, что для вычисления апостериорного распределения параметра  $P$  исходя из любого априорного распределения, достаточно знать распределение этой статистики, а не значения определенного параметра. Действительно, применительно к теореме Байеса любое априорное распределение может быть использовано в сочетании с любой функцией правдоподобия, хотя сопряженные априорные распределения приводят к простым оценкам.

### 3.3.1. Априорное бета-распределение.

В тех случаях, когда априорная информация, полученная по результатам предыдущих испытаний (например, путем статистического моделирования), представляется в бинарном виде (успех или неуспех, т.е. отказ произошел или не произошел), то ее математическим описанием может быть плотность бета - распределения с параметрами  $a, b$ , которое хорошо согласуется с функцией правдоподобия [17]:

$$h(P) = B(a, b) P^{a-1} (1-P)^{b-1} ,$$

где

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} .$$

Необходимо отметить, что аппроксимация априорного закона распределения бета – распределением приводит к получению «пессимистических» оценок, так что получаемые оценки не будут завышенными [34]. Использование наиболее неблагоприятного априорного закона распределения при недостоверной априорной информации гарантирует точность полученных оценок.

Апостериорное распределение в соответствии с теоремой Байеса имеет вид:

$$\begin{aligned}
 h(P/d) &= \frac{h(P)f(d/n, P)}{\int_{\rho} h(P)f(d/n, P)dP} = \\
 &= \frac{P^{n-d+a-1}(1-P)^{d+b-1}}{\int_0^1 P^{n-d+a-1}(1-P)^{d+b-1} dP} = \\
 &= \left| \int_0^1 P^{n-d+a-1}(1-P)^{d+b-1} dp = \frac{(n-d+a-1)!(d+b-1)!}{(n+a+b-1)!} \right| = \\
 &= \frac{(n+a+b-1)!}{(n-d+a-1)!(d+b-1)!} P^{n-d+a-1}(1-P)^{d+b-1} = \\
 &= \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(n-d+a)\Gamma(d+b)} P^{n-d+a-1}(1-P)^{d+b-1}.
 \end{aligned}$$

Принимая  $n-d+a = a'$ ,  $b+d = b'$ , получаем

$$f(P/d) = \frac{\Gamma(a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} P^{a'-1}(1-P)^{b'-1} = B(a', b') P^{a'-1}(1-P)^{b'-1},$$

что также является бета – распределением с соответствующими параметрами  $a'$  и  $b'$ .

Параметры априорного распределения  $a$  и  $b$  можно трактовать следующим образом:  $b$  – количество отказов на предыдущих этапах испытаний или в результате моделирования (статистического или аналитического), так что  $a + b = n$ . Чем больше уверенности в потенциальной точности системы управления после проведения предварительных испытаний всех видов, тем больше концентрация апостериорной информации, рис.3.8

$$n := 50 \quad a := 19 \quad b := 1$$

$$f(p)(d = 1) \quad f1(p)(d = 2) \quad f2(p)(d = 3)$$

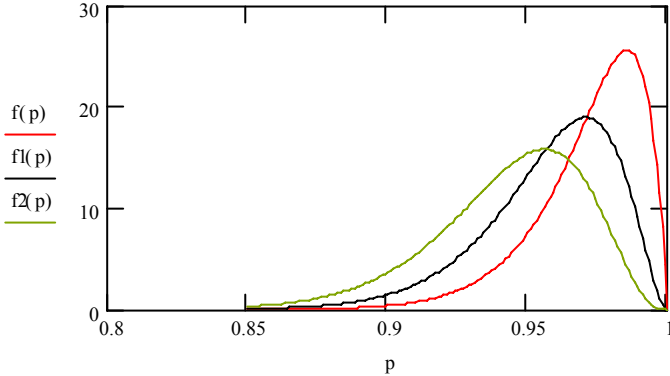


Рис.3.8. Графики апостериорной плотности

Если существует практическая ситуация полностью определенной априорной информации, когда известны точечная априорная оценка  $R_{0ap}$  и погрешность ее определения в виде априорной дисперсии  $\sigma_{ap}^2$ , то параметры априорного бета – распределения могут быть определены с использованием известных соотношений для моментов распределения [5, 62]. Так для бета – распределения с плотностью

$$h(r) = B(\alpha, \beta) r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1}, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

где

$$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx,$$

моменты распределения равны:

$$M[r] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad D[r] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Если  $M[r] = R_{0ap}$ ,  $D[r] = \sigma_{ap}^2$ , то искомые параметры априорного распределения равны соответственно:

$$a = R_{0ap} \left[ \frac{R_{0ap}(1 - R_{0ap})}{\sigma_{ap}^2} - 1 \right],$$

$$b = (1 - R_{0ap}) \left[ \frac{R_{0ap}(1 - R_{0ap})}{\sigma_{ap}^2} - 1 \right].$$

Определим байесовскую оценку  $P^*$  при минимуме квадратичных потерь [17, 43]:

$$P^* = \int_0^1 P f(P/d) dP = B(a', b') \int_0^1 P^{a'-1} (1-P)^{b'-1} dP =$$

$$= \frac{\Gamma(a' + b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} \frac{a'!(b'-1)!}{(a'+b')!} = \frac{a'}{a'+b'} = \frac{n-d+a}{n+b+a}.$$

Точность оценки определяется выражением:

$$\sigma_P^2 = \int_0^1 P^2 f(P/d) dP - (P^*)^2 =$$

$$= \frac{(n-d+a+1)(n-d+a)}{(n+b+a+1)(n+a+b)} - \frac{(n-d+a)^2}{(n+a+b)^2} =$$

$$= \frac{(b+d)(n+a-d)}{(n+a+b+1)(n+a+b)^2}.$$

Зная апостериорную плотность можно определить доверительную вероятность  $\gamma$ , с которой контролируемый параметр надежности  $P$  принадлежит допустимой области  $\rho_1 = [P_1, 1]$  такой, что  $P_1 > P_{\text{тр}}$ . Для этого достаточно проинтегрировать апостериорную плотность по этой области:

$$\Pr\{P \geq P_1\} = \int_{\rho_1} f(P/d) dP = B(a', b') \int_{\rho_1} P^{a'-1} (1-P)^{b'-1} dP =$$

$$= \frac{\Gamma(a' + b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} \int_{P_\gamma}^1 P^{a'-1} (1-P)^{b'-1} dP = \gamma.$$

Доверительная вероятность  $\gamma$  определяет меру уверенности в том, что  $P \in [P_1, 1]$  при данных результатах эксплуатационного контроля объемом  $n$  и соответствующей априорной информации.

Представляет интерес оценить надежность системы управления в процессе эксплуатационного контроля для подтверждения ее соответствия заданным требованиям в зависимости от уровня априорной информации и уровня доверительной вероятности. В табл.3.12 приведены результаты расчета  $\underline{P}_\gamma$  для случая, когда априорная информация задана параметрами  $a = 49$ ,  $b = 1$ , а текущая информация определяется объемом  $n$  и количеством отказов  $d = 0, 1, 2$ . Доверительная вероятность  $\gamma = 0, 95; 0,99$  (нижний ряд).

Таблица 3.12

$n$	Вероятность $\underline{P}_\gamma$		
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
10	0,9505	0,9220	0,8970
	0,9249	0,8928	0,8650
20	0,9575	0,9330	0,9115
	0,9353	0,9076	0,8837
30	0,9627	0,9414	0,9224
	0,9434	0,9189	0,8978
40	0,9670	0,9477	0,9310
	0,9496	0,9277	0,9089
50	0,9702	0,9529	0,9379
	0,9545	0,9348	0,9178
100	0,9801	0,9685	0,9584
	0,9696	0,9563	0,9448
200	0,9881	0,9811	0,9749
	0,9817	0,9736	0,9667

### 3.3.2. Априорное равномерное распределение

Получим оценку надежности при равномерном априорном распределении ( $0 \leq P \leq 1$ ), которое часто называют тривиальным распределением, когда об оцениваемом параметре ничего неизвестно. В этом случае плотность априорного распределения равна единице.

Для функции правдоподобия

$$f(d/n, P) = C_n^{n-d} P^{n-d} (1-P)^d$$

апостериорная плотность записывается в виде:

$$\begin{aligned} f(P/d) &= \frac{h(P)f(d/n, P)}{\int_0^1 h(P)f(d/n, P)dP} = \frac{P^{n-d} (1-P)^d}{\int_0^1 P^{n-d} (1-P)^d dP} = \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-d+1)\Gamma(d+1)} P^{n-d} (1-P)^d. \end{aligned}$$

Байесовская оценка надежности  $P^*$  в этом случае равна:

$$\begin{aligned} P^* &= \int_0^1 P f(P/d) dP = \frac{\int_0^1 P^{n-d+1} (1-P)^d dP}{\int_0^1 P^{n-d} (1-P)^d dP} = \\ &= \frac{(n-d+1)! d!}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{(n-d)! d!} = \frac{n-d+1}{n+2}, \end{aligned}$$

а точность оценки определяется выражением:

$$\begin{aligned} D(P^*) &= \int_0^1 P^2 f(P/d) dP - (P^*)^2 = \\ &= \frac{(n-d+2)! d!}{(n+3)!} \frac{(n+1)!}{(n-d)! d!} - \left( \frac{n-d+1}{n+2} \right)^2 = \frac{(n-d+1)(d+1)}{(n+2)^2 (n+3)}. \end{aligned}$$

Отметим, что бета – распределение с параметрами  $a = 1$ ,  $b = 2$  вырождается в тривиальное равномерное, так что  $h(P) = 1$ .

Доверительная вероятность  $\gamma$ , с которой параметр  $P$  принадлежит допустимой области  $\rho_1 = [P_1, 1]$ ,  $P_1 > P_{тр}$ , определяется выражением:

$$\gamma = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-d+1)\Gamma(d+1)} \int_{\underline{P}_\gamma}^1 P^{n-d} (1-P)^d dP.$$

В табл. 3.13 приведены результаты расчета  $\underline{P}_\gamma$  для случая, когда текущая информация определяется объемом  $n$  и количеством отказов  $d = 0, 1, 2$  (при доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ ).

Таблица 3.13

$n$	$\underline{P}_\gamma$		
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
10	0,762	0,636	0,531
20	0,867	0,793	0,729
30	0,908	0,856	0,810
40	0,929	0,889	0,854
50	0,943	0,910	0,881
100	0,971	0,962	0,948
200	0,985	0,977	0,969

Очевидно, что тривиальная априорная информация существенно уменьшает апостериорную вероятность по сравнению со случаем априорного бета - распределения при тех же значениях  $n$  и  $\gamma$ .

Рассмотрим случай нетривиального априорного равномерного распределения, когда  $P_H = \underline{P} \leq P \leq \bar{P} = P_B$ , так что

$$h(P) = \frac{1}{P_B - P_H} = \frac{1}{\bar{P} - \underline{P}}.$$

Этот случай является характерным для многих практических ситуаций, в которых разработчик, используя предшествующий опыт, может гарантировать, что значение вероятности безотказной работы создаваемой системы управления не выходит за пределы  $[\underline{P}, \bar{P}]$ .



Апостериорная плотность  $f(P/d)$  имеет вид:

$$f(P/d) = \frac{f(d/n, P)h(P)}{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} f(d/n, P)h(P)dP} = \frac{P^{n-d}(1-P)^d}{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d}(1-P)^d dP}.$$

Байесовская оценка  $P^*$  определяется выражением:

$$P^* = \frac{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} Pf(P/d)dP}{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d}(1-P)^d dP} = \frac{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d+1}(1-P)^d dP}{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d}(1-P)^d dP},$$

а ее дисперсия равна:

$$D(P^*) = \frac{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d+2}(1-P)^d dP}{\int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d}(1-P)^d dP} - (P^*)^2.$$

Нижняя доверительная граница  $\underline{P}_\gamma$  определяется из уравнения:

$$\int_{\underline{P}_\gamma}^{\overline{P}} P^{n-d}(1-P)^d dP = \gamma \int_{\underline{P}}^{\overline{P}} P^{n-d+1}(1-P)^d dP.$$

В табл.3.14 приведены результаты расчета  $\underline{P}_\gamma$  для различных значений  $n$  и числа отказов  $d = 0, 1, 2$  (для  $\overline{P} = 1, \underline{P} = 0,98$ ).

### 3.3.3. Априорное обобщенное бета-распределение

Рассмотрим случай априорного распределения, задаваемого обобщенным бета – распределением, учитывающим возможные пределы для вероятности  $P$  в виде интервала  $[\underline{P}, \overline{P}]$ . Тогда вводя переменную

$$P' = \frac{P - \underline{P}}{\overline{P} - \underline{P}},$$

можно записать выражение для априорной плотности распределения:

$$h(P) = \frac{B(a, b)}{\overline{P} - \underline{P}} \left[ \frac{P - \underline{P}}{\overline{P} - \underline{P}} \right]^{a-1} \left[ 1 - \frac{P - \underline{P}}{\overline{P} - \underline{P}} \right]^{b-1}.$$

Таблица 3.14

n	$\underline{P}_\gamma$		
	d = 0	d = 1	d = 2
10	0,9811	0,98054	0,98035
20	0,9812	0,98058	0,98037
30	0,9813	0,98062	0,98039
40	0,9815	0,98066	0,98041
50	0,9817	0,98072	0,98044
100	0,9828	0,98107	0,98060
200	0,9866	0,98258	0,98123

Для случая высоконадежных систем можно считать, что  $\overline{P} = 1$  и

$$h(P) = \frac{B(a, b)}{1 - \underline{P}} \left[ \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{a-1} \left[ 1 - \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{b-1}.$$

Для функции правдоподобия

$$f(d / n, P) = C_n^{n-d} P^{n-d} (1 - P)^d$$

апостериорная плотность может быть записана в виде

$$f(P / d) = \frac{B(a', b')}{1 - \underline{P}} \left[ \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{a'-1} \left[ 1 - \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{b'-1},$$

где как и ранее,  $a' = n - d + a$ ,  $b' = b + d$ .

Нижняя доверительная граница  $\underline{P}_\gamma$  определяется из уравнения:

$$\frac{B(a', b')}{1 - \underline{P}} \int_{\underline{P}}^1 \left[ \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{a' - 1} \left[ 1 - \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{b' - 1} dP = \gamma.$$

Определим байесовскую оценку надежности  $P^*$  в соответствии с общим выражением:

$$P^* = \int_{\underline{P}}^1 Pf(P/d)dP = \frac{B(a', b')}{1 - \underline{P}} \int_{\underline{P}}^1 P \left[ \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{a' - 1} \left[ 1 - \frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} \right]^{b' - 1} dP.$$

Сделаем замену переменной:

$$\frac{P - \underline{P}}{1 - \underline{P}} = u, \quad \frac{1}{1 - \underline{P}} dP = du, \quad P = \underline{P} + u(1 - \underline{P}).$$

При  $P = \underline{P}$  переменная  $u = 0$ , а при  $P = 1$  переменная  $u = 1$ , так что ее пределы изменения находятся в интервале от 0 до 1.

Таким образом:

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{B(a', b')}{1 - \underline{P}} (1 - \underline{P}) \int_0^1 [\underline{P} + u(1 - \underline{P})] u^{a' - 1} (1 - u)^{b' - 1} du = \\ &= B(a', b') \underline{P} \int_0^1 u^{a' - 1} (1 - u)^{b' - 1} du + \\ &+ B(a', b') (1 - \underline{P}) \int_0^1 u^{a'} (1 - u)^{b' - 1} du = \\ &= B(a', b') \left\{ \underline{P} \frac{\Gamma(a') \Gamma(b')}{\Gamma(a' + b')} + (1 - \underline{P}) \frac{a'!(b' - 1)!}{(a' + b')!} \right\} = \\ &= \underline{P} + (1 - \underline{P}) \frac{\Gamma(a' + b')}{\Gamma(a') \Gamma(b')} \frac{\Gamma(a' + 1) \Gamma(b')}{\Gamma(a' + b' + 1)} = \\ &= \underline{P} + (1 - \underline{P}) \frac{a'}{a' + b'} = \underline{P} + (1 - \underline{P}) \frac{n - d + a}{n + a + b} \end{aligned}$$

Следовательно, апостериорная оценка вероятности безотказной работы равна:

$$P^* = \underline{P} + (1 - \underline{P}) \frac{n - d + a}{n + a + b}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке точности величины  $P^*$  в виде ее дисперсии:

$$\begin{aligned} D(P^*) &= \int \underline{P}^2 f(P/d) dP - (P^*)^2 = \\ &= (1 - \underline{P})^2 \frac{(b+d)(n+a-d)}{(n+a+b)^2(n+a+b+1)}. \end{aligned}$$

В табл.3.15 приведены результаты расчета  $\underline{P}_\gamma$  (при  $d = 0$ ) в зависимости от объема  $n$ , величины  $\underline{P}$  и доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ . Априорная информация :  $a = 49, b = 1$ .

$$n := 100 \quad d := 0 \quad a := 49 \quad b := 1 \quad P_n := 0.99$$

$$a0 := n - d + a \quad b0 := b + d \quad a0 = 149 \quad b0 = 1$$

$$A := \frac{\Gamma(a0 + b0)}{\Gamma(n - d + a) \cdot \Gamma(d + b)}$$

$$F := \frac{1}{1 - P_n} \cdot A \cdot \int_{0.9998009}^1 \left[ \left( \frac{p - P_n}{1 - P_n} \right)^{a0-1} \cdot \left( 1 - \frac{p - P_n}{1 - P_n} \right)^{b0-1} \right] dp$$

$$F = 0.9500394 \quad P_\gamma := 0.9998009$$

Таблица 3.15

n	$\underline{P}_\gamma$			
	d = 0			
	$\underline{P} = 0,9$	$\underline{P} = 0,95$	$\underline{P} = 0,98$	$\underline{P} = 0,99$
10	0,99505	0,99752	0,99901	0,99951
20	0,99575	0,99836	0,99915	0,99958
50	0,99702	0,99885	0,99940	0,99970
100	0,99801	0,99923	0,99960	0,99980
200	0,99880	0,99940	0,99976	0,99988

Очевидно, что параметры априорного распределения оказывают влияние на апостериорное распределение совместно с получаемыми выборочными данными в виде функции правдоподобия.

В частности, сравнивая результаты расчета  $\underline{P}_\gamma$ , полученные для двух различных априорных распределений: равномерного и бета – распределения на интервале  $[\underline{P}, 1]$ , можно видеть, что априорная информация, описываемая обобщенным бета – распределением, приводит к существенно более высоким значениям оценок вероятности безотказной работы вследствие большей концентрации априорной информации.

Представляет интерес сравнение байесовских оценок при использовании двух априорных распределений: равномерного и бета - распределения в интервале  $[0,1]$ .

Очевидно, что для равномерного распределения среднее значение и дисперсия параметра определяются выражениями:

$$P_{ap} = M[P] = \int_0^1 Ph(P)dP = |h(P) = 1| = \int_0^1 PdP = \frac{1}{2},$$

$$D_{ap} = D(P) = \int_0^1 \left(P - \frac{1}{2}\right)^2 h(P)dP = \frac{1}{12}.$$

Запишем априорное бета – распределение в виде

$$h(P) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} P^{a-1}(1-P)^{b-a-1},$$

так что:

$$P_{ap} = M(P) = \int_0^1 Ph(P)dP = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 P^a (1-P)^{b-a-1} dP =$$

$$P_{ap} = M(P) = \int_0^1 Ph(P)dP = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+1)} = \frac{a}{b},$$

$$D_{ap} = D(P) = \int_0^1 \left(P - \frac{a}{b}\right)^2 h(P)dP = \int_0^1 P^2 h(P)dP - \left(\frac{a}{b}\right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+2)} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \\
&= \frac{a(a+1)}{b(b+1)} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a(b-a)}{b^2(b+1)}.
\end{aligned}$$

Из полученных соотношений легко определить параметры распределения:

$$\begin{aligned}
a &= bP_{ap} = P_{ap} \left[ \frac{P_{ap}(1-P_{ap})}{D_{ap}} - 1 \right], \\
b &= \frac{P_{ap}(1-P_{ap})}{D_{ap}} - 1.
\end{aligned}$$

Для функции правдоподобия

$$f(d/n, P) = C_n^{n-d} P^{n-d} (1-P)^d$$

апостериорная плотность запишется в виде:

$$\begin{aligned}
f(P/d) &= \frac{h(P)f(d/n, P)}{\int_0^1 h(P)f(d/n, P)dP} = \\
&= \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(n-d+a)\Gamma(b+d-a)} P^{n-d+a-1} (1-P)^{d+b-a-1}.
\end{aligned}$$

Тогда средняя апостериорная оценка параметра  $P$  и ее дисперсия определяются как:

$$\begin{aligned}
P^* &= \int_0^1 P f(P/d) dP = \frac{n-d+a}{n+b}, \\
D^* &= \int_0^1 P^2 f(P/d) dP - (P^*)^2 = \frac{(n-d+a)(n+b-a)}{(n+b)^2(n+b+1)}.
\end{aligned}$$

Эквивалентное равномерному распределению  $(P_{ap} = \frac{1}{2}, D_{ap} = \frac{1}{12})$  бета - распределение будет иметь соответствующие параметры:

$$b = \frac{P_{ap}(1 - P_{ap})}{D_{ap}} - 1 = 2, \quad a = bP_{ap} = 1,$$

а оценка  $P^*$  равна;

$$P^* = \frac{n - d + a}{n + b} = \frac{n - d + 1}{n + 2}.$$

Второй начальный момент равен:

$$m_2 = D_{ap} + P_{ap}^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a(b - a)}{b^2(b + 1)} = \frac{1}{3}.$$

Определим средний риск (среднюю дисперсию) байесовской процедуры:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\min} &= \int_0^1 h(P) \sum_{d=0}^n [P - P^*]^2 f(d/n, P) dP = \\ &= \int_0^1 h(P) \sum_{d=0}^n \left[ P - \frac{n - d + a}{n + b} \right]^2 f(d/n, P) dP = \\ &= \int_0^1 h(P) \left[ P^2 - \frac{2P(a + nP)}{n + b} + \frac{a^2 + 2anP + nP - nP^2 + n^2 P^2}{(n + b)^2} \right] dP. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 Ph(P) dP = \frac{a}{b} = P_{ap}, \quad \int_0^1 P^2 h(P) dP = D_{ap} + (P_{ap})^2 = m_2,$$

получаем:

$$\bar{Q}_{\min} = \frac{m_2(b^2 - n) - P_{ap}(2ab - n) + a^2}{(n + b)^2}.$$

Выразим средний риск через дисперсию априорного распределения  $D_{ap}$ . Тогда:

$$\bar{Q}_{\min} = \frac{(D_{ap} + P_{ap}^2)(b^2 - n) - P_{ap}(2b^2 P_{ap} - n) + b^2 P_{ap}}{(b + n)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D_{ap}(b^2 - n) - P_{ap}^2 n + P_{ap}^2 b^2 - 2P_{ap}^2 b^2 + nP_{ap} + P_{ap}^2 b^2}{(b+n)^2} = \\
&= \frac{D_{ap}(b^2 - n) + nP_{ap}(1 - P_{ap})}{(b+n)^2}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$b = \frac{P_{ap}(1 - P_{ap})}{D_{ap}} - 1$$

и, следовательно,

$$P_{ap}(1 - P_{ap}) = D_{ap}(b + 1),$$

получаем

$$\bar{Q}_{\min} = D_{ap} \frac{b}{b+n}.$$

В частности для равномерного распределения ( $b = 2, D_{ap} = \frac{1}{12}$ ) имеем

$$\bar{Q}_{\min} = \frac{1}{6(2+n)}.$$

Представляя значение  $b$ , получаем:

$$\bar{Q}_{\min} = \frac{P_{ap}(1 - P_{ap}) - D_{ap}}{P_{ap}(1 - P_{ap}) - D_{ap} + nD_{ap}} D_{ap}.$$

В частности, при  $P_{ap} = 0,5$  имеем

$$\bar{Q}_{\min} = D_{ap} \frac{1 - 4D_{ap}}{1 + 4D_{ap}(n-1)}.$$

Пусть  $N$  – объем испытаний при определении параметра  $P$  в предположении априорного равномерного распределения, а  $N_e$  – эквивалентное число испытаний в предположении априорного бета – распределения.

Из условия равенства средних рисков для этих распределений



$$\frac{1}{6(2+N)} = D_{ap} \frac{1-4D_{ap}}{1+4D_{ap}(N_e-1)}$$

определяем  $N_e$ :

$$N_e = \frac{6D_{ap}(2+N)(1-4D_{ap}) + 4D_{ap} - 1}{4D_{ap}}.$$

Анализ результатов показывает, что повышение точности (уменьшение  $D_{ap}$ ) априорной оценки эквивалентно сокращению числа испытаний. Кроме того, априорные вероятности  $P_{ap}$  в значительной степени оказывают влияние на оценку надежности.

Очевидно также, что введение априорной информации позволяет существенно сократить объем натуральных испытаний или эксплуатационного контроля при подтверждении уровня надежности контролируемого технического объекта. Для того, чтобы передать субъективные знания, их необходимо соответствующим образом выразить количественно в виде некоторого априорного распределения, которое учитывает всю имеющуюся информацию об исследуемом объекте.

Байесовский подход позволяет использовать априорные знания, которые частично компенсируют отсутствие данных. Это особенно важно, когда ставится задача подтвердить высокий уровень надежности с заданной достоверностью.

Классические методы оценки надежности в этом случае требуют использования очень больших объемов экспериментальных данных, что практически невозможно. Отсюда очевидно, что в практических приложениях необходимо тщательно обосновать байесовские модели и априорные распределения.

С другой стороны по мере накопления экспериментальной информации она начинает преобладать в апостериорном распределении. Плотность апостериорного распределения все больше концентрируется вокруг истинного значения параметра надежности. Для двух различных априорных распределений их апостериорные распределения будут сближаться по мере поступления экспериментальной информации.

Безусловный закон распределения числа отказов в соответствии с теоремой Байеса определяется выражением:

$$\begin{aligned}
 f(d) &= \int_0^1 h(P) f(d/n, P) dP = \\
 &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{n!}{(n-d)!d!} \int_0^1 P^{n-d+a-1} (1-P)^{d+b-1} dP = \\
 &= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!} \frac{n!}{(n-d)!d!} \frac{(n-d+a-1)!(d+b-1)!}{(n+a+b-1)!}.
 \end{aligned}$$

На рис.3.9 показаны плотности распределения  $f(d)$  для различных значений параметра  $a$  ( $a = 9$ ,  $a = 42$ ) при заданных значениях параметров  $b = 6$ ,  $b = 50$ .

Очевидно, что при значении параметров  $a = 6$  и  $b = 2$  априорная информация более расплывчата, что и отражается на графике плотности  $f(d)$ .

$$a := 9 \quad b := 6 \quad n := 50 \quad a1 := 42 \quad d := 0, 1..50$$

$$f(d) := \frac{n! \cdot (a + b - 1)! \cdot [a + (n - d) - 1]! \cdot (b + d - 1)!}{(n - d)! \cdot d! \cdot (a - 1)! \cdot (b - 1)! \cdot (a + b + n - 1)!}$$

$$f1(d) := \frac{n! \cdot (a1 + b - 1)! \cdot [a1 + (n - d) - 1]! \cdot (b + d - 1)!}{(n - d)! \cdot d! \cdot (a1 - 1)! \cdot (b - 1)! \cdot (a1 + b + n - 1)!}$$

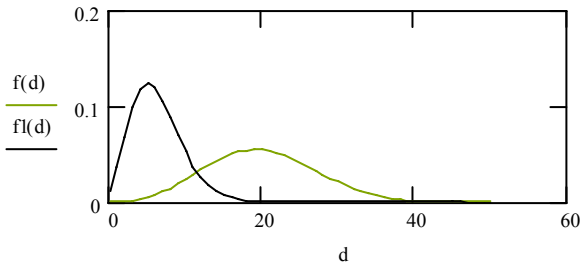


Рис.3.9. Распределение числа отказов для различных значений  $a$

При целых значениях  $a$  и  $b$  среднее число ожидаемых отказов определяется в соответствии с общим выражением:

$$d^* = \sum_{k=1}^n d_k f(d_k),$$

а точность этой оценки определяется ее дисперсией

$$\sigma_d^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 f(d_k) - (d^*)^2.$$

В частности, для  $a = 9$   $d^* = 20$ ,  $\sigma_d^2 = 48,75$ , а для  $a = 42$  имеем  $d^* = 6,25$ ,  $\sigma_d^2 = 10,94$ :

$$a := 9 \quad b := 6$$

$$F := \sum_{k=0}^{49} \left( d_k \cdot \frac{n! \cdot (a+b-1)! \cdot [a+(n-d_k)-1]! \cdot (b+d_k-1)!}{(n-d_k)! \cdot d_k! \cdot (a-1)! \cdot (b-1)! \cdot (a+b+n-1)!} \right)$$

$$F = 20$$

$$F1 := \sum_{k=0}^{49} \left[ (d_k)^2 \cdot \frac{n! \cdot (a+b-1)! \cdot [a+(n-d_k)-1]! \cdot (b+d_k-1)!}{(n-d_k)! \cdot d_k! \cdot (a-1)! \cdot (b-1)! \cdot (a+b+n-1)!} \right] - F^2$$

$$F1 = 48.75$$

$$a := 42$$

$$F := \sum_{k=0}^{49} \left( d_k \cdot \frac{n! \cdot (a+b-1)! \cdot [a+(n-d_k)-1]! \cdot (b+d_k-1)!}{(n-d_k)! \cdot d_k! \cdot (a-1)! \cdot (b-1)! \cdot (a+b+n-1)!} \right)$$

$$F = 6.25$$

$$F1 := \sum_{k=0}^{49} \left[ (d_k)^2 \cdot \frac{n! \cdot (a+b-1)! \cdot [a+(n-d_k)-1]! \cdot (b+d_k-1)!}{(n-d_k)! \cdot d_k! \cdot (a-1)! \cdot (b-1)! \cdot (a+b+n-1)!} \right] - F^2$$

$$F1 = 10.938$$

### 3.3.4. Байесовская оценка параметра надежности при неполной априорной информации

Пусть известна только вероятность безотказной работы  $R_0$ , полученная, например, по результатам статистического моделирования или по результатам какого-либо вида испытаний. В этом случае можно записать условие

$$\int_0^1 Ph(P/a, b) dP = R_0,$$

где  $h(P/a, b)$  – априорная плотность распределения.

Тогда:

$$\begin{aligned} B(a, b) \int_0^1 P^a (1-P)^{b-1} dP &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{a!(b-1)!}{(a+b)!} = \\ &= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!} \frac{a!(b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$R_0 = \frac{a}{a+b}. \quad (*)$$

Определив апостериорное распределение как

$$f(P/d) = B(a', b') P^{a'-1} (1-P)^{b'-1},$$

можно найти оптимальные значения параметров априорного распределения  $a_0$  и  $b_0$  из условия (\*) и максимума функции апостериорной дисперсии  $D$  [54]:

$$\begin{aligned} D &= B(n-d+a, b+d) \int_0^1 P^{n-d+a+1} (1-P)^{b+d-1} dP - \\ &\quad - \left[ B(n-d+a, b+d) \int_0^1 P^{n-d+a} (1-P)^{b+d-1} dP \right]^2, \end{aligned}$$

что соответствует критерию апостериорного риска (при квадратной функции потерь), т.е. выбирается такая априорная плотность, которая обеспечивает максимум функции

апостериорного риска (выбирается наихудшее априорное распределение).

Выше было получено выражение для дисперсии, откуда следует:

$$D(a_0, b_0) = \max_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 0}} D(a, b) = \max_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 0}} \frac{(b+d)(n+a-d)}{(n+a+b+1)(n+a+b)^2}.$$

В [54] показано, что решение задачи отыскания  $a_0, b_0$  при выполнении условия

$$\left( \frac{1-R_0}{R_0} - g \right) \left( d - \frac{n}{2} \right) \geq 0, \quad (**)$$

где

$$g = \frac{d}{n-d} \frac{(d+1)(n-2d) + 2(n-d)^2}{(n-d+1)(n-2d) - 2d^2}$$

не зависит от  $R_0$  и является тривиальным:  $a_0 = b_0 = 0$ . Апостериорная байесовская оценка для этого случая совпадает с оценкой максимального правдоподобия :

$$R^* = 1 - \frac{d}{n}, \quad D(R^*) = \frac{(n-d)d}{n^2(n+1)}.$$

Для полностью успешных испытаний ( $d = 0$ ) условие (\*\*) не выполняется никогда.

При невыполнении условия (\*\*) байесовская точечная оценка вероятности безотказной работы при квадратичной функции потерь превосходит оценку максимального правдоподобия, если

$$R_0 \leq 1 - \frac{d}{n}.$$

Введем новую переменную  $z = a + b + n$  с учетом условия (\*), что позволяет определить максимум функции только одной переменной  $z$ :

$$W(z) = \frac{[R_0(z-n) + n-d][(z-n)(1-R_0) + d]}{z^2(1+z)}.$$

Приравнивая первую производную  $\frac{dW}{dz}$  к нулю, получаем кубическое уравнение, так что поиск максимума функции  $W(z)$  сводится к решению уравнения

$$z^3 - w_1 z^2 - w_2 z - w_3 = 0,$$

где

$$w_1 = \frac{2[n(1-R_0) - d](2R_0 - 1)}{R_0(1-R_0)},$$

$$w_2 = \frac{[n(1-R_0) - d]\{3[n(1-R_0) - d] + 2R_0 - 1\}}{R_0(1-R_0)},$$

$$w_3 = \frac{2[n(1-R_0) - d]^2}{R_0(1-R_0)}.$$

Кубическое уравнение имеет единственный корень  $z^*$ , позволяющий определить параметры априорного распределения:

- из условия

$$\frac{a_0}{a_0 + b_0} = \frac{a_0}{z^* - n} = R_0$$

определяется параметр  $a_0$ :

$$a_0 = R_0(z^* - n);$$

- из условия

$$z^* = a_0 + b_0 + n$$

определяется параметр  $b_0$ :

$$b_0 = z^* - [(z^* - n)R_0 + n] = (z^* - n)(1 - R_0).$$

После определения значений оптимальных параметров рассчитываются оценки  $R^*$  и  $D(R^*)$ :

$$R^* = \frac{n - d + a_0}{n + a_0 + b_0},$$

$$D(R^*) = \frac{(b_0 + d)(n + a_0 - d)}{(n + a_0 + b_0 + 1)(n + a_0 + b_0)^2}.$$

В табл.3.16 – 3.18 приведены результаты расчета параметров  $a_0, b_0$ , а также оценки  $R^*$  и ее точности  $\sigma_R$  для полностью успешных испытаний ( $d = 0$ ) и испытаний с одним отказом в зависимости от объема испытаний  $n$  и априорного значения  $R_0$ .

Таблица 3.16

$R_0$	$a_0, b_0$			
	$n (d = 0)$			
	10	20	50	100
0,9	8,955	17,500	43,121	85,819
	0,995	1,944	4,791	9,535
0,95	9,711	18,976	46,758	93,058
	0,511	0,999	2,461	4,898
0,98	10,175	19,882	48,990	97,499
	0,208	0,204	0,998	1,9898
0,99	10,331	20,187	49,742	98,995
	0,104	0,406	0,502	0,9999

Таблица 3.17

$R_0$	$R^*, \sigma_R$			
	$n (d = 0)$			
	10	20	50	100
0,9	0,9501	0,9507	0,9511	0,9512
	0,048	0,034	0,022	0,015
0,95	0,9747	0,9750	0,9752	0,9753
	0,034	0,024	0,016	0,011
0,99	0,9949	0,9949	0,9950	0,995
	0,015	0,011	0,007	0,005
0,999	0,99949	0,99949	0,99950	0,99950
	0,0049	0,0035	0,002	0,0016

Таблица 3.18

$R_0$	$R^*, \sigma_R$			
	$n (d=1)$			
	10	20	50	100
0,9	0,9	0,9501	0,9510	0,9512
	0,09	0,048	0,024	0,016
0,95	0,9	0,9501	0,9751	0,9752
	0,09	0,048	0,020	0,012
0,99	0,9	0,9501	0,98	0,99
	0,09	0,048	0,0196	0,01
0,999	0,9	0,9501	0,98	0,99
	0,09	0,048	0,0196	0,01

Байесовская нижняя доверительная граница уровня  $\gamma$  определяется в соответствии с решением уравнения

$$\int_{\underline{R}_\gamma}^1 f(R; a_0, b_0, n, d) dR - \gamma = 0,$$

где  $f(R; a_0, b_0, n, d)$  – апостериорная плотность распределения:

$$f(R; a_0, b_0, n, d) = B(a_0 + n - d, b_0 + d) R^{a_0 + n - d - 1} (1 - R)^{b_0 + d - 1}$$

с однозначно определенными параметрами  $a_0$  и  $b_0$ .

В табл. 3.19 приведены результаты расчета  $\underline{R}_\gamma$  для успешных испытаний ( $d = 0$ ) в зависимости от  $n$  и при  $\gamma = 0,9$ .

Таблица 3.19

$n$	$\underline{R}_\gamma$		
	$R_0 = 0,9$	$R_0 = 0,95$	$R_0 = 0,98$
10	0,88602	0,93174	0,96875
20	0,90459	0,94268	0,97154
50	0,92192	0,95428	0,97701



Необходимо отметить, что для высоконадежных систем, т.е. при больших значениях вероятности безотказной работы ( $R > 0,99$ ;  $d = 0$ ), апостериорная плотность сосредоточивается в очень малой окрестности точки  $P = 1$ . Вследствие этого возможны погрешности вычислительного характера.

В [54] предлагается использовать тот факт, что после однозначного определения параметров  $a_0$  и  $b_0$  байесовская процедура становится полностью определенной. В этом случае можно использовать соотношение [36]:

$$\underline{R}_\gamma = \left[ 1 + \frac{b_0 + d}{a_0 + n - d} F_{1-\gamma; 2(b_0+d); 2(a_0+n-d)} \right]^{-1},$$

где  $F_{1-\gamma; c_1, c_2} - 100(1 - \gamma)$  – процентная точка  $F$ -распределения с  $c_1$  и  $c_2$  степенями свободы. Для сравнения в табл.3.12 приведены результаты расчета с использованием этого соотношения (при  $d = 0$ ).

Таблица 3.20

$n$	$\underline{R}_\gamma (\gamma = 0,9)$			
	$R_0 = 0,9$	$R_0 = 0,95$	$R_0 = 0,98$	$R_0 = 0,99$
10	0,8860	0,9317	0,9687	0,9859
20	0,9046	0,9427	0,9715	0,9846
50	0,9219	0,9543	0,9770	0,9864
100	0,9307	0,9605	0,9806	0,9885

### 3.3.5. Байесовская оценка в случае априорного доверительного интервала на параметр надежности

Функция правдоподобия для параметра надежности  $P$  имеет вид:

$$f(n, d / P) = C_n^d P^{n-d} (1 - P)^d.$$

Пусть априорная информация о параметре надежности  $P$  задана в виде априорного  $\mu$  – доверительного интервала  $[\underline{R}, \overline{R}]$  такого, что

$$\Pr\{\underline{R} \leq R(t_0) \leq \bar{R}\} \geq \mu.$$

Сопряженным априорным распределением является бета – распределение с плотностью

$$h(P) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} P^{a-1}(1-P)^{b-1}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

В случае квадратичной функции потерь  $W(P^*, P) = (P^* - P)^2$  минимакс функции апостериорного риска сводится к максимуму апостериорной дисперсии  $D(a, b)$  параметра  $P$ :

$$D(a_0, b_0) = \max_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 0}} D(a, b) = \max \frac{(a+n-d)(b+d)}{(a+b+n)^2(a+b+n+1)},$$

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\underline{R}}^{\bar{R}} P^{a-1}(1-P)^{b-1} dP \geq \mu.$$

Такая задача не имеет аналитического решения и требует применения одного из методов численной оптимизации. Задача упрощается, если принять  $\bar{R} = 1, b = 1$ . Этот случай соответствует практической ситуации, когда надежность исследуемого объекта велика, а априорная информация получена на основе безотказных «испытаний». В этом случае можно записать

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \int_{\underline{R}}^1 P^{a-1} dP = a \cdot \frac{P^a}{a} \Big|_{\underline{R}}^1 = 1 - \underline{R}^a \geq \mu,$$

откуда

$$\underline{R}^a \leq 1 - \mu.$$

Таким образом, условие максимума апостериорной дисперсии имеет вид

$$\begin{cases} D(a_0, 1) = \max_{a>0} \frac{(a+n-d)(d+1)}{(a+n+1)^2(a+n+2)}, \\ \underline{R}^a \leq 1 - \mu. \end{cases}$$

Тогда оптимальное значение параметра  $a$  определяется как

$$a_0 = \frac{\ln(1-\mu)}{\ln R}.$$

Отметим, что параметр  $a_0$  играет роль количества безотказных испытаний, эквивалентных используемой априорной информации.

Оценки  $R^*$ ,  $D(R^*)$  и  $\underline{R}_\gamma$  определяются из соотношений, полученных ранее:

$$R^* = \frac{a_0 + n - d}{a_0 + n + 1},$$

$$D(R^*) = \frac{(a_0 + n - d)(d + 1)}{(a_0 + n + 1)^2 (a_0 + n + 2)},$$

$$\underline{R}_\gamma = \left[ 1 + \frac{d + 1}{a_0 + n - d} F_{1-\gamma; 2(d+1); 2(a_0+n-d)} \right]^{-1}.$$

В табл.3.21 приведены результаты расчета оценок  $R^*$  и  $\underline{R}_\gamma$  для  $n = 100$ .

Таблица 3.21

$\mu$	$d = 0$		$\gamma = 0,95$	
	$\underline{R} = 0,99$	$\underline{R} = 0,995$	$\underline{R} = 0,999$	$\underline{R} = 0,9995$
0,9	0,99697	0,99825	0,99958	0,99979
	0,99094	0,99466	0,99875	0,99936
0,95	0,99749	0,99857	0,99968	0,99984
	0,99250	0,99571	0,99903	0,99951
0,99	0,99821	0,99902	0,99979	0,99989
	0,99465	0,99706	0,99936	0,99968

### 3.4. Квазипараметрическая оценка

В [57] рассматривается квазипараметрический подход к оценке вероятности безотказной работы, основанный на априорной информации. Неизвестная функция распределения  $F(t)$ , принадлежащая классу стареющих или стареющих в среднем

распределений [3], аппроксимируется некоторой функцией  $\tilde{F}(t)$ , обеспечивающей пребывание функции  $\tilde{F}(t)$  в этом классе:

$$\tilde{F}(t, \theta) = 1 - \exp\{-\tilde{\Lambda}(t, \theta)\},$$

где  $\tilde{\Lambda}(t, \theta)$  является аппроксимацией функции ресурса  $\Lambda(t) = \lambda t$ , которая представляет собой накопленную интенсивность отказов, и определяется как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau = -\ln[1 - F(t)].$$

Пусть разработчик имеет информацию о надежности в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ , т.е.

$$R(t_0) = P\{\xi > t_0\}$$

на промежутке  $[\underline{R}, \bar{R}]$ . Если принять априорное распределение на этом промежутке равномерным, то значит значения  $\underline{R}$  и  $\bar{R}$  достаточны для представления всей априорной информации. В общем случае априорное распределение может быть любым, например бета – распределением.

В [54] предлагается в качестве функции  $\tilde{\Lambda}(t)$  использовать двухзвенную ломаную функцию (выпуклую вниз) такую, что интенсивность отказов со временем возрастает. Если  $R(t_0)$  известно точно, то промежуток  $[\underline{R}, \bar{R}]$  стягивается в точку. Первое звено проходит через начало координат и удовлетворяет условию  $\tilde{\Lambda}(t_0) = \Lambda(t_0)$ , где

$$\Lambda(t_0) = \Lambda_0 = -\ln[1 - F(t_0)] = -\ln R(t_0).$$

Таким образом, уравнение первого участка имеет вид:

$$l_1(t) = \lambda_0 t = \Lambda_0, \quad t \leq t_0,$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda_0}{t} = -\frac{1}{t_0} \ln R(t_0)$$

однозначно определяется величиной  $R(t_0)$ .

Уравнение для второго участка (рис.3.10) может быть записано в виде

$$l_2(t) = \lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0, \quad t > t_0.$$

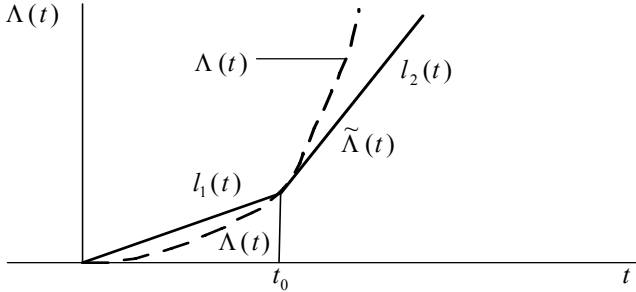


Рис.3.10. Аппроксимация функции ресурса

Тогда

$$\tilde{\Lambda}(t) = 1(t_0 - t)\lambda_0 t + 1(t - t_0)[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0]$$

где:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad 1(t_0 - t) = \begin{cases} 1, & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

Для того, чтобы функция ресурса была выпукла вниз, необходимо выполнение условия [38, Байхельт]:

$$\tilde{F}(t) = \tilde{F}(t; \lambda_0, \lambda_1) = 1 - \exp\{-\tilde{\Lambda}(t; \lambda_0, \lambda_1)\},$$

т.е.

$$\tilde{\Lambda}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[\tilde{\Lambda}_1(t_1) + \tilde{\Lambda}_2(t_2)], \quad \forall t_1 < t_2.$$

Этому условию удовлетворяют все значения  $\lambda_1$  из промежутка  $[\lambda_0, \infty]$ .

В общем случае значение  $R(t_0) = R_0$  неизвестно и находится в промежутке  $[\underline{R}, \bar{R}]$  и, следовательно, значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  являются случайными в байесовском смысле. Функция ресурса  $\Lambda(t)$

является случайной и может принимать одну из реализаций из ограниченного пространства кривых, рис.3.11.

Неслучайными являются значения кривых, которые проходят через точки  $(t_0, \Lambda_{02}) = (t_0, -\ln \underline{R})$  и  $(t_0, \Lambda_{01}) = (t_0, -\ln \bar{R})$ .

Кривые функции ресурса аппроксимируются следующими функциями :

$$\tilde{\Lambda}_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ -\frac{t}{t_0} \ln \bar{R}, & t > t_0 \end{cases} \quad \tilde{\Lambda}_2(t) = \begin{cases} -\frac{t}{t_0} \ln \underline{R}, & t \leq t_0, \\ \infty, & t > t_0 \end{cases}$$

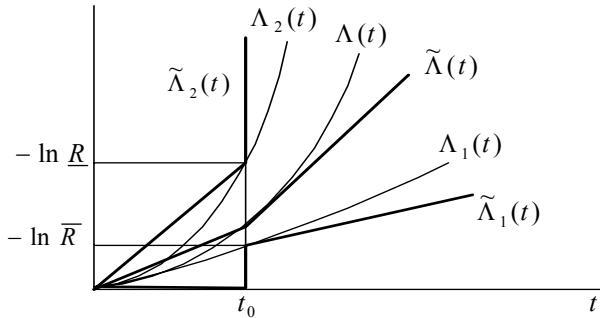


Рис.3.11. Случайная реализация функции ресурса

Таким образом, функция ресурса  $\tilde{\Lambda}(t)$  аппроксимирует произвольную случайную реализацию  $\Lambda(t) \in [\tilde{\Lambda}_1(t), \tilde{\Lambda}_2(t)]$ . Интервал значений случайных параметров  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , определяются неравенствами:

$$\begin{cases} \underline{\lambda}_0 \leq \lambda_0 \leq \bar{\lambda}_0 \\ \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \infty, \end{cases}$$

где

$$\underline{\lambda}_0 = -\frac{\ln \bar{R}}{t_0}, \quad \bar{\lambda}_0 = -\frac{\ln \underline{R}}{t_0}.$$

Первое неравенство удовлетворяет условию, что  $R(t_0) \in [\underline{R}, \bar{R}]$ , а второе неравенство обеспечивает предположение, что функция распределения  $F(t)$  принадлежит классу стареющих распределений.

Очевидно, что аппроксимация функции ресурса  $\tilde{\Lambda}(t)$  ломаными линиями равносильно аппроксимации функции интенсивности  $\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\Lambda}'(t)$ , рис.3.12, т.е.

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda_0 1(t_0 - t) + \lambda_1 1(t - t_0).$$

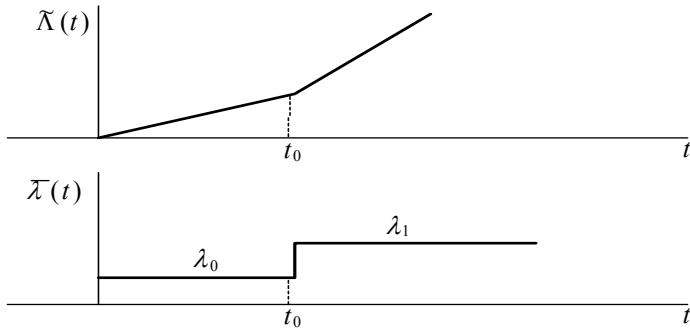


Рис.3.12. Аппроксимация функции интенсивности

Для байесовской оценки вероятности безотказной работы  $R$  при известной аппроксимации функции распределения  $F(t)$  можно использовать стандартный байесовский алгоритм.

Для определения функции правдоподобия выборки при наличии цензурированных данных используем выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(t) &= 1(t_0 - t)\lambda_0 t + 1(t - t_0)[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0], \\ \tilde{\lambda}(t) &= \lambda_0 1(t_0 - t) + \lambda_1 1(t - t_0). \end{aligned}$$

Общее выражение для функции правдоподобия имеет вид:

$$f(\vec{\tau}, \theta) \propto \prod_{i=1}^d f(t_i^\circ; \theta) \prod_{j=1}^q [1 - F(t_j, \theta)],$$

где, как и ранее,  $\vec{\tau} = \{t_i^\circ, t_j\}$ ,  $i = \overline{1, d}$ ,  $j = \overline{1, q}$  – результат испытаний,  $t_i^\circ$  – момент отказа,  $t_j$  – момент приостановки (цензурирования).

Известно [12], что функция интенсивности отказов определяется выражением

$$\lambda(t, \theta) = \frac{f(t, \theta)}{1 - F(t, \theta)},$$

а функция ресурса (интегральная функция интенсивности) определяется как

$$\Lambda(t, \theta) = \int_0^t \lambda(x, \theta) dx = \int_0^t 1(t-x) \lambda(x, \theta) dx,$$

где

$$1(t-x) = \begin{cases} 1, & t > x \\ 0, & t < x \end{cases}.$$

Очевидно, что вероятность безотказной работы может быть определена в соответствии с общим выражением

$$\begin{aligned} R(t, \theta) = 1 - F(t, \theta) &= \left| F(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\} \right| =, \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\} = \exp \{ -\Lambda(t; \theta) \}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция ресурса может быть записана в виде:

$$\Lambda(t, \theta) = -\ln[1 - F(t, \theta)],$$

а функция правдоподобия определяется выражением:



$$\begin{aligned}
f\left(\overline{\tau} / \theta\right) &= \prod_{i=1}^d \lambda\left(t_i^{\circ}; \theta\right)\left[1-F\left(t_i^{\circ}; \theta\right)\right] \prod_{j=1}^q\left[1-F\left(t_j; \theta\right)\right]= \\
&= \prod_{i=1}^d \lambda\left(t_i^{\circ}; \theta\right) \exp\left\{-\Lambda\left(t_i^{\circ}; \theta\right)\right\} \prod_{j=1}^q \exp\left\{-\Lambda\left(t_j; \theta\right)\right\}= \\
&= \prod_{i=1}^d \lambda\left(t_i^{\circ}; \theta\right) \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \Lambda\left(\tau_j; \theta\right)\right\}, \quad n=d+q, \quad \tau_j=t_j^{\circ}+t_j.
\end{aligned}$$

Подставляя выражение  $\tilde{\Lambda}(t)$  и  $\tilde{\lambda}(t)$  в формулу для функции правдоподобия, получаем

$$\begin{aligned}
f\left(\overline{\tau} / \lambda_0, \lambda_1\right) &\propto \prod_{i=1}^d\left[1\left(t_0-t_i^{\circ}\right) \lambda_0+1\left(t_i^{\circ}-t_0\right) \lambda_1\right] \times \\
&\times \exp\left\{-\sum_{i=1}^n\left[1\left(t_0-\tau_i\right) \lambda_0 \tau_i+1\left(\tau_i-t_0\right)\left(\lambda_1 \tau_i-\left(\lambda_1-\lambda_0\right) t_0\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначение:

- $d_0$  – число отказов, наблюдаемых до момента  $t_0$ ,
- $d_1$  – число отказов, наблюдаемых после момента  $t_0$ ,
- $q_0$  – число приостановок до момента  $t_0$ ,
- $q_1$  – число приостановок после момента  $t_0$ , так что:

$$d=d_0+d_1, \quad q=q_0+q_1, \quad n=d+k,$$

$$\prod_{i=1}^d\left[1\left(t_0-t_i^{\circ}\right) \lambda_0+1\left(t_i^{\circ}-t_0\right) \lambda_1\right]=\lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1},$$

$$\sum_{i=1}^n 1\left(t_0-\tau_i\right) \tau_i=a_0, \quad \sum_{i=1}^n 1\left(\tau_i-t_0\right) \tau_i=a_1$$

$$\sum_{i=1}^n 1\left(\tau_i-t_0\right) t_0=\left(d_1+q_1\right) t_0.$$

Статистики  $a_0$  и  $a_1$  имеют смысл суммарных наработок соответственно до и после момента  $t_0$ .

С учетом введенных обозначений функция правдоподобия может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} f\left(\vec{\tau} / \lambda_0, \lambda_1\right) &\propto \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_0(a_0 + n_1 t_0) + \lambda_1(a_1 + n_1 t_0)]\} = \\ &= \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1]\}, \end{aligned}$$

где

$$n_1 = d_1 + q_1, \quad p_0 = a_0 + n_1 t_0, \quad p_1 = a_0 - n_1 t_0.$$

Из полученного выражения для функции правдоподобия следует, что в качестве априорного распределения  $h(\lambda_0, \lambda_1)$ , сопряженного с ядром правдоподобия, необходимо использовать распределение вида:

$$\begin{aligned} h(\lambda_0, \lambda_1) &\propto \lambda_0^{c_0} \lambda_1^{c_1} \exp\{-(\lambda_0 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1)\} = \\ &= \frac{1}{\beta} \lambda_0^{c_0} \lambda_1^{c_1} \exp\{-(\lambda_0 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1)\}, \end{aligned}$$

где  $\beta$  – нормирующая константа, чтобы выполнялось условие

$$\iint_{\Lambda} h(\lambda_0, \lambda_1) d\lambda_0 d\lambda_1 = 1.$$

Тогда апостериорная плотность распределения запишется в виде:

$$f\left(\lambda_0, \lambda_1 / \vec{\tau}\right) \propto \lambda_0^{c_0 + d_0} \lambda_1^{c_1 + d_1} \exp\{-[\lambda_0(\alpha_0 + p_0) + \lambda_1(\alpha_1 + p_1)]\}.$$

Выбор априорного распределения достаточно затруднителен ввиду большого количества параметров  $(c_0, c_1, \alpha_0, \alpha_1)$ . Поэтому при выборе априорной плотности целесообразно использовать промежутки априорной неопределенности  $[\underline{R}, \bar{R}]$  в предположении, что вероятность безотказной работы  $R(t_0)$  распределена равномерно в этом промежутке, т.е.:

$$h(R) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{R} - \underline{R}}, & \underline{R} \leq R \leq \overline{R} \\ 0, & R \notin [\underline{R}, \overline{R}] \end{cases}.$$

В этом случае априорная плотность распределения может быть определена через параметры  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  как:

$$h(R) = h_0(\lambda_0)h_1(\lambda_1 / \lambda_0).$$

Маргинальная плотность  $h(\lambda_0)$  определяется следующим образом (с учетом взаимно-однозначной зависимости между  $R(t_0)$  и  $\lambda_0$ ):

$$h_0(\lambda_0) = h[R_{t_0}(\lambda_0)] \left| R'_{t_0}(\lambda_0) \right| = \left| e^{\lambda_0 t_0} = R(t_0) = R_{t_0} \right| = \frac{t_0}{\overline{R} - \underline{R}} e^{\lambda_0 t_0},$$

где

$$\underline{\lambda_0} \leq \lambda_0 \leq \overline{\lambda_0}.$$

Поскольку параметры  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  имеют одинаковый физический смысл, то условная плотность распределения  $h_1(\lambda_1 / \lambda_0)$  может быть определена аналогично [54]:

$$h_1(\lambda_1 / \lambda_0) = \frac{t_0}{R_1 - \underline{R}_1} e^{-\lambda_1 t_0}, \quad \lambda_0 \leq \lambda_1 < \infty.$$

Так как  $\lambda_1 \in [\lambda_0, \infty)$ , то

$$\underline{R}_1 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} e^{-\lambda_1 t_0} = 0, \quad \overline{R}_1 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_0} e^{-\lambda_1 t_0} = e^{-\lambda_0 t_0}.$$

Следовательно

$$h_1(\lambda_1 / \lambda_0) = \frac{t_0}{e^{-\lambda_0 t_0}} e^{-\lambda_1 t_0} = t_0 e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) t_0}.$$

Таким образом, априорное распределение определится выражением

$$h(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{t_0^2}{R - \underline{R}} e^{-\lambda_1 t_0}.$$

В этом случае ядро апостериорной плотности распределения запишется в виде:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_0, \lambda_1 / \vec{\tau}\right) &\propto \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_0 p_0} e^{-\lambda_1 p_1} e^{-\lambda_1 t_0} = \\ &= \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} e^{-[\lambda_0 p_0 + \lambda_1 (p_1 + t_0)]}. \end{aligned}$$

*Определение оценки вероятности безотказной работы при*  
 $t \leq t_0$

В этом случае

$$R(t) = \exp\{-\tilde{\Lambda}(t)\} = e^{-\lambda_0 t},$$

так как

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda_0 1(t_0 - t) + \lambda_1 1(t - t_0) = \lambda_0, \quad t \leq t_0.$$

Поскольку  $R(t)$  зависит только от  $\lambda_0$ , то определим маргинальную апостериорную плотность  $f_0\left(\lambda_0 / \vec{\tau}\right)$  путем интегрирования совместной плотности  $f\left(\lambda_0, \lambda_1 / \vec{\tau}\right)$  по параметру  $\lambda_1$ :

$$f_0\left(\lambda_0 / \vec{\tau}\right) = \int_{\lambda_0}^{\infty} f\left(\lambda_0, \lambda_1 / \vec{\tau}\right) d\lambda_1 \propto \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0 p_0} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_1 (p_1 + t_0)} d\lambda_1.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся известным соотношением [51]:

$$\begin{aligned} &\int x^n e^{-ax} dx = \\ &= e^{-ax} \left[ \frac{x^n}{-a} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{a^{k+1}} x^{n-k} \right] = \end{aligned}$$

$$= e^{-ax} \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{a^{k+1}} x^{n-k}.$$

В этом случае:

$$\begin{aligned} f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) &\propto \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0 p_0} \left[ e^{-\lambda_1(p_1+t_0)} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1(d_1-1)\dots(d_1-i+1)}{(p_1+t_0)^{i+1}} \lambda_1^{d_1-i} \right]_{\lambda_0}^{\infty} = \\ &= \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, ядро апостериорной плотности распределения  $f_0\left(\lambda_0 / \tau\right)$  определяется выражением:

$$f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) \propto \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}},$$

а сама функция принимает вид:

$$f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) = \frac{\lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0} \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0}.$$

Оценка вероятности безотказной работы при и квадратичной функции потерь равна:

$$R^*(t) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0} e^{-\lambda_0 t} f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) d\lambda_0 =$$

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}_0} e^{-\lambda_0 t} \lambda_0^{d-d_1} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0 \\ &= \frac{\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}_0} e^{-\lambda_0 t} \lambda_0^{d-d_1} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0}{\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}_0} \lambda_0^{d-d_1} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0}. \end{aligned}$$

Более удобным в расчетах надежности является использование относительных наработок:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{p_0 + p_1}{t_0} = \frac{1}{t_0} (a_0 + n_1 t_0 + a_1 - n_1 t_0) = \frac{a_0 + a_1}{t_0} = \\ &= \frac{1}{t_0} \left[ \sum_{i=1}^{d+q} \mathbf{1}(t_0 - \tau_i) \tau_i + \sum_{i=1}^{d+q} \mathbf{1}(\tau_i - t_0) \tau_i \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{t_0} = \sum_{i=1}^n v_i, \\ \omega_1 &= \frac{p_1}{t_0} = \sum_{i=1}^{d+q} \mathbf{1}(\tau_i - t_0) \tau_i - n_1 = \left| n_1 = \sum_{i=1}^{d+q} \mathbf{1}(\tau_i - t_0) \right| = \\ &= \sum_{i=1}^{d+q} \mathbf{1}(\tau_i - t_0) \left[ \frac{\tau_i}{t_0} - 1 \right] = \sum_{i=1}^n (v_i - 1) \mathbf{1}(v_i - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточная статистика, соответствующая исходной выборке  $\tau$ , для функции распределения  $F(t; \lambda_0, \lambda_1)$  определяется четырьмя величинами  $\{\omega, \omega_1, d, d_1\}$ . Статистика  $\omega$  определяет суммарную относительную наработку при испытаниях или эксплуатационном контроле, а статистика  $\omega_1$  определяет суммарную относительную наработку после момента времени  $t_0$ . Информация о разбиении выборки на отказы и приостановки определяется статистиками  $d$  (общее число отказов в выборке из  $n$  измерений) и  $d_1$  (число отказов после момента времени  $t_0$ ). Так как

$$\bar{R} = e^{-\lambda_0 t}, \quad \underline{R} = e^{-\bar{\lambda}_0 t},$$

то введем следующую замену переменных:

$$x = \lambda_0 t_0, \quad \lambda_0 t = -\ln \bar{R} = L_1, \quad \bar{\lambda}_0 t = -\ln \underline{R} = L_2.$$

В результате выражение для оценки вероятности безотказной работы, например для момента времени  $t_0$ , может быть записано в виде:

$$R^*(t_0) = \frac{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx}{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx}.$$

Точность оценки  $R^*(t_0)$  определяется ее дисперсией

$$D[R^*(t_0)] = \frac{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-2x} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx}{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx} - [R^*(t_0)]^2$$

В общем случае для момента времени  $t < t_0$  имеем

$$R^*(t) = \frac{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x\tau} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx}{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx},$$

где  $\tau = \frac{t}{t_0}$  – безразмерный параметр. Аналогично определяется

выражение и для дисперсии оценки  $R^*(t)$ . Очевидно, что при расчете оценок вероятности безотказной работы при  $t = t_0$  следует принять  $\tau = 1$ .

Байесовский доверительный интервал определяется условием

$$\Pr\{\underline{R} \leq R \leq \bar{R}\} = \gamma,$$

или

$$\int_{\underline{R} \leq R(\theta) \leq \bar{R}} f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) d\lambda_0 = \int_{\underline{R}_\gamma \leq e^{-\lambda_0 t} \leq \bar{R}} f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) d\lambda_0 = \gamma,$$

так что определение  $\underline{R}_\gamma$  сводится к решению управления, в котором неизвестная оценка  $\underline{R}_\gamma$  входит в область интегрирования.

С учетом выражения для апостериорной плотности распределения можно записать

$$\int_{\underline{\lambda}_0}^y f_0\left(\lambda_0 / \tau\right) d\lambda_0 - \gamma = 0,$$

где

$$e^{-y t} = \underline{R}_\gamma(t),$$

и, следовательно:

$$\frac{\int_{-\ln \bar{R}}^{y'} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)! (\omega_1+1)^{i+1}} x^{d_1-i} dx}{\int_{-\ln \bar{R}}^{y'} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)! (\omega_1+1)^{i+1}} x^{d_1-i} dx} = \gamma,$$

а

$$\underline{R}_\gamma(t_0) = e^{-y' t}.$$

Графики апостериорной плотности распределения  $f_0\left(\lambda_0 / \tau\right)$  при фиксированных значениях  $\omega, \omega_1, d$  для различных значений  $d_1$  показаны на рис.3.13.

$$\omega = 10, \omega_1 = 2, d = 2 (d_1 = 0, d_1 = 1), R_v = 1, R_n = 0,95$$



$$f_l(x) := \frac{\left[ x^{d-dl} \cdot e^{-x(w+1)} \cdot \sum_{i=0}^{dl} \frac{dl!}{(dl-i)!} \cdot \frac{x^{dl-i}}{(w+1)^{i+1}} \right]}{\int_{L_n}^{L_v} x^{d-dl} \cdot e^{-x(w+1)} \cdot \sum_{i=0}^{dl} \frac{dl!}{(dl-i)!} \cdot \frac{x^{dl-i}}{(w+1)^{i+1}} dx}$$

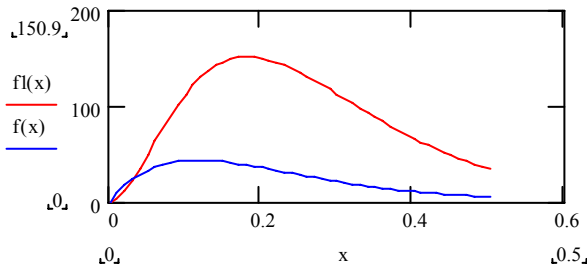


Рис.3.13. Графики апостериорной плотности

$$f_0\left(\lambda_0 / \tau\right)$$

Апостериорная плотность распределения  $f\left(R_0 / \tau\right)$  показателя надежности  $R_0$  ввиду монотонной зависимости  $R(t_0) = R_0 = \exp\{-\lambda_0 t_0\}$  или  $\lambda_0 = -\frac{1}{t_0} \ln R_0$  может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
 f\left(R_0 / \vec{\tau}\right) &= \frac{x^{d-d_1} R_0^{\omega+1} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{|\ln R_0|^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}}}{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx} = \\
 &= \frac{R_0^{\omega+1} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{|\ln R_0|^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}}}{\int_{L_1}^{L_2} x^{d-d_1} e^{-x(\omega+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(\omega_1+1)^{i+1}} dx}.
 \end{aligned}$$

Графики апостериорной плотности при тех же значениях параметров показаны на рис.3.14.

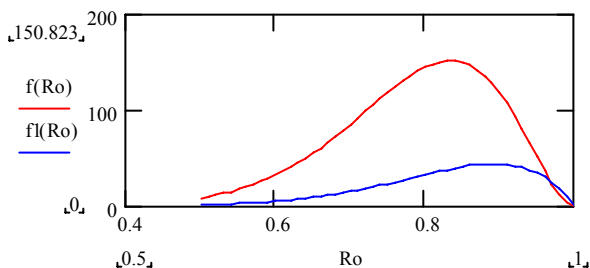


Рис.3.14. Графики апостериорной плотности

$$f\left(R_0 / \vec{\tau}\right)$$

Из анализа графиков следует очевидный факт, что с увеличением параметра  $d_1$  (при неизменном значении  $d$ ) уровень надежности растет, так как уменьшается доля отказов, наблюдаемых до момента времени  $t_0$ , для которого определяется вероятность безотказной работы.

**Пример.** Требуется рассчитать байесовские оценки вероятности безотказной работы системы автоматического управления для момента времени  $t_0$  при фиксированных

значениях относительной наработки  $\omega = 10$ ,  $\omega_1 = 2$  для различных значений суммарного числа отказов  $d$  и числа отказов  $d_1$ , наблюдаемых после момента  $t_0$ .

Априорная информация о параметре надежности  $R$  задается равномерным распределением таким, что  $\underline{R} = 0,95$ ,  $\bar{R} = 1$ .

Расчет проводится в соответствии с полученными ранее выражениями. Например при  $d = 0$ ,  $d_1 = 0$  получаем:

$$\begin{aligned}
 d_1 &:= 0 & d &:= 0 & w_1 &:= 2 & w &:= 10 & R_b &:= 1 & R_h &:= 0.95 \\
 L_n &:= -\ln(R_b) & L_v &:= -\ln(R_h) \\
 R &:= \frac{\int_{L_n}^{L_v} e^{-x} \cdot x^{d-d_1} \cdot e^{-x \cdot (w+1)} \cdot \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \cdot \frac{x^{d_1-i}}{(w_1+1)^{i+1}} dx}{\int_{L_n}^{L_v} x^{d-d_1} \cdot e^{-x \cdot (w+1)} \cdot \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \cdot \frac{x^{d_1-i}}{(w_1+1)^{i+1}} dx} \\
 R &= 0.9771259
 \end{aligned}$$

Результаты остальных расчетов приведены в табл.3.22.

Таблица 3.22

$d_1$	$D$				
	0	1	2	3	4
0	0,9771	0,9682	0,9634	0,9606	0,9588
1		0,9765	0,9677	0,9631	0,9604
2			0,9765	0,9676	0,9631
3				0,9765	0,9676
4					0,9765

В табл.3.23 приведены результаты расчета нижней доверительной границы  $\underline{R}_\gamma(t_0)$  для вероятности  $\gamma = 0,95$ .

Таблица 3.23

$d_1$	$d$				
	0	1	2	3	4
0	0,9532	0,9515	0,9509	0,9507	0,9506
1		0,953	0,9514	0,9509	0,9507
2			0,9530	0,9514	0,9509
3				0,9530	0,9514
4					0,9530

Представляет интерес сравнить полученные результаты с результатами расчета оценки  $R^*(t_0)$  для фиксированной выборки  $\omega = 100$ ,  $\omega_1 = 2$  (таблица 3.24). Величина  $\omega = 100$  указывает на большой объем экспериментальной информации.

Таблица 3.24

$d_1$	$d$				
	0	1	2	3	4
0	0,9905	0,9820	0,9750	0,9697	0,9658
1		0,9902	0,9816	0,9747	0,9694
2			0,9902	0,9816	0,9746
3				0,9902	0,9816
4					0,9902

Из анализа таблиц видно, что оценки вероятности безотказной работы практически не изменяются с увеличением  $d_1$ , так как оценки определяются в момент времени  $t_0$ , а отказы появляются после этого момента.

*Определение оценки вероятности безотказной работы при  $t > t_0$ .*

С учетом выражения для аппроксимирующей функции ресурса:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}(t; \lambda_0, \lambda_1) = \begin{cases} \lambda_0 t, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0) t_0, & t > t_0 \end{cases}$$

выражение для вероятности безотказной работы принимает вид:

$$R(t) = R(t; \lambda_0, \lambda_1) = \exp\{-[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0) t_0]\},$$

а ядро апостериорной плотности распределения соответственно запишется в виде:

$$f(\lambda_0, \lambda_1 / \tau) \propto \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-\lambda_0 p_0 + \lambda_1 (p_1 + t_0)\}.$$

В соответствии с формулой Байеса получим соотношение для оценки вероятности безотказной работы  $R^*$  при квадратичной функции потерь как апостериорное среднее:

$$R^* = \frac{\iint \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_1 t - (\lambda_1 - \lambda_0)t_0] - [\lambda_0 p_0 + \lambda_1 (p_1 + t_0)]\} d\lambda_0 d\lambda_1}{\iint \lambda_0^{d_0} \lambda_1^{d_1} \exp\{-[\lambda_0 p_0 + \lambda_1 (p_1 + t_0)]\} d\lambda_0 d\lambda_1}$$

где область интегрирования определяется неравенствами:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \leq \lambda_0 \leq \bar{\lambda}_0, \\ \lambda_0 \leq \lambda_1 < \infty \end{array} \right.$$

Так как значение  $\lambda_0$  не известно, то вначале выполняется внутреннее интегрирование, для чего представим выражение для  $R^*$  в виде:

$$R^* = \frac{\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}_0} \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+t_0)} d\lambda_0 \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_1(p_1+t)} d\lambda_1}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0} \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0 p_0} d\lambda_0 \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_1(p_1+t_0)} d\lambda_1}.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda_1^{d_1} e^{-\lambda_1(p_1+t)} d\lambda_1 = \left| \int_{\lambda_0}^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \right.$$

$$\left. = -e^{-ax} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \right|_{\lambda_0}^{\infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-\lambda_1(p_1+t)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_1^{d_1-i}}{(p_1+t)^{i+1}} \Bigg|_{\lambda_0}^{\infty} = \\
&= -e^{-\lambda_0(p_1+t)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t)^{i+1}} \Bigg|_{\lambda_0}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение для оценки  $R^*$  приобретает вид:

$$\begin{aligned}
R^* &= \frac{\int_{\lambda_0}^{\overline{\lambda_0}} \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0(p_0+t_0)} e^{-\lambda_0(p_1+t)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t)^{i+1}} d\lambda_0}{\int_{\lambda_0}^{\overline{\lambda_0}} \lambda_0^{d_0} e^{-\lambda_0 p_0} e^{-\lambda_0(p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0} = \\
&= \frac{\int_{\lambda_0}^{\overline{\lambda_0}} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t)^{i+1}} d\lambda_0}{\int_{\lambda_0}^{\overline{\lambda_0}} e^{-\lambda_0(p_0+p_1+t_0)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{\lambda_0^{d_1-i}}{(p_1+t_0)^{i+1}} d\lambda_0}.
\end{aligned}$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\frac{p_0 + p_1}{t_0} = w, \quad \frac{p_1}{t_0} = w_1, \quad \frac{t}{t_0} = v,$$

окончательно получаем:

$$R^* = \frac{\int_{L_1}^{L_2} e^{-x(w+v+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(w_1+v)^{i+1}} dx}{\int_{L_1}^{L_2} e^{-x(w+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d_1-i}}{(w_1+1)^{i+1}} dx}.$$

Точность оценки  $R^*$  определяется ее дисперсией:

$$D[R^*] = \frac{\int_{L_1}^{L_2} e^{-x(w+2v+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d-i}}{(w_1+2v-1)^{i+1}} dx}{\int_{L_1}^{L_2} e^{-x(w+1)} \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1!}{(d_1-i)!} \frac{x^{d-i}}{(w_1+1)^{i+1}} dx} - (R^*)^2.$$

Примеры апостериорной плотности распределения  $f(\lambda_0, \lambda_1 / \vec{\tau})$  при фиксированных значениях  $w_1, w, d, v = 1,5$  для различных значений  $d_1$  показаны на рис.3.15.

d = 3 f(x) (d1 = 0) f1(x) (d1 = 1) f2(x) (d1 = 2)

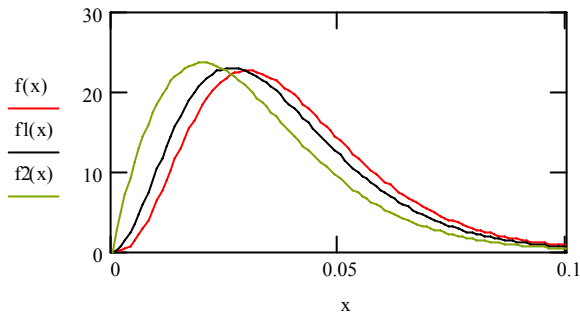


Рис.3.15 Графики апостериорной плотности  $f(\lambda_0, \lambda_0 / \vec{\tau})$

Апостериорные плотности распределения вероятности безотказной работы  $f(R / \vec{\tau})$  при тех же значениях параметров показаны на рис.3.16.

f(R) (d1 = 0) f1(R) (d1 = 1) f2(R) (d1 = 2)

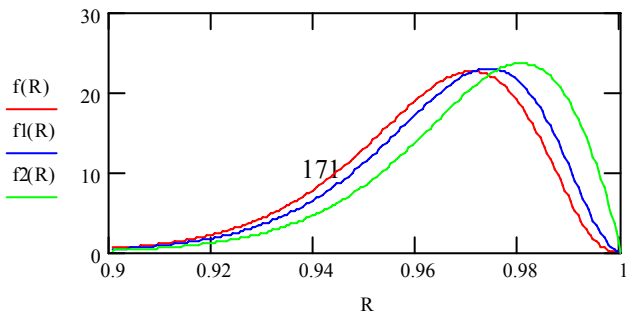


Рис.3.16 Графики апостериорной плотности  $f(R/\bar{\tau})$

В табл.3.25 приведены результаты расчета оценок вероятности безотказной работы для  $w = 100$ ,  $w_1 = 70$ ,  $\underline{R} = 0,9$ ;  $\nu = 1,5$ .

Таблица 3.25

$d_1$	$d$				
	0	1	2	3	4
0	0,9785	0,9642	0,9502	0,9368	0,9242
1		0,9686	0,9532	0,9390	0,9258
2			0,9592	0,9429	0,9285
3				0,9504	0,9331
4					0,9420

В табл.3.26 приведены результаты расчета нижней доверительной границы  $\underline{R}_\gamma$  для уровня доверия  $\gamma = 0,9$ .

Таблица 3.26

$d_1$	$d$				
	0	1	2	3	4
0	0,9575	0,9359	0,9167	0,8995	0,8849
1		0,9318	0,9078	0,8882	0,8717
2			0,8979	0,8709	0,8505
3				0,8594	0,8308
4					0,8201



### 3.5. Байесовская эмпирическая оценка надежности

Как известно [70], эмпирический байесовский подход использует априорную информацию, накопленную в результате испытаний, эксплуатации технических систем, являющихся аналогами или прототипами исследуемой системы. При этом априорная информация обрабатывается статистическими методами и представляется, например, оценкой функции распределения какого-либо параметра, связанного с показателем надежности.

Эмпирический байесовский подход может быть применен, в частности, при контроле надежности бортовых систем управления во время эксплуатации с учетом накопления данных о характеристиках надежности подобных систем, установленных на других самолетах. Это отвечает современной тенденции развития техники в условиях автоматизированного сбора данных с целью формирования соответствующего банка данных, в котором содержится информация по каждому самолету, где установлена соответствующая система управления, рис.3.17.

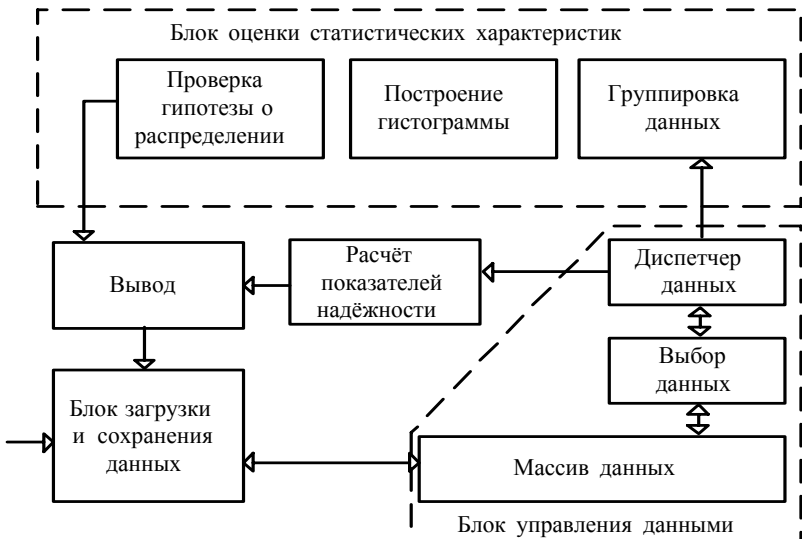


Рис.3.17. Формирование банка данных

### 3.5.1. Параметрическое оценивание

Априорное распределение некоторого параметра  $\theta$ , связанного с показателем надежности  $R(\theta)$ , считается известным и требуется некоторая его аппроксимация. Если вид семейства распределений известен (неизвестны его параметры), то стандартная байесовская процедура использует аналитическое выражение для функции правдоподобия с эмпирической аппроксимацией априорного распределения, основанной на накопленных данных к моменту оценки надежности. Оценка параметра  $\theta$  проводится в соответствии с выражением

$$\theta^* = \frac{\int \theta f(\vec{\tau}/\theta) h(\theta) d\theta}{\int f(\vec{\tau}/\theta) h(\theta) d\theta}.$$

Для аппроксимации  $h(\theta)$  в [54] предлагается использовать непараметрическую дискретную оценку плотности для случаев различных объемов выборок  $\tau^{(j)} = \{t^{(j)}, t^{(j)}\}$ :

$$dH^*(\theta) = h^*(\theta) d\theta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N n_j \delta(\theta^{*(j)}, \theta),$$

где

$$\delta(\theta^{*(j)}, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta^{*(j)} = \theta \\ 0, & \theta^{*(j)} \neq \theta \end{cases} \quad n = \sum_{j=1}^N n_j,$$

$\theta^{*(1)}, \theta^{*(2)}, \dots, \theta^{*(N)}$  – оценки параметра  $\theta$ , полученные на основании соответствующих выборок  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(N)}$ . Каждый вектор  $\tau^{(j)}$  представляет собой моменты отказов и цензурирования объемов  $d_j$  и  $q_j$ , так что  $n_j = d_j + q_j$ .

Оценка априорной функции распределения  $H^*(\theta)$  в этом случае представляет собой ступенчатую функцию с высотами

ступенек  $\frac{n_j}{n}$  в каждой точке  $\theta^{*(j)}$ , рис.3.18. Очевидно, что  $H(\theta)$  выбирается из частотных соображений и является аппроксимацией некоторого эмпирического распределения.

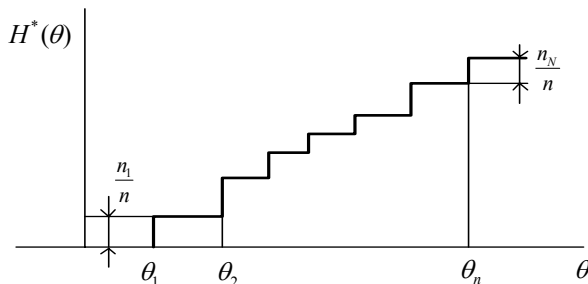


Рис.3.18. Аппроксимация эмпирического распределения

При известном параметрическом семействе можно записать функцию правдоподобия  $f(\vec{\tau}/\theta)$  для соответствующей выборки и определить достаточную статистику  $\eta$  так, что

$$f(\vec{\tau}/\theta) \propto f(\vec{\tau}/\theta, \eta).$$

В общем случае параметр  $\theta$  может быть многомерным (например в распределении Вейбулла  $\theta = \{\lambda, \alpha\}$ ). Для экспоненциального распределения параметр является одномерным ( $\theta = \lambda$ ). Оценки  $\theta_i^*$  могут быть определены по стандартной байесовской процедуре.

Эмпирическая байесовская оценка вероятности безотказной работы  $R(t; \theta)$  рассчитывается по результату  $N$  – го наблюдения, т.е. для выборки  $\tau^{(N)}$  с учетом результатов  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(N-1)}$ , в соответствии с выражением:

$$R^*(t_0) = \frac{\int R(t_0; \theta) f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) h(\theta) d\theta}{\int f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) h(\theta) d\theta},$$

где  $\eta^{(N)}$  – достаточная статистика по выборке  $\tau^{(N)}$ .

С учетом аппроксимации априорного распределения:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \frac{\int \theta f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) h(\theta) d\theta}{\int f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) h(\theta) d\theta} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N n_j \int \theta f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) \delta(\theta^{*(j)}; \theta) d\theta}{\sum_{j=1}^N n_j \int f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta) \delta(\theta^{*(j)}; \theta) d\theta}. \end{aligned}$$

С учетом фильтрующих свойств  $\delta$  – функции получаем:

$$\theta^* = \frac{\sum_{j=1}^N n_j \theta^{*(j)} f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta^{*(j)})}{\sum_{j=1}^N n_j f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta^{*(j)})},$$

а оценка вероятности безотказной работы  $R^*(t_0)$  определим как апостериорное среднее при квадратичной функции потерь:

$$R^*(t_0) = \frac{\sum_{j=1}^N n_j R(t_0, \theta^{*(j)}) f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta^{*(j)})}{\sum_{j=1}^N n_j f(\vec{\tau}, \eta^{(N)} / \theta^{*(j)})}.$$

Рассмотрим два вида параметрических семейств.

**Показательное распределение.** В этом случае

$F(t, \lambda) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$ , а функция правдоподобия для выборки  $\tau^{(j)}$  имеет вид

$$f(\vec{\tau} / \lambda) \propto f(\vec{\tau} / \eta^{(j)}) = f(\lambda; d_j, q_j) = \lambda^{d_j} \exp\{-\lambda p_j\},$$

где  $p_j = \tau_1^{(j)} + \tau_2^{(j)} + \dots + \tau_{n_j}^{(j)}$ ,  $d_j$  – количество отказов в выборке  $\tau^{(j)}$ ,  $\eta^{(j)} = (d_j, p_j)$  – достаточная статистика для выборки  $\tau^{(j)}$ .

Тогда для оценок  $\lambda^*$  и  $R^*(t_0)$  справедливы следующие выражения:

$$\lambda^* = \frac{\sum_{j=1}^N n_j \lambda_j^* (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}} = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N+1} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}},$$

$$R^*(t_0) = \frac{\sum_{j=1}^N e^{-\lambda_j^* t_0} n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}},$$

а точность оценки вероятности безотказной работы определяется ее дисперсией:

$$D[R^*(t_0)] = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* (p_N + 2t_0)\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\lambda_j^*)^{d_N} \exp\{-\lambda_j^* p_N\}} - [R^*(t_0)]^2.$$

Что касается получения оценок  $\lambda_j^*$ , то для высоконадежных систем управления отказы могут не наблюдаться и все выборки могут состоять только из моментов цензурирования и, следовательно,  $\lambda_j^* = \frac{d_j}{n_j} = 0$ . Поэтому для получения этих оценок

необходимо использовать байесовский алгоритм для тривиальной априорной плотности параметра  $\lambda$  в интервале  $[0, \infty]$ :

$$\lambda_j^* = \frac{\int_0^{\infty} \lambda^{d_j+1} e^{-\lambda p_j} d\lambda}{\int_0^{\infty} \lambda^{d_j} e^{-\lambda p_j} d\lambda} = \frac{\Gamma(d_j+2)}{p_j^{d_j+2}} \frac{p_j^{d_j+1}}{\Gamma(d_j+1)} = \frac{d_j+1}{p_j}.$$

Очевидно, что при отсутствии отказов ( $d_j = 0$ ) необходимые оценки  $\lambda^*$  и  $R^*(t_0)$  могут быть рассчитаны при любых значениях достаточной статистики в каждом из наблюдений (испытаний).

**Пример.** Пусть в процессе эксплуатационного контроля регистрировалась наработка на отказ (или просто наработка в случае цензурирования) у 10 самолетов, оборудованных одинаковыми системами управления. План контроля следующий.

Фиксируется время полета  $j$ -го самолета в пункт назначения и обратно (летное время). Если отказа не произошло, то фиксируется время  $t_{j1}$ . Если же отказ произошел, то фиксируется момент отказа  $t_{j1}^{\circ}$ . Аналогично фиксируется время  $t_{j2}$  или  $t_{j2}^{\circ}$  для второго полета  $j$ -го самолета. По истечении заданного объема полетов  $n_j$  формируется достаточная статистика  $(d_j, p_j)$ , которая используется в расчетах оценки интенсивности отказов для данного самолета. Аналогичным образом составляется план эксплуатационного контроля для других самолетов, т.е.  $j = \overline{1, N}$ .

Аналогичный план контроля может быть составлен для одного самолета, но в этом случае  $N$  – количество последовательных этапов контроля, каждый из которых содержит  $n_j$  наблюдений.

В качестве иллюстрации применения алгоритмов ниже в табл.3.27 представлены результаты расчета оценки вероятности безотказной работы при безотказных сериях эксплуатационного контроля за время  $t_0$ . Проводилось статистическое моделирование выборок из экспоненциального распределения с заданным параметром интенсивности отказов  $\lambda$ . Цензурирование справа

осуществлялось случайным числом с равномерным распределением в промежутке  $\left[ k_1 \frac{1}{\lambda}; k_2 \frac{1}{\lambda} \right]$ .

Таблица 3.21

№	$n_j$	$p_j$	$d_j$	Оценка		Истинное значение	
				R(10)	R(250)	P(10)	P(250)
1	44	412	0	0,9496	0,8432	0,95	0,841
2	29	226	0				
3	35	288	0				
4	41	365	0				
5	39	328	0				
6	28	216	0				
7	47	452	0				
8	56	473	0				
9	24	196	0				
10	32	271	0				

**Распределение Вейбулла.** Функция распределения задается выражением

$$F(t; \lambda, \alpha) = 1 - \exp\left\{-\lambda t^\alpha\right\},$$

а плотность распределения определяется как

$$f(t; \lambda, \alpha) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} \exp\left\{-\lambda t^\alpha\right\}.$$

Определим функцию правдоподобия  $j$ -ой выборки через параметры  $\lambda$  и  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} f(\tau^{(j)} / \lambda_j, \alpha_j) &= \prod_{i=1}^{d_j} f(t_{ij}^\circ / \lambda_{ij}, \alpha_{ij}) \prod_{s=1}^{q_j} \left[ 1 - F(t_{sj} / \lambda_{ij}, \alpha_{ij}) \right] = \\ &= \lambda_j^{d_j} \alpha_j^{d_j} \left[ \prod_{i=1}^{d_j} t_{ij}^\circ \right]^{\alpha-1} \exp\left\{-\lambda_j \sum_{i=1}^{d_j} \left(\frac{t_{ij}^\circ}{t_0}\right)^\alpha\right\} \exp\left\{-\lambda_j \sum_{s=1}^{q_j} \left(\frac{t_{sj}}{t_0}\right)^\alpha\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_j^{d_j} \alpha_j^{d_j} \left[ \prod_{i=1}^{d_j} t_{ij}^\circ \right]^{\alpha-1} \exp \left\{ -\lambda_j t_0^\alpha \left[ \sum_{i=1}^{d_j} \left( \frac{t_{ij}^\circ}{t_0} \right)^\alpha + \sum_{s=1}^{q_j} \left( \frac{t_{sj}}{t_0} \right)^\alpha \right] t_0^\alpha \right\} = \\
&= \lambda_j^{d_j} \alpha_j^{d_j} \left[ \prod_{i=1}^{d_j} t_{ij}^\circ \right]^{\alpha-1} \exp \left\{ -\lambda_j \omega_j t_0^\alpha \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{d_j} \left( \frac{t_{ij}^\circ}{t_0} \right)^\alpha + \sum_{s=1}^{q_j} \left( \frac{t_{sj}}{t_0} \right)^\alpha = \sum_{i=1}^{n_j} \left[ \frac{\tau_i^{(j)}}{t_0} \right]^\alpha.$$

относительная наработка.

Так как вероятность безотказной работы определяется как  $R(t_0) = 1 - F(t_0; \lambda, \alpha)$ , то функцию правдоподобия можно определить через параметры  $R$  и  $\alpha$  (с учетом того, что  $R = \exp \left\{ -\lambda t_0^\alpha \right\}$ ,  $\lambda_j = -\frac{1}{t_0^\alpha} \ln R_j$ ):

$$\begin{aligned}
f(\tau^{(j)}, \omega_j d_j / R, \alpha) &= \left[ -\frac{1}{t_0^\alpha} \right]^{d_j} [\ln R_j]^{d_j} \alpha^{d_j} \left[ \prod_{i=1}^{d_j} \frac{t_{ij}^\circ}{t_0} \right]^{\alpha-1} R_j^{\omega_j} = \\
&= \left[ -\frac{1}{t_0^\alpha} \right]^{d_j} [\ln R_j]^{d_j} \alpha^{d_j} R_j^{\omega_j} v_j^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

где

$$v_j = \prod_{i=1}^{d_j} \frac{t_{ij}^\circ}{t_0}.$$

Апостериорная плотность по результатам  $N$  – ой серии (этапа) определяется как



$$f(R, \alpha / \tau^{(N)}, \omega_N, d_N) = \frac{f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) h(R, \alpha)}{\iint_{R, \alpha} f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) h(R, \alpha) dR d\alpha}.$$

При независимости параметров  $R$  и  $\alpha$  априорная плотность распределения представляется как  $h(R, \alpha) = h(R)h(\alpha)$ . Если параметр  $\alpha$  известен, то выражение для оценки вероятности безотказной работы имеет вид:

$$\begin{aligned} R^*(t_0) &= \int R f(R, \alpha / \tau^{(N)}, \omega_N, d_N) dR = \\ &= \frac{\int R f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) h(R) dR}{\int f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) h(R) dR} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N n_j \int R f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) \delta(R_j^*, R_j) dR}{\sum_{j=1}^N n_j \int f(\tau^{(N)}, \omega_N, d_N / R, \alpha) \delta(R_j^*, R_j) dR}. \end{aligned}$$

После подстановки соответствующих выражений и необходимых сокращений получаем оценку  $R^*(t_0)$ :

$$\begin{aligned} R^*(t_0) &= \frac{\left[ -\frac{1}{t_0} \right]^{d_j} \alpha^{d_j} v_N^{\alpha-1} \sum_{j=1}^N n_j \int R_j^{\omega_N+1} (\ln R_j)^{d_N} \delta(R_j^*, R_j) dR}{\left[ -\frac{1}{t_0} \right]^{d_j} \alpha^{d_j} v_N^{\alpha-1} \sum_{j=1}^N n_j \int R_j^{\omega_N} (\ln R_j)^{d_N} \delta(R_j^*, R_j) dR} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N n_j R_j^{\omega_N+1} (\ln R_j)^{d_N}}{\sum_{j=1}^N n_j R_j^{\omega_N} (\ln R_j)^{d_N}}. \end{aligned}$$

В качестве оценки  $R_j^*$  целесообразно использовать байесовские оценки, соответствующие случаю тривиальной априорной информации  $R_j \in [0,1][0,1]$ .

Тогда:

$$R_j^* = \frac{\int_0^1 R_j^{\omega_j+1} (\ln R_j)^{d_j} dR}{\int_0^1 R_j^{\omega_j} (\ln R_j)^{d_j} dR} = \left| \int_0^1 x^{a-1} (\ln x)^n dx = (-1)^n a^{-(n+1)} n! \right| =$$

$$= \frac{(-1)^{d_j} (\omega_j + 2)^{-(d_j+1)} d_j!}{(-1)^{d_j} (\omega_j + 1)^{-(d_j+1)} d_j!} = \left( \frac{\omega_j + 1}{\omega_j + 2} \right)^{d_j+1} = \left( 1 - \frac{1}{\omega_j + 2} \right)^{d_j+1}.$$

Если параметр формы  $\alpha$  не известен, можно предполагать [54], что этот показатель равномерно распределен на интервале  $[1, \alpha_{\max}]$ . В подавляющем большинстве случаев  $\alpha < 5$ . В этом

случае оценка  $R^*$  определяется как:

$$R^*(t_0) = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\alpha_j^*)^{d_N} v_N^{\alpha_j^*-1} (R_j^*)^{\omega_{N+1}} (\ln R_j^*)^{d_N}}{\sum_{j=1}^N n_j (\alpha_j^*)^{d_N} v_N^{\alpha_j^*-1} (R_j^*)^{\omega_N} (\ln R_j^*)^{d_N}},$$

а ее точность определяется дисперсией:

$$D[R^*(t_0)] = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\alpha_j^*)^{d_N} v_N^{\alpha_j^*-1} (R_j^*)^{\omega_{N+2}} (\ln R_j^*)^{d_N}}{\sum_{j=1}^N n_j (\alpha_j^*)^{d_N} v_N^{\alpha_j^*-1} (R_j^*)^{\omega_N} (\ln R_j^*)^{d_N}} - [R^*(t_0)]^2.$$

Как и ранее, оценки  $R_j^*$  и  $\alpha_j^*$  по каждой выборке также можно определить посредством байесовской процедуры для тривиальной априорной информации:

$$R_j^* = \frac{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \left\{ \int_0^1 R^{\omega_j+1} (\ln R)^{d_j} dR \right\} d\alpha}{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \left\{ \int_0^1 R^{\omega_j} (\ln R)^{d_j} dR \right\} d\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_j + 2)^{d_j+1}} d\alpha \\
&= \frac{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_j + 2)^{d_j+1}} d\alpha}{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_j + 1)^{d_j+1}} d\alpha}, \\
\alpha_j^* &= \frac{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j+1} v_j^{\alpha-1} \left\{ \int_0^1 R^{\omega_j} (\ln R)^{d_j} dR \right\} d\alpha}{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \left\{ \int_0^1 R^{\omega_j} (\ln R)^{d_j} dR \right\} d\alpha} = \\
&= \frac{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_j + 1)^{d_j+1}} d\alpha}{\int_1^{\alpha_{\max}} \alpha^{d_j} v_j^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_j + 1)^{d_j+1}} d\alpha},
\end{aligned}$$

где относительная наработка  $\omega$  зависит от  $\alpha$ , т.е.

$$\omega_j(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_j} \left[ \frac{\tau_i^{(j)}}{t_0} \right]^\alpha.$$

Если промежуток априорной неопределенности является более узким  $\left\{ \left[ \underline{R}, \bar{R} \right], \left[ \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right] \right\}$ , то процедура определения оценок остается такой же при равномерном распределении параметров в этих интервалах.

### 3.5.2. Непараметрическое оценивание

При решении задач обеспечения надежности можно предложить подход, рекомендованный в [4, 12, 54]. Создается информационный банк данных, например, по каждому самолету, на котором установлена соответствующая система управления. Поступающие данные (например, от эксплуатации) формируются в виде следующих матриц:

$$D_j = \begin{bmatrix} s_1^{(j)} & s_2^{(j)} & \dots & s_{n_j}^{(j)} \\ d_1^{(j)} & d_2^{(j)} & \dots & d_{n_j}^{(j)} \\ q_1^{(j)} & q_2^{(j)} & \dots & q_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, N},$$

где  $D_j$  – результаты эксплуатационного контроля  $j$  – го временного этапа, т.е. формируется выборка измерений:  $D_1, D_2, \dots, D_N$ .

По результатам последнего контрольного этапа требуется определить вероятность безотказной работы за время  $t_0$  с учетом априорной информации, полученной на предыдущих этапах эксплуатационного контроля,  $j = \overline{1, N-1}$ .

В формируемой матрице данных в первой строке записываются (в порядке возрастания) продолжительности испытаний  $s_i^{(j)}, i = \overline{1, n_j}$  при эксплуатационном контроле, зафиксированные в процессе эксплуатации в течении определенного промежутка времени (определенного количества полетов). Например, при формировании матрицы  $D_1$ , для которой приняли  $n_1 = 5$ , измерения проводятся в пяти сериях, каждая из которых содержит 10 полетов (в общем случае различной продолжительности). Тогда  $s_1^{(1)}$  соответствует наработке до отказа (если такой произошел в первых 10 полетах серии), либо суммарной продолжительности 10 полетов, если в них отказов не произошло (все полеты цензурированы). Во второй строке записывается число отказов  $d_1^{(1)}$ , которые соответствуют наработке  $s_1^{(1)}$ . В третьей строке записывается количество цензурированных  $q_1^{(1)}$  (в [12] записывается количество изделий, снятых с испытаний в момент  $s_1^{(1)}$  до наступления отказа).

Используя приближение  $\tilde{\Lambda}$  для функции ресурса  $\Lambda(t) = -\ln[1 - F(t)]$  в виде ломаной (см. раздел 3.4.):

$$\tilde{\Lambda}(t) = 1(t_0 - t)\theta_1 t + 1(t - t_0)[\theta_2 t - (\theta_2 - \theta_1)t_0],$$

где, как и ранее,  $t_0$  – момент времени, для которого определяется вероятность безотказной работы,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – параметры, которые определяются условием

$$F(t_0) = \tilde{F}(t_0) = 1 - \exp\{-\tilde{\Lambda}(t_0)\},$$

т.е. совпадением функций распределения в точке  $t_0$ , рис.3.19.

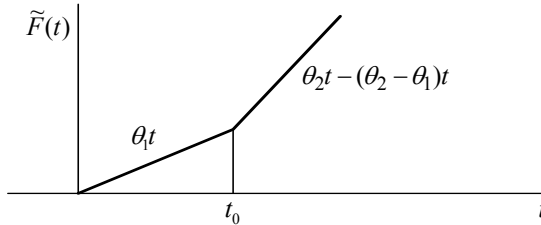


Рис.3.19. Аппроксимация функции распределения  $F(t)$

Тогда

$$\theta_1 = -\frac{1}{t_0} \ln[1 - F(t_0)] = -\frac{1}{t_0} \ln R, \quad \theta_2 \geq \theta_1.$$

Функция правдоподобия может быть записана в виде [см.раздел 3.4.]:

$$f(D_j / \theta_1, \theta_2) \propto \theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2 \pi_j]\}.$$

Достаточными статистиками в этом выражении являются:

- $r_j$  – число отказов во второй строке матрицы , наблюдаемых до момента времени  $t_0$ , так что

$$r_j = \sum_{i=1}^{m_j} d_i^{(j)},$$

- $u_j$  – число отказов после момента времени  $t_0$ , т.е.

$$u_j = \sum_{i=m_j+1}^{n_j} d_i^{(j)},$$

•  $\eta_j$  – суммарная наработка при контроле до момента времени  $t_0$ , такая, что :

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{m_j} (d_i^{(j)} + q_i^{(j)}) s_i^{(j)} + t_0 \sum_{i=m_j+1}^{n_j} (d_i^{(j)} + q_i^{(j)}),$$

•  $\pi_j$  – суммарная наработка после момента времени  $t_0$  :

$$\pi_j = \sum_{i=m_j+1}^{n_j} (p_i^{(j)} - q_i^{(j)}) (s_i^{(j)} - t_0),$$

где

$$m_j = \sum_{i=1}^{n_j} 1(t_0 - s_i^{(j)})$$

определяет количество элементов в первой строке матрицы  $D^{(j)}$ , для которых  $s_i^{(j)} \leq t_0$ .

В соответствии с эмпирическим байесовским подходом и с учетом аппроксимации априорного распределения оценка вероятности безотказной работы определяется выражением:

$$R^*(t_0) = \frac{\sum_{j=1}^N n_j R(t_0; \theta_{1j}^*, \theta_{2j}^*) f(\theta_{1j}^*, \theta_{2j}^* / r_N, u_N, \eta_N, \pi_N)}{\sum_{j=1}^N n_j f(\theta_{1j}^*, \theta_{2j}^* / r_N, u_N, \eta_N, \pi_N)}.$$

Учитывая, что

$$R(t_0) = 1 - F(t_0) = \exp\{-\tilde{\Lambda}(t_0) = \exp\{-\theta_1 t_0\},$$

(так как  $1(t_0 - t) = 1$  для  $t \leq t_0$ , а  $1(t - t_0) = 1$  при  $t > t_0$ ),

выражение для  $R^*(t_0)$  имеет вид:

$$R^*(t_0) = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\theta_{1j}^*)^{r_N} (\theta_{2j}^*)^{u_N} \exp\left\{-\left[\theta_{1j}^* (\eta_N + t_0) + \theta_{2j}^* \pi_N\right]\right\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\theta_{1j}^*)^{r_N} (\theta_{2j}^*)^{u_N} \exp\left\{-\left[\theta_{1j}^* \eta_N + \theta_{2j}^* \pi_N\right]\right\}},$$

а точность оценки  $R^*(t_0)$  определяется выражением:

$$D[R^*(t_0)] = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\theta_{1j}^*)^{r_N} (\theta_{2j}^*)^{u_N} \exp\left\{-\left[\theta_{1j}^* (\eta_N + 2t_0) + \theta_{2j}^* \pi_N\right]\right\}}{\sum_{j=1}^N n_j (\theta_{1j}^*)^{r_N} (\theta_{2j}^*)^{u_N} \exp\left\{-\left[\theta_{1j}^* \eta_N + \theta_{2j}^* \pi_N\right]\right\}} - [R^*(t_0)]^2$$

Для определения оценок  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  по экспериментальным данным, записанным в соответствующих матрицах  $D_j$  можно использовать байесовский алгоритм для случая неинформативного априорного распределения.

Априорная плотность  $h(\theta_1, \theta_2)$  ищется в виде:

$$h(\theta_1, \theta_2) = h(\theta_1)h(\theta_2 / \theta_1).$$

Маргинальная плотность  $h(\theta_1)$  определяется как (см. раздел 3.4.):

$$h(\theta_1) = \frac{t_0}{\bar{R} - \underline{R}} e^{-\theta_1 t_0},$$

где  $[\bar{R}, \underline{R}]$  – промежуток априорной неопределенности в предположении равномерности распределения вероятности безотказной работы в этом интервале. Для случая тривиальной априорной информации для параметра  $R$  имеем

$$h(\theta_1) = t_0 e^{-\theta_1 t_0}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \infty,$$

предполагая, что  $h(\theta_2 / \theta_1)$  принадлежит к экспоненциальным распределениям. Тогда

$$h(\theta_1, \theta_2) = t_0^2 e^{-\theta_2 t_0}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \infty, \quad \theta_1 \leq \theta_2 < \infty.$$

В соответствии с формулой Байеса апостериорная плотность распределения параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  равна:

$$f(\theta_1, \theta_2 / D_j) = \frac{\theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2 (\pi_j + t_0)]\}}{\int_0^\infty d\theta_1 \int_{\theta_1}^\infty \theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2 (\pi_j + t_0)]\} d\theta_2}.$$

При известной апостериорной плотности распределения точечные оценки  $\theta_{1j}^*$  и  $\theta_{2j}^*$ , определяются как апостериорные средние при квадратичной функции потерь:

$$\theta_{1j}^* = \int_0^\infty \int_{\theta_1}^\infty \theta_1 f(\theta_1, \theta_2 / D_j) d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\theta_{2j}^* = \int_0^\infty \int_{\theta_1}^\infty \theta_2 f(\theta_1, \theta_2 / D_j) d\theta_1 d\theta_2.$$

Чтобы получить выражения для оценок  $\theta_{1j}^*$  и  $\theta_{2j}^*$ , использующие достаточные статистики, сначала рассчитаем знаменатель апостериорной плотности распределения:

$$\int_0^\infty d\theta_1 \int_{\theta_1}^\infty \theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2 (\pi_j + t_0)]\} d\theta_2 =$$

$$\int_0^\infty \theta_1^{r_j} e^{-\theta_1 \eta_j} \left[ \int_{\theta_1}^\infty \theta_2^{u_j} e^{-\theta_2 (\pi_j + t_0)} d\theta_2 \right] d\theta_1.$$

Вычислим внутренний интеграл, воспользовавшись соотношением [51]:

$$\int x^n e^{-ax} dx = -e^{-ax} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}}.$$

Тогда:



$$\int_{\theta_1}^{\infty} \theta_2^{u_j} e^{-\theta_2(\pi_j+t_0)} d\theta_2 = e^{-\theta_1(\pi_j+t_0)} \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j-k)!} \frac{\theta_1^{u_j-k}}{(\pi_j+t_0)^{k+1}},$$

а общий интеграл определяется как:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \theta_1^{r_j} e^{-\theta_1(\eta_j+\pi_j+t_0)} \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j-k)!} \frac{\theta_1^{u_j-k}}{(\pi_j+t_0)^{k+1}} d\theta_1 = \\ &= \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j-k)!} \frac{1}{(\pi_j+t_0)^{k+1}} \int_0^{\infty} \theta_1^{r_j+u_j-k} e^{-\theta_1(\eta_j+\pi_j+t_0)} d\theta_1 = \\ &= \left| \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = n! p^{-(n+1)} \right| = \\ &= \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j-k)!} \frac{(r_j+u_j-k)!}{(\pi_j+t_0)^{k+1}} (\eta_j+\pi_j+t_0)^{-(r_j+u_j+1-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j-k)!} \frac{(r_j+u_j-k)!}{t_0^{k+1} (\omega_{1j}+1)^{k+1}} \frac{1}{t_0^{r_j+u_j+1-k} (\omega_j+1)^{r_j+u_j+1-k}} = \\ &= \frac{u_j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} \sum_{k=0}^{u_j} \frac{(r_j+u_j-k)!}{(u_j-k)!} \frac{1}{(\omega_{1j}+1)^{k+1}} \frac{1}{(\omega_j+1)^{r_j+u_j+1-k}} = \\ &= \frac{u_j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{1j} = \frac{\pi_j}{t_0}, \quad \omega_j = \frac{\eta_j + \pi_j}{t_0}.$$

Соответственно суммарная относительная наработка в  $j$ -ой серии (этапе) после момента  $t_0$  и общая суммарная наработка при эксплуатационном контроле.

Определим апостериорную плотность параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в виде:

$$f(\theta_1, \theta_2 / D_j) = \frac{\theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2(\pi_j + t_0)]\}}{\frac{u^j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A}.$$

и рассчитаем оценку параметра  $\theta_{1j}^*$ :

$$\begin{aligned} \theta_{1j}^* &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \theta_1 \theta_1^{r_j} \theta_2^{u_j} \exp\{-[\theta_1 \eta_j + \theta_2(\pi_j + t_0)]\} d\theta_1 d\theta_2}{\frac{u^j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A} = \\ &= \frac{\int_0^\infty \theta_1^{r_j+1} e^{-\theta_1 \eta_j} \left[ \int_{\theta_1}^\infty \theta_2^{u_j} e^{-\theta_2(\pi_j+t_0)} d\theta_2 \right] d\theta_1}{\frac{u^j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A} = \\ &= \frac{\int_0^\infty \theta_1^{r_j+1} e^{-\theta_1 \eta_j} e^{-\theta_1(\pi_j+t_0)} \left[ \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u^j!}{(u_j-k)!} \frac{\theta_1^{u_j-k}}{(\pi_j+t_0)^{k+1}} \right] d\theta_1}{\frac{u^j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{u_j} \frac{u^j!}{(u_j-k)!} \frac{1}{(\pi_j+t_0)^{k+1}} \int_0^\infty \theta_1^{r_j+u_j-k+1} e^{-\theta_1(\eta_j+\pi_j+t_0)} d\theta_1}{\frac{u^j!}{t_0^{r_j+u_j+2}} A} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{u_j} \frac{u_j!}{(u_j - k)!} \frac{1}{(\pi_j + t_0)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k + 1)!}{(\eta_j + \pi_j + t_0)^{r_j + u_j - k + 2}} \\
&= \frac{\frac{u_j!}{t_0^{r_j + u_j + 2}} A}{\frac{1}{t^0} \sum_{k=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - k)!} \frac{1}{(\omega_{1j} + 1)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k + 1)!}{(\omega_j + 1)^{r_j + u_j - k + 2}}} \\
&= \frac{1}{t^0} \frac{\sum_{k=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - k)!} \frac{1}{(\omega_{1j} + 1)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k)!}{(\omega_j + 1)^{r_j + u_j - k + 1}}}{\sum_{k=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - k)!} \frac{1}{(\omega_{1j} + 1)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k)!}{(\omega_j + 1)^{r_j + u_j - k + 1}}}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом рассчитывается оценка  $\theta_{2j}^*$ :

$$\begin{aligned}
\theta_{2j}^* &= \int_0^\infty \int_{\theta_1}^\infty \theta_2 f(\theta_1, \theta_2 / D_j) d\theta_1 d\theta_2 = \\
&= \frac{u_j + 1}{t^0} \frac{\sum_{k=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j + 1 - k)!} \frac{1}{(\omega_{1j} + 1)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k + 1)!}{(\omega_j + 1)^{r_j + u_j - k + 2}}}{\sum_{k=0}^{u_j} \frac{1}{(u_j - k)!} \frac{1}{(\omega_{1j} + 1)^{k+1}} \frac{(r_j + u_j - k)!}{(\omega_j + 1)^{r_j + u_j - k + 1}}}.
\end{aligned}$$

## 4. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ ПАРАМЕТРОВ

### 4.1. Точечные и доверительные оценки

Рассмотрим некоторые алгоритмы получения оценок неизвестных параметров для случая, когда распределения наработки принадлежат одному из рассмотренных выше параметрических семейств распределений. Рассмотрим два традиционных подхода – точечное и интервальное оценивание.

Для выборок большого объема значительная разница между значениями реализаций выборочных характеристик и значениями соответствующих теоретических характеристик маловероятна, и поэтому разумно (по крайней мере для больших выборок) принять выборочную характеристику за приближенное значение соответствующей теоретической характеристики, когда она неизвестна. Таким образом, в термин «оценка» вкладывается определенный асимптотический смысл. В то же время в случае применения статистической теории на практике часто приходится строить приближенные значения для различных неизвестных теоретических характеристик при любых объемах выборки, в том числе и ограниченных.

Общие методы решения подобных задач развиты в теории статистического оценивания неизвестных параметров распределений.

Рассмотрим основные теоретические модели надежности.

#### 4.1.1. Показательное распределение

Статистическое оценивание параметра показательного распределения осуществляется достаточно просто [12]. В табл.4.1 приведены выражения для точечных и  $\gamma$ - доверительных оценок параметра  $\lambda$  (интенсивность отказов) для различных планов испытаний, где  $d$  – количество отказов,  $\bar{x}$  – момент наступления  $r$  – го отказа,  $T$  – продолжительность испытания,  $S$  – общее время работы к концу периода испытания, при этом  $S = NT$  для планов

испытаний с заменой и  $S = (N - d)T + \sum_{i=1}^d t_i$  для планов без замен ( $t_i$  – момент наступления  $i$ -го отказа). Если  $d = 0$ , то для вычисления  $\lambda^*$  полагают  $d = 1$ .

Оценка вероятности безотказной работы определяется как  $R^*(t) = \exp\{-\lambda^* t\}$ . Поскольку  $R(t)$  – монотонно убывающая функция, то из двустороннего доверительного интервала  $(\bar{\lambda}, \underline{\lambda})$  можно получить соответствующий доверительный интервал для  $R(t)$ :  $\left[ e^{-\bar{\lambda}t}, e^{-\underline{\lambda}t} \right]$ .

Таблица 4.1

План испытаний	Оценка интенсивности отказов	Доверительный интервал
$(N, R, T)$	$\lambda^* = \frac{d}{NT}$	$\underline{\lambda} = \frac{\chi_{\gamma}^2(2d)}{2NT}$ , $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2d)}{2NT}$
$(N, R, r)$	$\lambda^* = \frac{r-1}{Nt_r}$	$\underline{\lambda} = \frac{\chi_{\gamma}^2(2r)}{2Nt_r}$ , $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2r)}{2Nt_r}$
$(N, R, (r, T))$	$\lambda^* = \begin{cases} \frac{d}{NT}, & t_r > T \\ \frac{r-1}{Nt_r}, & t_r \leq T \end{cases}$	$\underline{\lambda} = \frac{\chi_{\gamma}^2(2d)}{2NT}$ , $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2d)}{2NT}$ $\underline{\lambda} = \frac{\chi_{\gamma}^2(2r)}{2Nt_r}$ , $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2r)}{2Nt_r}$
$(N, U, T)$	$\lambda^* = \frac{d}{S}$	$\underline{\lambda} = \frac{\chi_{\gamma}^2(2d)}{2S}$ $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2d)}{2S}$

$(N, U, r)$	$\lambda^* = \frac{r-1}{S}$ $S_r = (N-r)t_r + \sum_{i=1}^r t_i$	$\underline{\lambda} = \frac{\chi_\gamma^2(2r)}{2S}$ $\bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2r)}{2S}$
$(N, R, (r, T))$	$\lambda^* = \begin{cases} \frac{d}{S}, & t_r > T \\ \frac{r-1}{S}, & t_r \leq T \end{cases}$	$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda} = \frac{\chi_\gamma^2(2d)}{2S_d}, \quad t_r > T \\ \bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2d)}{2S_d} \\ \underline{\lambda} = \frac{\chi_\gamma^2(2r)}{2S_r}, \quad t_r \leq T \\ \bar{\lambda} = \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2r)}{2S_r} \end{array} \right.$

Известно, что сумма  $n$  независимых экспоненциально распределенных случайных величин имеет  $\chi^2$  – распределение с  $2n$  степенями свободы (5, 6, 19, 20). Учитывая необходимую нормировку, находим, что случайная величина

$$\frac{2}{\theta} \sum_{k=1}^n x_k$$

распределена по закону  $\chi^2$  с  $2n$  степенями свободы, где  $\theta = \frac{1}{\lambda}$ .

Этому же закону следует и величина

$$\frac{2n}{\theta} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Тогда интервальная оценка параметра экспоненциального распределения может быть определена из соотношения

$$\Pr \left\{ 2n(1 - \xi_2) < \frac{2n\theta_n^*}{\theta} < 2n(1 + \xi_1) \right\} = \gamma,$$

где

$$1 + \xi_1 = \frac{\chi_{1-\gamma}^2}{2n}, \quad 1 - \xi_2 = \frac{\chi_{1+\gamma}^2}{2n},$$

$\chi_{(\cdot)}^2$  – квантиль  $\chi^2$  – распределения с  $2n$  степенями свободы уровня  $(\cdot)$ .

Отсюда следует, что доверительный интервал для параметра определяется неравенствами:

$$\frac{2n\theta^*}{\chi_{1-\gamma}^2} < \theta < \frac{2n\theta^*}{\chi_{1+\gamma}^2}.$$

Рассмотрим алгоритм построения толерантного интервала  $[L_1(x), L_2(x)]$ , определяемого соотношением

$$\Pr \left\{ \int_{L_1(x)}^{L_2(x)} \lambda e^{-\lambda t} dt > P \right\} = \gamma$$

или после замены  $\lambda = \frac{1}{\theta}$

$$\Pr \left\{ \int_{L_1(x)}^{L_2(x)} \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} dt > P \right\} = \gamma$$

Это соотношение означает, что с доверительной вероятностью, не меньшей  $\gamma$ , можно предсказать, что, по крайней мере,  $P100\%$  будущих наблюдений из генеральной совокупности попадет в интервал  $[L_1(x), L_2(x)]$ . Такой интервал называют двусторонним  $(P, \gamma)$  – толерантным интервалом. Очевидно, что  $0$  и  $+\infty$  являются допустимыми значениями для  $L_1(x)$  и  $L_2(x)$  соответственно. Интервал  $[0, L_2(x)]$  называют верхним  $(P, \gamma)$  – толерантным интервалом. Соответственно интервал  $[L_1(x), \infty]$  называют нижним толерантным интервалом.

В случае верхнего (нижнего) толерантного интервала задача заключается в том, чтобы получить верхнюю

(соответственно нижнюю)  $\gamma$  – доверительную границу для  $P$  – квантиля ( $[1 - P]$  – квантиля) функции распределения  $F^{-1}(P, \theta)$  (соответственно  $F^{-1}(1 - P, \theta)$ ).

Сначала построим соотношения для одностороннего толерантного интервала. Пусть  $n$  – объем выборки из показательного распределения, а сама выборка является упорядоченной, так что

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(r)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Рассмотрим случай, когда толерантные пределы основаны на первых  $r$  наблюдениях. Необходимо найти  $L(X) = L(X_1, X_2, \dots, X_n)$  такой, что

$$\Pr \left\{ \int_{L(x)}^{\infty} \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta} \right\} dx > P \right\} = \gamma$$

или

$$\Pr \left\{ \int_0^{L(x)} \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta} \right\} dx < 1 - P \right\} = \gamma.$$

Так как

$$\int_0^{L(x)} \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta} \right\} dx = -e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{L(x)} = 1 - \exp \left\{ -\frac{L(x)}{\theta} \right\}$$

то можно записать, что

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ 1 - \exp \left\{ -\frac{L(x)}{\theta} \right\} < 1 - P \right\} &= \Pr \left\{ \exp \left\{ -\frac{L(x)}{\theta} \right\} < P \right\} = \\ \Pr \left\{ -\frac{L(x)}{\theta} < \ln P \right\} &= \Pr \left\{ -\frac{L(x)}{\ln P} < \theta \right\} = \gamma. \end{aligned}$$

Известно, [6, 20], что нижний  $\gamma$  – доверительный предел для  $\theta$  с использованием усеченной выборки определяется как

$$\frac{2r\theta_{r,n}^*}{\chi_{\gamma}^2(2r)},$$



где

$$\theta_{r,n}^* = \frac{\sum_{i=1}^r x_{(i)} + (n-r)x_{(r)}}{r}$$

является оценкой максимального правдоподобия для  $\theta$  [19] (для задач надежности числитель в выражении для  $\theta$  представляет собой суммарную наработку к моменту  $r$ -го отказа. Тогда нижний  $(1 - P, \gamma)$  – толерантный предел для показательного распределения определяется выражением:

$$L(X) = \frac{2r \ln P}{\chi_{\gamma}^2(2r)} \theta_{r,n}^* = C_r \theta_{r,n}^*.$$

Наиболее устойчивый толерантный предел может быть получен, если предел основан на всех наблюдениях выборки объема  $n$  (когда  $P, \gamma$  и  $n$  заданы). Однако в тех случаях, когда нежелательно ждать до тех пор, пока все выборочные измерения заданного объема будут осуществлены (например, при последовательной проверке различных гипотез), величина  $r$  должна быть меньшей (при достаточно большом  $n$ ).

Рассмотрим задачу нахождения двустороннего интервала  $[L_1(X), L_2(X)]$  такого, что

$$\Pr \left\{ \int_{L_1(X)}^{L_2(X)} \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta} \right\} dx > 1 - P \right\} = \gamma.$$

Будем искать границы толерантного интервала в виде  $C_1 \theta_{r,n}^*$  и  $C_2 \theta_{r,n}^*$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – положительные константы, не зависящие от выборки [25]. Если принять условие равенства «хвостов» распределения, то можно записать:

$$\int_0^{C_1 \theta_{r,n}^*} \frac{1}{\theta_{r,n}^*} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta_{r,n}^*} \right\} dx = \int_{C_2 \theta_{r,n}^*}^{\infty} \frac{1}{\theta_{r,n}^*} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta_{r,n}^*} \right\} dx.$$

Это условие аналогично тому, которое накладывалось при определении толерантного интервала вида  $[\bar{x} - C_1 s, \bar{x} + C_2 s]$  для нормального распределения с параметрами  $m$  и  $\sigma$ , а

истинное  $m$  будет равным оценке максимального правдоподобия  $\bar{x}$  [12, 38]:

$$\int_{-\infty}^{\bar{x}-c_1s} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2s^2}\right\} dt = \int_{\bar{x}+c_2s}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2s^2}\right\} dt.$$

Отличие состоит в том, что нормальное распределение является симметричным и двухпараметрическим. Равенство «хвостов» показательного распределения сводится к соотношению

$$C_2 = -\ln(1 - e^{-C_1}),$$

и, следовательно, необходимо определить только коэффициент  $C_1$ , который удовлетворяет условию:

$$\Pr\left\{\exp\left[-\frac{C_1\theta_{r,n}^*}{\theta}\right] - \exp\left[-\frac{C_2\theta_{r,n}^*}{\theta}\right] > P\right\} = \gamma.$$

Очевидно, что распределение в скобках не зависит от  $\theta$ . Не уменьшая общности рассуждений можно принять  $\theta = 1$ . Тогда

$$\Pr\left\{\left[e^{-C_1}\right]^{\theta_{r,n}^*} - \left[1 - e^{-C_1}\right]^{\theta_{r,n}^*}\right\} > P\right\} = \gamma,$$

так как

$$-C_2 = \ln(1 - e^{-C_1}), \quad e^{-C_2} = 1 - e^{-C_1}.$$

Обозначим  $e^{-C_1} = v$ . Тогда

$$v^{\theta_{r,n}^*} - (1-v)^{\theta_{r,n}^*} = h(v, \theta_{r,n}^*) \geq 0.$$

Определив производную

$$\frac{dh(v, \theta_{r,n}^*)}{d\theta_{r,n}^*} = v^{\theta_{r,n}^*} \ln v - (1-v)^{\theta_{r,n}^*} \ln(1-v),$$

можно показать, что она отрицательна, если выполняется условие:

$$\left[ \frac{v}{1-v} \right]^{\theta_{r,n}^*} > \frac{\ln(1-v)}{\ln v}$$

и, следовательно,  $v > 1 - v$ .

Таким образом, функция  $h(v, \theta_{r,n}^*)$  является убывающей функцией от  $\theta_{r,n}^*$ . Следовательно:

$$\Pr\{h(v, \theta_{r,n}^*) > P\} = \gamma,$$

если

$$\Pr\left\{\theta_{r,n}^* < \frac{\chi_\gamma^2(2r)}{2r} = u\right\} = \gamma.$$

Тогда:

$$\Pr\{h(v, \theta_{r,n}^*) > P\} = \Pr\{h(v, \theta_{r,n}^*) > v^u - (1-v)^u\} = \gamma.$$

Очевидно, что величина  $v$  удовлетворяет уравнению:

$$v^u - (1-v)^u = P,$$

после решения которого толерантные множители определяются как

$$C_1 = -\ln v, \quad C_2 = -\ln(1-v).$$

Заметим, что, как и для односторонних пределов, множители  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $n$ .

Таким образом, множители  $C_1$  и  $C_2$  рассчитаны так, что с вероятностью  $\gamma$  по крайней мере доля  $P$  экспоненциального распределения будет заключена между  $C_1\theta_{r,n}^*$  и  $C_2\theta_{r,n}^*$ , где  $\theta_{r,n}^*$  есть оценка максимального правдоподобия параметра  $\theta$ , основанная на первых  $r$  упорядоченных наблюдениях из выборки объема  $n$  показательного распределения случайной величины.

В табл. 4.2, 4.3 приведены значения толерантных множителей  $C_1$  и  $C_2$  для различных значений  $P$  и  $r$  для доверительных вероятностей  $\gamma = 0,95$  и  $0,99$ .

Таблица 4.2

r	$\gamma = 0,99$					
	P = 0,95		P = 0,99		P = 0,995	
	C1	C2	C1	C2	C1	C2
1	0,0011	4,5	0,00218	6,13	0,00109	6,82
2	0,0155	4,18	0,00303	5,80	0,00151	6,50
3	0,0183	4,01	0,00359	5,63	0,00179	6,33
4	0,0204	3,9	0,00400	5,52	0,00200	6,22
5	0,0220	3,83	0,00433	5,44	0,00216	6,14
6	0,0234	3,77	0,00460	5,38	0,00229	6,08
7	0,0244	3,72	0,00482	5,34	0,00241	6,03
8	0,0253	3,69	0,00502	5,12	0,00250	5,97
9	0,0261	3,66	0,00518	5,27	0,00259	5,96
10	0,0267	3,64	0,00532	5,24	0,00266	5,93
11	0,0272	3,62	0,00545	5,22	0,00273	5,91
12	0,0277	3,60	0,00556	5,19	0,00278	5,89
13	0,0281	3,59	0,00566	5,18	0,00284	5,87
14	0,0285	3,57	0,00575	5,16	0,00288	5,85
15	0,0288	3,56	0,00583	5,15	0,00293	5,84
16	0,0290	3,55	0,00590	5,14	0,00296	5,82
17	0,0293	3,55	0,00596	5,12	0,00300	5,81
18	0,0295	3,54	0,00602	5,12	0,00303	5,80
19	0,0297	3,53	0,00608	5,11	0,00306	5,79
20	0,0298	3,53	0,00612	5,10	0,00309	5,78

**Пример.** Упорядоченная выборка измерений длительности безотказной работы системы управления (30 объектов контроля до первого отказа) приведена в табл. 4.4.

Определим оценку максимального правдоподобия  $\theta^*$  для усеченной выборки ( $r = 20$ ):

$$\theta_{20,30}^* = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + (30 - 20)x_{(r)}}{20} = 750,4 .$$

Таблица 4.3

<i>r</i>	$\gamma = 0,95$					
	$P = 0,95$		$P = 0,99$		$P = 0,995$	
	C1	C2	C1	C2	C1	C2
1	0,0171	4,076	0,00335	5,699	0,00167	6,394
2	0,0226	3,847	0,00424	5,466	0,00211	6,161
3	0,0242	3,732	0,00478	5,345	0,00239	6,039
4	0,0200	3,662	0,00517	5,268	0,00258	5,961
5	0,0272	3,616	0,00545	5,215	0,00273	5,906
6	0,0281	3,584	0,00567	5,176	0,00284	5,865
7	0,0288	3,561	0,00584	5,146	0,00293	5,833
8	0,0293	3,544	0,00598	5,123	0,00300	5,808
9	0,0297	3,531	0,00609	5,104	0,00307	5,788
10	0,0300	3,521	0,00618	5,089	0,00312	5,772
	0,0302	3,514	0,00626	5,077	0,00316	5,759
11	0,0304	3,508	0,00632	5,067	0,00320	5,747
12	0,0306	3,503	0,00637	5,059	0,00323	5,738
13	0,0307	3,499	0,00641	5,053	0,00325	5,730
14	0,0308	3,496	0,00645	5,048	0,00327	5,724
15	0,0308	3,494	0,00648	5,042	0,00329	5,718
16	0,0309	3,492	0,00650	5,039	0,00331	5,713
17	0,0309	3,491	0,00653	5,035	0,00332	5,709
18	0,0310	3,490	0,00654	5,033	0,00333	5,706
19	0,0310	3,489	0,00656	5,030	0,00334	5,703
20						

Таблица 4.4

Значения случайной величины $X$					
112	2128	4719	632	508	1794
797	2864	244	654	132	45
617	772	148	249	96	492
1323	174	979	390	4731	1288
531	177	724	296	781	295

Для вероятностной меры распределения  $P = 0,95$  и доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$  толерантные множители определяются из таблицы 4.3:

$$C_1 = 0,0310 \quad C_2 = 3,489.$$

так что двусторонний толерантный интервал заключен между пределами  $L_1(x) = C_1\theta_{20,30}^* = 23,3$  и  $L_2(X) = C_2\theta_{20,30}^* = 2618$ .

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 можно предсказать, что, по крайней мере, 95% будущих наблюдений из генеральной совокупности с показательной функцией распределения попадет в указанный интервал.

#### 4.1.2. Распределение Вейбулла

Функция и плотность распределения имеют вид:

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\lambda_0 t^\alpha\right\},$$

$$f(t) = \alpha\lambda_0 t^{\alpha-1} \exp\left\{-\lambda_0 t^\alpha\right\}.$$

Как правило, для вычисления точечных оценок  $\lambda_0^*$  и  $\alpha^*$  параметров  $\lambda_0$  и  $\alpha$  методом максимального правдоподобия используется усеченная упорядоченная выборка  $\vec{X}_{r,n} = (X_{(1),n}, X_{(2),n}, \dots, X_{(r),n})$ , получается в соответствии с планом испытаний  $(N, U, r)$  [12]. Если ввести новый параметр такой, что

$$\theta = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\lambda_0}},$$

то функция и плотность распределения принимают вид

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\alpha\right\},$$

$$f(t) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\alpha\right\}.$$

Уравнения правдоподобия имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \ln f(\theta, \alpha)}{\partial \theta} &= -\frac{r\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha} \right] = 0, \\ \frac{\partial \ln f(\theta, \alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{r}{\alpha} - \sum_{i=1}^r \ln X_{(i),n} - \frac{1}{\theta^{\alpha}} \left[ \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} \ln \left( \frac{X_{(i),n}}{\theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha} \ln \left( \frac{X_{(i),n}}{\theta} \right) - \ln \theta \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

После преобразований первого уравнения

$$\alpha \left[ -\frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha} \right] \right] = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} -r + \frac{1}{\theta^{\alpha}} \left[ \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha} \right] &= \\ = -r\theta^{\alpha} + \left[ \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\theta^{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha}}{r}$$

и, следовательно,

$$\theta = \left[ \frac{\sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha} + (n-r)X_{(r),n}^{\alpha}}{r} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Проводя аналогичные преобразования во втором уравнении, получаем эквивалентные уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} \ln X_{(i),n} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*} \ln X_{(r),n}}{\sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*}} - \frac{1}{\alpha^*} = \\ & = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln X_{(i),n} \\ \theta^* & = \left[ \frac{\sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*}}{r} \right]^{\frac{1}{\alpha^*}} \end{aligned} \right.$$

Для решения уравнений целесообразно использовать, например, метод Ньютона или другой алгоритм, имеющийся в программном обеспечении средств обработки данных.

Если определена оценка  $\alpha^*$ , то из второго уравнения получается оценка  $\theta^*$ .

Если ввести обозначения:

$$R = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln X_{(i),n}, \quad A_1(\alpha^*) = \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*},$$

$$A_2(\alpha^*) = \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} \ln X_{(i),n} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*} \ln X_{(r),n},$$

$$A_3(\alpha^*) = \sum_{i=1}^r X_{(i),n}^{\alpha^*} \ln^2 X_{(i),n} + (n-r) X_{(r),n}^{\alpha^*} \ln^2 X_{(r),n},$$

получаем уравнения правдоподобия в компактном виде:



$$\begin{cases} \frac{A_2(\alpha^*)}{A_1(\alpha^*)} - R - \frac{1}{\alpha^*} = 0, \\ \theta^* = \left[ \frac{A_1(\alpha^*)}{r} \right]^{\frac{1}{\alpha^*}} \end{cases}$$

Первое уравнение можно решить численным методом с некоторым начальным приближением  $\alpha_0^*$ . Тогда итерационный алгоритм поиска  $\alpha$  имеет вид:

$$\alpha_{k+1}^* = \alpha_k^* - \frac{A_1(\alpha_k^*) \left[ A_2(\alpha_k^*) - A_1(\alpha_k^*) \left( R + \frac{1}{\alpha_k^*} \right) \right]}{\left[ \frac{A_1(\alpha_k^*)}{\alpha_k^*} \right]^2 + A_1(\alpha_k^*) A_2(\alpha_k^*) - A_2^2(\alpha_k^*)}.$$

**Пример 1.** Реализации наработки системы управления в виде упорядоченной выборки представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Значения случайной величины				
108	148	178	190	248
328	417	442	448	453
473	475	507	509	600
638	657	673	769	780
783	791	815	830	833
889	904	914	941	964
992	1000	1003	1064	1068
1110	1138	1151	1178	1193
1227	1242	1260	1285	1295
1315	1603	1628	1855	2327

Проведем расчеты оценок  $\alpha^*$  и  $\theta^*$  для усеченной выборки в соответствии с приведенными выше алгоритмами.

$$A := \text{sort}(A1)$$

$$r := 40 \quad n := 50 \quad \alpha := 2.088$$

$$R := \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \ln(A_i) \quad S1 := \left[ \sum_{i=0}^{r-1} (A_i)^\alpha + (n-r) \cdot (A_{r-1})^\alpha \right]$$

$$S2 := \sum_{i=0}^{r-1} (A_i)^\alpha \cdot \ln(A_i) + (n-r) \cdot (A_{r-1})^\alpha \cdot \ln(A_{r-1})$$

$$\alpha := \alpha + \frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} \quad \alpha = 2.088 \quad \theta := \left( \frac{S1}{r} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\theta = 982.608$$

Ошибка

$$\frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} = -7.392 \times 10^{-7}$$

Таким образом, в результате расчета оценки параметров имеют значения:  $\alpha^* = 2,088$   $\theta^* = 982,608$   $\lambda^* = 1,02 \cdot 10^{-3}$

**Пример 2.** Для сравнения получим оценки параметров для полной выборки, используя выше приведенный алгоритм:

$$A := \text{sort}(A1)$$

$$r := 50 \quad n := 50 \quad \alpha := 2.028$$

$$R := \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \ln(A_i) \quad S1 := \left[ \sum_{i=0}^{r-1} (A_i)^\alpha + (n-r) \cdot (A_{r-1})^\alpha \right]$$

$$S2 := \sum_{i=0}^{r-1} (A_i)^\alpha \cdot \ln(A_i) + (n-r) \cdot (A_{r-1})^\alpha \cdot \ln(A_{r-1})$$

$$\alpha := \alpha + \frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} \quad \alpha = 2.028 \quad \theta := \left( \frac{S1}{r} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\theta = 983.617$$

Ошибка

$$\frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} = -2.202 \times 10^{-7}$$

В случае полной выборки можно использовать следующие соотношения для определения оценок параметров

$$1 + \bar{V}^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha^*}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha^*}\right)},$$

где  $\bar{V} = \frac{s}{x}$  есть выборочный коэффициент вариации. После

определения оценки  $\alpha^*$  находятся оценки параметров  $\lambda_0^*$  и  $\theta^*$

$$\lambda_0^* = \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha^*}\right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \right]^{\alpha^*} \quad \theta^{\alpha^*} = \frac{1}{\lambda_0^*}$$

Для рассмотренного выше примера:

$$\alpha^* = 2,02 \quad \theta^* = 985.$$

### 4.1.3. Гамма-распределение.

Функция и плотность распределения имеют вид:

$$F(t; \alpha, \beta) = \int_0^t \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha\beta)} e^{-\beta x} dx,$$

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha\beta)} e^{-\beta x}.$$

В случае полной выборки уравнения максимального правдоподобия для оценок  $\alpha^*, \beta^*$  параметров  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид:

$$\begin{cases} \ln \alpha^* - \frac{d \ln \Gamma(\alpha^*)}{d\alpha^*} - \ln \bar{x} + \ln \tilde{x} = 0 \\ \bar{x} \beta^* - \alpha^* = 0, \end{cases}$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \tilde{x} = \left[ \prod_{i=1}^n x_i \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Оценка  $\alpha^*$  может быть определена с помощью алгоритма Ньютона в первом уравнении. Значение  $\beta^*$  получается подстановкой  $\alpha^*$  во второе уравнение.

Двухпараметрический закон гамма – распределения случайной величины  $\xi(\alpha, \beta)$  имеет основные числовые характеристики:

$$M[\xi(\alpha, \beta)] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D[\xi(\alpha, \beta)] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Следовательно, оценки  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  могут быть определены из соотношений (метод моментов):

$$\alpha^* = \left( \frac{\bar{x}}{s} \right)^2, \quad \beta^* = \frac{\bar{x}}{s^2},$$

где  $\bar{x}, s^2$  – выборочные среднее и дисперсия.

**Пример.** Реализации времени автоматического восстановления  $\tau_{вi}$  некоторого блока (в мл сек), полученные в результате моделирования, приведены в табл.4.6.

В предположении, что случайная величина подчиняется гамма – распределению, определить статистические оценки параметров  $\alpha$  и  $\beta$  этого распределения.

Таблица 4.6

6,099	1,969	8,017	3,695	3,547
1,996	2,602	4,323	1,744	3,821
1,801	1,564	1,723	0,995	1,819
1,115	1,516	1,739	0,962	1,549
3,3	1,104	1,512	2,744	7,574
2,723	2,496	4,167	4,246	1,851
2,98	4,784	4,759	3,585	3,807
3,174	0,762	2,483	3,538	6,514
2,106	4,617	1,774	0,63	2,5
3,716	2,655	1,197	3,508	6,092

После определения оценок среднего  $\bar{x}$  и дисперсии  $s^2$  по выборочным данным, определяются оценки параметров:

$$\bar{x} = 2,99 \quad s^2 = 3,002 \quad \alpha^* = \left( \frac{\bar{x}}{s} \right)^2 = 2,978 \quad \beta^* = \frac{\bar{x}}{s^2} = 0,996.$$

#### 4.1.4. Бета - распределение

Случайная величина  $\xi(\alpha, \beta)$ , подчиняющаяся закону бета – распределения с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  имеет плотность вероятности

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, 0 \leq x \leq 1.$$

Статистические оценки параметров могут быть определены из соотношений:

$$\alpha^* = \bar{x} \left[ \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{s^2} - 1 \right],$$

$$\beta^* = (1-\bar{x}) \left[ \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{s^2} - 1 \right] = \frac{1-\bar{x}}{\bar{x}} \alpha^*.$$

#### 4.1.5. Оценки максимального правдоподобия стандартных распределений

- *Нормальное распределение:*

$$m^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- *Логарифмически нормальное распределение:*

Статистическое исследование наработки, имеющей логарифмически нормальное распределение, может быть сведено к случаю нормального распределения, если использовать значения преобразованной выборки [6, 21]:

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (\ln X_1, \ln X_2, \dots, \ln X_n).$$

В общем случае статистические оценки параметров определяются из выражений:

$$m^* = \ln a^* \quad a^* = x_{med}^* \quad D^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln a^*)^2$$

$$x_{med}^* = \begin{cases} \frac{1}{2} x_{(n)} & n - \text{четное} \\ \frac{1}{2} [x_{(n)} + x_{(n+1)}] & n - \text{нечетное} \end{cases}$$

- *Обратное гауссовское распределение*

Плотность распределения случайной величины, подчиняющаяся обратному гауссовскому распределению

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{(\alpha - \beta x)^2}{2x}\right\}$$

можно записать в виде (см. раздел 2.12):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3 \theta}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\mu^2 x \theta}\right\},$$

где  $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\theta = \alpha^{-2}$ .

В случае полной выборки оценки максимального правдоподобия имеют вид:

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \alpha^* = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{\mu^*} \right) \right]^{-1} \quad \theta^* = \left( \frac{1}{\alpha^*} \right)^2.$$

- *Равномерное распределение*

Статистические оценки параметров равномерного распределения случайной величины  $\xi(a, b)$  с плотностью

$$f(a, b) = \frac{1}{b - a}, \quad a \leq x \leq b$$

определяются из выражений:

$$a^* = x_{\min} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1},$$

$$b^* = x_{\max} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1},$$

где  $x_{\min} = x_{(1)}$ ,  $x_{\max} = x_{(n)}$  являются крайними членами вариационного ряда.

- *DN – распределение*

Статистические оценки максимального правдоподобия параметров распределения случайной величины, имеющей DN – распределение с плотностью

$$f(x; a, v) = \frac{1}{vx\sqrt{2\pi ax}} \exp\left\{-\frac{(1-ax)^2}{2v^2 ax}\right\}$$

определяются на основе статистики отказов [50]:

$$a^* = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k} \quad v^* = \sqrt{\frac{1}{a^*} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} - \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k} \right]}$$

При достаточно большом  $n$  ( $n > 100$ ) моментные оценки и оценки максимального правдоподобия параметров практически совпадают [50]. В этом случае:

$$\tilde{a}^* = n \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right]^{-1} \quad \tilde{v}^* = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^{\frac{3}{2}}$$

• *DM-распределение*

Для случайной величины с плотностью *DM* – распределения

$$f(x; a, v) = \frac{1+ax}{2vx\sqrt{2\pi ax}} \exp\left\{-\frac{(1-ax)^2}{2v^2 ax}\right\}$$

статистические оценки максимального правдоподобия параметров  $a$  и  $v$  определяются из выражений:

$$a^* = \left\{ n \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right]^{-1} + \frac{n}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{a^*}{1+a^* x_i} \right]^{-1} - \left[ \frac{n^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{a^*}{1+a^* x_i} \right]^{-2} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1}$$



$$v^* = \left[ \frac{1}{a^*} \left[ \frac{(a^*)^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 2a^* \right] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

При больших  $n$  можно использовать моментные оценки [50]:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^* &= 3 \left\{ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{3}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1} \\ \tilde{v}^* &= 3 \left\{ 2 \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{3}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{3}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

## 4.2. Непараметрическая оценка характеристик надежности

Если вид функции распределения случайной величины не известен, то основной ее характеристикой может служить непараметрический толерантный интервал. Как и доверительный интервал, толерантный интервал имеет случайные концы  $L_1(X)$  и  $L_2(X)$ . Однако, если доверительный интервал должен накрыть с заданной вероятностью параметр распределения такой, как математическое ожидание, дисперсия или квантиль, то требование к толерантному интервалу  $(L_1, L_2)$  состоит в том, чтобы вероятностная мера, сосредоточенная на нем, была не меньше, чем  $P$ , с вероятностью  $\gamma$ .

Если выборочные измерения контролируемого параметра (например, длительность безотказной работы) построить в вариационный ряд  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ , то порядковые статистики  $x_{(r)}$  и  $x_{(s)}$  дают свободный от распределения толерантный интервал. Если положить  $L_1(X) = X_{(r)}$ ,  $L_2(X) = X_{(s)}$ , то

$$\Pr \left\{ \int_{L_1}^{L_2} f(x) dx \geq P \right\} = \gamma$$

или

$$\Pr \{ [F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})] \geq P \} = \gamma,$$

где  $F(x)$  – неизвестная функция распределения, доля которого, сосредоточенная в интервале, образованном порядковыми статистиками  $x_{(r)}$  и  $x_{(s)}$ , будет не меньше  $P$  с доверительной вероятностью  $\gamma$ .

Левая часть в приведенном выражении не зависит от  $f(x)$  тогда и только тогда, когда  $L_1$  и  $L_2$  являются порядковыми статистиками.

Можно показать [18, 21], что распределение квазиразмаха  $F_{(s-r)} = F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})$  определяется выражением:

$$F_{(s-r)} = \frac{1}{B(s-r, n-s+r+1)} \int_0^P y^{s-r-1} (1-y)^{n-s+r} dy,$$

где  $B(a, b)$  представляет собой  $B$  – функцию Эйлера:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Вероятностная мера  $P$ , сосредоточенная в интервале, ограниченном значениями  $x_{(r)}$  и  $x_{(s)}$ , определится как

$$\begin{aligned} & \Pr \{ [F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})] \geq P \} = \\ & = 1 - \Pr \{ [F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})] < P \} = 1 - F_{(s-r)} = \gamma \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{B(s-r, n-s+r+1)} \int_0^P y^{s-r-1} (1-y)^{n-s+r} dy = 1-\gamma,$$

или окончательно:

$$\frac{\int_0^P y^{s-r-1} (1-y)^{n-s+r} dy}{\int_0^1 y^{s-r-1} (1-y)^{n-s+r} dy} = \frac{B_P(a, b)}{B(a, b)} = I_P(s-r, n-s+r+1) = 1-\gamma$$

Таким образом

$$I_P(s-r, n-s+r+1) = 1-\gamma,$$

где  $I_P(\cdot)$  – неполная бета-функция.

В полученном выражении:

$P$  – вероятностная мера, сосредоточенная в толерантном интервале  $[x_{(r)}, x_{(s)}]$ ,

$\gamma$  – доверительная вероятность,

$n$  – объем выборки,

$r, s$  – положения порядковых статистик в выборке.

Если заданы любые четыре величины из пяти ( $P, \gamma, n, r, s$ ), то можно решить полученное уравнение относительно пятой.

Очень часто значения  $r$  и  $s$  выбирают симметрично так, что  $s = n - r + 1$ . В частности, если  $r = 1$ , то  $s = n$ . В этом случае

$$I_P(n-1, 2) = 1-\gamma$$

или

$$\frac{n!}{(n-2)!} \int_0^P y^{n-2} (1-y) dy = 1-\gamma,$$

т.е.

$$nP^{n-1} - (n-1)P^n = 1-\gamma.$$

**Пример.** Для рассмотренного в разделе 4.1.2. примера выборочные данные ( $n = 50$ ) дают порядковые статистики  $x_{(1)} = 108$  и  $x_{(50)} = 2327$ , которые определяют толерантный интервал.

Определим с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,9$  вероятностную меру  $P$ , сосредоточенную в этом интервале.

Решение уравнения:

$$n := 50 \quad \gamma := 0.9$$

given

$$\frac{n!}{(n-2)!} \cdot \int_0^P y^{n-2} \cdot (1-y) dy = 1 - \gamma$$

find(P)

$$\frac{n!}{(n-2)!} \cdot \int_0^{0.92442} y^{n-2} \cdot (1-y) dy = 0.100003$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} \int_0^P y^{n-2} (1-y) dy = 1 - \gamma$$

относительно  $P$  дает искомую величину  $P = 0,92442$ .

### 4.3. Параметрическая оценка законов распределения

В общем случае при проверке гипотезы о том, что функция распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  есть вполне определенная функция  $F(x)$ , вводится мера отклонения эмпирической функции распределения  $F_n(x)$  выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  от предполагаемой (теоретической) функции распределения  $F(x)$ .

Наиболее часто используется мера, введенная Пирсоном, называемая критерием  $\chi^2$  Пирсона. В этом случае множество значений случайной величины  $\xi$  разбивается на  $r$  множеств  $S_1, S_2, \dots, S_r$  без общих элементов. Такое разбиение осуществляется при помощи  $(r-1)$  чисел  $q_1 < q_2 < \dots < q_{r-1}$  и называется группировкой данных, когда вместо наблюдения  $x_i$

указывается лишь тот интервал (множество)  $S_j$ , в который это наблюдение попало.

Пусть  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) – вероятность того, что величина  $\xi$  принадлежит множеству  $S_i$ . Очевидно, что  $\sum_i p_i = 1$ . Теперь

предположим, что  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) – количество величин из числа наблюдаемых  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , которые принадлежат множеству  $S_i$ .

Тогда  $\frac{v_i}{n}$  – частота попадания величины  $\xi$  в множество  $S_i$  при  $n$  наблюдениях. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^r v_i = n, \quad \sum_{i=1}^r \frac{v_i}{n} = 1.$$

Известно, что при построении функции распределения,  $p_i$  есть приращение теоретической функции распределения, а  $\frac{v_i}{n}$  – приращение эмпирической функции. За меру отклонения эмпирической функции распределения от теоретической принимается величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{n}{p_i} \left( \frac{v_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Если распределение  $\chi^2$  известно, то по заданному уровню значимости можно найти предел значимости для проверки принятой гипотезы, при этом вектор  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  частот попаданий в интервалы  $S_1, S_2, \dots, S_r$  является достаточной статистикой.

Очевидно, что функция правдоподобия при «перемещении» наблюдений в пределах своих интервалов не меняется и достаточно знать лишь количества  $v_1, v_2, \dots, v_r$  наблюдений, попавших в эти интервалы.

Оказывается, что какова бы ни была функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $\xi$ , при  $n \rightarrow \infty$  распределение величины  $\chi^2$  стремится к  $\chi^2$  – распределению с  $(r - 1)$  степенями свободы, т.е.

$$\Pr\{\chi^2 < x\} = \int_0^x f_{r-1}(t) dt,$$

где  $f_{r-1}(x)$  – плотность распределения  $\chi^2$  с  $(r - 1)$  степенями свободы.

Применение теоремы Пирсона на практике дает достаточно хорошие результаты, когда

$$np_i \geq 10, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Критерий  $\chi^2$  является асимптотически непараметрическим, т.к. предельное распределение статистики  $\chi^2$  при гипотезе  $H_0$  от исходного распределения выборки  $X$  не зависит.

Решающее правило критерия для проверки гипотезы  $H_0$  определяется неравенством

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2(r - s - 1),$$

где  $s$  – количество параметров распределения  $f(x)$ , рассчитанных по экспериментальным данным.

Диапазон изменения случайной величины рекомендуется разбивать на интервалы в зависимости от числа наблюдений в соответствии с табл.4.7.

Таблица 4.7

Число наблюдений	Рекомендуемое число интервалов
40 – 100	7 – 10
100 – 500	8 – 12
500 – 1000	10 – 16
1000 – 10000	12 – 22

Известны два основных способа разбиения диапазона изменения случайной величины. Первый заключается в выборе таких интервалов группировки, которые обеспечивают равенство ожидаемых частот для всех интервалов (за исключением проверки гипотезы о равномерном распределении). Этот способ приводит к интервалам группировки различной длины.

Второй способ состоит в выборе интервалов одинаковой длины. В этом случае разными окажутся частоты попадания в тот или иной интервал [21, 24].

Первый способ имеет более высокую мощность критерия при наличии альтернативной гипотезы  $H_1$ . Границы разбиения определяют различную длину интервалов, для которых

$$p = \int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{r},$$

где  $A_k, A_{k+1}$  – границы соответствующего интервала,  $k = 1, 2, \dots, r - 1$ ,  $A_0 = 0$  и  $A_r = \infty$  при оценке законов распределения наработки.

В случае практического применения процедура проверки гипотезы предполагает следующие этапы:

- проводится расчет границ интервалов таким образом, чтобы ожидаемые частоты в соответствующих интервалах были одинаковы. Например, для  $r = 10$  имеет  $p = 0,1$ , а при  $n$  наблюдениях (измерениях) ожидаемая частота в каждом интервале равна  $np_i = 10$ .

- рассчитываются наблюдаемые частоты  $v_i$  для каждого интервала при известных их границах для ранжированной выборки  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ .

- рассчитывается статистика критерия и проверяется гипотеза  $H_0$ .

Если количество наблюдений в отдельных интервалах мало (порядка 1 – 4), то необходимо соответствующие интервалы объединить.

Необходимо также отметить, что хотя статистика  $\chi^2$  и является мерой отклонения гипотетического закона от истинного, но мерой случайной, т.е. величиной, подверженной неконтролируемому разбросу. И в этом отношении одинаково маловероятными следует считать как слишком большие значения наблюдаемой статистики  $\chi^2$ , так и слишком малые. Слишком малое значение статистики может свидетельствовать о неудачном выборе модельного закона  $f(x)$ , о нарушении корректности или объективности, вызванной стремлением «подогнать» экспериментальные данные под желаемый результат.

При использовании критерия необходимо учитывать, что этот критерий является не достаточно мощным [4], т.е. чтобы вероятность  $\beta$  отвергнуть проверяемую гипотезу, если она неверна, было сравнительно большой, необходимо, чтобы статистика критерия была существенно меньше критического значения  $\chi_{\alpha}^2(n)$ . Значение  $\chi_{\alpha}^2(n)$  выбирается из условия малого значения вероятности ошибки первого рода  $\alpha$  отвергнуть проверяемую гипотезу, если она верна.

По таблице нецентрального  $\chi^2$ -распределения можно оценить мощность критерия, построенного на основании статистики критерия, и указать такое отклонение от  $\chi_{\alpha}^2(n)$ , которое обеспечивает вероятность  $\beta$  не меньше заданной. Достаточную уверенность при принятии проверяемой гипотезы можно получить, если контролируемая статистика критерия на 30 – 40% меньше  $\chi_{\alpha}^2(n)$  при  $\alpha = 0,05$ .

Проверка мощности теста  $\chi^2$  путем прямого численного эксперимента (моделирования) позволяет считать, что статистика критерия слабо меняется при изменениях начального распределения. Даже для таких распределений, как экспоненциальное и логарифмически – нормальное, тест  $\chi^2$  применять можно, хотя эксцесс и асимметрия этих распределений весьма значительны.



**Пример 1.** В табл. 4.8 приведены результаты измерения наработки некоторой системы уравнения объемом  $n = 100$ .

Проверить гипотезу о показательном распределении наработки на уровне значимости критерия 0,05.

Таблица 4.8

589	1415	503	537	704	300	477	218
552	662	93	318	404	1155	1185	2220
161	1865	2534	445	607	894	765	1880
304	190	135	1804	2062	242	495	2627
425	2256	1482	83	411	708	700	675
374	500	5131	2296	147	291	967	593
45	1734	2028	49	3581	2884	2129	146
4221	345	1525	1778	1076	1001	220	641
225	1932	910	1991	2715	556	601	1167
213	1258	111	296	1018	1476	1472	612
2922	645	2357	115	1920	71	3056	1089
920	55	627	366	1350	643	920	535
380	831	4934	1691				

Границы интервалов разбиения ( при  $r = 10$ ) определяются как

$$p = \int_{q_k}^{q_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{\lambda^*} \int_{q_k}^{q_{k+1}} \exp\{-\lambda^* x\} dx = -\frac{1}{\lambda^*} \ln(1-p),$$

$$k = 1, 2, \dots, r-1$$

где оценка  $\lambda^*$  определяется по выборке измерений:

$$\lambda^* = \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^{-1} = 9,03 \cdot 10^{-4},$$

а величина  $p = \frac{1}{r} = 0,1$ .

Общее выражение для определения границ имеет вид:

$$q_k = -\frac{1}{\lambda^*} \ln(1 - kp), \quad k = \overline{1, r-1}.$$

Результаты статистической обработки после ранжирования выборки приведены в табл.4.9.

Таблица 4.9

№ интервала	Границы интервалов	Наблюдённая частота	Ожидаемая частота	$\chi$
1	0 – 117	8	10	0,4
2	118 – 247	10	10	0
3	248 – 395	9	10	0,1
4	396 – 566	12	10	0,4
5	567 – 768	15	10	2,5
6	769 – 1015	7	10	0,9
7	1016 – 1334	7	10	0,9
8	1335 – 1783	9	10	0,1
9	1784 – 2550	14	10	1,6
10	2551 – $\infty$	9	10	0,1

100

$\Sigma = 7,0$

Критическое значение статистики определяем по таблице распределения  $\chi^2$  (таблица процентных точек) [5] на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  (5%):

$$\chi_{0,05}^2(10-1-1) = \chi_{0,05}^2(8) = 15,507.$$

В любом программном обеспечении есть соответствующие разделы, позволяющие определять значения функции распределения, плотности распределения и процентные точки большинства практически используемых законов распределения случайных величин. Например, при использовании программы Mathcad:

$$\text{qchisq}(0.95, 8) = 15,507.$$

Так как  $\chi^2 = 7,0$  меньше критического значения, то гипотеза о показательном распределении не отвергается на уровне значимости критерия 0,05.

**Пример 2.** В табл.4.10 приведены результаты измерения наработки объемом  $n = 100$ .

Проверить гипотезу о распределении наработки по закону Вейбулла на уровне значимости критерия  $\alpha = 0,05$ .

Таблица 4.10

681	828	602	1289	1313	884	1526	1536
266	334	1217	943	682	892	717	396
686	755	1300	767	1190	709	733	839
548	691	466	743	304	564	635	1075
1088	1490	401	1366	1592	667	779	946
874	1371	551	436	368	1097	1436	492
703	1621	652	1502	1218	289	641	842
836	821	611	707	2265	1515	383	540
983	770	213	1317	1424	222	1292	1698
1424	382	571	2055	588	1235	1334	1037
1000	469	801	475	1390	954	1411	1648
746	776	1080	462	1122	333	544	1009
1215	1213	782	1709				

Границы интервалов разбиения определяются в результате решения уравнения (при  $r = 10$ ):

$$\int_{q_k}^{q_{k+1}} f(x) dx = \int_{q_k}^{q_{k+1}} \frac{\alpha^*}{\theta^*} \left( \frac{x}{\theta^*} \right)^{\alpha^* - 1} \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\theta^*} \right)^{\alpha^*} \right\} dx = 0,1,$$

$$k = \overline{1, r-1}$$

где оценки  $\alpha^*$  и  $\theta^*$  определены по полной выборке в соответствии с рассмотренным выше алгоритмом Ньютона:

$$\alpha^* = 2,257; \theta^* = 1048.$$

$$\begin{aligned}
& A0 := \text{sort}(A1) \\
& r := 100 \quad n := 100 \quad \alpha := 2.257 \\
& R := \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=0}^{99} \ln(A0_i) \\
& S1 := \left[ \sum_{i=0}^{99} (A0_i)^\alpha + (n-r) \cdot (A0_{99})^\alpha \right] \\
& S2 := \sum_{i=0}^{99} (A0_i)^\alpha \cdot \ln(A0_i) + (n-r) \cdot (A0_{99})^\alpha \cdot \ln(A0_{99}) \\
& \alpha := \alpha + \frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} \quad \alpha := 2.257 \\
& \theta := \left( \frac{S1}{r} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \theta := 1048 \\
& \text{Ошибка} \\
& \frac{S1 \cdot \left[ S2 - S1 \cdot \left( R + \frac{1}{\alpha} \right) \right]}{\left( \frac{S1}{\alpha} \right)^2 + S1 \cdot S2 - S2^2} \quad E := 2.32 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

Для сравнения оценки, рассчитанные в соответствии с выражениями, использующими выборочный коэффициент вариации, соответственно равны:

$$\alpha^* = 2,22 \quad \theta^* = 1044,$$

где оценка  $\alpha^*$  определяется из решения уравнения

$$1 + \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha^*}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^*}\right)},$$

а оценка  $\theta^*$  из соотношения [см. п.4.1.1.]:

$$[\theta^*]^{\alpha^*} = \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha^*}\right)}{x} \right]^{-\alpha^*}.$$

Результаты статистической обработки приведены в табл.4.11.

Таблица 4.11

№ интервала	Границы интервалов	Наблюденная частота	Ожидаемая частота	$\chi$
1	0 – 387	10	10	0
2	388 – 539	8	10	0,4
3	540 – 663	12	10	0,4
4	664 – 778	16	10	3,6
5	779 – 890	10	10	0
6	891 – 1008	6	10	1,6
7	009 – 1137	7	10	0,9
8	1138 – 1293	7	10	0,9
9	1294 – 1516	14	10	1,6
10	1517 – $\infty$	10	10	0
		100		$\Sigma = 9,4$

Критическое значение статистики равно:

$$\chi_{0,05}^2(10 - 2 - 1) = \chi_{0,05}^2(7) = 14,067.$$

Так как  $\chi^2 < \chi_{0,05}^2(8)$ , то гипотеза о распределении Вейбулла не отвергается.

**Пример 3.** Пусть задана ошибка первого рода  $\alpha = 0,05$  и требуется проверить гипотезу, что данные из табл.4.10 являются реализациями наработки, распределенной по показательному закону.

Статистическая обработка данных дает оценку среднего  $\bar{x} = 925,07$ , так что оценка интенсивности  $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}} = 1,081 \cdot 10^{-3}$ . В табл.4.12 приведены результаты проверки.

Таблица 4.12

№ интервала	Границы интервалов	Наблюденная частота	Ожидаемая частота	$\chi$
1	0 – 97	0	10	
2	98 – 206	0	10	2,5
3	207 – 330	5	10	
4	331 – 473	11	10	0,1
5	474 – 641	13	10	0,9
6	642 – 848	25	10	22,5
7	849 – 1114	14	10	1,6
8	1115 – 1489	20	10	10
9	1490 – 2130	11	10	0,4
10	2131 – $\infty$	1	10	

100

$\Sigma = 38$

Тестовая статистика  $\chi^2$  составляет величину (после объединения интервалов), равную 38. Поскольку  $\chi_{0,05}^2(7-1-1) = \chi_{0,05}^2(5) = 11,07$ , то гипотезу следует отклонить при уровне значимости 0,05.

#### 4.4. Непараметрическая оценка законов распределения

Непараметрическая оценка плотности распределения случайной величины, как правило, имеет вид

$$f^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k \left[ \frac{x_i - x}{c} \right],$$

где  $c$  – некоторый коэффициент,  $k(u)$  – весовая функция, называемая ядром, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} k(u) &\geq 0, \quad k(u) = k(-u), \quad \int k(u) du = 1 \\ k(u) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |u| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Задача сглаживания экспериментальных данных решается за счет введения ядра  $k(u)$  в некоторой окрестности каждой экспериментальной точки. Коэффициент  $c$  является сглаживающим параметром и выбирается в зависимости от объема анализируемых экспериментальных данных.

Часто в качестве  $k(u)$  используют плотность нормального закона распределения. Основное достоинство этих оценок по сравнению с построением гистограмм заключается в том, что они не зависят от выбора положения интервалов разбиения и поэтому легко обобщаются на многомерный случай.

На рис.4.1 показаны непараметрические оценки плотности распределения для трех значений коэффициента  $c$  в соответствии с выражением:

$$f^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left\{-\frac{(x_i - x)^2}{2c^2}\right\},$$

где  $x_i$  – значения случайной величины, плотность распределения которой оценивается (в рассматриваемом примере выборка взята из совокупности с распределением Вейбулла).

Как видно из приведенных графиков при увеличении коэффициента  $c$  увеличивается сглаживающий эффект при построении оценки плотности.

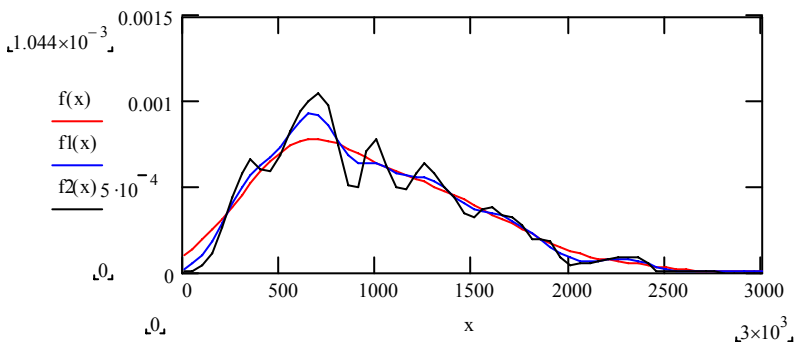


Рис.4.1. Оценки плотности распределения для различных значений коэффициента  $c$

В практике статистической обработки используют также непараметрические оценки парзеновского типа [69]:

$$f^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x-x_i}{h}\right),$$

где коэффициент  $h$  называется коэффициентом размытости.

Как показано в [53] оптимальная структура ядра имеет параболический вид. Однако при переходе от оптимального ядра к ядру в виде равномерной плотности, ограниченному некоторыми пределами, показатель эффективности практически не изменяется.

Коэффициент размытости  $h$  определяет область, в которой ядро отлично от нуля. Слишком большая величина  $h$  определяет малую разрешающую способность (при близких значениях  $x_i$ ) и наоборот, если  $h$  слишком мало, то оценка плотности будет представляться в виде суммы отдельных выбросов, т.е. будет зашумлена.

Оптимальным по отношению к минимуму среднеквадратической ошибки аппроксимации является определение в соответствии с выражением [69]:

$$h = n^{-0,2}.$$

В задачах эксплуатационного контроля и прогнозирования надежности система обработки данных должна обеспечивать немедленное использование каждого элемента поступающей информации  $x_i$  для уточнения необходимых статистических оценок [28]. Поэтому целесообразно использование последовательных (рекуррентных) алгоритмов, так как накопление и обработка статистических данных в этом случае происходит последовательно во времени.

Плотность распределения аппроксимируется ступенчатой кривой, ограничивающей ряд прямоугольников равной площади. При этом общее число интервалов разбиения  $Q$  определяется заданной точностью аппроксимации, а координаты границ интервалов определяются рекуррентным способом из уравнения

$$\int_{S_{q-1}}^{S_q} f(x) dx = F(S_q) - F(S_{q-1}) = \frac{1}{Q}, \quad q = \overline{1, Q}.$$



В памяти системы обработки данных необходимо хранить координаты границ интервалов  $\{S_q\}$  и их количество [7].

В результате очередного измерения случайной величины  $x_{n+1}$  необходимо переопределить новый массив координат  $\{S_q^{(n+1)}\}$ , соответствующий оценке  $f_{n+1}^*(x)$ , получаемой с учетом поступившей информации.

Работа алгоритма начинается с ввода исходной информации

$$n, Q, h_n, \{S_q^{(n)}\}, x_{n+1}$$

и определения нового коэффициента размытости  $h_{n+1}$  как наибольшего из значений:

$$\max \begin{cases} h_{n+1} = h_n \frac{n^{0,2}}{(n+1)^{0,2}} \\ h_{n+1} = 0,5(S_0^{(n)} - h_n - x_{n+1}), & x_{n+1} < S_0^{(n)} \\ h_{n+1} = 0,5(x_{n+1} - S_0^{(n)} + h_n), & x_{n+1} > S_0^{(n)} \end{cases}$$

Оценка  $f_{n+1}(x)$  может быть определена в соответствии с выражением:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n k_i^{(n+1)}(x) + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x),$$

где

$$k_i^{(n+1)} = \frac{1}{h_{n+1}} \begin{cases} 0,5 & |x - x_i| \leq h_{n+1}, \\ 0 & |x - x_i| > h_{n+1}. \end{cases}$$

Представим это выражение в виде:

$$f_{n+1}(x) = \frac{n}{n+1} \hat{f}_n(x) + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x),$$

где

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^{(n+1)}(x).$$

Таким образом, получение оценки  $f_{n+1}(x)$  возможно посредством вычисления  $\hat{f}(x)$  (промежуточная оценка) по известной оценке  $f_n(x)$ .

Так как оценка  $\hat{f}_n(x)$  строится по тем же статистическим данным, то границы области ее существования относительно границ  $\{S_0^{(n)}, S_Q^{(n)}\}$  определяются как:

$$\hat{S}_0^{(n)} = S_0^{(n)} + (h_n - h_{n-1}),$$

$$\hat{S}_Q^{(n)} = S_Q^{(n)} - (h_n - h_{n-1}),$$

которые записываются в соответствующие ячейки массива  $\{S\}$ .

Усечение области существования оценки  $\hat{f}_n(x)$  приводит к соответствующему изменению ее ординат относительно  $f_n(x)$  так, чтобы выполнялось условие нормировки:

$$\int_{\hat{S}_0^{(n)}}^{\hat{S}_Q^{(n)}} \hat{f}_n(x) dx = 1.$$

Тогда вычисление оценки  $\hat{f}_n(x)$  через  $f_n(x)$  означает симметричное усечение оценки  $f_n(x)$  на величину  $2(h_n - h_{n+1})$  с соответствующей нормировкой.

Так как все прямоугольники имеют одинаковую площадь, равную  $\frac{1}{Q}$ , то

$$\frac{1}{Q} = (S_q^{(n)} - S_{q-1}^{(n)}) f_q(x),$$

а ордината оценки плотности распределения  $f_n(x)$  будет равна

$$f_q(x) = I_q = \frac{1}{Q(S_q^{(n)} - S_{q-1}^{(n)})}.$$

Применяя операцию усечения и нормирования, получаем:

$$\hat{f}_n(x) = \hat{I}_q = mI_q, \quad \hat{S}_0^{(n)} \leq x \leq \hat{S}_Q^{(n)},$$

где  $m$  – нормирующий множитель, который определяется следующим образом.

Площадь под аппроксимированной кривой  $f_n(x)$  равна 1, а площадь усеченной области равна:

$$\begin{aligned} f_1(x)(h_n - h_{n+1}) + f_Q(x)(h_n - h_{n+1}) &= \\ &= \frac{h_n - h_{n+1}}{(S_1 - S_0)Q} + \frac{h_n - h_{n+1}}{(S_Q - S_{Q-1})Q}, \end{aligned}$$

Площадь под усеченной кривой равна

$$1 - Q^{-1} \left[ (S_1 - S_0)^{-1} + (S_Q - S_{Q-1})^{-1} \right] (h_n - h_{n+1})$$

следовательно, величина нормирующего множителя определяется как отношение площадей:

$$m = \frac{1}{1 - Q^{-1} \left[ (S_1^{(n)} - S_0^{(n)})^{-1} + (S_Q^{(n)} - S_{Q-1}^{(n)})^{-1} \right] (h_n - h_{n+1})}.$$

На этот множитель необходимо умножить значения ординат оценки  $f_n(x)$  для получения ординат оценки  $\hat{f}_n(x)$ , определяя тем самым новый массив координат точек разбиения  $S_{n+1}(Q)$ .

Определение искомого массива  $\{S_q^{(n+1)}\}$  начинается с нахождения начального  $S_0^{(n+1)}$  и конечного  $S_Q^{(n+1)}$  значений:

$$\begin{aligned} S_0^{(n+1)} &= \inf \left[ x_{n+1} - h_{n+1}, \hat{S}_0^{(n)} \right], \\ S_Q^{(n+1)} &= \sup \left[ x_{n+1} + h_{n+1}, \hat{S}_Q^{(n)} \right], \end{aligned}$$

где  $x_{n+1} - h_{n+1}$  и  $x_{n+1} + h_{n+1}$  определяют границы, в которых отлична от нуля  $(n + 1)$ -я функция ядра.

Далее последовательно определяются остальные члены массива  $\{S_q^{(n+1)}\}$  в соответствии с выражением:

$$\int_{S_{q-1}}^{S_q} f(x) dx = \frac{1}{Q}, \quad q = \overline{1, Q-1},$$

где

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n k_i^{(n+1)}(x) + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x) = \\ &= \frac{n}{n+1} \hat{f}_n(x) + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x) = \\ &= \frac{n}{n+1} mI_q + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x), \\ k_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{h_{n+1}} \begin{cases} 0,5 & |x - x_{n+1}| \leq h_{n+1} \\ 0 & |x - x_{n+1}| > h_{n+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Первое слагаемое в выражении для  $f_{n+1}(x)$  учитывает уже накопленную информацию, а второе – полученную.

Так как оценка  $f(x)$  является кусочно-постоянной функцией, то интеграл от нее вычисляется умножением ординаты на разность абсцисс. Для этого необходимо определить на участках постоянства их начальную и конечную координаты.

С приходом нового значения  $x_{n+1}$  необходимо оценить положение ядра  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  относительно уже накопленной оценки  $f_n(x)$  чтобы использовать основной алгоритм расчета:

$$f_{n+1}(x) = \frac{n}{n+1} mI_q + \frac{1}{n+1} k_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

При задании номера  $q$  координата начала участка задается равенством  $\alpha = S_{q-1}^{(n)}$ , а верхняя граница  $\beta$  определяется как  $S_q^{(n)}(S_q^{(n)} > \alpha)$ .

Возможны два случая. В первом ни для одного  $S_v^{(n)}$  из массива  $\{S_q^{(n)}\}$  не выполняется условие  $S_v^{(n)} > \alpha$ , так что рассмотрение ведется в области, где  $\hat{f}_n(x) = 0$  (рис.4.2).

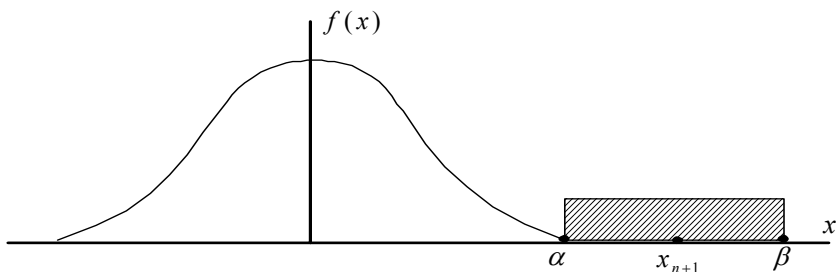


Рис.4.2. Случай  $f(x) = 0$ ,  $k_{N+1}^{(N+1)} \neq 0$

Следовательно, только ядро  $k_{n+1}^{n+1} \neq 0$ . Тогда  $\beta = x_{n+1} + h_{n+1}$ , а  $k_{n+1}^{n+1} = 0,5h_{n+1}^{-1}$ . Очевидно, что площадь, ограниченная функцией  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  на участке постоянства равна (с весом  $\frac{1}{n+1}$ ):

$$I_0 = \frac{0,5(\beta - \alpha)}{(n+1)h_{n+1}}.$$

Во втором случае в массиве  $\{S_q^{(n)}\}$  имеется некоторое значение  $S_v^{(n)}$  такое, что

$$S_v^{(n)} > \alpha$$

и необходимо оценить положение ядра относительно интервала  $[\alpha, S_v^{(n)}]$ , рис.4.3.

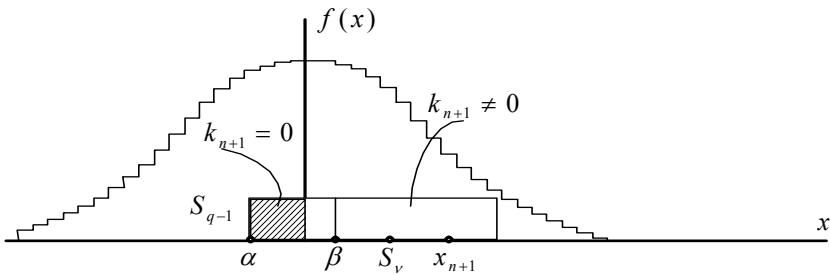


Рис.4.3. Оценка положения ядра

Сначала нижняя граница области существования ядра  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  сравнивается с заданным значением  $\alpha$ :

$$x_{n+1} - h_{n+1} \leq \alpha .$$

Если условие не выполняется, это означает, что область определения ядра лежит правее  $\alpha$  и, следовательно, ее начало может попасть на отрезок  $[\alpha, S_v^{(n)}]$ . Если это так, то верхняя граница участка постоянства равна  $\beta = x_{n+1} - h_{n+1}$ , а если нет, то  $\beta = S_v^{(n)}$ . В обоих случаях это означает, что на участке постоянства  $k_{n+1}^{n+1} = 0$ , вследствие чего взвешенная площадь под кривой определяется как

$$I_0 = \frac{n}{n+1} m I_q(\beta - \alpha) .$$

Если условие  $x_{n+1} - h_{n+1} \leq \alpha$  выполняется, то начало области существования функции  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  лежит левее  $\alpha$  и, следовательно, необходимо определить границу  $\beta$ . В этом случае если  $x_{n+1} + h_{n+1} \leq \alpha$ , то функция  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  полностью учтена на предыдущих шагах, и следовательно,  $k_{n+1}^{n+1}(x) = 0$ , а  $\beta = S_v^{(n)}$ , так что

$$I_0 = \frac{n}{n+1} mI_q (\beta - \alpha).$$

Если же  $x_{n+1} + h_{n+1} > \alpha$ , то конечная точка  $x_{n+1} + h_{n+1}$  области определения функции  $k_{n+1}^{n+1}(x)$  может принадлежать отрезку  $[\alpha, S_v^{(n)}]$ . В этом случае  $\beta = x_{n+1} + h_{n+1}$  либо  $\beta = S_v^{(n)}$ . Вариант  $\beta = x_{n+1} + h_{n+1}$  соответствует случаю, когда в области постоянства отличны от нуля оба слагаемых в выражении  $\hat{f}(x)$ :

$$I_0 = \frac{n}{n+1} mI_q (\beta - \alpha) + \frac{0,5(\beta - \alpha)}{(n+1)h_{n+1}}.$$

В варианте  $\beta = S_v^{(n)}$  возможны два случая. Если  $v = 0$  (переменная перебора чисел в массиве  $\{S_q^{(n)}\}$ ), то на интервале постоянства  $\hat{f}_n(x) = 0$  (рис.4.4) и, следовательно:

$$I_0 = \frac{0,5(\beta - \alpha)}{(n+1)h_{n+1}},$$

в противном случае

$$I_0 = \frac{n}{n+1} mI_q (\beta - \alpha) + \frac{0,5(\beta - \alpha)}{(n+1)h_{n+1}}.$$

Таким образом, работа каждой из рассмотренных ветвей алгоритма заканчивается определением приращения площади  $I_0$ , полученного на данном участке постоянства. Приращения, полученные на каждом шаге суммируются  $I = I + I_0$ , так что значение  $I$  сравнивается со значением  $\frac{1}{Q}$ , где  $\frac{1}{Q}$  – площадь, ограниченная кривой  $\hat{f}_n(x)$  между любыми искомыми  $S_{q-1}^{(n+1)}$  и  $S_q^{(n+1)}$ .

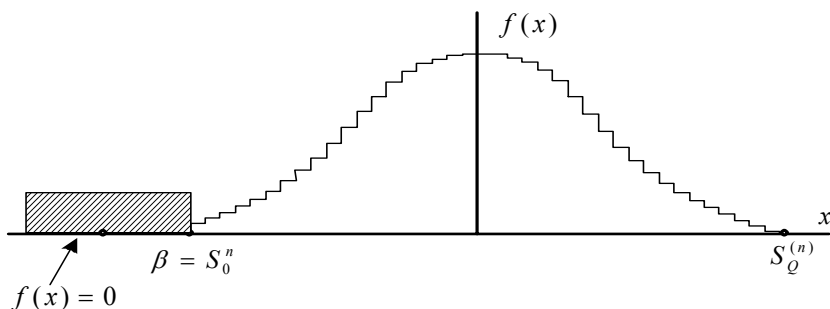


Рис.4.4. Случай  $f(x) = 0$ ,  $k_{N+1}^{(N+1)} \neq 0$

Если значение  $I$  не превышает  $\frac{1}{Q}$ , то значение верхней границы интервала  $\beta$  принимается за новую нижнюю границу, т.е.  $\alpha = \beta$  и вычисления повторяются.

Как только значение  $I$  превысит  $\frac{1}{Q}$ , начинается определение очередного значения  $S_q^{(n+1)}$ . Для этого вычисляется величина

$$\Delta I = I - \frac{1}{Q},$$

на которое превышено заданное значение площади, рис.4.5.

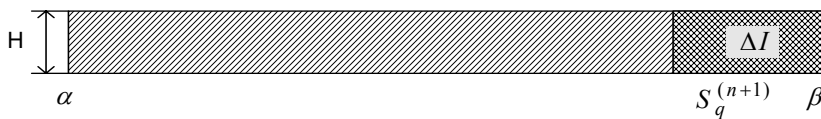


Рис.4.5. Расчет величины  $S_q^{(N+1)}$



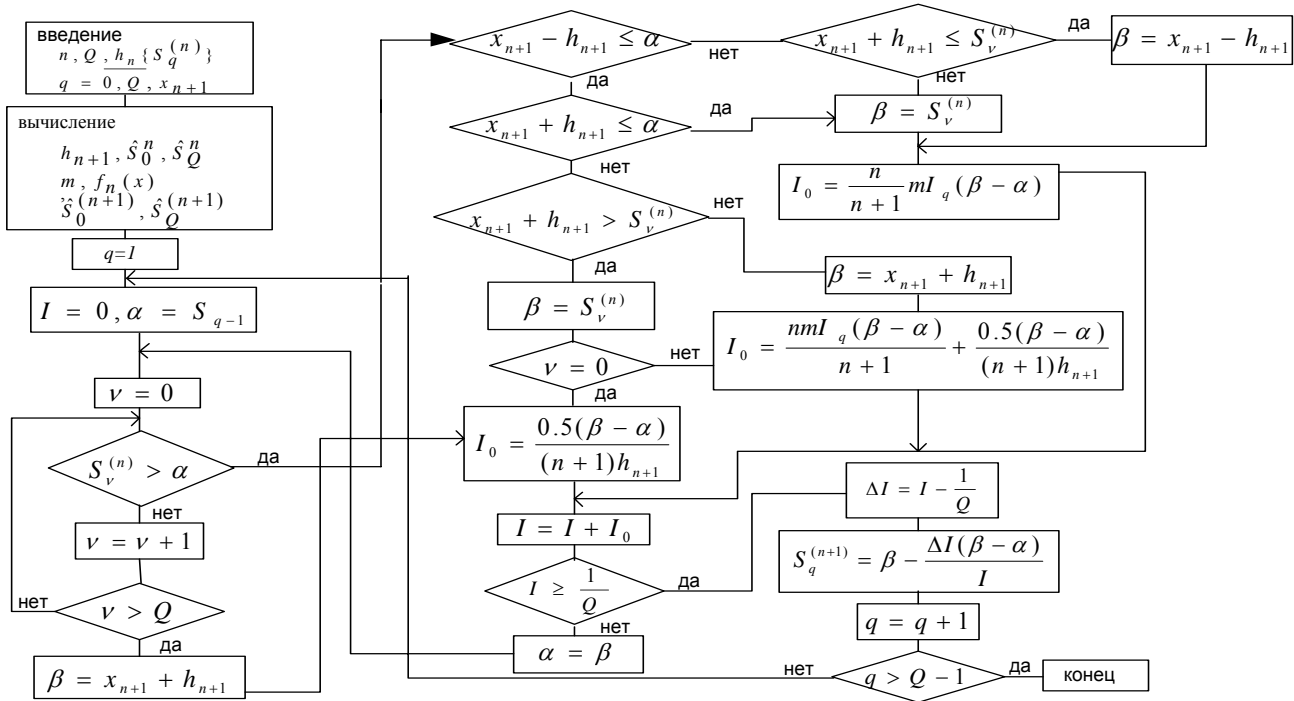
Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta I &= H(\beta - S_q^{(n+1)}), & S_q^{(n+1)} &= \beta - \frac{\Delta I}{H}, \\ I &= H(\beta - \alpha), & H &= \frac{I}{\beta - \alpha}, \\ S_q^{(n+1)} &= \beta - \frac{\Delta I}{I}(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Вычисленное значение  $S_q^{(n+1)}$  записывается в массив  $\{S_q^{(n+1)}\}$ , после чего принимается  $q = q + 1$ . Если  $q < Q - 1$ , то рассчитывается следующее значение координаты точки разбиения  $S_{q+1}^{n+1}$ . По достижении  $q = Q - 1$  массив  $S_q^{(n+1)}$ ,  $q = \overline{0, Q}$ , оказывается полностью сформированным. С приходом нового значения  $x_{n+2}$  рассмотренная процедура повторяется. На рис.4.6 показана структурная схема алгоритма получения оценки плотности распределения случайной величины  $X$ .

Рис.4.6

Как правило, совместно с оценкой плотности распределение случайной величины проводится проверка гипотезы о полученном законе распределения с помощью, например, критерия  $\chi^2$ .



## **5. НАДЕЖНОСТЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ БОРТОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

### **5.1. Особенности программного обеспечения бортовых систем управления**

По мере совершенствования компьютерных технологий большую часть функций управления и безопасности, выполняемых экипажем, стремятся передать бортовой вычислительной системе управления. Однако это возможно лишь в том случае, когда ее надежность будет достаточно высокой.

Отказоустойчивые бортовые вычислительные системы характеризуются жесткими требованиями к использованию ресурсов, а реальное время, как одна из важнейших переменных, определяет выходные воздействия и функциональную связь между состоянием объекта управления и моделью этого состояния в вычислительной системе. Комплексы программ, реализующие алгоритмы управления этого типа, отличаются наибольшей сложностью, что связано с широким спектром реализуемых задач и большими динамично меняющимися потоками информации.

Очевидно, что надежность отказоустойчивых вычислительных систем определяется как надежностью аппаратных средств, так и надежностью программного обеспечения (ПО), управляющего выполнением вычислительного и исполнительного процессов.

Программы, используемые в отказоустойчивых системах авионики, должны обеспечивать решение задач управления с высокой точностью [21] и надежностью в пределах ограниченного по времени цикла управления (в некоторых случаях исключается какая-либо возможность повторения этого цикла при проявлении программной ошибки, обнаруженной системой диагностирования, или аппаратурного сбоя). По этим причинам надежность вычислительных систем в значительной степени определяется надежностью ПО.

Под надежностью ПО понимается его свойство сохранять в течение требуемого интервала времени способность правильно выполнять заданные спецификацией функции под влиянием внешних воздействий в реальных условиях эксплуатации.

Под отказом ПО будем понимать событие, состоящее в получении к заданному моменту времени результата решения задачи управления объектом, не соответствующего определенным в спецификации управляющим воздействиям, которые должны формироваться при заданном наборе входных данных и состоянии системы.

Современные технологии разработки компьютерных систем управления в принципе позволяют обеспечить требуемый уровень надежности аппаратных средств. Что же касается программных средств, то на сегодня они значительно чаще являются причиной отказа компьютерных систем, чем их аппаратные средства. В силу сложности программных средств и невозможности их полной трассируемости не может быть уверенности в том, что ПО бортовых систем управления не содержит серьезных ошибок.

Опыт разработки и эксплуатации ПО современных сложных систем управления показывает, что проблема обеспечения и контроля надежности охватывает все этапы жизненного цикла программ и должна решаться на каждом этапе специальными методами, рис. 5.1.

Функциональные возможности бортовых систем управления, создаваемых по технологии интегрально-модульной авиационной электроники (ИМА), реализуются через соответствующие ПО, при этом сама система является функционально разделенной и аппаратно объединенной в сеть системой. Для надежного ее функционирования необходимо обеспечить управление потоками информации между прикладными программами и данными, с которыми они работают, а также выполнение всех управляющих функций, влияющих на целостность функционирования самолета.

Программное обеспечение систем управления состоит из отдельных программных модулей, каждый из которых ориентирован на решение части прикладной задачи и частично на решение задачи управления в целом. Модульная конструкция ПО обеспечивает его разделение с целью изоляции функций авиационной электроники в условиях общей аппаратуры, т.е. прикладные программы должны быть независимы от аппаратуры.

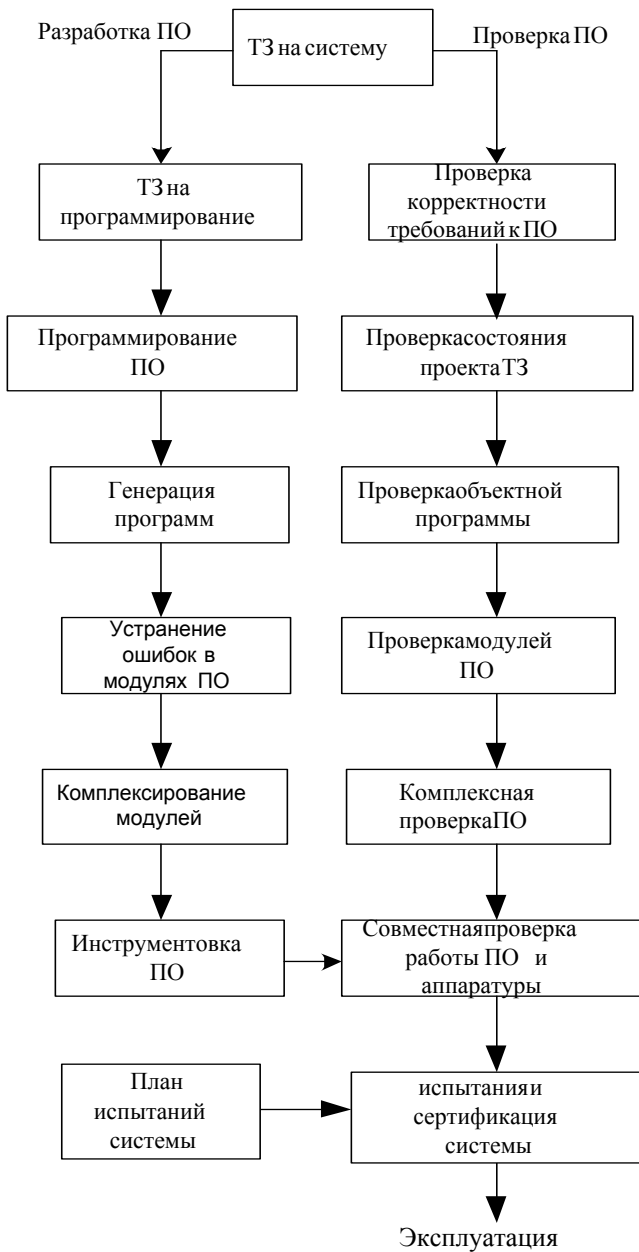


Рис.5.1. Этапы разработки ПО

Целостность одной прикладной программы не определяется поведением других прикладных программ независимо от того, считается ли другая прикладная программа более критичной или менее критичной, а все связи между ними должны быть выполнены через операционную систему, которая гарантирует устойчивый интерфейс и не допускает монополизации ресурсов любой программой.

Операционная система, как правило, помимо основных функций контролирует аппаратуру (отказ питания и ошибки аппаратуры), ответственную за целостность частей ПО, и передает необходимую информацию монитору состояния, который в случае каких-либо нарушений организует необходимые действия, обеспечивая автоматическое восстановление или реагируя иным образом. Соответствующее ПО, как правило, разделяется на контроль состояния операционной системы и на «таблицу» алгоритмов (стратегии) восстановления исправного функционирования, которая определяется разработчиком с учетом комплексирования систем. Монитор состояния отвечает за отказы контролируемой аппаратуры и функциональные отказы в операционной системе.

Отказы аппаратуры, обнаруженные системой встроенного контроля, включает отказы памяти и процессоров, а также отказы, связанные с интерфейсом шины данных. Отказы, обнаруженные в операционной системе, включают нарушения функций прикладных программ и отказы, обнаруженные прикладными программами и сообщенные операционной системе.

Как уже отмечалось, основные особенности функционирования ПО бортовых систем управления обусловлены режимом реального времени выполнения вычислений, разветвленным обменом данными и значительным объемом перерабатываемой информации, случайным характером поступления внешних воздействий, решением разнообразных функциональных задач, подчиненных единой цели – обеспечению требуемого уровня безопасности полета. Основные свойства ПО, связанные с его надежностью, определяются распределением отказов во времени.

Поскольку отказ ПО или потеря функции могут повлечь за собой снижение уровня безопасности полета, корректная постановка требований к надежности ПО состоит в ограничении вероятности появления отказа таким образом, чтобы она соответствовала практически невозможному событию. Тогда критерием надежности ПО бортовых систем управления является критерий вероятности отсутствия ошибочного результата выполнения управляющей функции за время  $T$  работы ПО в заданном режиме:

$$P(T) \geq P_{\text{тр}}^T,$$

где  $P_{\text{тр}}^T$  – требуемые для конкретного ПО нормативные значения вероятностей.

Основное значение при определении количественных требований к надежности ПО имеет влияние, оказываемое на безопасность полета отказом. Степени критичности функций ПО можно разбить на три категории: критическая, важная и обычная.

К категории критических относятся функции, для которых возникновение любой отказной ситуации или проявление ошибки программного обеспечения исключает безопасное продолжение полета и выполнение посадки. Критическая категория охватывает катастрофическую и аварийную ситуации.

К категории важных относятся функции, для которых возникновение любой отказной ситуации и ошибок ПО снижает вероятность справиться с неблагоприятными условиями полета. Важная категория управляющих функций приравнивается к сложной ситуации.

К категории обычных относится совокупность функций, отказ которых приводит к усложнению условий полета.

В соответствии с таким подходом, основанном на выделении степени критичности функций, выполняемых ПО, можно установить требования к надежности комплексов программных модулей.

Как пример можно привести требования к надежности ПО системы управления полетом ВСУП-85 (ИЛ-96-300, ТУ-204).

- для программных средств, выполняющих критические функции, вероятность отказа не должна превышать  $10^{-9}$  на 1 час полета (практически невероятное событие):

$$P_{\text{тр}}^T = 1 - 10^{-9},$$

если последствия отказа могут привести к катастрофической ситуации;

- для программных средств, выполняющих критические функции, вероятность отказа не должна превышать  $10^{-7}$  на 1 час полета:

$$P_{\text{тр}}^T = 1 - 10^{-7},$$

если последствия отказа могут привести к аварийной ситуации;

- для программных средств, выполняющих важные функции:

$$P_{\text{тр}}^T = 1 - 10^{-5};$$

- для программных средств, выполняющих обычные функции:

$$P_{\text{тр}}^T = 1 - 10^{-4}.$$

Для достижения высокой надежности традиционные системы использовали дублирование целой системы. Архитектура современных бортовых систем управления такова, что обеспечивает подход, связанный с использованием интегрированной аппаратуры и, следовательно, снижает число компонентов, необходимых для достижения данного уровня функциональной готовности.

Ни один единичный отказ не должен приводить к функциональной неисправности и, таким образом, создавать потенциальную опасность. Это относится как к неисправности аппаратуры, так и к потенциальным дефектам в ПО. Поэтому процесс автоматического диагностирования является неотъемлемой частью процесса функционирования системы управления.

Под диагностированием понимается процесс обнаружения ошибок в ПО. Близкими к диагностированию являются задачи тестирования и верификации (доказательства правильности программ). Тестирование – метод выявления ошибок в программе путем преобразования процессором заранее подготовленных исходных (тестовых) данных и



сравнения полученных результатов с расчетными. Тестирование как метод обнаружения ошибок можно использовать на этапах отладки программ. Тестирование и диагностирование ПО, имея единую цель – выявление ошибок, реализуются различными методами, поскольку используются на разных стадиях жизненного цикла программ.

Диагностирование ПО ориентировано на использование методов в автоматическом режиме и поддерживают работу системы в режиме реального времени. Как правило, методы диагностирования ПО систем управления используются только по отношению к прикладным программам, которые не используют стандартных операционных систем в процессе функционирования и написаны на машинно – ориентированном языке, поскольку в этом случае возможна реализация наиболее быстродействующих программ с размещением их в оперативных запоминающих устройствах.

Как известно, ПО не изнашивается и, следовательно, не имеет зависимости частоты отказов от времени эксплуатации. В отношении ПО говорят о вероятных дефектах проектирования. Более сложные системы имеют тенденцию переносить их сложность на ПО. Это, в свою очередь, повышает потенциальную опасность остаточных дефектов проектирования даже после интенсивного верификационного контроля.

Первопричиной нарушения работоспособности программ при безотказности аппаратуры всегда является конфликт между реальными исходными данными, подлежащими обработке, и программой, осуществляющей эту обработку [11]. При этом под исходными данными понимаются как вновь поступившие, так и вся информация, накопленная за время предыдущего функционирования программ. Исходные данные могут находиться в заданной области определения, однако вне области, проверенной при тестировании и испытаниях программ на надежность [68].

Надежная программа должна обеспечивать низкую вероятность отказа, быстрое реагирование на искажения программы, данных или вычислительного процесса и восстановления работоспособности за время, меньшее, чем пороговое между сбоем и отказом. При этом неправильная программа может функционировать в принципе абсолютно надежно. Действительно, если при каждом появлении реальные исходные данные, попадающие в области, не проверенные при тестировании и испытаниях и стимулирующие неправильные результаты, не приводят к отказу, то такая программа функционирует безотказно и абсолютно надежно, хотя и не всегда правильно [11, 45].

Совершенно правильная программа определена в области исходных данных, заданных требованиями технического задания.

Однако в реальных условиях за счет различных причин исходные данные могут попасть в область, не проверенную при отладке и не соответствующую требованиям спецификации. Здесь правильная программа не проверяется и может потерять работоспособность за счет конфликта между исходными данными и программой. В результате формально правильная программа окажется ненадежной из-за системной ошибки при задании области изменения исходных данных.

При взаимодействии комплекса программ обработки информации и управления с объектом управления имеют большое значение временные параметры, которые служат основой для установления порогового значения при классификации сбоев и отказов. В частности, для бортовых систем управления [45]:

- средний период решения однотипных задач (с)

$$10^{-1} - 1;$$

- допустимое время отклика или ожидания результата (с)

$$10^{-2} - 10^{-1};$$

- средний интервал времени между однотипными сообщениями (с)

$$10^{-2} - 10^{-1};$$

- пороговое время восстановления между областью сбоя и отказов (с)

$$10^{-1} - 1$$

Таким образом, жесткость требований к различным параметрам ПО требует специальных методов обеспечения надежности функционирования программ, среди которых можно выделить следующие:

- методы использования избыточности: временной, информационной, программной;
- методы контроля программ, данных и вычислительного процесса;
- методы программного восстановления;
- методы испытаний на надежность (в нормальных условиях эксплуатации, форсированные испытания, расчетно – экспериментальные методы определения надежности).

Основные понятия теории надежности программного обеспечения базируются на понятиях теории надежности, первоначального развившейся применительно к аппаратным комплексам. Однако имеются и существенные различия в принципах обеспечения надежности ПО и других технических средств.

## 5.2. Основные показатели надежности ПО

Современные автоматические системы управления реального времени содержат сотни программ (комплекс программ), которые связаны друг с другом огромным количеством информационных и логических связей. Каждую из этих связей необходимо спроектировать, реализовать, проверить.

Проблемы оперативного управления в таких комплексах возникают как при их разработке, так и при эксплуатации. К чисто программным сложностям добавляются проблемы, связанные с аппаратным обеспечением. Одна из них – это контроль соответствия ресурсов производительности и памяти систем управления запросам создаваемых программ.

В таких комплексах самыми частыми и «опасными» становятся ошибки в связях и взаимодействиях, ошибки структурного построения, организации вычислительных процессов. Именно эти ошибки относятся к самым сложным с позиции их поиска и устранения.

Ошибкой программы считается такое сочетание команд, исполнение которых при правильных исходных данных и отсутствии внешних возмущающих воздействий дает результаты, не соответствующие эталонным значениям, заданным технической документацией.

К основным показателям ПО относятся корректность и устойчивость. Показатель корректности характеризует степень безошибочности выполнения программы, реализующей соответствующий алгоритм или алгоритмы. В качестве количественного показателя корректности можно использовать вероятность правильного выполнения алгоритма при наличии ошибок (дефектов) в программе [14, 37, 45]. Эта вероятность зависит от количества ошибок, оставшихся в программе и не выявленных на момент эксплуатации, которые могут быть оценены только априорно по имеющейся статистической информации. Для этого существует несколько эмпирических соотношений (моделей). В свою очередь количество оставшихся в программе ошибок зависит от таких факторов как квалификация программистов, время отладки программы, глубина и качество тестирования и т.п.

Показатель устойчивости характеризует способность ПО к правильному функционированию под действием внешних (искажение информации в результате отказов и сбоев датчиков и каналов передачи информации) и внутренних (отказы и сбои технических средств, используемых при функционировании ПО) искажающих воздействий. Источники искажающих воздействий не зависят ни от алгоритмов, ни от программ. Но степень подавления последствий этих воздействий в автоматическом режиме работы зависит только от них.

Требования к устойчивости предъявляются ко всем программным средствам систем управления, которые функционируют в реальном времени.

В качестве количественного показателя устойчивости можно использовать вероятность правильного выполнения алгоритма при наличии возмущающих воздействий.

Кроме рассмотренных к показателям надежности ПО следует отнести среднее время выполнения программы (алгоритма).

Использование различных математических моделей надежности предназначенных для оценки показателей надежности программ позволяет более обоснованно подходить к планированию отладки и испытания программ, глубже понимать природу ошибок и методы их предотвращения, методы эффективного использования избыточности. Каждая из таких моделей базируется на некоторых допущениях и ориентирована на определенный класс программ.

Можно выделить два больших класса основных моделей надежности ПО. К первому классу относятся так называемые графовые модели ПО, в качестве которых используется ориентированные графы программы, сохраняющие все основные топологические свойства исходных программ [14, 45]. Вершины такого графа соответствуют операторам, а дуги управляющим связям между операторами. Такую графовую модель удобно использовать на этапе проектирования ПО с целью предварительной оценки его корректности и устойчивости.

К другому классу моделей можно отнести модели роста надежности ПО, основанные на статистических данных об отказах полученных в процессе его тестирования. В основе таких моделей лежит предположение, что при устранении обнаруженных ошибок новые ошибки не вносятся. Наиболее представительным подклассом здесь являются пуассоновские модели [47, 48]. Такие модели используются на этапах комплексной отладки ПО с использованием различных стратегий тестирования.

### **5.3. Графовая модель оценки надежности ПО**

Мерой надежности программного модуля (ПМ) будем считать вероятность того, что ПМ выполняет возложенную на него функцию корректно, т.е. выдает корректные выходные данные и корректно передает управление следующему ПМ.

Количественная оценка показателей надежности может быть основана на представлении структурной схемы алгоритма, реализованного в ПМ, в виде ориентированного графа. Каждой программе можно поставить два графа, определяемые двумя типами связей, существующими в программе: управляющими (логическими) и информационными.

Между операторами  $X$  и  $Y$  существует управляющая связь, если оператор  $Y$  может выполняться непосредственно после оператора  $X$ , т.е. оператор  $X$  (может быть при выполнении некоторых условий) передает управление оператору  $Y$ .

Между операторами  $X$  и  $Y$  существует информационная связь, если оператор  $Y$  использует значения некоторых переменных, определяемых оператором  $X$ .

Таким образом, под управляющим графом понимается такой ориентированный граф, вершины которого соответствуют операторам, а дуги управляющим связям между операторами.

Под информационным графом понимается такой ориентированный граф, вершины которого соответствуют операторам, а дуги информационным связям между операторами. На информационном графе рядом с дугами указаны переменные, значения которых определяются и используются операторами, являющимися соответственно начальной и конечной вершинами этих дуг.

В дальнейшем под графом программы подразумевается управляющий граф.

Каждой вершине графа ставится в соответствие ее вес  $d_j$  [37, 45], однозначно описывающий свойства вершины и имеющий смысл логарифмической меры вероятности:

$$P_j = e^{-d_j} \rightarrow d_j = -\ln P_j.$$

Под вероятностью  $P_j$  понимается вероятность безотказного выполнения последовательности операторов при наличии в алгоритме программы ошибок.

Выбор определенного маршрута на графе при функционировании алгоритма зависит от реализации передачи управления в логических вершинах графа (переход по условию). Случайный характер выбора маршрута, определяемый вероятностью  $p_{ij}$  перехода от  $i$  – ой вершины графа к  $j$  – ой,

зависит от поступившей на вход алгоритма реализации информационных данных. Случайные реализации входных данных и определяют статистический характер графовой модели ПМ. Пример графовой модели некоторого программного модуля показан на рис. 5.2.

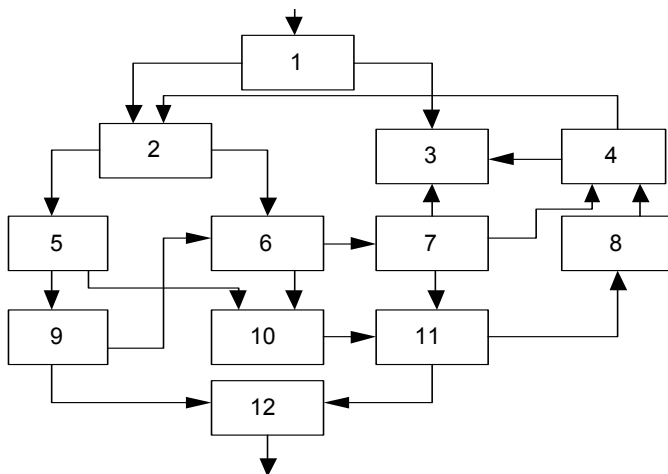


Рис.5.2. Графовая модель программного модуля

Для оценки надежности ПМ предполагается выполнение следующих этапов:

- переход от структурной схемы алгоритма ПМ к ориентированному управляющему графу;
- сокращение числа вершин в графе при наличии последовательных участков;
- приведение графа к ациклическому виду при наличии циклических участков программы;
- расчет весов вершин графа;
- определение значений вероятностей переходов (переходных вероятностей) в логических вершинах;
- расчет показателей надежности.

Для выполнения этих этапов должно быть известно содержание команд в алгоритме и последовательность их выполнения, возможные разветвления процесса вычислений, число повторений в циклах или их математическое ожидание,

условия перехода к той или иной ветви, допустимые (специфицированные) области изменения входных данных.

При объединении  $m$  вершин в последовательном участке графа вес эквивалентной вершины равен

$$d_e = \sum_{i=1}^m d_i,$$

так как

$$P_e = \prod_{i=1}^m P_i \rightarrow d_e = -\ln P_e = -\sum_{i=1}^m \ln P_i = \sum_{i=1}^m d_i.$$

Если обозначить вероятность безотказного выполнения последовательности из  $m$  операторов, как

$$P_m = \prod_{i=1}^m P_i,$$

то можно записать, что

$$\ln P_m = \sum_{i=1}^m \ln P_i.$$

Используя приближение  $\ln P_m \approx P_m - 1$ ,

получаем

$$1 - P_m = Q_m = -\ln P_m = -\sum_{i=1}^m \ln P_i = \sum_{i=1}^m d_i = d_e,$$

т.е. величина  $d$  имеет физический смысл вероятности отказа. Тогда  $d_j$  – вероятность отказа при выполнении последовательности операторов, ассоциируемых с вершиной, при однократном прогоне программы.

При операции ациклирования графа можно использовать соотношения [45]:

- для детерминированного цикла

$$d_e = N \sum_{i=1}^l d_i + (N-1) \sum_{i=1}^m d_i,$$

- для вероятностного цикла

$$d_e = \frac{1}{P} \left[ \sum_{i=1}^l d_i + (1-P) \sum_{i=1}^m d_i \right],$$



где  $N$  – число повторений циклического участка программы,  $l$  – число вершин графа в прямой ветви участка,  $m$  – число ветвей в обратной ветви,  $P$  – вероятность выхода из циклического участка программы по некоторому условию.

Таким образом, динамика функционирования определяется выбором определенного маршрута на графе. Этот выбор обуславливается совокупностью реализаций передач управления в логических вершинах, которые связаны со случайным процессом поступления на вход программы (ПМ) различных векторов входных данных, что приводит к случайному выбору маршрутов на графе. Выбор маршрутов зависит от значения переходных вероятностей  $p_{ij}$ , которыми нагружаются дуги графа.

При оценке корректности ПМ вес вершины графа  $d_j$  определяется соотношением

$$d_j = kQm_j,$$

где  $m_j$  – количество операторов, входящих в  $j$  – ю вершину графа (определяется по структуре алгоритма и его программе до упрощения графа),  $Q$  – оценка возможного количества ошибок в программе, нормированных на одну команду,  $k$  – коэффициент, определяемый частотой прохождения маловероятных маршрутов, при которых преимущественно возникают ошибки.

Оценка  $Q$  может быть проведена по имеющейся априорной информации разработчиками ПО на основании имеющихся различных моделей регрессии, полученных путем статистической обработки данных по отказам, а также с учетом совершенствования методов и средств программирования и отладки программных модулей.

Оценка среднего значения вероятности отказа ПМ может быть определена из соотношения :

$$\begin{cases} Q_{\Pi} = \sum_L P(L) \sum_{i \in L} d_i, \\ P(L) = \prod_{i, j \in L} p_{ij}, \\ P_{\Pi} = 1 - Q_{\Pi}, \end{cases}$$

где  $P(L)$  – вероятность прохождения маршрута при реализации алгоритма в ПМ, при этом значения весов  $d_i$  суммируются вдоль соответствующего маршрута.

Оценка среднего значения времени выполнения алгоритма ПМ определяется из

$$\bar{\tau} = \sum_L P(L) \sum_{i \in L} \tau_i,$$

где  $\tau_i$  – время выполнения алгоритма вдоль маршрута.

Помимо указанных характеристик могут быть определены и другие показатели, связанные с «тяжелыми» маршрутами:

- максимальная вероятность отказа ПМ:

$$Q_{\text{пmax}} = \max_L \left\{ \sum_L P(L) \sum_{i \in L} d_i \right\},$$

- максимальное время выполнения алгоритма

$$\tau_{\text{max}} = \max_L \left\{ \sum_L P(L) \sum_{i \in L} \tau_i \right\},$$

а также маршруты, на которых эти значения достигаются.

Здесь следует отметить, что если команды условного перехода не коррелируют друг с другом по данным, то число различных реализуемых маршрутов программы может достигать числа  $2^n$ , где  $n$  – число команд условных переходов (логических операторов), каждая из которых имеет два выхода («да» и «нет»). Ясно, что даже для небольших программ (с небольшим числом логических операторов) достичь полного тестирования маршрутов практически невозможно. Например, для ПМ, у которого количество логических вершин (вершин с двумя выходами, такими, что  $p_{ij1} + p_{ij2} = 1$ ) больше 20, т.е. для ПМ, который имеет достаточно разветвленную структуру, количество различных маршрутов может составлять  $10^6$  и более. Тогда для оценки характеристик надежности требуется не менее  $10^8$  подконтрольных прогонов исследуемого ПМ с учетом частоты прохождения маловероятных маршрутов. Очевидно, что такой объем может быть реализован только путем статистического моделирования [29, 30].

Оценка устойчивости при наличии сбоев аппаратуры может быть выполнена аналогично, если в качестве весов вершин графа использовать вероятности отказа при выполнении соответствующих команд. В расчетах надежности с достаточной степенью уверенности можно базироваться на 4 – 5 типах выполняемых команд, например, команды сложения, вычитания и поразрядного сравнения, команды деления и умножения, логические команды, команды обмена и вспомогательные команды.

Расчет значений оценок вероятностей  $P_{\text{КОМ}}$  может быть проведен на основе априорной информации разработчиком технических средств с использованием математических моделей надежности типовых элементов и имеющихся статистических данных. Например, можно использовать эмпирическую формулу [37]:

$$P_{i \text{ КОМ}} = 1 - k \frac{\Delta t_i}{T_{i \text{ КОМ}}},$$

где  $\Delta t_i$  – время выполнения команды  $i$  – й группы [64],  $T_{i \text{ КОМ}}$  – время наработки на функциональный отказ (сбой),  $k$  – коэффициент, учитывающий поколения микропроцессоров и БИС (предоставляется фирмами-разработчиками технических средств) ( $k \approx 10^{-6} - 10^{-7}$ ). Тогда вес вершин определяется из соотношения:

$$d_j = -\sum_{i=1}^s n_{ij} \ln P_{i \text{ КОМ}},$$

где  $n_{ij}$  – количество команд  $i$  – го типа, реализующих в ПМ участок, соответствующий  $j$  – й вершине графа,  $s$  – количество выделенных групп команд.

Оценка устойчивости ПМ, т.е. вероятность  $P_T$  правильного выполнения алгоритма при наличии отказов и сбоев технических средств (внутренних возмущающих воздействий), может быть определена по тем же соотношениям, что и для оценки корректности:

$$\begin{cases} Q_T = \sum_L P(L) \sum_{i \in L} d_i, \\ P(L) = \prod_{i, j \in L} p_{ij}, \\ P_T = 1 - Q_T. \end{cases}$$

Оценка надежности ПМ может быть определена как вероятность

$$P_{\text{ПТ}}(\Delta t) = P_{\text{П}}(\Delta t)P_T(\Delta t),$$

позволяющая оценить корректность ПМ при наличии ошибок в программе и устойчивость ПМ к отказам (сбоям) технических средств за некоторое время  $\Delta t$ .

Таким образом, исходными данными для расчета оценки надежности ПМ являются:

- описание алгоритма функционирования ПМ;
- основные математические соотношения, реализуемые в алгоритме;
- структурная схема алгоритма;
- текст программы ПМ на алгоритмическом языке, включающий текст подпрограмм и макрокоманд;
- оценка возможного количества программных ошибок, нормированных на одну команду;
- количество вершин графа, полученного после формального структурирования и ациклирования исходного графа;
- количество команд, ассоциированных с каждой вершиной графа;
- количество операторов, ассоциированных с каждой вершиной графа;
- вероятности переходов между вершинами графа, связанные с условными операторами;
- матрица команд различного типа, ассоциированных с каждой вершиной графа;
- таблица значений времени выполнения команд каждого типа;
- оценка времени наработки на отказ (сбой) команд данного типа;

- оценка вероятности безотказного выполнения команд данного типа, рассчитанная разработчиком технических средств;

- оценка интенсивности потока заявок на выполнение алгоритма ПМ.

Отметим, что при разработке комплекса алгоритмов объемом в десятки тысяч команд и более, в создании которых участвуют коллективы (как правило независимые), должна быть обеспечена соответствующая документация, которая позволяет ввести ПО в эксплуатацию. Наличие такой документации обеспечивает расчет количественной оценки показателей надежности ПО, которая может служить исходной информацией на всех этапах жизненного цикла, рис.5.3.



Рис.5.3. Общая схема оценки надежности программного комплекса

#### 5.4. Оценка комплексных показателей надежности ПО

Показатели надежности ПМ в виде вероятности безотказной работы (или вероятности отказа) при однократном прогоне ПМ можно рассматривать как необходимую часть исходной базы данных для определения комплексных показателей надежности, соответствующих  $N$  – кратным прогонам ПМ за заданное время  $T$ , а также работе всей многомодульной программы (комплекса программных алгоритмов). Отсюда вытекают задачи выбора комплексных показателей надежности, моделей процессов поступления заявок на инициирование работы ПМ, моделей процессов работы многомодульной программы. В частности необходимо рассматривать как регулярную, так и стохастическую модели процессов поступления заявок с определенными универсальными свойствами законов распределения для стохастических моделей.

Методы анализа надежности зависят от используемых моделей функционирования ПМ, моделей процессов поступления заявок и моделей их обслуживания. Построение достаточно точных моделей для определения показателей надежности автоматических систем управления возможно при помощи теории марковских процессов, когда имеет место постоянное время пребывания системы в каждом из возможных состояний, либо экспоненциальный закон распределения этого времени.

В то же время аппарат полумарковских процессов [42] целесообразно применять в случаях, когда имеет место распределение Эрланга для длительного существования сбоев технических средств или для случайного времени выполнения алгоритма [39, 40, 64]. В [37] такой алгоритм использовался для расчета характеристик надежности комплекса управляющих алгоритмов, состоящего из отдельных ПМ, причем в каждом возможном состоянии комплекса работал только один ПМ. Для другого предельного случая многомодульной программы, когда процесс ее работы относится к конвейерному типу, известны простые методы расчета показателей надежности [61]. В качестве комплексных показателей надежности ПМ при его многократных прогонах за время  $T$  можно использовать

вероятность безотказной работы  $P_{\text{пт}}(T)$  за время  $T$  и расчетную величину наработки на ошибочный результат  $T_{\text{ош}}$ . Эти показатели являются функциями  $P_{\text{пт}}$  – вероятности безотказной работы ПМ при однократном прогоне за время  $T_a$  (или числа заявок  $N$  на инициирование работы ПМ за время  $T$  при регулярном потоке заявок).

Для случайных процессов поступления заявок на инициирование работы ПМ указанные показатели являются также функциями от параметров законов распределения заявок. В частности, при регулярном поступлении заявок с интенсивностью  $\lambda = \frac{N}{T}$ , вероятность безотказной работы ПМ определяется формулой

$$P_{\text{пт}}(E) = P_{\text{пт}}^{\lambda T},$$

а значение  $T_{\text{ош}}$  в этом случае определяется как

$$T_{\text{ош}} = \frac{1}{\lambda(1 - P_{\text{пт}})},$$

поскольку  $(1 - P_{\text{пт}})^{-1}$  дает среднее число реализаций, приводящих к ошибке, а  $\lambda^{-1}$  равно временному интервалу между двумя соседними заявками.

При случайном поступлении заявок и известной функции  $P_{\text{пт}}(T)$  значение  $T_{\text{ош}}$  можно определить следующим образом.

Заменяя фиксированное значение  $T$  на переменную  $t$  в показателе  $P_{\text{пт}}(t)$ , определим вероятность появления отказов за время  $t$  в виде  $Q_{\text{пт}}(t) = 1 - P_{\text{пт}}(t)$  и введем в рассмотрение плотность распределения

$$f_{\text{пт}}(t) = \frac{\partial Q_{\text{пт}}(t)}{\partial t} = -\frac{\partial P_{\text{пт}}(t)}{\partial t}.$$

Тогда значение  $T_{\text{ош}}$  определяется интегралом:



$$T_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} t f_{\text{пт}}(t) dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad f(t) dt = dv \\ dt = du \quad v = \int_0^{\infty} f(t) dt = -P_{\text{пт}}(t) \end{array} \right| =$$

$$= [-tP_{\text{пт}}(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P_{\text{пт}}(t) dt.$$

Первое слагаемое очевидно равняется нулю, поскольку при  $t \rightarrow \infty$   $P_{\text{пт}}(t) \rightarrow 0$ , причем убывание значения  $P_{\text{пт}}(t)$  проявляется сильнее, чем рост значения  $t$ .

Если предположить, что поток заявок является стохастическим с некоторым распределением времени поступления заявок, то необходимо предусмотреть следующие варианты моделей.

- *Простейший поток заявок.* Эта модель является наиболее репрезентативной при минимуме априорной информации, поскольку позволяет получить удовлетворительные по точности результаты при замене потока случайных событий любой структуры. В простейшем потоке заявки поступают по пуассоновскому закону, а случайные интервалы времени между заявками распределены по экспоненциальному закону.

- *Простой процесс восстановления.* Этот процесс реализуется при использовании буферной памяти системы управления, когда новая заявка обслуживается, если предыдущая заявка будет выполнена или новая заявка записывается в буферную память и обслуживается в порядке очереди. При этом случайное время выполнения программы имеет распределение Эрланга.

- *Обобщенная модель.* В качестве модели распределения времени между поступлениями заявок можно использовать гамма-распределение, которое является универсальной априорной моделью.

Для стохастических потоков заявок необходимо ввести в рассмотрение вероятность  $P(N, t)$  поступления  $N$  заявок за время  $t$  и отношение  $V$  – количества принятых к обслуживанию заявок к общему числу поступивших заявок.

Вероятность совместного появления событий (поступления  $N$  заявок за время  $T$  и появления хотя бы одного отказа при обслуживании  $V$  – доли заявок) равна произведению:

$$VP(N, T) \left(1 - P_{\text{пт}}^N\right).$$

В связи с выборочной изменчивостью за время  $T$  может поступить любое число заявок  $N$ . Отсюда, величину  $P_{\text{пт}}(t)$  можно определить из соотношения:

$$P_{\text{пт}}(T) = 1 - \sum_{N=0}^{\infty} P_{\text{пт}}(N, T) V \left(1 - P_{\text{пт}}^N\right). \quad (5.1)$$

Будем полагать  $V = 1$ , что приведет к некоторому занижению расчетной величины  $P_{\text{пт}}(T)$ .

В случае простейшего потока заявок используется закон Пуассона для числа событий (заявок):

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\lambda$  – интенсивность событий (среднее число событий в единицу времени).

Относя закон Пуассона к интервалу времени  $T$  (с учетом того, что  $\lambda = \frac{N}{T}$ ), можно записать:

$$f(\lambda T) = f(N) = P_{\text{пт}}(N, T) = \frac{\lambda T^N}{N!} e^{-\lambda T},$$

где  $\lambda T$  – среднее число заявок в интервале времени  $T$ . Подставляя выражение для  $P_{\text{пт}}(N, T)$  в вышеприведенное соотношение (5.1) получаем

$$\begin{aligned} P_{\text{пт}}(T) &= 1 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T} \left(1 - P_{\text{пт}}^N\right) = \\ &= 1 - e^{-\lambda T} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^N}{N!} + e^{-\lambda T} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^N}{N!} P_{\text{пт}}^N = \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \right| = 1 - e^{-\lambda T} e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} \left( 1 + \lambda T P_{\text{пт}} + \frac{(\lambda T P_{\text{пт}})^2}{2!} + \dots \right) = e^{-\lambda T} e^{\lambda T P_{\text{пт}}} = e^{-\lambda T(1-P_{\text{пт}})}.$$

В данном случае закон распределения времени между ошибками в выполнении алгоритма является экспоненциальным с интенсивностью  $\lambda(1 - P_{\text{пт}})$ .

Заменяя  $T$  на переменную  $t$  определяем  $T_{\text{ош}}$  в соответствии с выражением:

$$T_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} P_{\text{пт}}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-P_{\text{пт}})t} dt = \frac{1}{\lambda(1-P_{\text{пт}})}.$$

В случае простого процесса восстановления случайное время выполнения алгоритма имеет распределение Эрланга второго или третьего порядка. Для второго порядка вероятность того, что в интервале  $T$  будет реализован  $N$  – кратный прогон ПМ, равна

$$P_{\text{пт}}(N, T) = \sum_{r=2N}^{2N+1} (\lambda T)^r e^{-\lambda T} \frac{1}{r!} \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в выражение (5.1), получаем:

$$P_{\text{пт}}(T) = 1 - \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r=2N}^{2N+1} (\lambda T)^r e^{-\lambda T} \left(1 - P_{\text{пт}}^N\right) \frac{1}{r!} \quad (5.3)$$

Для преобразования (5.3) рассмотрим первые члены суммы вида

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r=2N}^{2N+1} P_{\text{пт}}^N (\lambda T)^r \frac{1}{r!} = \quad (5.4) \\ &= 1 + P_T \frac{(\lambda T)^2}{2!} + P_T^2 \frac{(\lambda T)^4}{4!} + P_T^3 \frac{(\lambda T)^6}{6!} + \dots \\ &+ \lambda T + P_{\text{пт}} \frac{(\lambda T)^3}{3!} + P_{\text{пт}}^2 \frac{(\lambda T)^5}{5!} + P_{\text{пт}}^3 \frac{(\lambda T)^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

выражение для  $F_1$  можно преобразовать к виду:

$$F_1 = \frac{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\sqrt{P_{\text{пт}}}} \exp\{\lambda T \sqrt{P_{\text{пт}}}\} - \frac{1 - \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\sqrt{P_{\text{пт}}}} \exp\{-\lambda T \sqrt{P_{\text{пт}}}\}.$$

Остальные члены суммы из выражения (5.3)

$$F_2 = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r=2N}^{2N+1} (\lambda T)^r \frac{1}{r!}$$

представляют собой ряд для функции  $e^{\lambda T}$ , т.е.

$$F_2 = e^{\lambda T}.$$

Из выражения (5.3) видно, что

$$\begin{aligned} P_{\text{пт}}(T) &= 1 - e^{-\lambda T} (F_2 - F_1) = \\ &= 1 - e^{-\lambda T} e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} F_1 = e^{-\lambda T} F_1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P_{\text{пт}}(T) &= \frac{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\sqrt{P_{\text{пт}}}} \exp\{-\lambda T(1 - \sqrt{P_{\text{пт}}})\} - \\ &\quad - \frac{1 - \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\sqrt{P_{\text{пт}}}} \exp\{-\lambda T(1 + \sqrt{P_{\text{пт}}})\}; \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если  $P_{\text{пт}} \rightarrow 1$ , то приближенное значение  $P_{\text{пт}}(T)$  может быть определено из выражения:

$$\begin{aligned} P_{\text{пт}}(T) &= \exp\{-\lambda T(1 - \sqrt{P_{\text{пт}}})\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{\lambda T(1 - P_{\text{пт}})}{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda T Q_{\text{пт}}\right\}, \end{aligned}$$

а величина  $T_{\text{ош}}$  определяется выражением:

$$T_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} P_{\text{пт}}(t) dt = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda t Q_{\text{пт}}\right\} dt = \frac{2}{\lambda Q_{\text{пт}}}.$$

Такое же выражение для  $T_{\text{ош}}$  получается непосредственной подстановкой ( 5.5):

$$T_{\text{ош}} = \frac{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\lambda\sqrt{P_{\text{пт}}}(1 - \sqrt{P_{\text{пт}}})} - \frac{1 - \sqrt{P_{\text{пт}}}}{2\lambda\sqrt{P_{\text{пт}}}(1 + \sqrt{P_{\text{пт}}})} =$$

$$= \frac{1}{2\lambda\sqrt{P_{\text{пт}}}} \left[ \frac{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}}{1 - \sqrt{P_{\text{пт}}}} - \frac{1 - \sqrt{P_{\text{пт}}}}{1 + \sqrt{P_{\text{пт}}}} \right] = \frac{2}{\lambda(1 - P_{\text{пт}})} = \frac{2}{\lambda Q_{\text{пт}}}.$$

**Пример.** Рассмотрим пример многократного прогона ПМ по автоматизированному управлению одним из параметров движения самолета во время автоматической посадки. Пусть  $T = 120$  сек., интенсивность потока заявок  $\lambda = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $Q_{\text{пт}} = 10^{-6}$ , вид обслуживания с буферной памятью.

Вероятность того, что в интервале  $T$  будет реализован безотказный  $N$  – кратный прогон ПМ определится из выражения

$$P_{\text{пт}}(T) = \exp\left\{-\frac{\lambda T Q_{\text{пт}}}{2}\right\} = \exp\{-60 \cdot 10^{-6}\} = 0,99994.$$

Величина наработки на ошибочный результат равна:

$$T_{\text{ош}} = \frac{2}{\lambda Q_{\text{пт}}} = \frac{2}{1 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 556 \text{ час},$$

а при обслуживании без буферной памяти

$$T_{\text{ош}} = \frac{1}{\lambda Q_{\text{пт}}} \approx 278 \text{ час}.$$

Если предположить регулярность потока заявок на интервале  $T$  с той же интенсивностью  $\lambda = 1 \text{ с}^{-1}$ ,

$$P_{\text{пт}}(T) = P_{\text{пт}}^{\lambda T} = (1 - 10^{-6})^{120} = 0,99988.$$

*Оценка показателей надежности для многомодульных алгоритмов*

Для оценки надежности больших программных комплексов может быть использована марковская модель [8, 66]. Надежность всего программного комплекса определяется как функция

надежности его составных частей. Подобная оценка существенно облегчается, если программа строится по модульному принципу.

Известно [42], что марковским случайным процессом с непрерывным временем называется процесс, у которого переход из одного состояния в другое возможен в любой момент времени. Для описания поведения программного комплекса в данном классе марковских процессов необходимо:

- ввести понятие состояния программного комплекса (ПК);
- указать все состояния, в которых может находиться ПК;
- составить граф состояний, т.е. указать пути возможных непосредственных переходов ПК из состояния в состояние;
- указать, в каком состоянии находится система в начальный момент времени, или задать распределение начальных состояний;
- для каждого возможного перехода указать соответствующие вероятности перехода  $p_{ij}$  из состояния  $i$  в состояние  $j$  (случай  $p_{ij}(t) = p_{ij}$  соответствует однородному марковскому процессу), при этом выполняются условия:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad p_{ij}(t + t') = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) p_{kj}(t').$$

Постоянные называются вероятностями перехода цепи Маркова (за один шаг). Постоянные

$$p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_{n+m} = j / \xi_m = i\}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m$$

называются вероятностями перехода цепи Маркова за  $n$  шагов (очевидно,  $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ ). Матрица вида

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода конечной однородной цепи Маркова.

По формуле полной вероятности имеем

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \quad (5.6)$$

Эта формула отражает тот факт, что переход из состояния  $i$  в момент  $m$  в состояние  $j$  в момент  $(n + m)$  осуществляется следующим образом. Сначала цепь Маркова принимает некоторое состояние  $k$  в момент  $(m + 1)$ , а затем из состояния  $k$  в момент  $(m + 1)$  переходит в состояние  $j$  в момент  $(n + m)$ .

Формула (5.6) в матричном виде имеет вид

$$P^{(n)} = P P^{(n-1)},$$

откуда по индукции

$$P^{(n)} = \left( p_{ij}^{(n)} \right) = P^n,$$

т.е. матрица перехода за  $n$  шагов есть  $n$  – я степень матрицы перехода за один шаг.

Значения  $p_{ij}$  можно определить на основе предполагаемой статистики исходной информации с учетом семантики отдельных решающих элементов (логических блоков) алгоритма управления, либо эвристических представлений разработчика и экспертных оценок динамики работы алгоритма.

Определение значений  $p_{ij}$  имеет важное значение при исследовании несимметричных структур (графовая модель такого ПМ характеризуется тем, что вершины графа, к которым следуют соединяющие дуги от вершины-предиката, имеют существенно различные веса  $d_j$ ), так как в этом случае может существенно измениться оценка корректности самого ПМ. В то же время в графовой модели для несимметричных структур могут существовать такие точки ветвления, у которых незначительные изменения переходных вероятностей приводят к существенному изменению оценок характеристик надежности маршрутов графовой модели. Поэтому для определения значений  $p_{ij}$  необходимо использовать методы имитационного моделирования вычислительного процесса на графовой модели.

Очевидно, что каждому набору входных данных, поступающих на вход ПК, соответствует некоторая последовательность выполняемых ПМ. Следовательно, надежность ПК будет зависеть от последовательности выполняемых ПМ и надежности каждого из этих модулей.

В простейшем случае вероятность отказа ПК можно определить как [15]:

$$Q_{\text{ПК}} = 1 - \prod_{i=1}^s (1 - Q_{\text{ПТИ}}),$$

где  $s$  – количество ПМ, входящих в ПК.

Это соотношение справедливо, если при однократном прогоне ПК будут задействованы все  $s$  модулей и по одному разу. Для тех случаев, когда прогон ПК может не задействовать тот или иной ПМ, реальное значение оценки должно быть меньше, чем определяемое в соответствии с вышеприведенным соотношением.

Очевидно, что общий результат работы ПК будет некорректным, если хотя бы в одном из выполняемых в данном прогоне программы модуле была ошибка. Введем следующие предположения:

- надежности ПМ – величины независимые;
- управление модулями ПК может быть представлено как марковский процесс, т.е. выбор следующего для выполнения ПМ зависит только от модуля, выполняемого в данный момент, и не зависит от предыстории;
- вероятности передачи управления между модулями являются величинами постоянными и полностью характеризуют способ использования ПК пользователем.

В этом случае ПК может быть представлен в виде направленного графа, в котором каждая  $i$  – я вершина ( $i = \overline{1, n}$ ) соответствует  $i$  – му ПМ и характеризуется вероятностью  $p_{ij}$  перехода из  $i$  – й вершины в  $j$  – ю.

Таким образом, граф ПК имеет единственную входную вершину, единственную выходную вершину и две дополнительные вершины, соответствующие корректному  $C$  (correct) и ошибочному  $F$  (fault) выходным результатам ПК.



При проявлении ошибки осуществляется переход в состояние  $F$  с вероятностью  $(1 - P_i)$  независимо от правильности последующей обработки. Если  $i$  - й ПМ выдает правильный результат, то осуществляется переход к выполнению соответствующего  $j$  - го ПМ с вероятностью  $p_{ij}P_i$ . Переход из выходного состояния в состояние  $C$  осуществляется с вероятностью  $P_n$  и соответствует корректному завершению программы.

Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 p_{12} & P_1 p_{13} & \dots & P_1 p_{1n} & 0 & 1 - P_1 \\ 0 & 0 & P_2 p_{23} & \dots & P_2 p_{2n} & 0 & 1 - P_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & P_{n-1} p_{(n-1)2} & \dots & \dots & P_{n-1} p_{(n-1)n} & 0 & 1 - P_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Надежность всего ПК определяется как вероятность достижения конечного состояния  $C$  из начального состояния графа. Для этого рассмотрим матрицу  $R$ , которая получается из матрицы  $P$  путем вычеркивания столбцов и строк, соответствующих конечным состояниям  $C$  и  $F$ .

Очевидно, что  $P^k(i, j)$  - это вероятность того, что марковский процесс за  $k$  шагов перейдет из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Тогда матрица

$$A = I + P + P^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} P^k$$

определяет вероятности перехода из одного состояния в другое за произвольное число шагов.

Надежность ПК может быть определена как

$$P_{\text{ПК}} = s(1, n)P_n,$$

где  $s(1, n)$  - соответствующий элемент матрицы  $S$ , определяемой как [8]

$$S = I + R + R^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} R^k = (I - Q)^{-1},$$

$P_n$  – вероятность безотказной работы  $n$  – го ПМ.

**Пример.** Некоторый программный комплекс, содержащий 10 модулей, представляется в соответствии с алгоритмом функционирования графовой моделью, рис.5.4.

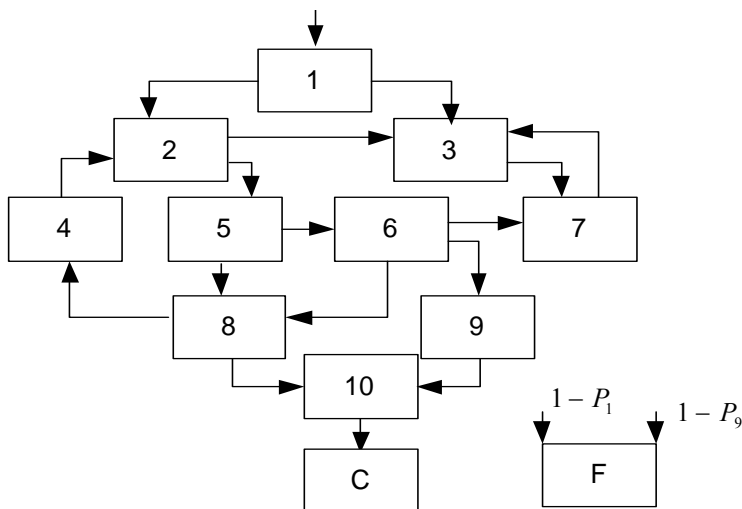


Рис.5.4. Графическая модель программного комплекса

Необходимые расчеты оценки надежности программного комплекса приведены ниже.

Вероятности безотказной работы каждого модуля заданы значениями:

$$\begin{array}{llll}
 P_1 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & P_2 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & P_3 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & P_5 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} \\
 P_6 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & P_7 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & P_8 := 1 - 5 \cdot 10^{-6} & \\
 P_4 := 1 - 10^{-6} & P_9 := 1 - 10^{-6} & P_{10} := 1 - 10^{-6} & 
 \end{array}$$

Вероятности перехода равны:

$P12 := 0.3$      $P13 := 0.7$      $P23 := 0.2$      $P25 := 0.8$      $P36 := 0.2$      $P37 := 0.8$   
 $P42 := 1$      $P56 := 0.3$      $P58 := 0.7$      $P67 := 0.1$      $P68 := 0.3$      $P69 := 0.6$   
 $P73 := 0.2$      $P79 := 0.8$      $P84 := 0.4$      $P810 := 0.6$      $P910 := 1$

$$R := \begin{pmatrix} 0 & P1 \cdot P12 & P1 \cdot P13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P2 \cdot P23 & 0 & P2 \cdot P25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P3 \cdot P36 & P3 \cdot P37 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P4 \cdot P42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P5 \cdot P56 & 0 & P5 \cdot P58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P6 \cdot P67 & P6 \cdot P68 & P6 \cdot P69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P7 \cdot P73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P7 \cdot P79 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P8 \cdot P84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P8 \cdot P810 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P9 \cdot P910 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I := \text{identity}(10) \quad T := (I - R)^{-1} \quad PPC := T_{0,9} \cdot P10$$

$$T_{0,9} = 0.999978$$

$$PPC = 0.9999774$$

Таким образом, оценка надежности программного комплекса равна

$$P_{\text{ПК}} = 0,9999774$$

или вероятность отказа

$$Q_{\text{ПК}} = 1 - P_{\text{ПК}} = 2,26 \cdot 10^{-5}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авижиенис А.А.* Отказоустойчивость – свойство, обеспечивающее постоянную работоспособность цифровых систем // Труды ИИЭР, Т.66.№10, 1978. – с.5 – 25.
2. *Барлоу Р.* Математическая теория надежности / Р.Барлоу, Ф.Прошан. – М.: Сов.радио, 1969. – 488 с.
3. *Байхельт Ф.* Надежность и техническое обслуживание: Математический подход / Ф.Байхельт, П.Франкен. Перевод с немецкого М.Г.Коновалова под ред. И.А.Ушакова. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
4. *Барзилович Е.Ю.* Статистические методы оценки состояния авиационной техники / Е.Ю.Барзилович, М.В.Савенков. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
5. *Большев Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н.Большев, Н.В.Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
6. *Браунли К.А.* Статистическая теория и методология в науке и технике / К.А.Браунли. Перевод с английского М.С.Никулина под ред. Л.Н.Большева. – М.: Наука, 1977. – 407 с.
7. *Бусленко Н.П.* Метод статистических испытаний / Н.П.Бусленко, Ю.А.Шрайдер. – М.: Физматгиз, 1961. – 226 с.
8. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей / Е.С.Вентцель. – М.: Физматгиз, 1962. – 564 с.
9. *Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. Пособие для вузов по спец. ЭВМ / А.В.Крайников, Б.А.Курдииков, А.Н.Лебедев и др.* – М.: Высш. шк., 1986. – 312 с.
10. *Видуев Н.Г.* Вероятностно – статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г.Видуев, Г.С.Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
11. *Гаганов П.Г., Липаев В.В.* Характеристики ошибок в процессе разработки комплексов программ // Программирование. – 1978. – №2. – с. 36 – 41.
12. *Гнеденко Б.В.* Математические методы в теории надежности / Б.В.Гнеденко, Ю.К.Беляев, А.Д.Соловьев. – М.:Наука, 1965. – 524 с.
13. *Гнеденко Б.В., Соловьев А.Д.* Одна общая модель резервирования с восстановлением // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1974. – № 6. – с. 113 – 118.

14. Горский Л.К., Карповский Е.Я., Чижов С.А. Оценка надежности программных средств на стадии приемочных испытаний // Программирование. – 1985. – №3. – с.77 – 81.

15. Громов Г.Р. Надежность персональных ЭВМ и производственная загрузка фирменной сети сервиса // Микропроцессорные средства и системы. – 185. – №4. – с. 89 – 91.

16. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений / Э. Гумбель. – М.: Мир, 1965. – 356 с.

17. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения / М. Де Гроот. Перевод с английского А.Л.Рухина под ред. Ю.В.Линника и А.М.Кагана. – М.: Мир, 1974. – 492 с.

18. Дейвид Г. Порядковые статистики / Г.Дейвид. Перевод с английского В.А.Егорова и В.Б.Невзорова под ред В.В.Петрова.– М.: Наука, 1979. – 336 с.

19. Дунин–Барковский Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть) / Н.В. Дунин–Барковский, Н.В.Смирнов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 548 с.

20. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш.Закс. Перевод с английского Е.В.Чепурина под ред. Ю.К.Беляева. – М.: Мир, 1975. – 776 с.

21. Зеленков А.А. Бортовые системы автоматического управления. Оценка точности по результатам испытаний: монография / А.А.Зеленков, В.М.Синеглазов. – К.: Изд. Нац. авиац. ун – та , 2009. – 264 с.

22. Зеленков А.А. Алгоритмы компьютерного мониторинга бортовых отказоустойчивых вычислительных систем // Електроніка та системи управління. – К.: 2005. – №1. – с. 46 – 53.

23. Зеленков О.А. Пристрій для моделювання імовірності відмов технічної системи / Патент №34309А, МПК 6 G06G 7/48, опубл. 15.02.2001, Бюл. №1.

24. Зеленков О.А. Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ: Навчальний посібник / О.А.Зеленков, О.О.Бунчук. – К.: Вид. КМУЦА, 2000. – 240 с.

25. Зеленков А.А., Голик А.П. Свободный от распределения критерий оценки вероятности безотказной работы // Електроніка та системи управління. – К.: 2007. – №2. – с. 113 – 120.

26. *Зеленков А.А.*, Голик А.П. Байесовская оценка надежности бортовых отказоустойчивых систем на основе распределения Пуассона // *Електроніка та системи управління*. – К.: 2007. – №3. – с. 141 – 145.

27. *Зеленков А.А.*, Голик А.П. Оценка надежности бортовой авионики на основе диффузионного DN–распределения // *Електроніка та системи управління*. – К.: 2009. – №2. – с. 12 – 17.

28. *Зеленков О.А.*, Масловський Б.Г. Розробка інтегрованої системи комп'ютерного моніторингу систем автоматичної посадки літаків на етапі експлуатації // *Вісник НАУ*. – К.: 2002. – №1. – с. 107 – 1113.

29. *Зеленков О.А.*, Бунчук О.О., Мірошніченко О.Г. Пристрій для моделювання оцінки надійності програмного забезпечення / Патент №59960А, МПК 7 G06G 7/48, опубл. 15.09.2003, Бюл. №19.

30. *Зеленков О.А.*, Бунчук О.О. Пристрій для моделювання оцінки надійності програмного забезпечення / Патент №65289А, МПК 7 G06G 7/48, опубл. 15.03.2004, Бюл. №3.

31. *Зеленков О.А.*, Голік А.П. Пристрій виявлення і локалізації відмов резервованої технічної системи / Патент №46780, МПК G06C 7/00, опубл. 11.01.2010, Бюл. №1.

32. *Иыуду К.А.* Математические модели отказоустойчивых вычислительных систем / *К.А.Иыуду, С.А.Кривошеков*. – М.: Издательство МАИ, 1989. – 144 с.

33. *Иыуду К.А.*, Кривошеков С.А. Моделирование процессов автоматического восстановления в отказоустойчивых вычислительных системах // *Управляющие системы и машины*. – 1987. – №2. – с. 13 – 16.

34. *Каган А.М.* Характеризационные задачи математической статистики / *А.М.Каган, Ю.В.Линник, С.Р.Рао*. – М.: Наука, 1972. – 656 с.

35. *Каган Б.М.* Основы эксплуатации ЭВМ: Учебное пособие для студентов вузов / *Б.М.каган, И.Б.Мкртумян*. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 432 с.

36. *Капур К.* Надежность и проектирование систем / *К.Капур, Л.Ламберсон*. – М.: Мир, 1980. – 604 с.

37. *Карповский Е.Я.* Надежность алгоритмов управления / Е.Я.Карповский, В.В.Сагач, А.А.Чернецкий. – К.: Техніка, 1983. – 112 с.
38. *Коваленко И.Н.* Краткий курс теории случайных процессов / И.Н.Коваленко, О.В.Сарманов. – К.: Выща шк., 1978. – 264 с.
39. *Кокс Д.* Теоретическая статистика / Д.Кокс, Д.Хинкли. Перевод с английского Е.В.Чепурина под ред. Ю.К.Беляева. – М.: Мир, 1978. – 560 с.
40. *Кокс Д.* Теория восстановления / Д.Кокс, В.Смит. Перевод с английского В.В.Рыкова и Ю.К.Беляева под ред. Ю.К.Беляева. – М.: Советское радио, 1967. – 300 с.
41. *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников) / Г.Корн, Т.Корн. Перевод со второго американского переработанного издания И.Г.Арамановича и А.М.Березмана. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
42. *Королюк В.С.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности / В.С.Королюк, А.Ф.Турбин. – К.: Наукова думка, 1982. – 236 с.
43. *Кринецкий Е.И.* Летные испытания систем управления летательными аппаратами / Е.И.Кринецкий, Л.Н.Александровская. – М.: Машиностроение, 1975. – 192 с.
44. *Лидбеттер М.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов / М.Лидбеттер, Ч.Ротсен, Г.Линдгрэн. Перевод с английского В.П.Носко под ред. Ю.К.Беляева. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
45. *Липаев В.В.* Надежность программного обеспечения АСУ / В.В.Липаев. – М.: Энергоиздат, 1981. – 240 с.
46. *Луцкий В.А.* Расчет надежности и эффективности радиоэлектронной аппаратуры. Справочник / В.А.Луцкий. – К.: наукова думка, 1966. – 412 с.
47. *Мороз Г.Б.* Пуассоновские модели роста надежности программного обеспечения и их приложения: Аналитический обзор // Управляющие системы и машины. – 1996. – №1/2. – с.69 – 84.
48. *Мороз Г.Б.* Надежность и тристабильность программных средств высокоцелостных систем // Управляющие системы и машины. – 1999. – №2. – с.59 – 68.

49. *Питерсон У.* Коды, исправляющие ошибки / У.Питерсон, Э.Уэлдон. – М.: Мир, 1976. – 596 с.
50. *Погребинский С.Б.* Проектирование и надежность многопроцессорных ЭВМ / С.Б. Погребинский, В.П. Стрельников. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.
51. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И.Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
52. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.С.Пугачев. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
53. *Рубан А.И.* Непараметрические процедуры сглаживания результатов эксперимента // В кн.: системы управления. Изд – во Томского ун – та, 1977. Вып.2. – с. 46 – 54.
54. *Савчук В.П.* Байесовские методы статистического оценивания. Надежность технических объектов / В.П. Савчук. – М.: Наука, 1989. – 328 с.
55. *Савчук В.П.* Байесовские условно – минимаксные оценки надежности технических систем // Автоматика и телемеханика. – 1986. – №8. – с. 156 – 162.
56. *Савчук В.П.* Байесовские оценки надежности для биномиальных испытаний в условиях частичной априорной неопределенности // Надежность и контроль качества. – 1986. – №1. – с. 8 – 16.
57. *Савчук В.П.* Байесовские оценки вероятности безотказной работы изделий с возрастающей функцией интенсивности отказов // Надежность и контроль качества. – 1983. – №9. – с. 40 – 55.
58. *Свешников А.А.* Прикладные методы случайных функций / А.А. Свешников. – М.: Наука, 1965. – 464 с.
59. *Соловьев А.Д.* расчет и оценка характеристик надежности / А.Д. Соловьев. – М.: Знание, 1978. – 51 с.
60. *Стрельников В.П.* Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. – К.: Логос, 2002. – 486 с.
61. *Хетагуров Я.А.* Повышение надежности цифровых устройств методами избыточного кодирования / Я.А. Хетагуров, Ю.П. Руднев. – М.: Энергия, 1974. – 272 с.



62. *Червонный А.А.* Надежность сложных технических систем / А.А. Червонный, В.И. Лукьященко, В.А. Котин. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.

63. *Шишонок Н.А.* Точность и надежность кибернетических систем / Н.А. Шишонок, И.Б. Шубинский, Л.А. Сидоров. – К.: Наукова думка, 1970. – 256 с.

64. *Шубинский И.Б.* Расчет надежности ЭВМ / И.Б. Шубинский, Е.Н. Пивень. – К.: Техніка, 1979. – 232 с.

65. *Avizienis A.* Fault Tolerance by Design Diversity: Concepts and Experiments // Computer. – 1984. – №8. – pp. 67 – 77.

66. *Cheung R.C.* A User – Oriented Software Reliable Model // IEEE Trans. On Software Engineering, March. – 1980. – V.SE – 6. – №2. – pp. 118 – 125.

67. *Koren I., Brener M.* On Area and Yield Considerations for Fault – Tolerant VLSI Processors Arrays // IEEE Trans. on Comput. – 1984. – №1. – pp. 21 – 27.

68. *Miyamoto I.* Toward on Effective Software Reliability Evaluation // Proc. 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. on Software Engineering. – 1978. – pp. 46 – 55.

69. *Parzen E.* On Estimation of a Probability Density Function and Mode // Ann. Math. Stat. – 1962. – V33. – №3. – pp. 1065 – 1076.

70. *Robbins H.* An Empirical Bayes Approach to Statistics // Proc. 3<sup>rd</sup> Berceley Symp. Math/ Statist. Probabil. – 1955. – V1. – pp. 157 – 164.