УДК 621.396.67(043.2)

В.В. Конин, д.т.н. (НАУ, Украина)
А.С. Погурельский, к.т.н. (НАУ, Украина)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ФИЛЬТРА КАЛМАНА В АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НАВИГАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрены отличительные особенности применения двух методов обработки измерительной информации GNSS, широко используемых навигационной аппаратурой пользователей при решении навигационной задачи.

Применение метода наименьших квадратов (МНК) либо фильтра Калмана (ФК) в алгоритмах обработки данных пользовательской аппаратурой GNSS является одним из обязательных этапов. При этом МНК отдаётся предпочтение в случае, когда процесс обработки требует минимизации количества вычислительных операций. Но приёмник пользователя в этом случае вынужден «расплачиваться» большим временем до выдачи качественного решения координат пользователя, что при применении фильтра Калмана возможно уже после выполнения первых измерений. Рассмотрим отличительные особенности двух известных методов в контексте обработки результатов измерений, выполняемых приёмником GNSS.

Оба рассматриваемых метода, МНК и ФК, применяют следующую модель измерений:

$$\vec{z} = h(\vec{x}) + \vec{v} \quad , \tag{1}$$

где $\vec{z}$ вектор измерений (в контексте GNSS – псевдодальностей до навигационных спутников), $\vec{x}$ - вектор состояний, содержащий параметры, которые подлежат оценке (координаты в пространстве, скорость и время), $h(\vec{x})$- это измерения состояния, и $\vec{v}$ - это вектор ошибок измерения. В общем случае правомерно полагать, что нелинейная функция $h(\vec{x})$ может быть линеаризована следующим образом:

$$\vec{z} \approx h(\vec{x}_0) + \left.\frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \cdot \delta\vec{x} + \vec{v} \tag{2}$$

$$\vec{z} - h(\vec{x}_0) = \left.\frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \cdot \delta\vec{x} + \vec{v} \tag{3}$$

$$\delta\vec{z} = H \cdot \delta\vec{x} + \vec{v} \,, \tag{4}$$

где $\vec{x}_0$ - текущая оценка вектора состояний, δ – ошибка соответствующего параметра, Якобиан-матрица модели измерений. Основываясь на уравнении (2), решение МНК для ошибки в $\vec{x}_0$, которое затем применяется для перехода от первично заданного вектора состояния к $\vec{x}_1$, задаётся следующим выражением:

$$\delta\vec{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \delta\vec{z} \,, \tag{5}$$

где R - ковариационная матрица вектора ошибок измерений $\vec{v}$. Если дополнительно к измерительной информации доступна априорная информация о векторе состояния пользователя (5) может быть преобразовано в:

$$\delta\vec{x} = (H^T R^{-1} H + P_0^{-1})^{-1} H^T R^{-1} \delta\vec{z}\ , \qquad (6)$$

где P_0 – ковариационная матрица, отражающая неопределённость априорной информации о векторе состояния пользователя. Уравнение (6) вырождается в (5) с увеличением неопределённости априорной информации, т.е. когда P_0 стремится к бесконечности.

В свою очередь ковариационная матрица оцениваемых параметров P:

$$P = (H^T R^{-1} H + P_0^{-1})^{-1}. \qquad (7)$$

Совокупность уравнений (6) и (7) представляет собой решение МНК. Необходимо отметить, что в общем случае нелинейное решение МНК выполняет необходимое количество итераций до тех пор, пока рассчитанные на очередном этапе коррекции не окажутся ниже заданного уровня.

В отличие от МНК, алгоритм фильтра Калмана всегда предполагает наличие некоторой априорной информации о векторе состояния пользователя, чаще всего получаемой из предыдущих оценок. С учётом этого, уравнение для коррекции ошибки $\delta\vec{x}$ на -том шаге следующее:

$$\delta\vec{x}_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \delta\vec{z}_k = K_k \delta\vec{z}_k\ , \qquad (8)$$

где индекс k указывает на -ю эпоху, а $k|k-1$ на то, что оценка в k-ю эпоху основана на измерениях до эпохи $k-1$ включительно (априорная информация). K является так называемой весовой матрицей Калмана (матрицей усиления), которая с разной степенью взвешивает информацию в наблюдениях противопоставляемых априорной информации о векторе состояния. Именно она является фильтром результатов выполненных измерений с целью обеспечения, обеспечивающим в итоге лучшее решение.

Ковариационная матрица вектора состояния после включения результатов измерений имеет следующий вид:

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}\ , \qquad (9)$$

где индекс $k|k-1$ указывает на то, что оценка в в k-ю эпоху основана на измерениях до эпохи k включительно. На первый взгляд два последних уравнения (8) и (9) не сходны с равнениями МНК (6) и (7). Однако можно показать, что уравнения ФК могут быть записаны как:

$$\delta\vec{x} = (H_k^T R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R_k^{-1} \delta\vec{z}_k \qquad (10)$$

$$P_{k|k} = (H_k^T R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1})^{-1}\ . \qquad (11)$$

В представленном виде (10) и (11) соответствуют уравнениям (6) и (7) с единственным отличием в обозначениях индекса P. Выходит, получив набор измерений, и МНК и ФК используют эту измерительную информацию одинаковым образом, что должно привести к одинаковому решению. Однако ключевое отличие двух рассматриваемых методов состоит не в том как измерения обрабатываются, а в том каким способом в них получена априорная информация. В то время как МНК обычно получает эту информацию от внешних источников (например, грубые данные о приблизительном расположении приёмника), фильтр Калмана предсказывает априорную информацию используя последние полученные оценки вектора состояния пользователя. Этот прогноз основан на некоторой предполагаемой модели изменения вектора состояния пользователя во времени и называется моделью системы. Следующая формула выражает этот процесс:

$$\vec{x}_{k+1|k} = \Phi_{\mathrm{k,k+1}} \vec{x}_{k|k} \ , \tag{12}$$

где $\Phi_{\mathrm{k,k+1}}$ матрица перехода состояния от эпохи k до эпохи $k+1$. Матрица перехода зачастую основана на физике системы (например, изменение положения как скорость умноженная на время). Ковариационная матрица прогнозируемого состояния задаётся следующим образом:

$$P_{k+1|k} = \Phi_{\mathrm{k,k+1}} P_{k|k} \Phi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{k,k+1}} + Q_{\ k+1} \tag{13}$$

где Q - матрица шумов, которая учитывает неточности и ошибки в предположениях, использованных при составлении матрицы перехода.

Необходимо отметить, что выбор матрицы Q прямо влияет на эффективность фильтра. Рассмотрим граничные варианты. Если Q имеет нулевое значение, фильтр по сути усредняет информацию получаемую со временем, т.е. фильтр преобразуется в накапливающий и усредняющий алгоритм. Напротив, если Q выбрана стремящейся к бесконечности, $P^{-1}_{k|k-1}$ в уравнении (10) и (11) превращается в ноль и фильтр Калмана преобразуется в решение МНК согласно уравнению (3).

Таким образом, преимущество фильтра Калмана перед методом наименьших квадратов заключено в том, что он использует дополнительную информацию о системе, основанную на знании (данных) о характере изменения её состояния (в частности, позиции, скорости и т.п.) с течение времени. Когда предположения о характере изменений точны и/или отклонения от ожидаемого поведения системы предусмотрены в виде определённой формы адаптации, то фильтр Калмана в таком случает будет обеспечивает более сглаженные и более точные решения.

Фильтру Калмана присущи ещё два преимущества над МНК. Первое заключается в том, что если неопределённость априорной оценки не равна бесконечности, то мы можем обновлять информацию о векторе состояния используя меньшее количество измерений чем стандартно необходимо. Например, при определении координат пользователя средствами GNSS, мы можем получать обновление данных на выходе фильтра Калмана по результатам измерения псевдодальности до одного или двух навигационных спутников. В то время, как МНК в этом случае неспособен выдавать решения из-за недостаточного количества измерительной информации.

Второе преимущество состоит в том, что в фильтре Калмана мы можем производить оценку параметров, которые при использовании метода наименьших квадратов прямым образом не отслеживаются. В качестве примера следует привести возможность применения псевдодальностей GNSS для оценки позиции и скорости фильтром Калмана, в то время, как МНК способен оценить лишь позицию, используя те же самые данные. Это возможно в фильтре Калмана, поскольку им выполняется последовательная оценка позиций, которая может быть использована для выведения скорости.

Однако, несмотря на приведенные преимущества ФК он не может полностью заменить МНК во всех алгоритмах обработки для всех типов практических применений. Причина в том, что некорректное задание ожидаемого характера изменения вектора состояния приведёт к тому, что фильтр будет настойчиво пытаться увязать получаемые результаты с ошибочно заданной моделью. Это свойство фильтра необходимо обязательно учитывать, поскольку оно сглаживает и скрывает многие эффекты (как положительного так и отрицательного характера) и потенциально может ухудшить эффективность его применения.

Показательным примером является действие фильтра Калмана в условиях городского каньона с доступными для измерений двумя навигационными спутниками. Приёмник будет прогнозировать прямолинейное перемещение и в случае, если пользователь совершит поворот на перекрёстке, пройдёт несколько секунд, а возможно и больше, прежде чем фильтр «идентифицирует» это изменение траектории.

Решения МНК, получаемые последовательно в каждую эпоху, несмотря на то что более подвержены шумам и менее точны, имеют преимущество в том, что являются «сырыми», т.е. не прошедшими ни какой фильтрации, и могут быть после использованы для лучшего определения параметров адаптированного для конкретной системы фильтра Калмана.

Выводы

Показано, что распространённые методы обработки данных GNSS, такие как метод наименьших квадратов и фильтр Калмана выполняют обработку спутниковых измерений одинаково. При этом отличительной особенностью фильтра Калмана является применение информации о том, как изменяется состояние системы во времени. Эта информация, в случае правильного задания, повышает точность оценок. Тем не менее, последовательное решение методом наименьших квадратов имеет значение для оценки качества «сырых данных», что обычно не возможно при использовании фильтра Калмана. В зависимости от практического применения, оба метода эффективны и взаимно дополняют друг друга.

Список литературы

1.Системы спутниковой радионавигации / В.В. Конин, В.П. Харченко.- К.: Холтех, 2010. – 510 с.

2. GNSS solutions: GNSS filtering options / Mark Petovello; Inside GNSS March/April 2013, p. 32-38