

Л.Я. Ільницький, д.т.н., Ю.В. Пепа

**ДИФРАКЦІЯ РАДІОХВИЛЬ НА ЦИЛІНДРІ  
МАЛОГО РАДІУСУ**

Національний авіаційний університет,  
pera@nau.edu.ua.

*Розглянуто падіння радіохвилі на циліндричні поверхні малого радіусу. Знайдені складові поля дифракції для вертикальної та горизонтальної поляризації по відомому опромінюванню циліндра.*

В зоні аеродрому є об'єкти, які можна апроксимувати геометрично правильними циліндрами (літаки). В тих випадках коли наземні глісадні та курсові радіомаяки працюють в діапазонах метрових хвиль (ILS) – такі циліндри можна вважати циліндрами малого радіусу, тобто такими, у яких радіус менший  $10\lambda$  ( $\lambda$  – довжина хвилі).

Оскільки розглядаються циліндри малого радіусу, то значення відбитої хвилі можна знайти використовуючи принцип Гюйгенса-Кірхгофа [1]. В [2] розглядається падіння радіохвилі на циліндр малого радіуса і знайдені прості рішення для поля дифракції в дальній зоні. Але в ближній зоні ці формули дають не вірні результати і мають великі похибки. Методи, якими вирішуються такі задачі ґрунтуються на рішенні інтегродиференціальних рівнянь [3], за якими знаходяться наведені струми, а потім за відомими струмами знаходиться поле дифракції. Такі рішення одержані, наприклад, Вайнштейном. В інших роботах [4] є спроби знайти поле дифракції від сітки з тонких провідників або циліндрів, але в таких рішеннях не враховуються краєві хвилі на краях циліндрів, що призводить до похибок. В усіх цих роботах розглядається падіння радіохвилі на циліндри так, що вектор напруженості електричного поля паралельний або перпендикулярний по вздовжній осі циліндра.

Отже, перший етап аналізу інтенсивності поля відбитих хвиль полягає в розрахунку амплітудно-фазового розподілу напруженості полів на поверхні циліндра.

Виберемо прямокутну систему координат таким чином, щоб початок координат  $O$  збігся з фазовим центром випромінювача. Розглянемо циліндричний об'єкт, радіус якого задовольняє нерівності  $\frac{a_0}{\lambda} < 10$ . В цьому випадку дифракційні хвилі на кінцях циліндра грають помітну роль,

яка зростає при зменшенні  $\frac{a_0}{\lambda}$ . Нехай антена знаходиться на певній відстані від циліндра (точка  $O$  на рис. 1).

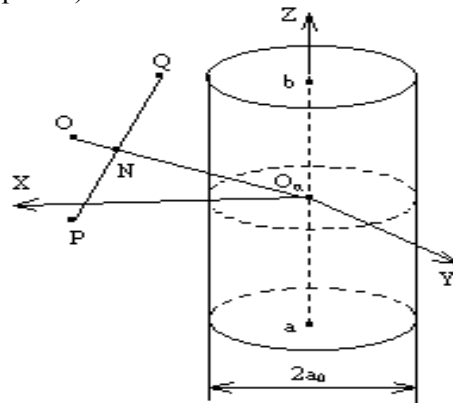


Рис. 1 Геометрія задачі

Будемо вважати, що на циліндр (рис. 1) падає локально плоска хвиля, фронт якої  $PQ$  перпендикулярний прямій  $OO_u$ .

Так як довжина  $OO_u$  дорівнює  $r_0$ , то напруженість поля в площині фронту хвилі, яка проходить через початок координат  $O_u$  циліндричної системи визначається як

$$\vec{E} = \vec{e}_0 \frac{A_0}{r_0} F(\theta_0, \varphi_0) = e_0 \vec{E}_0, \quad (1)$$

де  $\vec{e}_0$  – поляризаційний вектор; а  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  – координати точки  $O_u$  в циліндричній системі координат;  $F(\theta_0, \varphi_0)$  – характеристика направленості антени. Нехай хвиля в основній системі координат поляризована вертикально. Таким чином, паралельна вісі циліндра складова вектора напруженості електричного поля буде дорівнювати

$$E_{||} = E_0 (\vec{e}_0, \vec{z}_0) = E_0 \cos \delta^E, \quad (2)$$

де  $\delta^E$  – кут між віссю  $O_u Z$  та вектором  $\vec{E}_0$ ;  $\vec{z}_0$  – одиничний вектор.

Аналогічно можна записати, що

$$H_{||} = H_0 \cos \delta^H,$$

де  $\cos \delta^H = (\vec{h}_0, \vec{z}_0)$ .

Тут  $\delta^H$  – кут між вектором напруженості магнітного поля падаючої хвилі та віссю циліндра  $O_u Z$ ;  $\vec{h}_0$  – поляризаційний вектор.

Електромагнітну хвилю, вектор напруженості електричного поля якої паралельний вісі циліндра, будемо називати  $E$ -хвилею, а хвилю, вектор напруженості магнітного поля якої па-

ралельний вісі циліндра, будемо називати  $H$ -хвилею.

Для того, щоб користуватися одною прямокутною системою координат, а саме, власною системою циліндра, яку далі будемо позначати  $XYZ$  з початком в точці  $O_u$  (рис. 1) і яка простими співвідношеннями пов'язана з циліндричною системою координат. Виразимо напруженість поля падаючої хвилі (1) в новій системі координат. Зрозуміло, що в системі координат  $XYZO_u$  вираз (1) запишеться як

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikr}, \quad (3)$$

де відстань  $r$  рахується від точки  $O_u$  в бік початку координат основної системи  $XYZO$  по нормалі до фронту хвилі  $PQ$ . Так як пряма  $OO_u$  і нормаль до фронту хвилі  $r$  розташовані в площині  $XO_uZ$ , то відстань  $r$  може визначитися через дві координати  $x$  і  $z$ :

$$r = x \sin \vartheta + z \cos \vartheta, \quad (4)$$

де  $x$  і  $z$  – координати точки  $N$  на фронті хвилі, а  $\vartheta$  – кут між нормаллю  $r$  до фронту хвилі та віссю  $O_uZ$ .

Підставивши (4) в (3), одержимо

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ik(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}.$$

Останній вираз, представимо у вигляді

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikz \cos \vartheta} e^{ikx \sin \vartheta}.$$

Так як в циліндричній системі координат  $z = z$  і  $x = \rho \cos \psi$ , то

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikz \cos \vartheta} e^{ik\rho \sin \vartheta \cos \psi}. \quad (5)$$

Таким чином, за допомогою формули (5) можна знайти фазу вектора напруженості падаючої хвилі у будь-якій точці простору. При цьому, як видно з (5), для хвилі з плоским фронтом фаза змінюється за лінійним законом від аргументу  $x$  вздовж нормалі до вісі циліндра і не залежить від координат  $\rho$  та  $\psi$ . Фазовий розподіл вздовж осі  $z$  антисиметричний з нульовою фазою в точці  $O_u$ .

Використавши (2) та (5), напруженість електричного поля падаючої хвилі представимо у вигляді

$$E_z^I = E_{||} e^{ikz \cos \vartheta} e^{i\beta\rho \cos \psi}, \quad (6)$$

де коефіцієнт фази хвилі в напрямку радіуса-вектора дорівнює

$$\beta = k \sin \vartheta. \quad (7)$$

Подібний вираз можна записати і для  $H$ -хвилі

$$H_z^I = H_{||} e^{ikz \cos \vartheta} e^{i\beta\rho \cos \psi}. \quad (8)$$

На поверхні циліндра повинні виконуватись граничні умови, які забезпечують безперервність тангенційних складових векторів напруженості поля на границі двох середовищ. Для  $E$ -хвилі граничні умови мають вид

$$E_z^I + E_z^D = E_z^i, \quad \text{коли } \rho = a_0; \quad (9)$$

$$H_\psi^I + H_\psi^D = H_\psi^i, \quad \text{коли } \rho = a_0.$$

Індексом “ $I$ ” позначена падаюча хвиля, а індексом “ $D$ ” – дифрагована хвиля, “ $i$ ” – заломлена хвиля (яка розповсюджується в середині циліндра), “ $z$ ” – складова паралельна вісі  $z$ , “ $\psi$ ” – складова паралельна орту  $\vec{\psi}_0$ .

Щоб знайти дифраговану хвилю з напруженістю електричного поля  $E_z^D$ , представимо плоску електричну хвилю (6) розкладену по функціям Беселя, коли  $\rho > a_0$ :

$$E_z^I = E_{||} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\beta\rho) \cos(n\psi), \quad (10)$$

де  $\varepsilon_n = 1$ , коли  $n = 0$ ;  $\varepsilon_n = 2$ , коли  $n = 1, 2, 3, \dots$

Права частина (7) повинна задовольняти хвильовому рівнянню (рівнянню Гельмгольца)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (11)$$

яке в циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_z^I}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z^I}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z^I}{\partial z^2} + \beta^2 E_z^I = 0. \quad (12)$$

Підставивши (10) у рівняння (12), приведемо його до рівняння Беселя

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial J_n(\beta\rho)}{\partial \rho} \right) + \left( \beta^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) J_n(\beta\rho) = 0.$$

Рішення рівняння Беселя виражається також через функції Неймана і Ганкеля, які пов'язані з функціями Беселя співвідношеннями

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) = J_n(\beta\rho) - iN(\beta\rho),$$

де  $H_n^{(2)}(\beta\rho)$  – функція Ганкеля або циліндрична функція 3-го роду  $n$ -го порядку від аргументу  $\beta\rho$ ;  $N(\beta\rho)$  – функція Неймана або циліндрична функція 2-го роду  $n$ -го порядку від аргументу  $\beta\rho$ .

Функції Ганкеля задовольняють умові випромінювання на нескінченність, що видно з асимптотичного представлення функції Ганкеля при дуже великих значеннях  $\beta\rho$

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}} e^{-i\psi_n}, \quad (13)$$

де  $\psi_n = \beta\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$ .

Права частина (13) представляє собою біжучу хвилю з циліндричним фронтом, яка розповсюджується від початку координат на нескінченність. Такі властивості функцій Ганкеля дозволяють представити відбиті від циліндра хвилі у вигляді ряду, коли  $\rho > a_0$

$$E_z^D = E_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n i^n H_n^{(2)}(\beta \rho) \cos(n\psi), \quad (14)$$

де  $b_n$  – деякі постійні коефіцієнти розкладу (14), також як і (10), задовольняють хвильовому рівнянню (11).

Заломлену хвилю представимо у вигляді подібному (10), але з невідомими коефіцієнтами  $c_n$ , коли  $\rho < a_0$

$$E_z^i = E_{\parallel} e^{ik_i z \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n J_n(\beta_i \rho) \cos(n\psi), \quad (15)$$

де  $k_i$  – коефіцієнт фази хвилі в циліндрі;  $\beta_i$  – коефіцієнт фази хвилі в циліндрі під час руху в напрямку вісі  $O_y X$ , який дорівнює

$$\beta_i = k_i \sin \vartheta. \quad (16)$$

Коефіцієнт  $k_i$  знаходиться з формули

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\sigma\lambda}{\varepsilon}\right)^2}}.$$

Для визначення векторів напруженості магнітного поля  $E$  - хвилі скористаємось другим рівнянням системи рівнянь Максвелла, з якого

$$\dot{\vec{H}} = \frac{i}{\omega \mu_a} \text{rot} \vec{E}.$$

Враховуючи, що для  $E$  - хвилі існує тільки складова  $E_z$ , знайдемо значення вектора напруженості магнітного поля

$$\dot{\vec{H}} = \frac{i}{\omega \mu_a} \left( \frac{\bar{\rho}_0}{\rho} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \psi} - \bar{\psi}_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} \right). \quad (17)$$

Операція  $\text{rot} \vec{E}$  виконана в циліндричній системі координат.

Напруженість магнітного поля падаючої хвилі знаходиться з (15) при підстановці замість  $E_z$  значення  $E_z^D$  (10), коли  $\rho > a_0$

$$\dot{\vec{H}}^D = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega \mu_a} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta \rho) \right\} \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta J_n^{(2)'}(\beta \rho) \cos(n\psi). \quad (18)$$

При підстановці  $E_z^D$  (14) знаходиться напруженість магнітного поля дифрагуючої хвилі, коли  $\rho > a_0$

$$\dot{\vec{H}}^D = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega \mu_a} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(\beta \rho) \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta H_n^{(2)'}(\beta \rho) \cos(n\psi) \right\}. \quad (19)$$

Підставивши (15) в (17) знаходимо вектор напруженості магнітного поля заломленої хвилі, коли  $\rho < a_0$

$$\dot{\vec{H}}^i = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega \mu_{ai}} e^{ik_i z \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta_i \rho) \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta_i J_n(\beta_i \rho) \cos(n\psi) \right\}. \quad (20)$$

У формулах (18) - (20) штрихом позначена похідна циліндричної функції по аргументу. У формулі (20) позначене через  $\mu_{ai}$  – абсолютне значення магнітної проникності матеріалу циліндра.

Введемо поняття хвильового опору  $E$  - хвилі і визначимо його як

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

для зовнішнього простору і

$$W_i = \sqrt{\frac{\mu_{ai}}{\varepsilon_{ai}}} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

для простору в середині циліндра.  $\varepsilon_{ai}$  – діелектрична проникність матеріалу циліндра. Видно, що

$$\frac{\beta}{\mu_a} = \frac{\omega}{W_0}; \quad \frac{\beta_i}{\mu_{ai}} = \frac{\omega}{W_i}.$$

Позначимо відношення хвильових опорів через

$$W_r = \frac{W_0}{W_i} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\mu_i}},$$

де  $\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\varepsilon - i60\sigma\lambda}$  – відносна комплексна діелектрична проникність матеріалу циліндра,  $\mu_i$  – відносна магнітна проникність матеріалу циліндра,  $\sigma$  – провідність матеріалу циліндра,  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність циліндра.

З урахуванням прийнятих позначень, значення постійних коефіцієнтів виразу для дифрагуючої хвилі визначаються як

$$b_n = \frac{-J_n(\beta_i a_0) J_n'(\beta a_0) + W_r J_n'(\beta_i a_0) J_n(\beta a_0)}{J_n(\beta_i a_0) H_n^{(2)'}(\beta a_0) - W_r J_n'(\beta_i a_0) H_n^{(2)}(\beta a_0)}. \quad (21)$$

У випадку ідеально провідного циліндра  $\sigma \rightarrow \infty$  і  $W_r \rightarrow \infty$ , тоді

$$b_n = \frac{J_n(\beta a_0)}{H_n^{(2)}(\beta a_0)}.$$

У загальному випадку необхідно користуватися виразом (21), де  $\beta_i$  знаходиться з (16).

Розглянемо падіння на циліндр  $H$ -хвилі (8). Використовуючи розклад в ряд Фур'є по функціям Беселя, представимо (8) у вигляді, коли  $\rho > a_0$

$$H_z^{\Pi} = H_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\beta \rho) \cos(n\psi). \quad (22)$$

Значення напруженості електричного поля хвилі знайдемо з першого рівняння системи рівнянь Максвелла

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{i}{\omega \varepsilon_a} \text{rot} \dot{\vec{H}}.$$

Звідси в циліндричній системі координат, коли не дорівнює нулю тільки складова  $H_z$  маємо

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{i}{\omega \varepsilon_a} \left( \bar{\rho}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \psi} - \bar{\psi}_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \rho} \right). \quad (23)$$

Підставляючи (22) в (23), одержимо вектор напруженості електричного поля  $H$ -хвилі, коли  $\rho > a_0$

$$\vec{E}^{\Pi} = i \frac{H_{\parallel}}{\omega \varepsilon_a} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta \rho) \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta J_n'(\beta \rho) \cos(n\psi) \right\}.$$

Значення напруженості дифрагрованої хвилі шукаємо у вигляді, коли  $\rho > a_0$

$$H_z^{\Delta} = H_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^h \varepsilon_n i^n H_n^{(2)}(\beta \rho) \cos(n\psi);$$

$$\vec{E}^{\Delta} = i \frac{H_{\parallel}}{\omega \varepsilon_a} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^h \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(\beta \rho) \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta H_n^{(2)'}(\beta \rho) \cos(n\psi) \right\},$$

де  $b_n^h$  – постійні коефіцієнти, значення яких знаходиться з граничних умов аналогічно, як і для  $E$ -хвилі.

Тільки в цьому випадку граничні умови (9) записуються у вигляді

$$E_{\psi}^{\Pi} + E_{\psi}^{\Delta} = E_{\psi}^i, \quad \text{коли } \rho = a_0;$$

$$H_z^{\Pi} + H_z^{\Delta} = H_z^i \quad \text{коли } \rho = a_0.$$

Значення напруженості електричного та магнітного полів дифрагованих хвиль одержані в уявленні, що протяжність циліндра вздовж вісі  $z$  нескінченна. Насправді довжина циліндра скінченна. У зв'язку з цим виникає проблема використання одержаних результатів.

Розрахунок напруженості поля дифрагрованої хвилі краще виконати за допомогою еквівалентної апертури. Задавшись на деякій відстані від початку циліндричної системи координат еквівалентною апертурою, можна, використовуючи одержані рішення, знайти розподіл тангенційних складових поля в апертурі. Якщо розміри апертури набагато більші довжини хвилі, то поле в просторі з великою точністю буде визначатись на основі принципу Гюйгенса-Кірхгофа. В результаті, повністю коректно можна врахувати довжину циліндра в розмірі еквівалентної апертури вздовж вісі  $z$ . Такий спосіб дослідження електромагнітного поля використовується під час оцінок характеристик випромінювання циліндропараболічних антен. Таким чином, введення еквівалентної апертури дозволить врахувати вплив скінченної довжини циліндра та перейти від хвиль з локально циліндричним фронтом до хвиль з сферичним фронтом, що дозволить розрахувати поле дифракції в дальній зоні.

Перелік літератури:

1. Ільницький Л.Я., Сібрук Л.В. Антени. – К.: КМУЦА, 1998. – 216 с.
2. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Советское радио, 1962. – 240 с.
3. Вайнштейн Л.А., Теория дифракции и метод факторизации. – М.: Советское радио, 1966. – 431 с.
4. Боровиков В.А., Численные методы теории дифракции. – М.: Мир, 1982. – 200 с.

Л.Я. Ильницкий, Ю.В. Пепя

## ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН НА ЦИЛИНДРЕ МАЛОГО РАДИУСА

Рассмотрено падение радиоволн на цилиндрические поверхности малого радиуса. Найдены составляющие поля дифракции для вертикальной и горизонтальной поляризации по известному облучению цилиндра.

L.Y. Ilnitsky, Y.V. Pepa

## DIFFRACTION OF RADIOWAVES ON THE CYLINDER OF SMALL RADIUS

Falling radiowaves on cylindrical surfaces of small radius is considered. Field's components of diffraction for vertical and horizontal polarization on a known irradiation of the cylinder are found.