ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 35, 1995 № 2

УДК 517.988.8

© 1995 г. П. Ф. ЖУК

(*Киев*)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ s-ШАГОВОГО МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Доказано существование предельных итерационных параметров s-шагового метода наискорейшего спуска при минимизации квадратичного функционала $F(u) = 0.5\,(Au, u) - (f, u)$ в гильбертовом пространстве. Исследовано асимптотическое поведение метода; в частности, для гильбертовых пространств получены аналоги результатов, установленных ранее Экейком и Форсайтом для конечномерных пространств.

Введение

Пусть A — линейный, ограниченный, самосопряженный и положительно-определенный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Известным итерационным методом минимизации квадратичного функционала $F(u) = 0.5\,(Au, u) - (f, u)$ (или, что то же самое, решения операторного уравнения $Au = f$) является s-шаговый, $s \geq 1$, метод наискорейшего спуска (сокращенно: s-шаговый метод), начало изучения которого было положено в работе [1]. Последовательные приближения s-шагового метода строятся по правилу

$$(1) \qquad u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k)} A^{i-1} z_k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где u_0 — произвольное начальное приближение, $z_k = Au_k - f$ — градиент функционала $F(u)$ в точке $u = u_k$, а итерационные параметры $\{\gamma_i^{(k)}, i = 1, 2, \ldots, s\}$ выбираются из условия минимума величины $F(u_{k+1})$.

Вычислительные эксперименты, проведенные в начале 50-х годов Форсайтом, показали, что s-шаговый метод обладает специфическим асимптотическим поведением. В работе [2] было высказано предположение о том, что погрешности одношагового ($s = 1$) метода в конечномерном пространстве сходятся к 0, колеблясь между двумя предельными направлениями. Это предположение было доказано в [3] с помощью развитой там техники последовательных преобразований распределения вероятностей. В [3] показано, что если $u_0 \neq u^*$, $u_1 \neq u^*$ ($u^* = A^{-1}f$ — точный минимум функционала $F(u)$), то последовательности $\{y_{2k+\nu} = z_{2k+\nu}/\|z_{2k+\nu}\|, k = 0, 1, \ldots\}$, $\nu = 0, 1$, нормированных градиентов одношагового метода в конечномерном пространстве сходятся и их пределы принадлежат некоторой плоскости, натянутой на два собственных вектора оператора A.

Наиболее известные результаты об асимптотическом поведении s-шагового метода в конечномерном пространстве принадлежат Форсайту [4]. Им было показано, что разложение любого предельного вектора последовательности $\{y_k, k = 0, 1, \ldots\}$ по системе собственных векторов оператора A содержит не менее $s + 1$ и не более $2s$ ненулевых компонент, причем каждый предельный вектор инвариантен по направлению относительно двух последовательных итераций метода, а множество предельных векторов последовательности $\{y_{2k+\nu}, k = 0, 1, \ldots\}$, $\nu \in \{0, 1\}$, есть континуум (т. е. непустое, связное и замкнутое в H множество).

Асимптотическое поведение s-шагового метода в гильбертовом пространстве рассматривалось в [5]. Показано, что, как и в конечномерном пространстве, s-шаговый метод, рассматриваемый через итерацию, асимптотически ведет себя линейно. Именно это позволило рекомендовать для ускорения сходимости метода скорейшего спуска известные способы ускорения сходимости линейных итерационных процессов (см., например, [6]).

В настоящей работе развит новый по сравнению с указанными выше работами подход к изучению асимптотического поведения s-шагового метода, базирующийся на доказательстве существования предельных итерационных параметров

$$\gamma_i^\nu = \lim_{k\to\infty} \gamma_i^{(2k+\nu)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \quad \nu = 0, 1.$$

Данный подход может быть также использован для анализа асимптотического поведения s-шагового метода при минимизации произвольных достаточно гладких функционалов в гильбертовом пространстве.

В § 1 исследована скорость сходимости s-шагового метода. Как известно (см., например, [1]), s-шаговый метод сходится по крайней мере со скоростью геометрической прогрессии. Для конечномерного пространства в [4] показано, что s-шаговый метод сходится, вообще говоря, не более чем со скоростью геометрической прогрессии. Точнее, в [4] доказано, что если $u_0 \neq u^*$, $u_1 \neq u^*$, то последовательность $[F(u_{k+1}) - F(u^*)]/[F(u_k) - F(u^*)]$ отделена от нуля. Для одношагового метода в [4] удалось, опираясь на работу [3], доказать более сильный результат, а именно: если $u_0 \neq u^*$, $u_1 \neq u^*$, то существует отличный от нуля и, вообще говоря, зависящий от начального приближения предел

$$\lim_{k\to\infty} \{[F(u_{k+1} - F(u^*)]/[F(u_k) - F(u^*)]\}. \tag{2}$$

В § 1 данной работы доказано, что последовательность $[F(u_{k+1}) - F(u^*)]/[F(u_k) - F(u^*)]$, порожденная s-шаговым, $s \geq 1$, методом в гильбертовом пространстве, не убывает и ограничена. Отсюда, в частности, следует существование предела (2). Полученный результат можно рассматривать как распространение на s-шаговый метод асимптотического свойства двухслойных градиентных методов, установленного в [7, с. 338] (отметим, что указанный результат для s-шагового метода в конечномерном пространстве был доказан в [8]).

В § 2, опираясь на результаты § 1, мы доказали существование предельных итерационных параметров s-шагового метода. Этот результат является важнейшим в данной работе. Он позволяет установить в § 3 строение множества предельных функций последовательности функций распределения нормированных градиентов y_k и получить аналоги результатов из [3] и [4]. В частности, доказано, что если $u_0 \neq u^*$, $u_1 \neq u^*$, то последовательность функций распределения нормированных градиентов одношагового метода по четным (нечетным) итерациям поточечно сходится.

Отметим, что все наши рассуждения основаны на следующих известных соотношениях для s-шагового метода (см., например, [1]).

1. Для любого $k = 0, 1, \ldots$

$$z_{k+1} = z_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k)} A^i z_k, \tag{3}$$

или (в операторном виде)

$$z_{k+1} = Q_k z_k, \qquad Q_k = E + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k)} A^i, \tag{4}$$

где E — единичный оператор.

2. Для любого $k = 0, 1, \ldots$

$$(A^i z_k, z_{k+1}) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{5}$$

3. Для любого вектора $u \in H$

$$F(u) - F(u^*) = (A^{-1}z, z)/2, \tag{6}$$

где $z = Au - f$, A^{-1} — обратный к A оператор.

В частности, для любого $k = 0, 1, \ldots$

$$F(u_k) - F(u^*) = (A^{-1}z_k, z_k)/2. \tag{7}$$

§ 1. О скорости сходимости s-шагового метода

Основную роль при исследовании скорости сходимости s-шагового метода играет

Лемма 1. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$ *имеет место равенство*

$$(A^{-1}z_{k+2}, z_k) = (A^{-1}z_{k+1}, z_{k+1}). \tag{1.1}$$

Доказательство. Из (4) следует, что $z_{k+2} = Q_{k+1} z_{z+1}$. Поэтому, используя самосопряженность оператора A и соотношение (5), имеем

$$(A^{-1}z_{k+2}, z_k) = (A^{-1}z_{k+1}, Q_{k+1}z_k) = \left(A^{-1}z_{k+1}, z_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k+1)} A^i z_k\right) =$$

$$= (A^{-1}z_{k+1}, z_k) = \left(A^{-1}z_{k+1}, z_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k)} A^i z_k\right).$$

Но из (3) следует, что $z_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{(k)} A^i z_k = z_{k+1}$. Лемма доказана.

В качестве первого приложения леммы 1 укажем необходимое и достаточное условие окончания s-шагового метода за конечное число итераций.

Обозначим через V множество элементов $z \in H$, для которых система векторов $z, Az, \ldots, A^s z$ линейно независима.

Лемма 2. *Если* $z_0 \notin V$, *то* $z_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *иначе* $z_k \in V$, $k = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Предположим, что $z_0 \notin V$. Тогда система векторов $z_0, Az_0, \ldots, A^s z_0$ линейно зависима и для некоторых чисел $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ будет $z = z_0 + \gamma_1 A z_0 + \ldots + \gamma_s A^s z_0 = 0$. Рассмотрим вектор $u = u_0 + \gamma_1 z_0 + \ldots$ $\ldots + \gamma_s A^{s-1} z_0$. Так как $z = Au - f$, то из (6) следует $F(u) = F(u^*)$. Поскольку итерационные параметры $\gamma_1^{(0)}, \ldots, \gamma_s^{(0)}$ выбираются из условия минимума величины $F(u_1)$, то, полагая $\gamma_i^{(0)} = \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, имеем $F(u_1) = F(u^*)$. Из (7) следует, что $z_1 = 0$. Таким образом, если $z_0 \notin V$, то $z_k = 0$, $k = 1, 2$.

Предположим, что $z_0 \in V$, но $z_1 \notin V$. Повторяя рассуждение, изложенное выше, имеем $z_2 = 0$. Но из соотношения (1.1) следует, что $z_1 = 0$, т. е. противоречие. Таким образом, если $z_0 \in V$, то $z_1 \in V$. Аналогично получаем, что $z_k \in V$, $k = 2, 3, \ldots$. Лемма доказана.

Поскольку случай $z_0 \notin V$ не представляет интереса с асимптотической точки зрения, то в дальнейшем будем предполагать, что начальное приближение u_0 зафиксировано и $z_0 \in V$. Тогда из леммы 2 следует существование последовательности

$$\rho_k = \sqrt{[F(u_{k+1}) - F(u^*)]/[F(u_k) - F(u^*)]}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

характеризующей скорость сходимости s-шагового метода.

В качестве второго приложения леммы 1 докажем основной результат данного параграфа.

Рассмотрим, наряду с пространством H, энергетическое пространство $H_{A^{-1}}$, состоящее в точности из элементов пространства H, но отличающееся от него выбором скалярного произведения и нормы: $(u, v)_{A^{-1}} = (A^{-1}u, v)$, $\|u\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}u, u)}$. Известно (см., например, [7]), что $H_{A^{-1}}$ является гильбертовым пространством, нормы пространств H и $H_{A^{-1}}$ эквивалентны, а оператор A самосопряжен и положительно определен в пространстве $H_{A^{-1}}$.

Теорема 1. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$

$$\|z_{k+2} - \rho_k^2 z_k\|^2_{A^{-1}} = \|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}} (\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2), \tag{1.3}$$

$$\rho_k \le \rho_{k+1} \le 1. \tag{1.4}$$

Доказательство. Из (7) следует, что $\rho_k = \|z_{k+1}\|_{A^{-1}} / \|z_k\|_{A^{-1}}$. Поэтому

$$\|z_{k+2} - \rho_k^2 z_k\|^2_{A^{-1}} = \|z_{k+2}\|^2_{A^{-1}} - 2\frac{\|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}} (z_{k+2}, z_k)_{A^{-1}}}{\|z_k\|^2_{A^{-1}}} + \frac{\|z_{k+1}\|^4_{A^{-1}}}{\|z_k\|^2_{A^{-1}}}.$$

Из леммы 1 следует, что $(z_{k+2}, z_k)_{A^{-1}} = \|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}}$, поэтому $\|z_{k+2} - \rho_k^2 z_k\|^2_{A^{-1}} = \|z_{k+2}\|^2_{A^{-1}} - \|z_{k+1}\|^4_{A^{-1}} / \|z_k\|^2_{A^{-1}} = \|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}} (\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2)$. Соотношение (1.3) доказано. Из него следует, что $\rho_k \le \rho_{k+1}$. Но так как $F(u_{k+1}) \le F(u_k)$, то для любого $k = 0, 1, \dots$, будет $\rho_k \le 1$. Теорема доказана.

Замечание 1. При $s = 1$ соотношения (1.1), (1.4) следуют из [7, с. 338]. Для s-шагового метода в конечномерном пространстве эти соотношения доказаны в [8].

Следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Существует предел

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \rho_k \le 1.$$

Следствие 2. Существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|z_{k+2} - \rho^2 z_k\|}{\|z_k\|} = 0. \tag{1.5}$$

Действительно, из (1.3) вытекает

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|z_{k+2} - \rho^2 z_k\|_{A^{-1}}}{\|z_k\|_{A^{-1}}} = \lim_{k\to\infty} (\rho^2 - \rho_k^2 + \rho_k \sqrt{\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2}) = 0. \tag{1.6}$$

Из равенства (1.6) и эквивалентности норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ следует (1.5).

Следствие 3. Существует предел

$$\lim_{k\to\infty} (\|z_{k+2}\| / \|z_k\|) = \rho^2. \tag{1.7}$$

Действительно,

$$\left| \frac{\|z_{k+2}\|}{\|z_k\|} - \rho^2 \right| = \left| \frac{\|z_{k+2}\| - \rho^2 \|z_k\|}{\|z_k\|} \right| \le \frac{\|z_{k+2} - \rho^2 z_k\|}{\|z_k\|} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Следствие 4. Положим $y_k = z_k / \|z_k\|$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|y_{k+2} - y_k\| = 0. \tag{1.8}$$

Действительно,

$$\rho^2 (y_{k+2} - y_k) = \frac{\|z_{k+2}\|}{\|z_k\|} y_{k+2} - \rho^2 y_k + \left(\rho^2 - \frac{\|z_{k+2}\|}{\|z_k\|} \right) y_{k+2}.$$

Поэтому

$$\rho^2 \|y_{k+2} - y_k\| \le \frac{\|z_{k+2} - \rho^2 z_k\|}{\|z_k\|} + \left| \rho^2 - \frac{\|z_{k+2}\|}{\|z_k\|} \right| \to 0, \qquad k \to \infty.$$

§ 2. Существование предельных итерационных параметров

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 2. *Если $z_0 \in V$, то существуют предельные итерационные параметры s-шагового метода*

$$\gamma_i^\nu = \lim_{k\to\infty} \gamma_i^{(2k+\nu)}, \qquad i = 1, 2, \dots, s, \quad \nu = 0, 1,$$

зависящие, вообще говоря, от начального приближения.

Для доказательства теоремы нам потребуются вспомогательные утверждения.

Так как $z_0 \in V$, то существует последовательность нормированных градиентов $y_k = z_k / \|z_k\|$, $k \geq 0$. Обозначим через E_t спектральную функцию оператора A, а через $\varphi_k = \varphi_k(t) = (E_t y_k, y_k)$ — функцию распределения вектора y_k. Пусть Σ_k — множество точек роста функции φ_k (соответствующие определения см., например, в [9]).

Лемма 3. *Множество Σ_k содержит не менее $s+1$ точек и $\Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k$, $k = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство. Предположим, что множество Σ_k имеет менее $s+1$ точек. Тогда функция φ_k имеет в точности r, $r \leq s$, точек роста $t_1, \ldots, t_r$ и является, очевидно, кусочно-постоянной со скачками $h_p^{(k)} = \varphi_k(t_p + 0) - \varphi_k(t_p - 0)$, $p = 1, 2, \ldots, r$. Следовательно,

$$(2.1) \qquad (A^{i+j} y_k, y_k) = \sum_{p=1}^{r} t_p^{i+j} h_p^{(k)}.$$

Подставив правую часть (2.1) в определитель Грама $\det [(A^{i+j} y_k, y_k)]_{i,j=0}^{s}$, нетрудно убедиться, что он равен 0, следовательно, система векторов $y_k, Ay_k, \ldots, A^s y_k$ линейно зависима. Однако $y_k \in V$, т. е. противоречие. Первое утверждение леммы доказано.

Далее, пусть $t \in \Sigma_{k+1}$, ε — произвольное положительное число, $E_\Delta = E_{t+\varepsilon} - E_{t-\varepsilon}$. Используя перестановочность операторов E_Δ и A, имеем $0 < \varphi_{k+1}(t+\varepsilon) - \varphi_{k+1}(t-\varepsilon) = \|E_\Delta y_{k+1}\|^2 = \|Q_k E_\Delta y_k\|^2 \|z_k\|^2 \|z_{k+1}\|^{-2} \leq \|Q_k\|^2 \|z_k\|^2 \times \|z_{k+1}\|^{-2} [\varphi_k(t+\varepsilon) - \varphi_k(t-\varepsilon)]$. Следовательно, $\varphi_k(t+\varepsilon) > \varphi_k(t-\varepsilon)$ и $t \in \Sigma_k$. Лемма доказана.

Множество Σ_0 является, очевидно, замкнутым подмножеством спектра оператора A. Положим $\lambda = \min \Sigma_0$, $\Lambda = \max \Sigma_0$, $q_k(t) = 1 + \gamma_1^{(k)} t + \ldots + \gamma_s^{(k)} t^s$.

Лемма 4. *Для любого $k = 0, 1, \ldots$*

$$\max_{t \in [\lambda, \Lambda]} |q_k(t)| \leq (\Lambda/\lambda)^s.$$

Доказательство. Так как $Q_k = q_k(A)$, то из соотношений (4), (5) следует

$$\int_\lambda^\Lambda t^i q_k(t)\, d\varphi_k(t) = (A^i y_k, Q_k y_k) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Функция φ_k имеет, в силу леммы 3, не менее $s+1$ точек роста, поэтому (см., например, [10]) многочлен $q_k(t)$ имеет s простых корней $t_{1k} < \ldots < t_{sk}$, расположенных на интервале $]\lambda, \Lambda[$. Поэтому

$$\max_{t \in [\lambda, \Lambda]} |q_k(t)| = \max_{t \in [\lambda, \Lambda]} \left| \left(1 - \frac{t}{t_{1k}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_{sk}}\right) \right| \leq \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^s.$$

Лемма доказана.

Следующее соотношение является основным при доказательстве теоремы 2. Положим $v_k = z_{k+2} - \rho_k^2 z_k$, $\mu_{i+j}^{(k)} = (A^{i+j} z_{k+2}, z_{k+2})$.

Лемма 5. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$ *имеют место равенства*

$$(2.2)\qquad \sum_{i=1}^{s} \mu_{i+j}^{(k)} (\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)}) = (A^j Q_k v_k, v_k), \qquad j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Так как $z_{k+3} = Q_{k+2} z_{k+2}$, то из (5) следует

$$(2.3)\qquad (A^j z_{k+2}, Q_{k+2} z_{k+2}) = (A^j z_{k+2}, z_{k+3}) = 0.$$

Далее, учитывая, что $z_{k+2} = Q_{k+1} Q_k z_k$, преобразуем скалярное произведение $(A^j z_{k+2}, Q_k z_{k+2})$:

$$(2.4)\qquad (A^j z_{k+2}, Q_k z_{k+2}) = (A^j z_k, Q_k (Q_{k+1} Q_k)^2 z_k).$$

Заметим, что $(A^j z_k, Q_k (Q_{k+1} Q_k) z_k) = (A^j z_{k+1}, z_{k+2}) = 0$, $(A^j z_k, Q_k z_k) = 0$, поэтому из (2.4) следует

$$(2.5)\qquad (A^j z_{k+2}, Q_k z_{k+2}) = (A^j z_k, Q_k (Q_{k+1} Q_k - \rho_k^2 E)^2 z_k) = (A^j Q_k v_k, v_k).$$

Так как

$$(A^j z_{k+2}, Q_k z_{k+2}) - (A^j z_{k+2}, Q_{k+2} z_{k+2}) = \sum_{i=1}^{s} \mu_{i+j}^{(k)} (\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)}),$$

то из (2.3), (2.5) вытекает требуемое равенство (2.2). Лемма доказана.

Равенства (2.2) образуют систему из s линейных алгебраических уравнений относительно $\{\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)},\ i = 1, 2, \ldots, s\}$. Определитель этой системы $d^{(k)} = \det [\mu_{i+j}^{(k)}]_{\substack{j=0,1,\ldots,s-1\\ i=1,2,\ldots,s}}$ является определителем Грама векторов $Az_{k+2}, \ldots, A^s z_{k+2}$ в пространстве $H_{A^{-1}}$:

$$d^{(k)} = \det [(A^{i+j} z_{k+2}, z_{k+2})_{A^{-1}}]_{i,\,j=1,2,\ldots,s}.$$

Следовательно, $d^{(k)} > 0$ и система (2.2) имеет единственное решение

$$(2.6)\qquad \gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)} = d_i^{(k)} / d^{(k)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где $d_i^{(k)}$ — определитель, образованный из $d^{(k)}$ заменой i-го столбца на столбец правой части (2.2).

Оценим определитель $d^{(k)}$ снизу.

Лемма 6. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$

$$d^{(k)} \geq \lambda^{s(s+1)} \|z_{k+3}\|_A^{2(s-1)} \|z_{k+2}\|_{A^{-1}}^2.$$

Доказательство. Заметим, что при $0 \leq n \leq s$ векторы $A^n z_{k+2}, \ldots, A^s z_{k+2}$ линейно независимы, поэтому их определитель Грама в пространстве $H_{A^{-1}}$

$$g_n = \det [(A^{i+j} z_{k+2}, z_{k+2})_{A^{-1}}]_{i,\,j=n,\ldots,s} > 0.$$

Так как $d^{(k)} = g_1$, $g_s = (A^{2s-1}z_{k+2}, z_{k+2})$, то определитель $d^{(k)}$ можно представить в виде

$$d^{(k)} = (g_1/g_2) \cdot \ldots \cdot (g_{s-1}/g_s)\,(A^{2s-1}z_{k+2}, z_{k+2})$$

или, полагая $r_n = \sqrt{g_n/g_{n+1}}$, в виде

$$d^{(k)} = r_1^2 \cdot \ldots \cdot r_{s-1}^2\,(A^{2s-1}z_{k+2}, z_{k+2}). \tag{2.7}$$

Оценим r_n. Согласно [9], r_n — расстояние в пространстве $H_{A^{-1}}$ между вектором $A^n z_{k+2}$ и линейной оболочкой $\mathcal{L}^{(n)}$, натянутой на векторы $A^{n+1}z_{k+2}, \ldots, A^s z_{k+2}$.

Пусть $z^* = \gamma_{n+1}A^{n+1}z_{k+2} + \ldots + \gamma_s A^s z_{k+2}$ — проекция вектора $A^n z_{k+2}$ на $\mathcal{L}^{(n)}$. Тогда для всех n, $0 < n < s$, имеем

$$r_n = \|A^n z_{k+2} - z^*\|_{A^{-1}} \geq \lambda^n \|z_{k+2} - \gamma_{n+1}Az_{k+2} - \ldots - \gamma_s A^{s-n}z_{k+2}\|_{A^{-1}} \geq \lambda^n r_0. \tag{2.8}$$

Вычислим значение r_0. Заметим, что поскольку параметры $\{\gamma_i^{(k+2)}, i = 1, 2, \ldots, s\}$ обеспечивают минимум величины $F(u_{k+3})$, то из соотношения (6) получаем

$$\|z_{k+3}\|_{A^{-1}} = \min_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s} \|z_{k+2} - \gamma_1 Az_{k+2} - \ldots - \gamma_s A^s z_{k+2}\|_{A^{-1}} = r_0.$$

Следовательно, $r_0 = \|z_{k+3}\|_{A^{-1}}$. Из (2.8) имеем

$$r_n \geq \lambda^n \|z_{k+3}\|_{A^{-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{2.9}$$

Утверждение леммы вытекает из (2.7), (2.9) и очевидной оценки $(A^{2s-1}z_{k+2}, z_{k+2}) \geq \lambda^{2s}\|z_{k+2}\|_{A^{-1}}^2$. Лемма доказана.

Перейдем к оценке $d_i^{(k)}$. Разложим $d_i^{(k)}$ по i-му столбцу:

$$d_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{s-1} d_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)},$$

где $\varepsilon_j^{(k)} = (A^j Q_k v_k, v_k)$, $d_{ij}^{(k)}$ — соответствующее алгебраическое дополнение. Так как $\mu_\nu^{(k)} = (A^\nu z_{k+2}, z_{k+2}) \leq \Lambda^{\nu+1}\|z_{k+2}\|_{A^{-1}}^2$ при $\nu \geq 0$, то $|d_{ij}^{(k)}| \leq d\|z_{k+2}\|_A^{2(s-1)}$, где число d зависит лишь от s и Λ. Следовательно,

$$|d_i^{(k)}| \leq sd\|z_{k+2}\|_A^{2(s-1)} \max_{j=0, 1, \ldots, s-1} |\varepsilon_j^{(k)}|. \tag{2.10}$$

Оценим $\varepsilon_j^{(k)}$. Из леммы 4 и соотношения (1.3) вытекает, что

$$|\varepsilon_j^{(k)}| = |(A^{j+1}Q_k v_k, v_k)_{A^{-1}}| \leq \Lambda^{j+1} \max_{t \in [\lambda, \Lambda]} |q_k(t)| \times \tag{2.11}$$

$$\times \|v_k\|_{A^{-1}}^2 \leq \Lambda^{s+j+1}\lambda^{-s}\|z_{k+1}\|_{A^{-1}}^2 (\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Из равенства (2.6), оценок (2.10), (2.11) и леммы 6 следует, что

$$|\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)}| \leq M\rho_{k+2}^{2(1-s)}\rho_{k+1}^{-2}(\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2), \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где число M не зависит от i и k. Так как $\rho_0 \leq \rho_k$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$(2.12) \qquad |\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k+2)}| \leq M\rho_0^{-2s}(\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2), \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Из ограниченности последовательности ρ_k и оценки (2.12) следует, что ряд $\gamma_i^{(\nu)} + (\gamma_i^{(2+\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}) + \ldots + (\gamma_i^{(2k+2+\nu)} - \gamma_i^{(2k+\nu)}) + \ldots$ абсолютно сходится для любого $\nu \in \{0, 1\}$ и $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Его сумма, очевидно, равна $\gamma_i^{\nu} = \lim_{k\to\infty} \gamma_i^{(2k+\nu)}$. Теорема доказана.

3. Асимптотическое поведение нормированных градиентов

В этом параграфе исследуется множество предельных функций последовательности функций распределения $\varphi_k = \varphi_k(t) = (E_t y_k, y_k)$ нормированных градиентов y_k s-шагового метода.

Согласно определению [9], любая функция φ_k определена и не убывает на всей числовой оси, непрерывна слева на интервале $]-\infty, \Lambda[$ и $\varphi_k(t) = 0$ при $t \leq \lambda$, $\varphi_k(t) = 1$ при $t \geq \Lambda$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ множество функций $\psi = \psi(t)$, обладающих, как и функции φ_k, перечисленными выше свойствами. Пусть $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$ — некоторая последовательность функций из множества $\mathcal{V}$.

Будем говорить, что последовательность $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$ поточечно сходится, если существует функция $\psi \in \mathcal{V}$ такая, что во всех точках непрерывности функции ψ имеет место равенство $\psi(t) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(t)$. Функцию ψ будем называть пределом последовательности $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$ и обозначать $\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k$.

Отметим, что любая последовательность может иметь не более одного предела. Действительно, если $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — пределы последовательности $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$, то они принадлежат множеству $\mathcal{V}$, следовательно, не убывают, непрерывны слева на интервале $]-\infty, \Lambda[$ и $\psi^{(1)}(t) = \psi^{(2)}(t) = 1$ при $t \geq \Lambda$. Пусть $t < \Lambda$, а $t_1 < t_2 < \ldots$ — сходящаяся к t последовательность точек непрерывности функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ (такая последовательность существует, поскольку множества точек разрыва функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ не более чем счетны). Из определения поточечной сходимости следует, что

$$\psi^{(1)}(t_i) = \psi^{(2)}(t_i) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(t_i), \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому, учитывая непрерывность слева функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ в точке t, имеем $\psi^{(1)}(t) = \psi^{(2)}(t)$. Таким образом, $\psi^{(1)} = \psi^{(2)}$.

Будем говорить, что ψ является предельной функцией последовательности $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$, если существует подпоследовательность $\{\psi_{k_i}, k_1 < k_2 < \ldots\}$ этой последовательности, поточечно сходящаяся к ψ, т. е. $\psi = \lim_{i\to\infty} \psi_{k_i}$.

Имеет место следующее свойство компактности: множество предельных функций произвольной последовательности $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$ функций из множества $\mathcal{V}$ непусто.

Действительно, в силу второй теоремы Хелли (см., например, [11]), существует подпоследовательность $\{\psi_{k_i}, i = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся в каждой точке числовой оси к некоторой функции ψ^*. Изменим значения функции ψ^* в ее точках разрыва так, чтобы вновь образованная функция ψ принадлежала множеству $\mathscr{V}$. Тогда $\psi = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_{k_i}$ и является, очевидно, предельной функцией последовательности $\{\psi_k, k = 0, 1, \ldots\}$.

Цель данного параграфа состоит в описании множества Φ предельных функций последовательности $\{\varphi_k, k = 0, 1, \ldots\}$. Основную роль при этом играют многочлены $q^{(\nu)}(t) = 1 + \gamma_1^\nu t + \ldots + \gamma_s^\nu t^s$, $\nu = 0, 1$, $\pi(t) = q^{(1)}(t)\, q^{(0)}(t) - \rho^2$, где

$$\gamma_i^\nu = \lim_{k\to\infty} \gamma_i^{(2k+\nu)}, \qquad \rho = \lim_{k\to\infty} \rho_k,$$

существование которых следует из теорем 1, 2.

Предварительно отметим, что $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$, где Φ_ν — множество предельных функций последовательности $\{\varphi_{2k+\nu}, k = 0, 1, \ldots\}$, $\nu \in \{0, 1\}$. Действительно, если $\varphi \in \Phi_0 \cup \Phi_1$, то, очевидно, $\varphi \in \Phi$. Наоборот, если $\varphi \in \Phi$, то $\varphi = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{k_i}$. Тогда как среди чисел k_i, $i = 1, 2, \ldots$, бесконечно много либо четных, либо нечетных, то либо $\varphi \in \Phi_0$, либо $\varphi \in \Phi_1$, что и требовалось доказать.

Отметим, что из свойства компактности следует, что множества Φ, Φ_0, Φ_1 непусты.

Следующая лемма устанавливает связь между предельными функциями и указанными выше многочленами.

Л е м м а 7. *Если* $\varphi \in \Phi_\nu$, $\nu \in \{0, 1\}$, *то*

(3.1) $$\int_\lambda^\Lambda t^j q^{(\nu)}(t)\, d\varphi(t) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, s-1,$$

(3.2) $$\int_\lambda^\Lambda t^{-1} \{[q^{(\nu)}(t)]^2 - \rho^2\} d\varphi(t) = 0,$$

(3.3) $$\int_\lambda^\Lambda \pi^2(t)\, d\varphi(t) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (4), (5) следует, что $(A^j y_k, Q_k y_k) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, или, в интегральной форме,

(3.4) $$\int_\lambda^\Lambda t^j q_k(t)\, d\varphi_k(t) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Далее, из определения ρ_k следует, что $((Q_k^2 - \rho_k^2 E)\, z_k, z_k)_{A^{-1}} = 0$, поэтому $((Q_k^2 - \rho_k^2 E)\, y_k, y_k)_{A^{-1}} = 0$, или, в интегральной форме,

(3.5) $$\int_\lambda^\Lambda t^{-1} [q_k^2(t) - \rho_k^2]\, d\varphi_k(t) = 0.$$

Наконец, из соотношения (1.5) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|Q_{k+1}Q_k y_k - \rho^2 y_k\| = 0,$$

или, в интегральной форме,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\lambda^\Lambda [q_{k+1}(t)\, q_k(t) - \rho^2]^2\, d\varphi_k(t) = 0. \tag{3.6}$$

Так как $\varphi \in \Phi_\nu$, то существует последовательность $\{\varphi_{2k_i+\nu},\ i = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся к φ поточечно. Поскольку последовательности многочленов $\{q_{2k_i+\nu}(t),\ i = 1, 2, \ldots\}$, $\{q_{2k_i+1+\nu}(t) \cdot q_{2k_i+\nu}(t),\ i = 1, 2, \ldots\}$ сходятся, очевидно, к $q^{(\nu)}(t)$ и $q^{(1)}(t)\, q^{(0)}(t)$ равномерно по $t \in [\lambda, \Lambda]$, то из первой теоремы Хелли следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \int_\lambda^\Lambda t^j q_{2k_i+\nu}(t)\, d\varphi_{2k_i+\nu}(t) = \int_\lambda^\Lambda t^j q^{(\nu)}(t)\, d\varphi(t), \tag{3.7а}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_\lambda^\Lambda t^{-1} [q^2_{2k_i+\nu}(t) - \rho^2_{2k_i+\nu}]\, d\varphi_{2k_i+\nu}(t) = \int_\lambda^\Lambda t^{-1} \{[q^{(\nu)}(t)]^2 - \rho^2\} d\varphi(t), \tag{3.7б}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_\lambda^\Lambda [q_{2k_i+1+\nu}(t)\, q_{2k_i+\nu}(t) - \rho^2]^2\, d\varphi_{2k_i+\nu}(t) = \int_\lambda^\Lambda \pi^2(t)\, d\varphi(t). \tag{3.7в}$$

Из соотношений (3.4)—(3.7) вытекает утверждение леммы.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество нулей многочлена $\pi(t)$. Строение предельных функций характеризует

Лемма 8. *Любая функция $\varphi \in \Phi$ кусочно-постоянна и обладает не менее $s + 1$ и не более $2s$ скачками, причем точки скачков принадлежат множеству $\mathcal{N} \cap \Sigma_0$.*

Доказательство. Пусть t^* — произвольная точка роста функции φ. Покажем, что $t^* \in \mathcal{N}$. Предположим противное: $\pi(t^*) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности $\pi(t)$ существуют числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $|\pi(t)| > \delta$ для всех $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$. Поэтому

$$\int_\lambda^\Lambda \pi^2(t)\, d\varphi(t) \ge \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \pi^2(t)\, d\varphi(t) \ge \delta^2 [\varphi(t^* + \varepsilon) - \varphi(t^* - \varepsilon)] > 0,$$

что противоречит формуле (3.3). Следовательно, $t^* \in \mathcal{N}$.

Таким образом, φ обладает конечным числом точек роста $t_1, \ldots, t_r$, $r \le 2s$, причем они принадлежат множеству $\mathcal{N}$. Поэтому φ кусочно-постоянна со скачками $h_i = \varphi(t_i + 0) - \varphi(t_i - 0) > 0$ в точках t_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Покажем, что $s + 1 \le r$. Предположим противное: $r \le s$. Из соотношений (3.1), (3.2) следует, что

$$\sum_{i=1}^r t_i^j q^{(\nu)}(t_i)\, h_i = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, s - 1, \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^r t_i^{-1} \{[q^{(\nu)}(t_i)]^2 - \rho^2\} h_i = 0. \tag{3.9}$$

Рассмотрим равенства (3.8) как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных $\{q^{(\nu)}(t_i),\ i = 1, 2, \dots, r\}$. Так как $r \le s$ и

$$\det\begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ t_1 h_1 & \dots & t_r h_r \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{r-1} h_1 & \dots & t_r^{r-1} h_r \end{vmatrix} = h_1 \dots h_r \det \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_r \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{r-1} & \dots & t_r^{r-1} \end{vmatrix} \ne 0,$$

то из (3.8) следует, что $q^{(\nu)}(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Но из (3.9) вытекает $\rho = 0$, что противоречит теореме 1.

Таким образом, $s + 1 \le r \le 2s$. Докажем, что $\{t_1, \dots, t_r\} \subseteq \Sigma_0$. Пусть $t \notin \Sigma_0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\varphi_0(t - \varepsilon) = \varphi_0(t + \varepsilon)$. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Из леммы 3 следует, что $\varphi_k(t - \varepsilon_1) = \varphi_k(t + \varepsilon_1)$, $k = 0, 1, \dots$, поэтому t — точка постоянства функции φ. Таким образом, из $t \notin \Sigma_0$ следует, что $t \notin \{t_1, \dots, t_r\}$, поэтому $\{t_1, \dots, t_r\} \subseteq \Sigma_0$. Лемма доказана.

Перейдем к описанию множества Φ. Воспользуемся следующей идеей. Согласно лемме 8, любая функция $\varphi \in \Phi$ кусочно-постоянна и ее точки скачков принадлежат конечному множеству $\mathcal{N} \cap \Sigma_0$, следовательно, она однозначно определяется вектором, компонентами которого являются эти скачки. Таким образом, описание множества Φ сводится к описанию некоторого подмножества конечномерного пространства.

Точнее: пусть $\chi_1 < \dots \chi_N$ — упорядоченные элементы множества $\mathcal{N} \cap \Sigma_0$ (из леммы 8 следует, что $s + 1 \le N \le 2s$), а $\mathbb{R}^N$ есть N-мерное вещественное евклидово пространство.

Рассмотрим отображение $\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$, заданное формулой

$$\mathcal{F}\psi = (\psi(\chi_1 + \varepsilon) - \psi(\chi_1 - \varepsilon), \dots, \quad \psi(\chi_N + \varepsilon) - \psi(\chi_N - \varepsilon)),$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы отрезки $\Delta_i(\varepsilon) = [\chi_i - \varepsilon, \chi_i + \varepsilon]$, $i = 1, 2, \dots, N$, попарно не пересекались. Если функция $\varphi \in \Phi$ имеет скачок в точке χ_i, то он в силу выбора числа ε равен $\varphi(\chi_i + \varepsilon) - \varphi(\chi_i - \varepsilon)$, поэтому вектор $\mathcal{F}\varphi$ однозначно определяет функцию φ. Следовательно, отображение $\mathcal{F}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством Φ и его конечномерным образом $U = \mathcal{F}\Phi$. Более того, U есть множество предельных векторов последовательности $\{\mathcal{F}\varphi_k,\ k = 0, 1, \dots\}$. А именно, имеет место

Лемма 9. 1. *Если последовательность* $\{\varphi_{k_i},\ i = 1, 2, \dots\}$ *поточечно сходится к* φ, *то последовательность* $\{\mathcal{F}\varphi_{k_i},\ i = 1, 2, \dots\}$ *сходится в пространстве* $\mathbb{R}^N$ *к* $\mathcal{F}\varphi$.

2. *Если последовательность* $\{\mathcal{F}\varphi_{k_i},\ i = 1, 2, \dots\}$ *сходится в пространстве* $\mathbb{R}^N$ *к* h, *то* $h \in U$ *и последовательность* $\{\varphi_{k_i},\ i = 1, 2, \dots\}$ *поточечно сходится к функции* $\varphi = \mathcal{F}^{-1}h$.

Доказательство. 1. Так как $\varphi \in \Phi$, то функция φ кусочно постоянна, причем скачки возможны лишь в точках χ_j, $j = 1, 2, \dots, N$. Отрезки $\Delta_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, N$, в силу выбора числа ε, попарно не пересекаются, поэтому функция φ непрерывна в точках $\chi_j \pm \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Из поточечной сходимости последовательности $\{\varphi_{k_i}, i = 1, 2, \ldots\}$ к φ следует, что $\varphi_{k_i}(\chi_j \pm \varepsilon) \to \varphi(\chi_j \pm \varepsilon)$ при $i \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому, исходя из определения отображения $\mathcal{F}$, имеем $\mathcal{F}\varphi_{k_i} \to \mathcal{F}\varphi$ при $i \to \infty$ в пространстве $\mathbb{R}^N$.

2. Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{F}\varphi_{k_i} = h$. Обозначим через Φ^* множество предельных функций последовательности $\{\varphi_{k_i}, i = 1, 2, \ldots\}$. Из свойства компактности следует, что $\Phi^* \neq \varnothing$. Покажем, что множество Φ^* содержит единственную функцию. Действительно, пусть $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in \Phi^*$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем $\mathcal{F}\varphi^{(1)} = \mathcal{F}\varphi^{(2)} = h$. Следовательно, $h \in U$ и $\Phi^* = \{\varphi\}$, $\varphi = \mathcal{F}^{-1}h$.

Докажем, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{k_i} = \varphi$. Предположим противное: для некоторой точки t^* непрерывности функции φ имеет место $\varphi_{k_i}(t^*) \not\to \varphi(t^*)$. Из последовательности чисел $\{\varphi_{k_i}(t^*), \quad i = 1, 2, \ldots\}$ выделим сходящуюся к некоторому числу $a \neq \varphi(t^*)$ подпоследовательность $\{\varphi_{k_{i_j}}(t^*), j = 1, 2, \ldots\}$. Пусть φ^* — некоторая предельная функция подпоследовательности $\{\varphi_{k_{i_j}}, j = 1, 2, \ldots\}$. Тогда $\varphi^* \in \Phi^*$ и $\varphi^* \neq \varphi$, т. е. противоречие. Лемма доказана.

Обозначим через W_ν, $\nu \in \{0, 1\}$, множество неотрицательных решений $(h_1, \ldots, h_N)$, $h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, системы линейных уравнений

$$(3.10) \qquad h_1 + \ldots + h_N = 1, \qquad \sum_{i=1}^{N} \chi_i^j q^{(\nu)}(\chi_i)\, h_i = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Положим $U_\nu = \mathcal{F}\Phi_\nu$. Следующую теорему можно рассматривать как аналог результатов Форсайта [4], выраженный в терминах функций распределения векторов y_k.

Т е о р е м а 3. 1. *Любой вектор из U имеет не менее $s+1$ и не более $2s$ ненулевых компонент.*

2. $U_\nu \subseteq W_\nu$, $\quad \nu = 0, 1$.

3. *Если последовательность $\{\varphi_{k_i}, i = 1, 2, \ldots\}$ поточечно сходится к φ, то к этой же функции поточечно сходится последовательность $\{\varphi_{k_i+2}, i = 1, 2, \ldots\}$.*

4. *Множества U_ν, $\nu = 0, 1$,— континуумы, т. е. непустые, связные и замкнутые в $\mathbb{R}^N$ множества.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два утверждения вытекают непосредственно из соотношений (3.1) и леммы 8.

Далее, имеем

$$|\varphi_{k+2}(t) - \varphi_k(t)| = |\,\|E_t y_{k+2}\|^2 - \|E_t y_k\|^2| \leq 2\|y_{k+2} - y_k\|.$$

Поэтому из (1.8) вытекает, что последовательность функций $\{\varphi_{k+2} - \varphi_k$, $k = 0, 1, \ldots\}$ сходится поточечно к 0. Но тогда последовательность

$\varphi_{k_i+2} = \varphi_{k_i} + (\varphi_{k_i+2} - \varphi_{k_i})$ поточечно сходится к функции φ. Третье утверждение доказано.

Покажем, что U_ν есть континуум. Воспользуемся следующим результатом из [12]: если $\{x^{(k)}, k = 0, 1, \ldots\}$ — ограниченная в $\mathbb{R}^N$ последовательность и $\lim\limits_{k\to\infty} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$, то множество ее предельных векторов есть континуум.

Рассмотрим последовательность $x^{(k)} = \mathcal{F}\varphi_{2k+\nu}$, $k = 0, 1, \ldots$. Из леммы 9 следует, что U_ν есть множество предельных векторов этой последовательности. Так как последовательность $\{x^{(k)}, k = 0, 1, \ldots\}$, очевидно, ограничена в $\mathbb{R}^N$, а из поточечной сходимости $\{\varphi_{k+2} - \varphi_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$ к 0 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$, то U_ν есть континуум. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай $s = 1$. Так как тогда $s + 1 = 2s$, то $N = 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ и любой вектор из U имеет две положительные компоненты. Система (3.10) приобретает вид

$$h_1 + h_2 = 1, \qquad q^{(\nu)}(\chi_1)\, h_1 + q^{(\nu)}(\chi_2)\, h_2 = 0. \tag{3.11}$$

Так как $U_\nu \neq \varnothing$, то система (3.11) имеет положительное решение $h^{(\nu)} = (h_1^{(\nu)}, h_2^{(\nu)}) \in U_\nu$. Поскольку $q^{(\nu)}(\chi_1) \neq 0$, то из равенства $q^{(\nu)}(\chi_1)\, h_1^{(\nu)} + q^{(\nu)}(\chi_2)\, h_2^{(\nu)} = 0$ следует, что $q^{(\nu)}(\chi_1) \neq q^{(\nu)}(\chi_2)$. Поэтому система (3.11) имеет единственное решение $h^{(\nu)}$ и $U_\nu = \{h^{(\nu)}\}$. Следовательно, множество Φ_ν содержит единственную функцию $\varphi^{(\nu)} = \mathcal{F}^{-1} h^{(\nu)}$ (эта функция кусочно постоянна со скачками $h_1^{(\nu)}, h_2^{(\nu)}$ в точках χ_1, χ_2). Отсюда вытекает аналог результата из [3], выраженный в терминах функций распределения векторов y_k.

Т е о р е м а 4. *Последовательность* $\{\varphi_{2k+\nu}, k = 0, 1, \ldots\}$, $\nu \in \{0, 1\}$, *функций распределения нормированных градиентов одношагового метода поточечно сходится к кусочно-постоянной функции* $\varphi^{(\nu)}$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $E_{\Delta_i(\varepsilon)} = E_{\chi_i+\varepsilon} - E_{\chi_i-\varepsilon}$. Так как $\varphi_k(\chi_i + \varepsilon) - \varphi_k(\chi_i - \varepsilon) = \|E_{\Delta_i(\varepsilon)} y_k\|^2$, то из определения отображения $\mathcal{F}$ следует, что

$$\mathcal{F}\varphi_k = (\|E_{\Delta_1(\varepsilon)} y_k\|^2, \ldots, \|E_{\Delta_N(\varepsilon)} y_k\|^2).$$

Из леммы 9 вытекает, что множеством предельных векторов последовательности $\{\mathcal{F}\varphi_k, k = 0, 1, \ldots\}$ является множество U. Так как сумма скачков любой функции $\varphi \in \Phi$ равна 1, то и сумма компонент любого вектора из U также равна 1. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} (\|E_{\Delta_1(\varepsilon)} y_k\|^2 + \ldots + \|E_{\Delta_N(\varepsilon)} y_k\|^2) = 1.$$

Из этого равенства следует, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ нормированные градиенты s-шагового метода асимптотически вырождаются в подпространство $(E_{\Delta_1(\varepsilon)} + \ldots + E_{\Delta_N(\varepsilon)})\, H$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика//Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 6. С. 89—185.
2. *Forsythe G. E., Motzkin T. S.* Asymptotic properties of the optimum gradient method (abstract)// Bull. Amer. Math. Soc. 1951. V. 57. № 2. P. 183.
3. *Akaike H.* On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method//Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo. 1959. V. 11. P. 1—16.
4. *Forsythe G. E.* On the asymptotic directions of the s-dimensional optimum gradient method//Numer. Math. 1968. V. 11. № 1. P. 57—76.
5. *Заболоцкая А. Ф.* Асимптотическое поведение s-шагового метода скорейшего спуска в гильбертовом пространстве//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 1. С. 228—232.
6. *Заболоцкая А. Ф.* Ускорение сходимости метода скорейшего спуска в гильбертовом пространстве// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 1. С. 218—221.
7. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Жук П. Ф., Бондаренко Л. Н.* Об одной гипотезе Дж. Форсайта//Матем. сб. 1983. Т. 121. № 4. С. 435—453.
9. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков: Вища школа, 1977. Т. 1.
10. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов. М.: Гостехтеориздат, 1950.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
12. *Ostrowski A. M.* Solution of equations and systems of equations. N. Y.-L.: Acad. Press, 1966.

Поступила в редакцию 26.08.92
Переработанный вариант 26.05.93