



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

**В.К. Цихановський, А.О. Бєлятинський,
С.М. Талах**

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА (СПЕЦКУРС)

Навчальний посібник



**VIVERE!
VINCERE!
CREATE!**

Київ 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

В.К. Цихановський, А.О. Белятинський,
С.М. Талах

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА (СПЕЦКУРС)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки

Київ 2014

УДК 539.3 (075.8)

ББК Н112 я7

Ц755

Тиражувати без офіційного дозволу НАУ забороняється

Рецензенти:

О.О. Рассказов – д-р техн. наук, професор (Національний транспортний університет»);

О.С.Городецький – д-р. техн. наук, професор (Науково-дослідний інститут будівельного виробництва);

О. І. Оглобля – д-р тех. наук, професор (УкрНДІводоканалпроект)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки
(протокол № 12 від 11.05.2011)*

Цихановський В.К.

Ц 755 Будівельна механіка (спецкурс): навч. посіб. / В.К. Цихановський, А.О. Белятинський, С.М. Талах – К. : НАУ, 2014. – 245 с.

ISBN 978-966-598

Містить розрахунки тонкостінних просторових конструкцій та статично-невизначуваних стрижневих систем. Є другим основним розділом курсу будівельної механіки

Для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Автомобільні дороги та аеродроми», також студентів та аспірантів вищої школи, які спеціалізуються у галузі будівельної механіки з дослідження континуальних систем.

УДК 539.3 (075.8)
ББК Н112 я7

© Циханосський В. К., Белятинський А.О.,
Талах С.М., 2014
© НАУ, 2014

ISBN 978-966-598

Навчальне видання

ЦИХАНОВСЬКИЙ Валентин Костянтинович
БЄЛЯТИНСЬКИЙ Андрій Олександрович
ТАЛАХ Світлана Михайлівна

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА (СПЕЦКУРС)

Навчальний посібник

Підп. до друку 28.07.11. Формат 60x84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 8,60. Обл.-вид. арк. 9,25.
Тираж 300 пр. Замовлення № 165-1.

Видавець і виготовлювач
Національний авіаційний університет
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002

ВСТУП

Удосконалення методів розрахунку та проектування конструкцій, розвиток автоматизації проектування безпосередньо пов'язані з використанням комп'ютерної техніки. Тому методи розрахунку сучасних тонкостінних просторових систем із застосуванням комп'ютерних технологій складають один з основних розділів будівельної механіки.

Навчальний посібник є другим основним розділом курсу «Будівельна механіка» і присвячений викладенню методів розрахунку тонкостінних просторових систем та методів розрахунку статично невизначуваних стрижневих систем відповідно до навчальної програми дисципліни «Будівельна механіка (спецкурс)» за спеціальністю «Автомобільні дороги та аеродроми», яку складено згідно з освітньою професійною програмою напряму «Будівництво», затвердженою Міністерством освіти і науки України.

Відповідно до основної мети дисципліни наведено математичні моделі та їх практичне розв'язання у межах методів розрахунку окремих континуальних механічних систем і статично невизначуваних стрижневих систем.

У посібнику наведено розв'язання основних задач навчальної дисципліни:

- плоскої задачі теорії пружності (ТП) для підпірних стінок з використанням теорії Кулона і лінійно-деформівного тіла;
 - плоскої задачі теорії пружності для балки-стілки у тригонометричних рядах та з використанням методу скінченних різниць;
 - розрахунок тонких пластинок на основі диференціального рівняння Софі Жермен у замкненій формі та тригонометричних рядах;
 - розрахунок плоских статично невизначуваних рам методами сил, переміщень і скінченних елементів (СЕ);
 - розрахунок плосконапружених континуальних систем методом скінченних елементів (МСЕ) з використанням трикутних СЕ.
- Навчальний посібник складається з десяти розділів.

У першому розділі стисло викладено методи визначення тиску ґрунтів на підпірні стінки з допущенням плоских поверхонь ковзання та стійкості масивів ґрунту за застосуванням методів аналі-

тичного, графоаналітичного та методу круглоциліндричних поверхонь.

Другий розділ присвячений математичній моделі задачі плоскої ТП; розглянуто методи розрахунків плоско-напружених конструкцій.

У третьому розділі викладено сутність методу скінченних різниць для плоских задач теорії пружності з використанням диференціального рівняння сумісності деформацій (рівняння нерозривності деформацій), подано приклади розрахунків балки-стілки з використанням балкових функцій як граничних умов на крайових сторонах балки-стілки.

Теорію розрахунку тонких пластинок з виведенням диференціального рівняння рівноваги Софі Жермен наведено у четвертому розділі. Подано приклади аналітичного розрахунку пластинок.

У п'ятому розділі викладено теоретичні основи розрахунку статично невизначених рам методом сил, наведено характерні приклади розрахунку плоских рам.

У шостому розділі розглянуто класичний метод переміщень та приклади розрахунку, а в сьомому - альтернативний метод переміщень для розрахунку жорстких рам із низькомодульних матеріалів з урахуванням зсувних деформацій. Подано характерний приклад розрахунку.

У восьмому розділі викладено методику розрахунку плоских стрижневих систем МСЕ у формі методу переміщень, побудовано матриці жорсткості і матриці реакцій для окремого стрижневого елемента та дискретної моделі плоскої рами.

Алгоритм розрахунку плоскої стрижневої системи на прикладі плоскої багатоконтурної рами з побудовою вектора навантажень, обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості, реакцій, визначення внутрішніх зусиль у стрижнях і побудови епюр згинальних моментів, перерізувальних та поздовжніх зусиль наведено в дев'ятому розділі.

Основним співвідношенням схеми МСЕ з використанням трикутного СЕ для плосконапружених пластинок присвячено десятий розділ.

Автори будуть вдячні всім, хто вважатиме за можливе надіслати свої зауваження та побажання щодо викладення матеріалу в цьому навчальному посібнику.

РОЗДІЛ 1

1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ПІДПІРНИХ СТІНОК

1.1. Теорія Кулона

Підпірні стінки, що утримують масу ґрунту від руйнування у виїмках, схилах, уступах тощо, застосовують у різних галузях цивільного, промислового та дорожнього будівництва. Розподіл напружень всередині сипучого тіла та на його поверхні, яка контактує з іншими тілами, належить до класу найбільш складних завдань будівельної механіки.

Для розрахунків підпірних стінок існують теорії, згідно з якими оперують ідеально сипучими тілами, що мають однорідні гіпотетичні фізичні властивості. Ці теорії ґрунтуються на законі Ш.Кулона [4], коли одночасно з елементарними методами використовуються також методи теорії пружності та пластичності. Подібні дослідження професора В.В.Соколовського [1] побудовані на загальній теорії граничного стану сипучого середовища, у яких враховується і внутрішнє тертя частинок ґрунту, і питоме зчеплення між ними.

У курсі «Будівельна механіка (спецкурс)» викладено графоаналітичний метод розрахунку підпірних стінок. Запропоновано гіпотези, які ґрунтуються на теорії Кулона, що спрощують визначення загального тиску на підпірну стінку. Наведемо їх.

1. Ґрунтову масу розглядають як однорідне суцільне середовище, яке сприймає лише стискальні та зсувні внутрішні зусилля.

2. Допускають, що при зрівноважуванні напружень від внутрішніх зусиль на будь-якій площині у просторі цього середовища відхилення від нормалі площини вектора напружень становитиме кут, значення якого не перевищує значення кута внутрішнього тертя φ для відповідного типу ґрунту згідно з його фізичними властивостями. Цей кут пов'язаний з коефіцієнтом тертя залежністю

$$f = tg\varphi.$$

На поверхні стику підпірної стінки з ґрунтом найбільш можливе відхилення рівнодійної тиску ґрунту від нормалі до цієї поверхні, на кут δ , при цьому коефіцієнт тертя ґрунтової маси по поверхні підпірної стінки

$$f_0 = tg\delta.$$

3. Уважають, що стінка, підпадаючи під вплив ґрунтової маси, починає зсуватись і потрібно знайти не ту рівнодійну, яку стінка сприймає у звичайних умовах, а ту граничну, що відповідає миттєвому процесу початку її зсуву. Це допущення відповідає відомій теорії граничного стану (граничної рівноваги) Ш. Кулона, яка є не зовсім точною, тому для розв'язання подібних задач розроблено інші, більш точні теорії, які ґрунтуються на співвідношеннях механіки суцільного середовища.

4. Припускають, що руйнування ґрунтової маси настає після початкового миттєвого зрушення підпірної стінки, яке відбувається таким чином: від суцільної ґрунтової маси відокремлюється призма, яка обмежена поверхнею підпірної стінки з одного боку та площиною руйнування, що проходить через основу фундаменту стінки. Ця площинна поверхня називається плоскою поверхнею ковзання, а клин-призма – призмою сповзання. У дійсності поверхня ковзання не плоска, а криволінійна, однак це спрощення істотно не позначається на остаточних розрахунках на міцність. Сама призма сповзання розглядається як абсолютно тверде тіло.

5. Розраховують плоску задачу ТП, тобто передбачається, що підпірна стінка нескінченно довга і прямолінійна у плані, а профіль ґрунтової маси та інші умови загального тиску залишаються вздовж стінки сталими, тобто розрахункова модель за довжиною має одиничну величину (м, см).

1.2. Теорія Ребхана і графічна побудова Понселе

Призма руйнування має також одиничну висоту вздовж підпірної стінки. Зображений на розрахунковій схемі (рис. 1.1) трикутний клин ABC є основою трикутної призми нескінченної висоти (глибини), з якої вирізається призма (пластинка) BCC' одиничної товщини.

Маємо основу призми сповзання ABC , лінія BC – слід площини руйнування, яка нахилена під кутом θ до горизонту. Вага призми сповзання визначається за формулою

$$G = \gamma_{гр} n.l. ДABC . \quad (1.1)$$

Від ваги призми сповзання виникають узагальнені сили реакції підпірної стінки \vec{R}_0 і реакції незруйнованого ґрунтового масиву

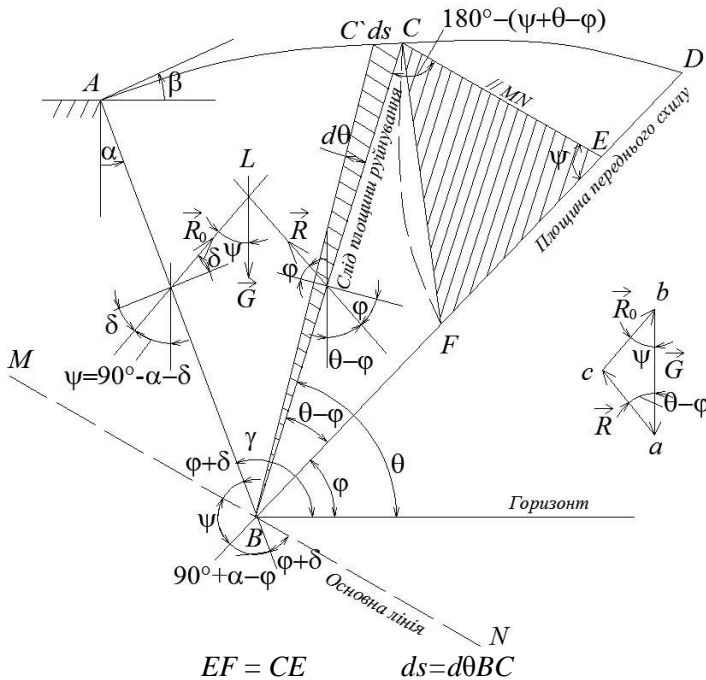


Рис. 1.1. Розрахункова схема підпірної стінки

за площиною BC – \vec{R} . Вектори \vec{R}_0 і \vec{R} відхиляються від нормалей до слідів підпірної стінки і неперушеного ґрунтового масиву відповідно на кут, який не перевищує значень δ і φ (рис. 1.1). Для підвищення точності розрахунку припускаємо: $\delta = 0,5 \dots 0,75\varphi$.

Отже, на призму сповзання ABC як на абсолютно тверде тіло діють три сили \vec{G} , \vec{R}_0 , \vec{R} . Оскільки призма перебуває у стані рівноваги, ці сили зосереджені в точці L . У результаті можна побудувати трикутник сил abc . За теоремою синусів у трикутнику abc маємо:

$$\frac{\vec{R}_0}{\vec{G}} = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin[80^\circ - (\psi + \theta - \varphi)]} \quad (1.2)$$

Із рівняння (1.2) отримаємо:

$$\vec{R}_0 = G \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \quad (1.3)$$

У рівнянні (1.3) незалежною є величина θ , яка змінюється в інтервалі $90^\circ + \alpha > \theta > \varphi$. За крайніх значень змінної θ функція $\bar{R}_0(\theta)$ буде нульовою:

– якщо $\theta = 90^\circ + \alpha$, то величина (1.1) дорівнює нулю (площа $\Delta ABC \equiv 0$);

– якщо $\theta = \varphi$, то призма перебуває на природному ухилі і не сповзає та не тисне на підпірну стінку.

Таким чином, дійсне положення точки C міститься між точками A і D . Для того, щоб визначити екстремальне значення функції однієї змінної $R_0(\theta)$, треба знайти похідну від функції (1.3) і дорівняти її до нуля (згідно з теорією індійського математика Ребхана):

$$\frac{dR_0}{d\theta} = \frac{dG}{d\theta} \left[\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right] + G \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right] = 0. \quad (1.4)$$

Із рівняння (1.4) урахуваючи тригонометричні перетворення двох кутів, отримаємо:

$$G \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \psi \cos(\psi - \varphi) + \sin(\psi - \varphi) \cos \psi} \right] = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}. \quad (1.5)$$

Позначимо: $\theta - \varphi = \gamma$, $\sin \gamma \equiv u$, $\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \equiv v$.

Виходячи з похідної $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ та після деяких перетворень, дістаємо:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\sin \psi (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma)}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)} = \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)}.$$

З урахуванням рівняння (1.4) для виразу (1.5) отримаємо:

$$G \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)} = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}. \quad (1.6)$$

Із рівняння (1.6) маємо

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\psi - \varphi) \sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.7)$$

Проаналізуємо праву частину рівняння (1.7):

– для елементарної області $BC'S$ можна записати, що її вага:

$$dG = \frac{1}{2} ds BC \gamma_{\text{гp}}; \quad ds = d\theta BC, \text{ звідки } dG = \frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC^2 d\theta, \text{ або}$$

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC^2. \quad (1.8)$$

Підставляючи вираз (1.8) у рівняння (1.7), отримуємо

$$G = -\frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC^2 \sin \left(\psi - \varphi - \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi} \right). \quad (1.9)$$

Запишемо вираз (1.8) з урахуванням знака в рівнянні (1.9), тобто $\frac{dG}{d\theta} = -\frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC^2$. Це свідчить про те, що збільшення аргумента θ призводить до зменшення функції $G(\theta)$. Розглянемо у рівнянні (1.9) співмножник $\frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}$: у ΔBCE $\frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}$ є

співвідношенням за теоремою синусів (рис 1.1):

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle CEB} = \frac{\sin [90^\circ - (\psi + \theta - \varphi)]}{\sin \psi} = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.10)$$

Із рівняння (1.10) випливає:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.11)$$

З урахуванням рівняння (1.11) вираз (1.9) набуває вигляду

$$G = -\frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC^2 \frac{BE}{BC} \sin(\psi - \varphi) = -\frac{1}{2} \gamma_{\text{гp}} BC BE \sin(\psi - \varphi).$$

Остаточно з урахуванням співвідношення (1.1) маємо:

$$G = \gamma_{\text{гp}} \text{пл.} \Delta BCE = \gamma_{\text{гp}} \text{пл.} \Delta ABC. \quad (1.12)$$

Із рівняння (1.12), яке отримане з виразу (1.4), випливає, що площі ΔBCE і ΔABC є рівновеликими. Довівши це, вчений Ребхан сформулював теорему (першу теорему Ребхана) [4]: «Найбільш небезпечна площина руйнування зі слідом BC займає таке положення, що площа основи призми руйнування за трикутником ABC є рівновеликою площі трикутника BCE ».

Побудуємо трикутник ECF . Для цього сторону EC повернемо навколо точки E проти годинникової стрілки до суміщення зі стороною BD , отримаємо точку F . Проаналізувавши трикутники

ECF і ECB , запишемо їх площі, урахувавши сторони зі спільним кутом ψ :

$$\frac{n.l.\Delta ECF}{n.l.\Delta ECB} = \frac{EFEC \sin \psi}{BEEC \sin \psi} = \frac{EF}{BE}.$$

Відношення $\frac{EF}{BE}$ за теоремою синусів має вигляд

$$\frac{EF}{BE} = \frac{CE}{BE} = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = \frac{n.l.\Delta ECF}{n.l.\Delta ECB}. \quad (1.13)$$

Із рівняння (1.13) маємо:

$$\begin{aligned} \gamma_{гр} n.l.\Delta ECF &= \gamma_{гр} n.l.\Delta ECB \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = \\ &= G \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = R_0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

З тотожності (1.14) маємо:

$$R_0 = \gamma_{гр} n.l.\Delta ECF. \quad (1.15)$$

На підставі рівняння (1.15) вчений Ребхан сформулював другу теорему [4]: «Найбільший тиск R_0^{\max} дорівнює площі ΔECF (трикутник Ребхана), помноженій на питому вагу ґрунту».

Крім графоаналітичного методу визначення максимального тиску на підпірну стінку R_0^{\max} існує також графічний спосіб, в основу якого покладено властивості силового трикутника $авс$: якщо сумістити його вершину a з точкою B і напрямити сторону $ав$ за лінією природного ухилу BD , то сторона $ас$ отримає напрям лінії руйнування BC , а сторона $вс$ займе положення, паралельне основній лінії MN . Це впливає безпосередньо з рівності відповідних кутів, що було виявлено французьким математиком Понселе [4].

Інший математик-геометр Кульман [4], виходячи із вказаної властивості силового трикутника $авс$, винайшов криву Кульмана, яка використовується для більш точних розрахунків у випадку, коли поверхня землі викривлена (крива ACD). Наведемо алгоритм побудови кривої Кульмана: з точки B , як з центра проводимо жмуток слідів площин руйнування BC_1, BC_2, \dots, BC_k . Кожен промінь утвореного жмутка буде відтинати від масиву призми руйнування частину і приєднувати її до попередньої призми (рис. 1.2).

Для кожної відокремленої призми знаходимо вагу G_1, G_2, \dots, G_k за формулою

$$G = \gamma_{\text{гр}} n.l. ДABC_k$$

та відкладаємо її у масштабі на лінії BD , отримуючи точки b_1, b_2, \dots, b_k . З отриманих точок проводимо прямі, паралельні лінії MN , які у перетині з променями жмутка фіксують положення точок c_1, c_2, \dots, c_k . Відрізки $b_1c_1, b_2c_2, \dots, b_kc_k$ визначають відповідно тиск $R_0^1, R_0^2, \dots, R_0^k$. Геометричне місце точок c_1, c_2, \dots, c_k окреслює криву, що має назву *кривої Кульмана*. Дотична до цієї кривої є паралельною BD , а в точці дотику s вона задає найбільший за величиною відрізок bc , який визначає найбільше значення R_0^{\max} .

У разі, якщо поверхня землі є плоскою (ACD – пряма лінія), максимальний тиск R_0^{\max} визначається у графічний спосіб Понселе таким чином: з точки A проводиться пряма, паралельна основній лінії MN , яка ділить відрізок BD навпіл у точці H . З отриманої точки H як з центра окреслюється півколо радіусом $BD/2$ (рис. 1.3) і встановлюється перпендикуляр HI до BD , який перетинає півколо в точці I , яка з'єднується з точкою B . Хорда BI повертається навколо точки

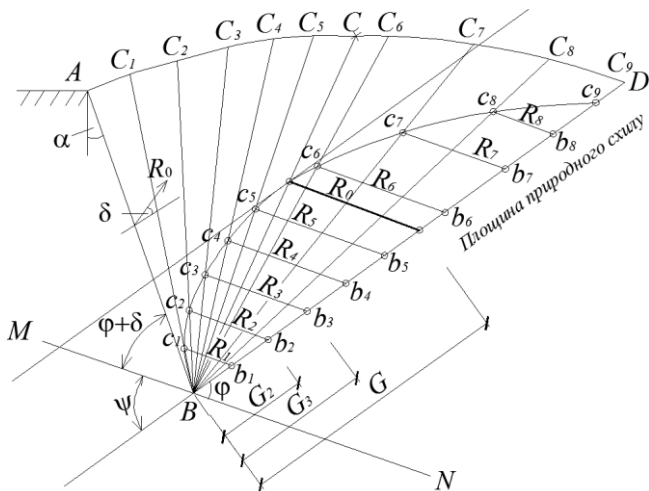


Рис. 1.2. Побудова кривої Кульмана

B до суміщення з BD . З отриманої точки E проводиться EC паралельно MN до перетину з AD у точці C . Пряма BC і є відтворенням шуканої площі руйнування. Будуємо трикутник Ребхана.

Доведення правильності побудови Понселе:

Відповідно до побудови $BI^2 = BE^2 = BHBD$;

$$\frac{BE}{BH} = \frac{BD}{BE}. \quad (1.16)$$

Із трикутників ΔBKH і $\Delta BCE \Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{BC}{BK}$. (1.17)

Із порівняння рівнянь (1.16) і (1.17) видно, що

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BK} \Rightarrow CD \parallel KE.$$

Тоді чотирикутник $ACEK$ є паралелограмом $AK = CE$, висоти також дорівнюють $AK' = Ec'$. Отже, пряма BC задовольняє першу теорему Ребхана, що доводить правильність побудови Понселе.

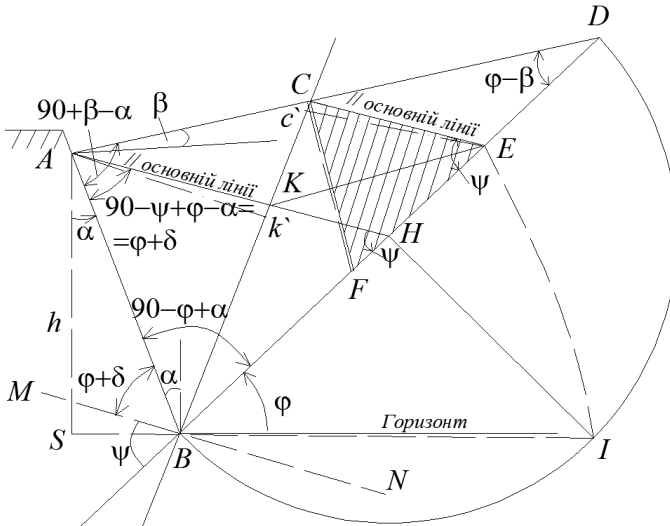


Рис. 1.3. Побудова за методом Понселе

1.3. Аналітичний метод визначення тиску ґрунту на поверхню підпiрної стiнки

Аналітично можна визначити тиск R_0 на підпiрну стiнку за умови, що поверхня землі (пiвпростору) є площиною (рис. 1.3), тобто графічні побудови Понселе можна перекласти мовою аналізу (аналітичною мовою).

У трикутнику Ребхана $CE = EF$, кут $CEF = \psi$, тому з формули (1.15) отримуємо:

$$R_0 = \gamma_{\text{гр.н.л.}} \Delta ECF = \frac{1}{2} \gamma CE^2 \sin \psi, \quad (1.18)$$

де $\psi = 90 - \alpha - \delta$, але з трикутників ADH і $DCE \rightarrow \frac{CE}{AH} = \frac{DE}{DH}$

або
$$CE = \frac{AHDE}{DH} = AH \frac{DB - EB}{DB - HB}. \quad (1.19)$$

Із побудови Понселе випливає, що $EB^2 = DBHB$.

Отже, рівняння (1.19) набуває вигляду

$$CE = AH \left(\frac{DB - \sqrt{DBHB}}{DB - HB} \right).$$

Виконаємо деякі перетворення виразу $\frac{DB - \sqrt{DBHB}}{DB - HB}$, тобто розділимо чисельник і знаменник на DB і запишемо у знаменнику різницю квадратів:

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}}{1 - \frac{HB}{DB}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{HB}{DB}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}\right)} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{HB}{DB}}}$$

і отримаємо:

$$CE = \frac{AH}{1 + \sqrt{\frac{BH}{DB}}}. \quad (1.20)$$

Довжина стiнки AB через її висоту h виражається співвідношенням (рис. 1.3):

$$AB = s = \frac{h}{\cos \alpha}. \quad (1.21)$$

Із трикутників AHB і ADB за теоремою синусів знаходимо:

$$AH = s \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \psi} = s \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin \psi}, \quad (1.22)$$

$$BH = s \frac{\sin \delta}{\sin \psi}; \quad (1.23)$$

$$BD = s \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = s \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}. \quad (1.24)$$

Підставивши рівняння (1.22), (1.23) і (1.24) у (1.20), дістаємо вираз для CE , який підставимо в рівняння (1.18) з урахуванням (1.21) і остаточно отримаємо:

$$R_0 = \frac{1}{2} \gamma h^2 \mu, \quad (1.25)$$

$$\mu = \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin \psi \cdot \cos(\alpha - \beta)}} \right]^2 \sin \psi \cos^2 \alpha}, \quad (1.26)$$

де μ – залежить тільки від кутів φ, δ, α і β .

За формулою (1.26) можна обчислити тиск ґрунту на похилу стінку та похилу площу ґрунту за стінкою за будь-яких значень кутів φ, δ, α і β . Формула (1.25) свідчить, що повний тиск ґрунту на стінку пропорційний питомій вазі ґрунту та квадрату її висоти.

За умови, що планувальна поверхня ґрунту є горизонтальною площиною, а стінка вертикальною, тобто $\alpha = \beta = 0$, маємо:

$$\mu = \frac{\cos^2 \varphi}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin \varphi}{\cos \delta}} \right]^2 \cos \delta}. \quad (1.27)$$

Якщо до формули (1.27) додати вимогу ідеальної гладкості поверхні стінки – $\delta = 0$, то отримаємо:

$$R_0 = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.28)$$

Якщо $\alpha \neq 0$, $\beta = \delta = 0$, тоді:

$$R_0 = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha + \sin \varphi \cos \alpha}, \quad (1.29)$$

або
$$R_0 = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + \operatorname{tg} \beta \right]^2 \cos \alpha. \quad (1.30)$$

1.4. Діаграма функції повного тиску та його інтенсивності

Для розрахунку підпірної стінки на міцність необхідно знати повний тиск на будь-яку її ділянку – від поверхні до заданого рівня. Якщо планувальна поверхня землі зверху обмежена площиною, то повний тиск пропорційний квадрату висоти стінки (див. формулу (1.25)), тобто епюра повного тиску описується квадратною параболою, а епюра інтенсивності тиску – прямою лінією (рис. 1.4).

За епюрою R_0 можна визначити ординату повного тиску, наприклад R_0^1 на ділянку стінки h_1 , але не можна визначити точку прикладання цієї сили, тому необхідно побудувати епюру інтенсивності тиску q :

$$q = \gamma h \mu.$$

Центр ваги ділянки епюри q буде точкою прикладання сили R_0 . Для визначення ординати x_c центра ваги $cdc'd'$ на ділянці

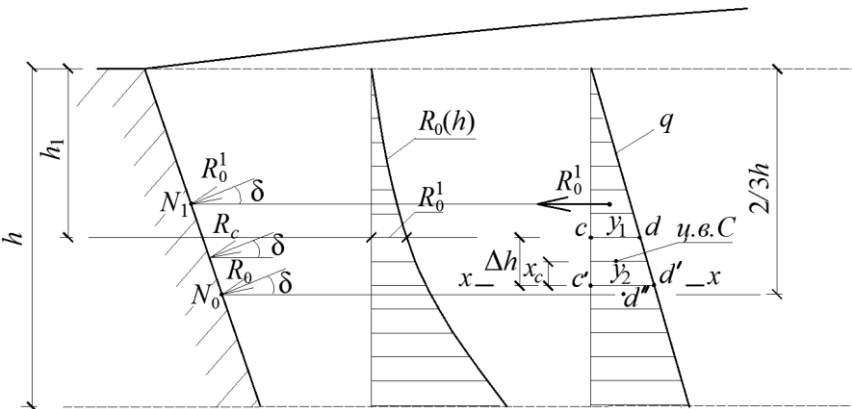


Рис. 1.4. Епюри повного тиску та його інтенсивності

cc' знаходимо статичний момент для трапеції $cdc'd'$ за формулами опору матеріалів:

$$S_{x-x'}(cdc'd') = F_{cdc'd'} \frac{Dh}{2} + F_{dd'd'} \frac{Dh}{3} = F_{cdc'd'} x_c.$$

Виконуємо перетворення:

$$F_{cdc'd'} = y_1 Dh; \quad F_{dd'd'} = \frac{1}{2} Dh (y_2 - y_1); \quad F_{cdcd'} = \frac{y_1 + y_2}{2} Dh;$$

$$S_{x-x'}(cdc'd') = y_1 \frac{Dh}{2} + \frac{(y_1 - y_2) Dh^2}{6} = \frac{y_1 + y_2}{2} Dh x_c. \quad (1.31)$$

Із рівняння (1.31) можна визначити ординату центра ваги відносно $c'd'$ для ділянки cc' :

$$x_c = \frac{y_1 Dh^2 + \frac{(y_2 - y_1) Dh^2}{2}}{3 Dh (y_1 + y_2)} = \frac{(y_1 + y_2) Dh}{3 (y_1 + y_2)}.$$

Остаточно отримуємо формулу для визначення центра ваги трапеціоїдної ділянки епюри інтенсивності тиску на підпірну стінку

$$x_c = \frac{(y_1 + y_2) Dh}{3 (y_1 + y_2)} \quad \text{або} \quad x_c = \frac{2y_1 + y_2}{y_1 + y_2} \frac{Dh}{3}.$$

1.5. Теорія лінійного деформування ґрунтового півпростору для визначення тиску на підпірну стінку

Визначимо бічний тиск на абсолютно нерухому жорстку стінку від дії зосереджених сил або місцевих навантажень (наприклад, смугового навантаження) за умови, що між напруженням та деформацією ґрунту існує лінійна залежність. Каротерс запропонував розв'язувати подібні задачі, застосовуючи метод відображень (рис. 1.5). Такі розв'язки добре узгоджуються з експериментальними даними [5, 6]. З умов симетрії встановлюємо, що в горизонтальній площині xOy при $x = 0$ за напрямом Ox відсутні зсувні зусилля і переміщення дорівнюють нулю, тому площину симетрії можна замінити площиною задньої грані жорсткої підпірної стінки, при цьому тиск на неї дорівнюватиме подвійному тиску від дії місцевого навантаження, що визначається за теорією лінійного деформування тіла. Ці дані будуть дійсними для будь-якого місцевого навантаження (наприклад, смугового). В особливому випадку у разі дії зо-

середньої сили за умови, що $n=0,5$, тиск на вертикальну підпірну стінку згідно з формулою Бусінеску становитиме [6]:

$$\sigma_x|_{x=a} = 2 \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{(-2 \cdot 0,5)}{3} \dots \right] = \frac{3Pa^2 z}{\pi (2 + z^2)^{5/2}},$$

де P – зосереджена сила; z – глибина точки, що розглядається; a – відстань прикладання сили P від верхнього краю задньої стінки.

Полегшують розрахунки складені допоміжні таблиці та графіки.

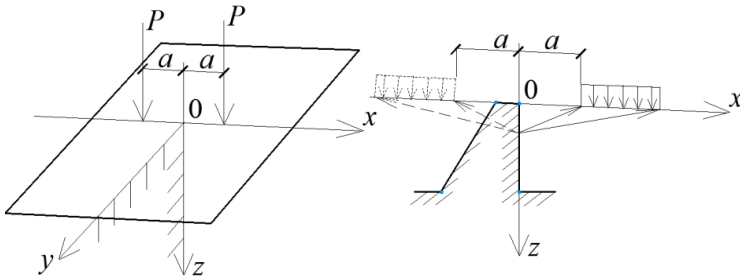


Рис. 1.5. Схеми до методу відображень

Визначимо тиск ґрунту на підпірну стінку за розв’язками диференційних рівнянь граничної рівноваги. Для цього візьмемо величину питомого зчеплення для зв’язних ґрунтів з інтенсивним

всесічним тиском згідно з теорією Кулона за графіком, показаним на рис. 1.6:

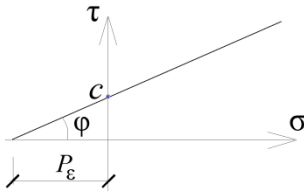


Рис. 1.6. Діаграма напружень $\tau - \sigma$ для зв’язних ґрунтів

$$P_\epsilon = \frac{c}{\text{tg } \varphi} = c \text{ctg } \varphi, \quad (1.32)$$

де c – питоме зчеплення ґрунту, кг/см^2 ; P_ϵ – тиск зв’язності; φ – кут внутрішнього тертя ґрунту.

Схему дії всесічного зовнішнього тиску, що моделює питоме зчеплення ґрунту, показано на рис. 1.7. Очевидно, що поверхневе зусилля буде збільшувати тиск на стінку, а тиск, що моделює зчеплення по поверхні контакту ґрунту із задньою гранню стінки, зменшуватиме бічний тиск ґрунту на величину P_ϵ .

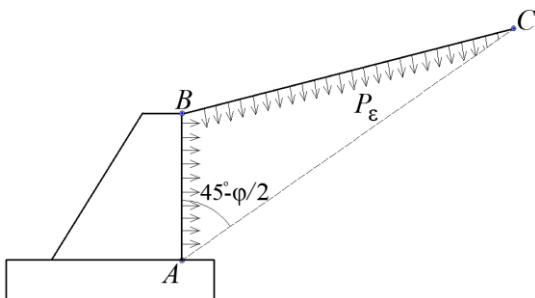


Рис. 1.7. Схема дії всебічного зовнішнього тиску

Зважаючи на те, що додатковому тиску надано у вигляді суцільного рівномірно розподіленого навантаження, то поверхня ковзання матиме форму площини з таким самим напрямом, як і у силовому тілі, що має нульове зчеплення.

1.6. Приклад аналітичного розрахунку підпірної стінки

Для розрахунку підпірної стінки необхідно знати: об'ємну вагу ґрунту γ , $\gamma = 1,1 - 2,2 \text{ т/м}^3$; кут внутрішнього тертя ґрунту φ , $\varphi = 10 - 45^\circ$; кут тертя між ґрунтом і поверхнею стінки δ , $\delta = 5 - 40^\circ$, у разі гладкої або вологої поверхні $\delta = 0,5\varphi - 0,75\varphi$.

Крім того, необхідно знати коефіцієнти тертя фундаменту стіни по основі та тертя мурування по кладці f і коефіцієнт поздовжнього згину φ за різних значень зведеної гнучкості $\lambda_{зв}$. Коефіцієнт тертя між шарами мурування $f = 0,7$. Мурування по сухому ґрунту: $f = 0,5 - 0,6$; мурування по вологому ґрунту: $f = 0,35 - 0,4$.

Розглянемо вертикальну гладку підпірну стінку з горизонтальною площиною засипки ґрунту (рис. 1.8).

Дію навантаження на поверхню засипки (смугового навантаження) припускаємо як еквівалентний шар ґрунту заввишки h_0 , що визначається за формулами:

$$h_0 = \frac{P_\epsilon}{\gamma} \quad \text{або} \quad h_0 = \frac{c}{\gamma \operatorname{tg} \varphi}, \quad (1.33)$$

де γ – об'ємна вага ґрунту.

Бічний тиск у точці a (рис. 1.8) визначаємо за формулою

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{або} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.34)$$

Із рівняння (1.31) маємо:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Ураховуючи рівняння (1.32) і (1.33), дістаємо

$$\sigma_2 = \gamma (H + h_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi}$$

або
$$\sigma_2 = \gamma \left(H + \frac{c}{r \operatorname{tg} \varphi} \right) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi};$$

$$\sigma_2 = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

або
$$\sigma_2 = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$\sigma_{\varphi 2} = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad \sigma_{c2} = 2c \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad \sigma_2 = \sigma_{\varphi 2} - \sigma_{c2},$$

де $\sigma_{\varphi 2}$ – величина бокового тиску на стінку, отримана з урахуванням лише тертя ґрунту; σ_{c2} – величина бокового тиску на стінку, отримана з урахуванням лише питомого зчеплення.

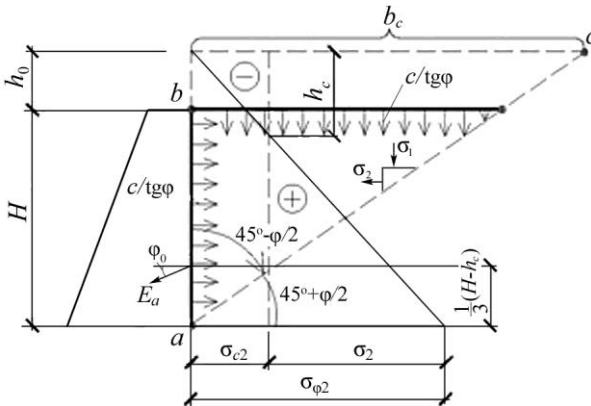


Рис. 1.8. Розрахункова схема тиску на задню вертикальну стінку з урахуванням зчеплення ґрунту

Таким чином, питоме зчеплення зменшує боковий тиск на величину σ_{c2} . На випадок пасивного опору у кожній точці буде збільшуватись опір ґрунту на величину

$$\sigma'_{c2} = 2c \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Оскільки боковий тиск змінюється від додатного значення (внизу стінки) до від'ємного (зверху стінки), то глибину h_c , на якій величина бокового тиску буде нульовою, отримаємо з формули

$$h_c = \frac{2c}{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Повний активний тиск E_a на стінку зв'язного ґрунту визначається за площею трикутника з основою σ_2 на глибині H і висоті $H - h_c$:

$$E_a = \frac{\sigma_2 (H - h_c)}{2}$$

або
$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2cH \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c^2}{\gamma}.$$

Тиск ґрунту на підпірну стінку з використанням строгих методів теорії граничної рівноваги визначається за розв'язками диференціальних рівнянь, які характеризують плоский граничний стан ґрунтів за підпірною стінкою у полярній системі координат:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \sin \theta;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \gamma \cos \theta$$

і умови рівноваги граничного стану

$$\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \tau_{r\theta}^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{4} (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (1.35)$$

Розв'язок (1.35) отримано числовими інтегруваннями із застосуванням методу скінченних різниць.

Задача визначення тиску ґрунту на підпірну стінку має два розв'язки: 1) активного тиску, 2) пасивного тиску.

Для вертикальної гладкої стінки за умови, що $\varphi = 0, \theta = 90^\circ$, величина тиску, знайденого згідно з теорією Кулона, збігається з точним розв'язком.

Розглянемо аналітичний розрахунок підпірної стінки з визначення тиску на задню її поверхню за формулами (1.25) – (1.30). Як приклад взято розрахунок підпірної стінки мостового стояка [8] згідно з розрахунковою схемою, показаною на рис. 1.9, з такими вихідними даними:

- ґрунт – волога глина, розрахунковий опір ґрунту $R_{гр} = 3,5$ кг/см², об'ємна вага ґрунту $\gamma_{гр} = 1,7$ т/м³, кут внутрішнього тертя $\varphi_{тер} = 35^\circ$, кут тертя між ґрунтом і поверхнею стіни $\delta = 17^\circ$;
- мурування з буту, розрахунковий опір мурування $R_{мр} = 28,0$ кг/см², об'ємна вага мурування $\gamma_{к} = 2,4$ т/м³, марка каменя $M_{к} = 200$, марка розчину $M_{р} = 10$.

Перевірку на міцність, стійкість і зсув виконуємо на рівні підфермової площадки ab (рис. 1.9), по обрізу cd та підшві фундаменту ef . Для цього стояк розбиваємо на відсіки.

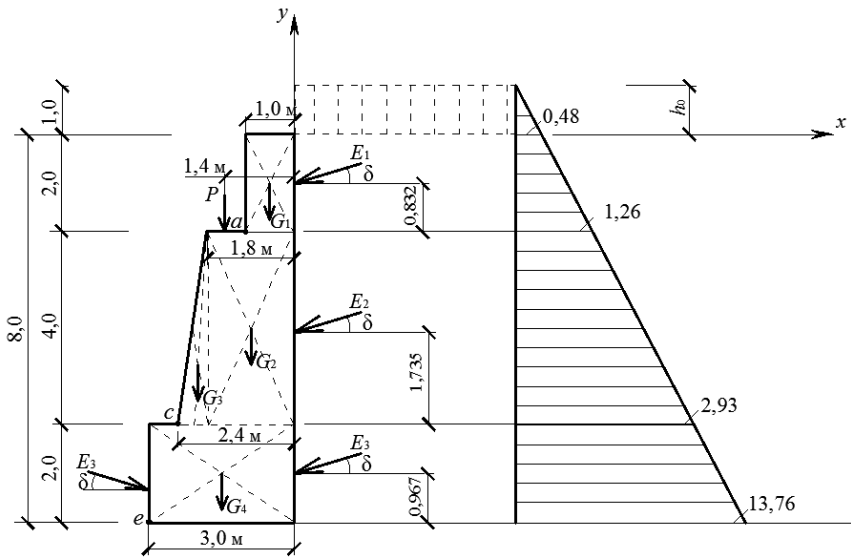


Рис. 1.9. Розрахункова схема підпірної стінки

Для розрахунку беремо 1 м довжини стінки, $z = 1$ м.

Алгоритм розрахунку складається з наступних етапів.

1. Визначаємо висоту еквівалентного шару землі, що заміняє тимчасове навантаження на насип:

$$h_0 = \frac{q}{\gamma_{\text{гр}}}; \quad h_0 = \frac{1,7}{1,7} = 1,0 \text{ м.}$$

2. Знаходимо власну вагу та положення центрів ваги кожного відсіку стінки:

$$G_1 = 1,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ т/м.}$$

Плечі сили G_1 відносно точок a , c і e :

$$x_{1a} = 0,5 \text{ м}; \quad x_{1c} = 1,9 \text{ м}; \quad x_{1e} = 2,5 \text{ м.}$$

$$G_2 = 1,8 \cdot 4,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 17,3 \text{ т/м.}$$

Плечі сили G_2 відносно точок c і e : $x_{2c} = 1,5$ м; $x_{2e} = 2,1$ м;

$$G_3 = \frac{0,6 \cdot 4,0 \cdot 1,0}{2} \cdot 2,4 = 2,88 \text{ т/м.}$$

Плечі сили G_3 відносно точок c і e : $x_{3c} = 0,4$ м; $x_{3e} = 1,0$ м;

$$G_4 = 3,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 14,4 \text{ т/м.}$$

Плече сили G_4 відносно точки e : $x_{4e} = 1,5$ м.

Плечі сили P відносно точок c і e :

$$x_{pc} = 0,4 + 0,6 = 1,0 \text{ м}; \quad x_{pe} = 0,4 + 0,6 + 0,6 = 1,6 \text{ м.}$$

3. Визначаємо тиск ґрунту на стіну. Тиск у заданій точці на відстані y від верху стіни становить

$$P_{qy} = \gamma_{\text{гр}} \left(h_0 + h_0 k_q \right) y,$$

де $k_q = \frac{\cos \varepsilon \cos \alpha}{\cos (\alpha - \varepsilon)}$; $k = \left[\frac{\cos (\varphi_{\text{тер}} - \varepsilon)}{\cos (\varphi_{\text{тер}} + \delta_{\text{тер}})} \right]^2 \frac{1}{\cos (\alpha + \delta_{\text{тер}})}$;

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sin (\varphi_{\text{тер}} + \delta_{\text{тер}}) \cos (\alpha - \varepsilon)}{\cos (\alpha + \delta_{\text{тер}}) \sin (\varphi_{\text{тер}} - \alpha)}}; \quad k_1 = \frac{\sin (\varphi_{\text{тер}} - \alpha)}{\cos (\alpha - \varepsilon)},$$

де ε – кут між задньою гранню стінки і віссю y ; α – кут між поверхнею ґрунту і віссю x . У цьому випадку $\varepsilon = \alpha = 0$;

$$k_q = \frac{1,0}{1,0} = 1,0; \quad k_1 = \frac{\sin 35^\circ}{\cos 0^\circ} = 0,574; \quad k_0 = \sqrt{\frac{\sin (5^\circ + 17^\circ) \cdot 1,0}{\cos 17^\circ \cdot \sin 35^\circ}} = 1,2;$$

$$k = \frac{\left[\cos 35^\circ / 1 + 1,2 \cdot 0,574 \right]^2 \cdot 1}{\cos 17^\circ} = 0,246 .$$

Тиск у верхній точці стіни, якщо $y = 0$, становить

$$P_{q0} = 1,7 \cdot (0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 0,418 \text{ т/м}^2 .$$

У точці $y = |b|$

$$P_{qb} = 1,7 \cdot (0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 1,255 \text{ т/м}^2 .$$

На верхній відсік стіни

$$E_1 = \frac{0,418 + 1,255}{2} \cdot 2 = 1,673 \text{ т/м} .$$

У точці d

$$P_{qd} = 1,7 \cdot (0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 2,93 \text{ т/м}^2 .$$

На відсік bd

$$E_2 = \frac{1,255 + 2,93}{2} \cdot 4 = 8,370 \text{ т/м}^2 .$$

На весь стояк заввишки 6 м

$$E = E_1 + E_2 = 1,673 + 8,370 = 10,043 \text{ т/м} .$$

Для перевірки обчислимо повний тиск на стояк за формулою

$$E = \frac{1}{2} \gamma_{\text{гр}} h^2 k + 2h_0 k_q \bar{k} ;$$

$$E = 1,7 \cdot 6,0^2 / 2 \cdot (0 + 2 \cdot 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 10,037 \text{ т/м} .$$

Тиск ґрунту на фундамент у точці f

$$P_{qf} = 1,7 \cdot (0 + 1,0) \cdot 0,246 = 3,76 \text{ т/м}^2 .$$

На відсік df

$$E_3 = \frac{2,93 + 3,76}{2} \cdot 2 = 6,69 \text{ т/м}^2 .$$

Пасивний тиск ґрунту

$$E_4 = \frac{1}{2} \gamma_{\text{еп}} h^2 k = \frac{1}{2} \cdot 1,7 \cdot 4,0 \cdot 0,246 = 0,835 \text{ т/м}^2 .$$

4. Обчислюємо вертикальні та горизонтальні складові сил E_1 , E_2 ,

E_3 , і E_4 . Ці сили напрямлені до горизонту під кутом $\delta = 17^\circ$.

Обчислюємо горизонтальні та вертикальні складові повного тиску:

$$E_{1x} = 1,673 \cdot \cos 17^\circ = 1,599 \text{ т/м}; \quad E_{1y} = 1,673 \cdot \sin 17^\circ = 0,49 \text{ т/м};$$

$$E_{2x} = 8,370 \cdot \cos 17^\circ = 8,002 \text{ т/м}; \quad E_{2y} = 8,370 \cdot \sin 17^\circ = 2,45 \text{ т/м};$$

$$E_{3x} = 6,69 \cdot \cos 17^\circ = 6,4 \text{ т/м}; \quad E_{3y} = 6,69 \cdot \sin 17^\circ = 1,96 \text{ т/м};$$

$$E_{4x} = -0,835 \cdot \cos 17^\circ = -0,8 \text{ т/м}; \quad E_{4y} = 0,835 \cdot \sin 17^\circ = 0,244 \text{ т/м}.$$

5. Визначаємо плечі всіх сил E_y , і E_x відносно точок a, c і e . Сили E_1, E_2, E_3 , і E_4 прикладені на грань відсіку на рівні центра ваги відповідних трапецій, що складають епюру розподілу тиску (рис. 1.9).

Центр першої трапеції віддалений від лінії ab на відстань y_1 :

$$y_1 = \frac{2 \cdot 0,418 + 1,255}{0,418 + 1,255} \cdot \frac{2}{3} = 0,832 \text{ м}.$$

Центр другої трапеції віддалений від лінії cd на відстань y_2 :

$$y_2 = \frac{2 \cdot 1,255 + 2,93}{1,255 + 2,93} \cdot \frac{4}{3} = 1,733 \text{ м}.$$

Центр третьої трапеції віддалений від лінії ef на відстань y_3 :

$$y_3 = \frac{2 \cdot 2,93 + 3,76}{2,93 + 3,76} \cdot \frac{2}{3} = 0,957 \text{ м}.$$

Сила E_4 прикладена на рівні центра ваги трикутника і відступає від підшоши ef на відстань y_4 :

$$y_4 = \frac{2,0}{3} = 0,67 \text{ м}.$$

6. Обчислюємо перекидні та утримувальні моменти, а також коефіцієнти стійкості на перекидання. Для обчислення утримувальних та перекидних моментів вводимо коефіцієнти перевантаження відповідно $n_1 = 0,8$ і $n_2 = 1,2$. Результати обчислень заносимо до табл. 1.1.

Коефіцієнт стійкості на перекидання верхнього відсіку

$$k_1 = \frac{M_{yта}}{M_{пкa}} = \frac{G_1 x_{1a} \cdot 0,8 + E_{1y} \cdot 1,0 \cdot 0,8}{E_{1x} y_1 \cdot 1,2},$$

де $M_{yта}$, $M_{пкa}$ – відповідно утримувальний та перекидний моменти відносно точки a ,

$$k_1 = \frac{0,8 \cdot (8 \cdot 0,5 + 0,49 \cdot 1,0)}{1,599 \cdot 0,832 \cdot 1,2} = 1,448.$$

Коефіцієнт стійкості на перекидання стінки відносно точки c

Таблиця 1.1

Результати обчислень утримувальних та перекидних моментів

Сили	Проекції сил на осі		Відносно точки <i>a</i>				Відносно точки <i>c</i>				Відносно точки <i>e</i>			
			Плечі сил		Моменти сил		Плечі сил		Моменти сил		Плечі сил		Моменти сил	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{\text{УТ}}$	$M_{\text{ПК}}$	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{\text{УТ}}$	$M_{\text{ПК}}$	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{\text{УТ}}$	$M_{\text{ПК}}$
G_1	-	4,800	0,5	-	1,920	-	1,9	-	7,30	-	2,5	-	9,60	-
G_2	-	17,300	-	-	-	-	1,5	-	20,80	-	2,1	-	29,06	
G_3	-	2,880	-	-	-	-	0,4	-	0,92	-	1,0	-	2,30	
G_4	-	14,400	-	-	-	-	-	-	-	-	1,5	-	17,30	
P	-	20,000	-	-	-	-	1,0	-	16,00	-	1,6	-	25,60	
E_1	1,599	0,490	1,0	0,832	0,392	1,6	2,4	4,832	0,94	9,30	3,0	6,832	1,18	13,12
E_2	8,002	2,450	-	-	-	-	2,4	1,733	4,70	16,65	3,0	3,733	5,88	35,80
E_3	6,400	1,960	-	-	-	-	-	-	-	-	3,0	0,957	4,71	7,35
E_4	-0,80	0,244	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,670	0,43	-
Σ	15,201	64,524			2,312	1,6			50,66	25,85			96,06	56,27

$$k_2 = \frac{M_{ytc}}{M_{пкс}} = \frac{50,66}{25,85} = 1,959.$$

Коефіцієнт стійкості стіни разом з фундаментом відносно точки e

$$k_3 = \frac{M_{yte}}{M_{пке}} = \frac{96,06}{56,27} = 1,71.$$

Визначаємо коефіцієнти стійкості стояка на зсув.

Для верхнього відсіку сила зсуву по шву ab становить

$$1,2 \cdot E_{1x} = 1,2 \cdot 1,599 = 1,919 \text{ т/м.}$$

Утримувальна сила P_{yt} становить $P_{yt} = 0,8 \cdot f \cdot (G_1 + E_{1y})$,

коефіцієнт тертя $f = 0,5$,

$$P_{yt} = 0,8 \cdot 0,5 \cdot (4,8 + 0,49) = 2,116 \text{ т/м.}$$

Коефіцієнт стійкості на зсув

$$k_{1zc} = \frac{0,8 \cdot 0,5 \cdot (4,8 + 0,49)}{1,2 \cdot 1,599} = 1,1.$$

Сила, що зсуває стіну по обрізу фундаменту

$$P_{cd} = 1,2 \cdot (E_{1x} + E_{2x}) = 1,2 \cdot 9,605 = 11,53 \text{ т/м.}$$

Утримувальна сила

$$P_{ym} = f \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + P + E_{1y} + E_{2y}) \cdot 0,8 = 0,5 \cdot 47,92 \cdot 0,8 = 19,17 \text{ т/м,}$$

$$k_{2zc} = \frac{19,17}{11,53} = 1,66.$$

Сила зсуву по підшві фундаменту

$$P_{3c} = \sum_{i=1}^4 E_{ix} \cdot 1,2 = 15,205 \cdot 1,2 = 18,25 \text{ т/м.}$$

Утримувальна сила, якщо $f = 0,4$ (тертя кладки по вологій глині),

$$P_{yt} = f \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + P + E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + E_{4y}) \cdot 0,8 = 20,65 \text{ т/м,}$$

$$k_{3zc} = \frac{20,65}{18,25} = 1,13.$$

Оскільки, розрахунок виконано за граничним станом, коефіцієнт стійкості можна вважати цілком допустимим.

8. Перевіряємо міцність стіни. Опір кладки стіни визначаємо за формулою

$$R = \frac{2Ne}{mm_k \phi bh^2},$$

де N – нормальна складова всіх сил, що діють на шов, який розглядається; e – ексцентриситет рівнодійної цих сил відносно найменш напруженої грані; m, m_k – коефіцієнти умов роботи відповідно стіни та кладки; ϕ – коефіцієнт поздовжнього згину (табл. 1.2); b, h – відповідно ширина (одинична довжина стіни, z) та висота перерізу.

Таблиця 1.2

Значення коефіцієнтів поздовжнього згину ϕ за різних зведених гнучкостей β

β	ϕ	β	ϕ	β	ϕ	β	ϕ	β	ϕ
4	0,99	11	0,86	18	0,70	32	0,42	46	0,26
5	0,98	12	0,84	20	0,65	34	0,39	48	0,24
6	0,96	13	0,81	22	0,61	36	0,36	50	0,23
7	0,94	14	0,79	24	0,56	38	0,34	52	0,22
8	0,92	15	0,77	26	0,53	40	0,32	54	0,21
9	0,90	16	0,74	28	0,49	42	0,30		
10	0,88	17	0,72	30	0,45	44	0,28		

На основі експериментальних досліджень за малих ексцентриситетів $m = m_k = 1,0$; $b = 1\text{м}$; ϕ залежить від зведеної гнучкості β :

$$\beta = \frac{l_0}{a} \sqrt{\frac{1000}{\alpha}},$$

де l_0 – розрахункова висота; a – найменший розмір поперечного перерізу; α - пружна характеристика кладки, що залежить від типу кладки та марки розчину табл.1.3.

Таблиця 1.3

Значення пружної характеристики кладки α

Вид мурування	Марка розчину				
	200-50	25-10	4	2	0
Із важких природних і бетонних каменів та буту на важких розчинах	2000	1000	750	500	350
Із цегли, легкобетонних каменів, легких природних каменів на важких розчинах	1000	750	500	350	200
Із цегли, легкобетонних каменів, легких природних каменів на легких розчинах	750	500	350	200	100

Розрахунок міцності виконуємо за поправковими коефіцієнтами перевантаження: для сил тиску землі $n_1=1,2$; для сил ваги – $n_2=1,1$.

Розглянемо верхній відсік. Визначаємо ексцентриситет e_a рівнодійної всіх сил, що діють на цей відсік відносно точки a . Для цього алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки a розділимо на суму вертикальних проекцій всіх сил з урахуванням поправкових коефіцієнтів перевантаження:

$$e_a = \frac{4,8 \cdot 1,1 \cdot 0,5 + 0,49 \cdot 1,2 \cdot 1,0 - 1,599 \cdot 1,2 \cdot 0,832}{4,8 \cdot 1,1 + 0,43 \cdot 1,2} = 0,282 \text{ м.}$$

Ексцентриситет відносно центра ваги $e_0 = y - e_a$.

$$e_0 = 0,5 - 0,282 = 0,218 \text{ м} < 0,45 \text{ м} = 0,45 \cdot \frac{1}{2} = 0,225 \text{ м}, \quad y = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м.}$$

Для верхнього відсіку, як для стовпа з вільним кінцем $l_0 = 2 \cdot 2,0 = 4,0 \text{ м}$; $a = 1,0 \text{ м}$.

$$\text{За табл. 1.2 } \alpha = 1000, \text{ тоді } \beta = \frac{4,0}{1,0} \sqrt{\frac{1000}{100}} = 4,0.$$

За табл. 1.3 $\varphi = 0,99$; ексцентриситет

$$e = e_0 + \frac{h}{2} = 0,218 + 0,5 = 0,718 \text{ м};$$

$$R = \frac{2 \cdot 5868,0 \cdot 71,8}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,99 \cdot 100,0 \cdot 100^2} = 0,85 \text{ кг/см}^2 < 28,0 \text{ кг/см}^2.$$

Як бачимо, необхідний розрахунковий опір мурування значно нижчий від фактичного.

Перевіряємо міцність по шву cd :

$$e_c = \frac{4,3 + 20,8 + 0,92 \cdot \frac{1,1}{0,8} + 6,0 + 0,94 + 4,7 \cdot \frac{1,2}{0,8} - 25,85}{4,8 + 17,3 + 2,88 \cdot 1 + 0,49 + 2,45 \cdot 1,2 + 20,0 \cdot 1,2} = 1,13 \text{ м};$$

$$e_0 = 1,2 - 1,13 = 0,07 \text{ м}; \quad e = e_0 + \frac{h}{2} = 0,07 + 1,2 = 1,27 \text{ м};$$

$$\beta = \frac{8,0}{7,1} \sqrt{\frac{1000}{1000}} = 1,126; \quad \varphi = 1,0;$$

$$R = \frac{2 \cdot 54440 \cdot 127}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 100 \cdot 240^2} = 2,3 \text{ кг/см}^2 < 28,0 \text{ кг/см}^2.$$

Перевіряємо міцність по підшві фундаменту.

Ексцентриситет

$$e_e = \frac{\frac{96,06}{0,8} + \frac{56,27}{1,2}}{4,8 + 17,3 + 2,88 + 14,4 + 0,49 + 2,45 + 1,96 + 0,244 + 20,0} = 1,15 \text{ м};$$
$$e_0 = 1,5 - 1,15 = 0,35 \text{ м};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{h} \left(1 + \frac{6e_0}{h} \right) = \frac{64,52}{3,0} \left(1 + 6 \cdot \frac{0,35}{3,0} \right) = 36,6 \text{ т/м}^2 = 3,66 \text{ кг/см}^2.$$

Згідно з будівельними нормами необхідно, щоб найбільше напруження біля краю підшви позациентрово навантаженого фундаменту не перевищувало $1,2 R$:

$$3,66 < 1,2 \cdot 3,5 = 4,2 \text{ кг/см}^2.$$

1.7. Приклад розрахунку стійкості підпірної стінки з використанням методу круглоциліндричної поверхні ковзання

Вихідні дані (рис. 1.10):

- ширина підшви фундаменту – $2b = 4,0$ м;
- висота стінки від підшви фундаменту – $13,0$ м;
- ширина стінки на рівні обрізу фундаменту – $3,5$ м;
- ширина по верху – $1,0$ м;
- заглиблення фундаменту $h_{\text{загл}} = 3,0$ м;
- питома вага важкого бетону $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$.

Характеристики ґрунту (див. підрозділ 1.6).

Потрібно знайти найменший коефіцієнт стійкості. Загальних правил знаходження центра обертання дуги ковзання по циліндричній поверхні не існує. Тому розраховуємо кілька кривих ковзання і з них вибираємо криву з найменшим коефіцієнтом запасу.

Зазвичай спочатку розраховуємо дуги ковзання, центри яких розміщені на обраній вертикалі – вниз, вгору, з них обираємо криву з найменшим коефіцієнтом запасу. Потім на горизонтальному рівні центра обраної кривої шукаємо точку з найменшим коефіцієнтом запасу – вправо, вліво від попередньо вибраного центра.

Алгоритм розрахунку:

1. Вибираємо центр обертання – точку O_1 . Для цього відкладаємо промінь від верхнього зовнішнього кута M підпірної стінки

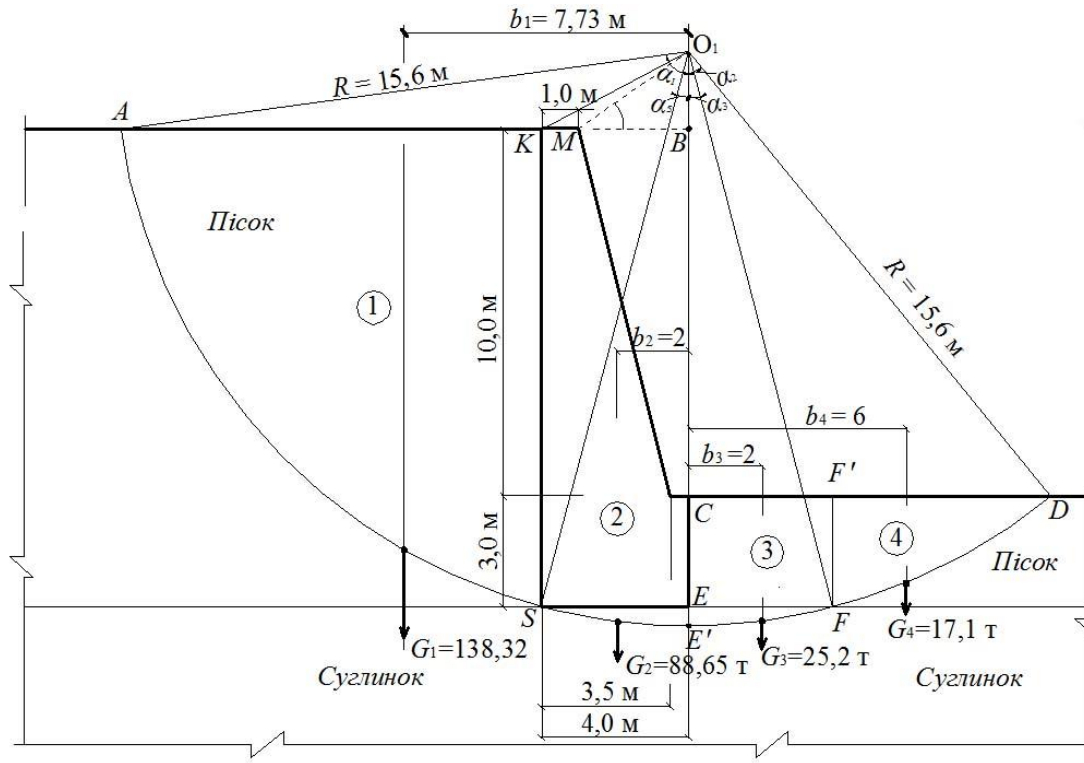


Рис. 1.10. Схема до розрахунку стійкості підпірної стінки за круглоциліндричною поверхнею ковзання

під кутом 36° (рекомендовано значення) до її верхньої грані. На перетині променя з вертикаллю, яка проходить через кут C (край обрізу фундаменту), знаходимо точку O_1 .

2. На перетині вертикалі з горизонталлю, що проходить через верхню грань підпірної стінки, отримуємо точку B .

3. Із центра O_1 проводимо дугу так, щоб вона проходила через нижній кут S підпірної стінки (рис. 1.10). Цю криву вважати- мемо можливою поверхнею ковзання.

4. Графічно за масштабом визначаємо відстань O_1B та обчислюємо радіус дуги обертання за формулою

$$R_1 = \sqrt{(2b)^2 + (4 + O_1B)^2}; \quad R_1 = 15,6 \text{ м.}$$

5. Із трикутників ABO_1 , CDO_1 та FEO_1 визначаємо значення центральних кутів α_1 , α_2 , α_3 , α_4 за катетами O_1B , O_1C і O_1E :

$$O_1B = 2,0 \text{ м (200 см); } O_1C = 12,0 \text{ м (1200 см);}$$

$$O_1E = 15,0 \text{ м (1500 см).}$$

Із $\triangle ABO_1$ визначаємо:

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_1B}{R_1} = \frac{2}{15,6} = 0,12821; \quad \alpha_1 = 1,44223 = 82,63^\circ.$$

Із $\triangle CDO_1$ знаходимо:

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_1C}{R_1} = \frac{12}{15,6} = 0,7692; \quad \alpha_2 = 0,6932 = 39,72^\circ.$$

Із $\triangle FEO_1$ маємо:

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_1E}{R_1} = \frac{15}{15,6} = 0,9615; \quad \alpha_3 = 0,2784 = 15,95^\circ;$$

$$\cos \alpha_5 = 0,9615; \quad \alpha_5 = \alpha_3; \quad \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0,6932 - 0,2784 = 0,4148, \\ 39,72 - 15,95 = 23,77^\circ.$$

6. Визначаємо довжину дуги ковзання L та довжини ділянок кривої в обох шарах.

Загальна лінія ковзання L проходить у двох шарах ґрунту:

- у шарі піску – дві ділянки дуги ковзання, розміщені в межах кутів α_1 і α_4 ;

- у шарі суглинку – ділянка дуги з центральними кутами $\alpha_3 + \alpha_5$.

Загальна довжина дуги ковзання вздовж $ASFD$:

$$L = (\alpha_1 + \alpha_2)R_1 = (1,44223 + 0,6932) \cdot 15,6 = 33,3127 \text{ м.}$$

Ділянки AS і FD у піщаному шарі:

$$L_1 = (\alpha_1 - \alpha_5 + \alpha_6)R_1 = (1,4422 - 0,9615 + 0,4148) \cdot 15,6 = 13,9698 \text{ м.}$$

Ділянка $FE'S$:

$$L_2 = 2\alpha_2 R_1 = 2 \cdot 0,2784 \cdot 15,6 = 8,69 \text{ м.}$$

Перевірка:

$$L = L_1 + L_2 = 22,50 + 12,94 = 33,44 \text{ м.}$$

Похибка становить $\frac{0,013 \cdot 100}{33,44} \approx 0,04\%$.

7. Знаходимо момент сил щеплення за дугою ковзання $DFE'SA$:

$$(L_1 C_1 + L_2 C_2)R_1 = (2250 \cdot 0,02 + 1294 \cdot 0,28)1560 = 635419 \text{ кг} \cdot \text{см} \approx 6,35 \text{ тм.}$$

8. Сектор ковзання розбиваємо на блоки 1–4 і для кожного блока розраховуємо його площу, вагу, місце розташування центра ваги, момент відносно центра обертання і момент утримувальних сил. Для спрощення розрахунків дугу ковзання апроксимуємо ламаною лінією, що дає можливість звести фігури окремих блоків до простих геометричних тіл, трикутників або трапецій.

Міцність на осьовий розтяг R_{bt} :

першого граничного стану В12,5 – $R_{bt} = 6,73 \text{ кг/см}^2$; В15 – $R_{bt} = 7,65 \text{ кг/см}^2$,

другого граничного стану В12,5 – $R_{bt} = 10,2 \text{ кг/см}^2$; В15 – $R_{bt} = 11,7 \text{ кг/см}^2$.

При бетонуванні вертикальних конструкцій шаром заввишки понад 1,5 м: $\gamma_6 = 0,85$;

третього граничного стану В15 – $R_{bt}^P = 12,0 \text{ кг/см}^2$; $\gamma_{b3} R_{bt} = 0,85 \cdot 7,65 = 6,50 \text{ кг/см}^2$;

$$\varphi_n^{\text{рад}} = \frac{3,14159 \cdot 32}{180^\circ} = 0,5585; \quad \text{tg}(0,5585) = 0,624;$$

$$\varphi_{\text{сугл}}^{\text{рад}} = \frac{3,14159 \cdot 18}{180^\circ} = 0,314159; \quad \text{tg}(0,31416) = 0,325.$$

9. Виконуємо обчислення для кожного блока, визначаючи його площу, вагу і координати центра ваги відносно центра обертання O_1 .

Блок 1. Півпростір із шару піску *ASK* (рис. 1.10). Із ΔASK отримаємо:

– площу

$$\omega_1 = \frac{AK \cdot KS}{2} = \frac{11,2 \cdot 13}{2} = 72,8 \text{ м}^2;$$

– вагу блока (товщина півпростору – 1 м)

$$G_1 = \omega_1 \gamma_n = 1 \cdot 72,8 \cdot 1,9 = 138,32 \text{ т};$$

– відстань центра ваги відносно центра обертання O_1

$$b_1 = BK + \frac{AK}{3} = 4,0 + \frac{11,2}{3} = 7,73 \text{ м};$$

– діючий момент ваги блока 1 відносно центра обертання

$$G_1 b_1 = 138,32 \cdot 7,73 = 1069,2 \text{ тм};$$

– момент утримувальних сил

$$G_1 \operatorname{tg} \varphi_n R_1 = 138,32 \operatorname{tg} 32^\circ \cdot 15,6 = 1346,5 \text{ тм},$$

$$G_1 \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_n R_1 = 138,32 \cdot 0,964 \cdot 0,624 \cdot 15,6 = 1298,0 \text{ тм}.$$

$$\text{Похибка становить } \frac{48,5 \cdot 100}{1298} \approx 3,7\% .$$

Блок 2. Площа стінки *KSECM* та півпростір із шару суглинку $\Delta SE'E$:

– площа стіни

$$\omega_2^{\text{ст}} = 3 \times 4,0 + \frac{3,5 + 1,0}{2} \cdot 10 = 34,5 \text{ м}^2;$$

– площа шару із суглинку

$$\omega_2^{\text{сугл}} = \frac{1}{2} 4,0 \times 0,6 = 1,2 \text{ м}^2;$$

– вага

$$G_2 = \omega_2^{\text{ст}} \gamma_{\text{ст}} + \omega_2^{\text{суг}} \gamma_{\text{суг}} = 34,5 \cdot 2,5 + 1,2 \cdot 2,0 = 88,65 \text{ т};$$

– координати центра ваги відносно O_1 приблизно становить

$$b_2 \cong \frac{ES}{2} = \frac{4,0}{2} = 2 \text{ м};$$

– діючий момент від ваги блока 2 відносно O_1 (за годинниковою стрілкою)

$$G_2 b_2 = 88,65 \cdot 2 = 177,3 \text{ тм};$$

– момент утримувальних сил

$$G_2 \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_1 = 88,65 \cdot 0,325 \cdot 15,6 = 449,5 \text{ тм}.$$

Блок 3. Площа з піщаного шару $CEFD$ і шару суглинку $\Delta EE'F'$:

$$\omega_3 = 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} 0,6 \cdot 4 = 13,2 \text{ м}^2; \quad \omega_3^n = 12,0 \text{ м}^2; \quad \omega_3^{\text{суг}} = 1,2 \text{ м}^2;$$

– вага

$$G_3 = \omega_3^n \gamma_n + \omega_3^{\text{суг}} \gamma_{\text{суг}} = 12,0 \cdot 19 + 1,2 \cdot 20 = 25,2 \text{ т};$$

– координати центра ваги блока 3 відносно O_1

$$b_3 \approx \frac{FC}{2} = \frac{4,0}{2} = 2 \text{ м};$$

– діючий момент від ваги блока 3 відносно точки O_1 (проти годинникової стрілки)

$$G_3 b_3 = -25,2 \cdot 2 = -50,4 \text{ тм};$$

– момент утримувальних сил

$$G_3 \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_1 = 25,2 \cdot 0,325 \cdot 15,6 = 127,8 \text{ тм}.$$

Блок 4. Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D'$:

– площа (розміри взяті з креслення)

$$\omega_4 = \frac{1}{2} DF' \cdot F'F = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ м}^2;$$

– вага

$$G_4 = \omega_4 \gamma_n = 9,0 \cdot 19 = 17,1 \text{ т};$$

– координати центра ваги блока 4 відносно точки O_1

$$b_4 = CF' + \frac{1}{3} DF' = 4,0 + \frac{6}{3} = 6,0 \text{ м};$$

– діючий момент від ваги блока 4 відносно O_1 (проти годинникової стрілки)

$$- G_4 b_4 = -17,1 \cdot 6 = -102,6 \text{ тм};$$

– момент утримувальних сил

$$G_4 \operatorname{tg} \varphi_n R_1 = 17,1 \cdot 0,624 \cdot 15,6 = 166,5 \text{ тм}.$$

Результати зводимо до табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил відносно центра ковзання O_1

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно O_1 , м	Діючий (активно) момент $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя, тм
1	72,8	138,3	7,73	1069,2	1346,5
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	9,0	17,1	6,0	-102,6	166,5
Усього:				1093,5	2090,3

10. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості укосу підпірної стінки за формулою

$$K_{\text{зап}} = \frac{\sum_{i=1}^4 G_i \operatorname{tg} \varphi_{\text{п.с}} R_1 + L_1 C_1 R_1 + L_2 C_2 R_1}{\sum_{i=1}^4 G_i b_i} = \frac{2090,3 + 456,0}{1093,5} = 2,33.$$

Знаходимо найменше значення коефіцієнта запасу як функції від координати O_1 у вертикальному напрямі.

11. Змістимо центр обертання кривої ковзання вертикально вгору на 2 м, отримаємо положення центра обертання O_2 другої кривої ковзання.

Аналогічно обчислюємо всі параметри для визначення коефіцієнта запасу для другої кривої ковзання.

$$R_2 = 17,5 \text{ м}; \quad O_2 E = 17 \text{ м}; \quad O_2 B = 4 \text{ м}; \quad O_2 C = 14 \text{ м}.$$

Із $\Delta A_2 B O_2$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_2 B}{R_2} = \frac{4,0}{17,5} = 0,2286 \rightarrow \alpha_1^2 = 1,3402 = 76,79^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_2 C}{R_2} = \frac{14,0}{17,5} = 0,80 \rightarrow \alpha_2^2 = 0,6435 = 36,87^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_2 E}{R_2} = \frac{17,0}{17,5} = 0,9714 \rightarrow \alpha_3^2 = 0,2396 = 13,73^\circ;$$

$$\alpha_5 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_4^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2 = 1,3402 - 0,2396 = 1,101.$$

Довжина ліній ковзання

$$L_1^2 = (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_3)R_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)R_2 = \\ = (1,3402 + 0,6435 - 2 \cdot 0,2396)17,5 = 26,31 \text{ м};$$

$$L_2^2 = 2\alpha_3 R_2 = 2 \cdot 0,2396 \cdot 17,5 = 8,4 \text{ м};$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 = 26,31 + 8,4 = 34,71 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення призми по дузі ковзання:

$$(L_1^2 C_1 + L_2^2 C_2)R_2 = (26,31 \cdot 0,02 + 8,4 \cdot 0,28)17,5 = 503,7 \text{ тм}.$$

Визначаємо активні та утримувальні зусилля в блоках.

Блок 1. Півпростір із шару піску ASK:

- площа

$$\omega_1^2 = \frac{A^2 K \cdot KS}{2} = \frac{13,1 \cdot 13}{2} = 84,5 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^2 = \omega_1^2 \gamma_n = 84,5 \cdot 1,9 = 160,6 \text{ т};$$

- відстань центра ваги відносно центра обертання O_2

$$b_1^2 = BK + \frac{A_2 K}{3} = 4,0 + \frac{13,1}{3} \cdot 8,33 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока1 відносно O_2

$$G_1^2 b_1^2 = 160,6 \cdot 8,33 = 1337,8 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил відносно O_2

$$G_1^2 \text{tg} \varphi_n R_2 = 160,6 \cdot 0,624 \cdot 17,5 = 1753,8 \text{ тм}.$$

Блоки 2, 3. Зусилля $G_2^2 \approx G_2$ (не змінюється)

Блок 4. Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

- площа

$$\omega_4^2 = \frac{D_2 F' \cdot F'F}{2} = \frac{6,9 \cdot 3}{2} = 10,35 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_4^2 = \omega_4^2 \cdot \gamma_n = 10,35 \cdot 1,9 = 19,7 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно центра обертання O_2

$$b_4^2 = CF' + \frac{D_2 F'}{3} = 4,0 + \frac{6,9}{3} = 6,3 \text{ м;}$$

- діючий момент

$$-G_4^2 b_4^2 = -19,7 \cdot 6,3 = -124,1 \text{ тм;}$$

- момент утримувальних сил

$$G_4^2 \operatorname{tg} \varphi_n R_2 = 19,7 \cdot 0,624 \cdot 17,5 = 215,1 \text{ тм.}$$

Зводимо результати обчислення по кривій ковзання відносно центра ковзання O_2 до табл. 1.5.

12. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості укосу підпірної стінки за формулою

$$K_{\text{зап}} = \frac{\sum_{i=1}^4 G_i \operatorname{tg} \varphi_{n.c} R_1 + L_1 C_1 R_1 + L_2 C_2 R_1}{\sum_{i=1}^4 G_i b_i} = \frac{2546,2 + 503,7}{1340,6} \cong 2,28.$$

Таблиця 1.5

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил відносно центра ковзання O_2

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно O_2 , м	Діючий (активно) момент, тм	Утримувальний момент від сил тертя, тм
1	84,5	160,6	8,33	1337,8	1753,8
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	10,35	19,7	6,3	-124,1	215,1
Усього:				1340,6	2546,2

13. Зміщуємо центр обертання кривої ковзання вертикально вгору ще на 2 м:

$$R_3 = 19,5 \text{ м; } O_3 E = 19,0 \text{ м; } O_3 B = 6,0 \text{ м; } O_3 C = 16,0 \text{ м;}$$

Із $\Delta A_3 B O_3$:

$$\cos \alpha_1^3 = \frac{O_3 B}{R_3} = \frac{6,0}{19,5} = 0,3077 \rightarrow \alpha_1^3 = 1,2580;$$

$$\cos \alpha_2^3 = \frac{O_3 C}{R_3} = \frac{16,0}{19,5} = 0,821 \rightarrow \alpha_2^3 = 0,6085;$$

$$\cos \alpha_3^3 = \frac{O_3 E}{R_3} = \frac{19,0}{19,5} = 0,9744 \rightarrow \alpha_3^3 = 0,2269; \alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$L_1^3 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \cdot R_3 = (4,127 + 0,6085 - 2 \cdot 0,353) \cdot 19,5 = 27,55 \text{ м};$$

$$L_2^3 = 2\alpha_3 R_3 = 2 \cdot 0,2269 \cdot 19,5 = 8,85 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$(L_1^3 c_1 + L_2^3 c_2) R_3 = (6,51 \cdot 0,2 + 8,85 \cdot 2,8) \cdot 19,5 = 590,7 \text{ тм}.$$

Визначаємо активні та утримувальні зусилля в блоках.

Блок 1. Півпростір із шару піску *ASK*:

- площа

$$\omega_1^3 = \frac{14,3 \cdot 13}{2} = 92,95 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^3 = \omega_1^3 \gamma_n = 92,95 \cdot 1,9 = 176,6 \text{ т};$$

- відстань центра ваги відносно O_3

$$b_1^3 = BK + \frac{A_3 K}{3} = 4 + \frac{14,3}{3} = 8,77 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 1 відносно O_3

$$G_1^3 b_1^3 = 176,6 \cdot 8,77 = 1548,8 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил відносно O_2

$$G_1^3 \operatorname{tg} \varphi_n R_3 = 176,6 \cdot 0,624 \cdot 19,5 = 2148,9 \text{ тм}.$$

Блоки 2, 3 майже не змінюються.

Блок 4. Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

- площа не змінюється під тиском кривої відносно O_2 .

Результати обчислення зводимо до табл. 1.6.

$$K_{\text{зап}} = \frac{2941,3 + 590,7}{1551,6} = \frac{3532,0}{1551,6} \cong 2,28.$$

Таблиця 1.6

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил відносно центра ковзання O_3

Номер блока	Площа блока, м^2	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_3 : b_i, \text{м}$	Активний момент: $G_i b_i, \text{тм}$	Утримувальний момент від сил тертя $G_1^3 \cdot tg \varphi_n \cdot R_3$
1	92,95	176,6	8,77	1548,8	2148,9
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	- 50,4	127,8
4	10,35	19,7	6,3	- 124,1	215,1
Всього:				1551,6	2941,3

14. Зміщуємо центр обертання вниз по вертикалі на 2,0 м:

$$R_4 = 13,6 \text{ м}; \quad O_4 E = 13,0 \text{ м}; \quad O_4 B = 0 \text{ м}; \quad O_4 C = 10,0 \text{ м};$$

$$\alpha_1 = 90^\circ; \quad \alpha_1^4 = 1,5708;$$

$$\cos \alpha_2^4 = \frac{O_4 C}{R_4} = \frac{10,0}{13,6} = 0,7353 \rightarrow \alpha_2^4 = 0,7447, \quad 42,67^\circ;$$

$$\cos \alpha_3^4 = \frac{O_4 E}{R_4} = \frac{13,0}{13,6} = 0,9559 \rightarrow \alpha_3^4 = 0,298, \quad 17^\circ; \quad \alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжина ліній ковзання

$$\alpha_1^4 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad R_4 = (5708 + 0,7447 - 2 \cdot 0,298) \cdot 13,6 = 23,39 \text{ м};$$

$$\alpha_2^4 = 2\alpha_3 R_4 = 2 \cdot 0,298 \cdot 13,6 = 8,11 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$(\alpha_1^4 c_1 + \alpha_2^4 c_2) R_4 = (3,39 \cdot 0,2 + 8,11 \cdot 2,8) \cdot 13,6 = 372,5 \text{ тм}.$$

Визначаємо активні та утримувальні зусилля у блоках.

Блок 1. Півпростір із шару піску ASK:

- площа

$$\omega_1^4 = \frac{9,6 \cdot 13}{2} = 62,4 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^4 = \omega_1^4 \gamma_n = 62,4 \cdot 1,9 = 117,8 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно O_4

$$b_1^4 = BK + \frac{A_4 K}{3} = 4 + \frac{9,6}{3} = 7,2 \text{ м};$$

- діючий активний момент від ваги блока 1 відносно O_4

$$G_1^4 b_1^4 = 117,8 \cdot 7,2 = 848,2 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил у блоці 1 відносно O_2

$$G_1^4 \operatorname{tg} \varphi_n R_4 = 117,8 \cdot 0,624 \cdot 13,6 = 999,7 \text{ тм}.$$

Блоки 2, 3. Зусилля $G_2^2 \approx G_2$ (не змінюється).

Блок 4. Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

- площа

$$\omega_4^4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,0 = 7,5 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_4^4 = \omega_4^4 \gamma_n = 7,5 \cdot 1,9 = 14,25 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 4 відносно O_4

$$b_4^4 = 4 + \frac{5}{3} = 5,67 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_4^4 b_4^4 = -14,25 \cdot 5,67 = -80,8 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_4^4 \operatorname{tg} \varphi_n R_4 = 14,25 \cdot 0,624 \cdot 13,6 = 120,9 \text{ тм}.$$

Результати обчислення зводимо до табл. 1.7.

$$K_{\text{зап}} = \frac{16979 + 372,5}{894,3} = 2,32.$$

15. Зміщуємо центр обертання вниз по вертикалі ще на 2,0 м:

$$R_5 = 21,5 \text{ м}; \quad O_5 E = 21,0 \text{ м}; \quad O_5 B = 8,0 \text{ м}; \quad O_5 C = 18,0 \text{ м}; \quad \alpha_1 = 90^\circ.$$

Із $\Delta A_5 B O_5$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_5 B}{R_5} = \frac{8,0}{21,5} = 0,3721 \rightarrow \alpha_1^5 = 1,1895; \quad 68,2^\circ;$$

Таблиця. 1.7

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил відносно центра ковзання O_4

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_4 : b_i$, м	Активний момент: $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \operatorname{tg} \varphi_i R_4$
1	62,4	117,8	7,2	848,2	999,7
2	34,5/1,2	88,65	2,0	117,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	7,5	14,25	5,67	-80,8	120,9
Усього				849,3	1697,9

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_5 C}{R_5} = \frac{18,0}{21,5} = 0,8372 \rightarrow \alpha_2^5 = 0,5787; \quad 33,2^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_5 E}{R_5} = \frac{21,0}{21,5} = 0,9767 \rightarrow \alpha_3^5 = 0,2163; \quad 12,4^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$\alpha_1^5 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \vec{B}_5 =$$

$$= 1895 + 0,5787 - 2 \cdot 0,2163 \cdot 21,5 = 28,72 \text{ м};$$

$$\alpha_2^5 = 2\alpha_3 R_5 = 2 \cdot 0,2163 \cdot 21,5 = 9,3 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$\alpha_1^5 c_1 + \alpha_2^5 c_2 \quad \vec{B}_5 = 8,72 \cdot 0,2 + 9,3 \cdot 2,8 \cdot 21,5 = 683,3 \text{ тм}.$$

Визначаємо активні та утримувальні зусилля в блоках.

Блок 1. Півпростір із шару піску ASK:

- площа $\omega_1^5 = \frac{15,8 \cdot 13}{2} = 102,7 \text{ м}^2;$

- вага блока $G_1^5 = \omega_1^5 \gamma_n = 102,7 \cdot 1,9 = 195,1 \text{ т};$

- координата центра ваги відносно O_5

$$b_1^5 = 4 + \frac{15,8}{3} = 9,267 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_1^5 b_1^5 = 195,1 \cdot 9,267 = 1808 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_1^5 \operatorname{tg} \varphi_n R_5 = 195,1 \cdot 0,624 \cdot 21,5 = 2617,5 \text{ тм.}$$

Блоки 2, 3. Зусилля $G_2^2 \approx G_2$ (не змінюється).

Блок 4. Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

$$\text{- площа } \omega_4^5 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 3,0 = 11,25 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_4^5 = \omega_4^5 \gamma_n = 11,25 \cdot 1,9 = 21,4 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно O_5

$$b_4^5 = 4 + \frac{7,5}{3} = 6,5 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_4^5 b_4^5 = -21,4 \cdot 6,5 = -139,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_4^5 \operatorname{tg} \varphi_n R_5 = 21,4 \cdot 0,624 \cdot 21,5 = 287,1 \text{ тм.}$$

Результати обчислень зводимо до табл. 1.8

$$K_{\text{зап}} = \frac{3481,9 + 683,3}{1795,8} = 2,32.$$

Таблиця 1.8

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил відносно центра ковзання O_5

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно O_5 : b_i , м	Активний момент $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \operatorname{tg} \varphi_i R_5$
1	102,7	195,1	9,27	1808,0	2617,5
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	- 50,4	127,8
4	11,25	21,4	6,5	-139,1	287,1
Усього				1795,8	3481,9

16. Вибираємо оптимальну точку O_2 розміщення центра обертання від зміни координат по вертикалі (що проходить через початкову точку O_1) і проводимо через неї горизонталь, уздовж якої зміщуємо точку O_2 вліво на 2,0 м, будуємо точку O_6 , для якої маємо:

$$R_6 = 18,0 \text{ м}; \quad O_6E_1 = 17 \text{ м}; \quad O_6B_1 = 4,0 \text{ м}; \quad O_6C_1 = 14,0 \text{ м};$$

Із $\Delta A_6B_1O_6$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_6B_1}{R_6} = \frac{4,0}{18,0} = 0,222 \rightarrow \alpha_1 = 1,3467 \quad 77,2^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_6C_1}{R_6} = \frac{14,0}{18,0} = 0,777 \rightarrow \alpha_2 = 0,6797 \quad 38,94^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_6E_1}{R_6} = \frac{17,0}{18,0} = 0,9444 \rightarrow \alpha_3 = 0,3349 \quad 19,19^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$\alpha_1^6 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \overrightarrow{B_6} =$$

$$= (3467 + 0,6797 - 2 \cdot 0,3349) \cdot 18,0 = 24,42 \text{ м};$$

$$\alpha_2^6 = 2\alpha_3 R_6 = 2 \cdot 0,3349 \cdot 18,0 = 12,06 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$\alpha_1^6 c_1 + \alpha_2^6 c_2 \quad \overrightarrow{B_6} = (4,42 \cdot 0,2 + 12,06 \cdot 2,8) \cdot 18,0 = 695,7 \text{ тм}.$$

Обчислення активних та утримувальних внутрішніх зусиль у блоках відносно центра обертання O_6 .

Блок 1. Півпростір із шару піску *ASK*:

- площа

$$\omega_1^6 = \frac{11,5 \cdot 13}{2} = 74,75 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^6 = \omega_1^6 \gamma_n = 74,75 \cdot 1,9 = 142,03 \text{ т};$$

- відстань центра ваги блока 1 відносно O_6

$$b_1^6 = B_1 K + \frac{KA_6}{3} = 4 + \frac{11,5}{3} = 9,833 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока G_1^6 відносно O_6

$$G_1^6 b_1^6 = 142,03 \cdot 9,833 = 1396,6 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил від сил тертя в блоці 1

$$G_1^6 \operatorname{tg} \varphi_n R_6 = 142,03 \cdot 0,624 \cdot 18,0 = 1595,3 \text{ тм}.$$

Блок 2. Площа стінки *KSECM* та півпростір із шару суглинку:

- площа

$$\omega_2^{\text{ст}} = 3 \cdot 4,0 + \frac{3,5 + 1,0}{2} \cdot 10 = 34,5 \text{ м}^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} 4,0 \cdot 0,9 = 1,8 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_2^6 = \omega_2^{\text{ст}} \gamma_{\text{см}} + \omega_2^{\text{суг}} \gamma_{\text{суг}} = 34,5 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} 4 \cdot 0,9 \cdot 2,0 = 89,9 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно O_6

$$b_2^6 = C_1 C + \frac{ES}{2} = 2,0 + \frac{4}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока 2 відносно O_6
(за годинниковою стрілкою)

$$G_2^6 b_2^6 = 89,9 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 525,9 \text{ тм}.$$

Блок 3' (блок 3 містить два підблоки 3' і 3''). Площа з піщаного шару *CEFD* і шару суглинку праворуч точки O_6 :

- площа піщаного шару

$$\omega_{3'}^6 = 2 \cdot 3 = 6,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{3'}^6 \text{ (суг)} = \frac{0,9 + 0,95}{2} \cdot 2 = 1,85 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{3'}^6 = \omega_{3'}^6 \gamma_{\text{п}} + \omega_{3'}^6 \text{ (суг)} \gamma_{\text{суг}} = 6,0 \cdot 1,9 + 1,85 \cdot 2,0 = 15,1 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 3' відносно O_6

$$b_3^6 \cong \frac{C_1 C}{2} = \frac{2,0}{2} = 1,0 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 3' відносно O_6 (за годинникової стрілкою)

$$G_3^6 \cdot b_3^6 = 15,1 \cdot 1,0 = 15,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_3^6 \cdot \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_6 = 15,1 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 88,3 \text{ тм}.$$

Блок 3'' (підблок 3) суглинок ліворуч точки O_6 :

- площа піщаного шару

$$\omega_3^6 \cdot \omega_{\text{п}} = 2 \cdot 3 = 6,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_3^6 \cdot \omega_{\text{суг}} = \frac{1,0 + 0,95}{2} \cdot 2 = 1,95 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3^6 = \omega_3^6 \cdot \gamma_{\text{п}} + \omega_3^6 \cdot \omega_{\text{суг}} \cdot \gamma_{\text{суг}} = 6,0 \cdot 1,9 + 1,95 \cdot 2,0 = 15,3 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 3'' відносно O_6

$$b_3^6 = \frac{C_1 F_1}{2} = \frac{2,0}{2} = 1,0 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока 3'' відносно O_6 (проти годинникової стрілки)

$$G_3^6 \cdot b_3^6 = -15,3 \cdot 1,0 = -15,3 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_3^6 \cdot \operatorname{tg} \varphi_c R_6 = 15,3 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 89,5 \text{ тм}.$$

Блок 4' (блок 4 включає два підблоки 4' і 4'') площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

- площа піщаного шару

$$\omega_4^6 \cdot \omega_{\text{п}} = 4 \cdot 3 = 12,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_4^6 \cdot \omega_{\text{суг}} = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 4,0 = 2,0 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{4'}^6 = \omega_{4'}^6 \cdot \gamma_{\Pi} + \omega_{4'}^6 \cdot \gamma_{\text{суг}} = 12,0 \cdot 1,9 + 2,0 \cdot 2,0 = 26,8 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 4' відносно O_6

$$b_{4'}^6 = C_1 F_1 + \frac{F_1 F_2}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока 4' відносно O_6 (проти годинникової стрілки)

$$G_{4'}^6 b_{4'}^6 = -26,8 \cdot 4 = -107,2 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил блок 4' відносно O_6

$$G_{4'}^6 \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_6 = 26,8 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 156,8 \text{ тм}.$$

Блок 4". Площа трикутника $\Delta D_6 F_3 F_4$

- площа

$$\omega_{4''}^6 = \frac{1}{2} 5,3 \cdot 3,0 \cong 8,0;$$

- вага

$$G_{4''}^6 = \omega_{4''}^6 \cdot \gamma_n = 8,0 \cdot 1,9 = 15,2 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 4'' відносно O_6

$$b_{4''}^6 = \frac{D_6 F_3}{3} + C_1 F_3 = \frac{5,3}{3} + 6,0 = 1,707 + 6,0 = 7,77 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока 4'' відносно O_6 (проти годинникової стрілки)

$$G_{4''}^6 b_{4''}^6 = -15,2 \cdot 7,77 = -118,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил блока 4'' відносно O_6

$$G_{4''}^6 \operatorname{tg} \varphi_n R_6 = 15,2 \cdot 0,624 \cdot 18,0 = 170,7 \text{ тм}.$$

Результати обчислень зводимо до табл. 1.9.

$$K_{\text{зап}} = \frac{2626,5 + 695,7}{1530,7} = \frac{3322,2}{1530,7} = 2,17.$$

17. Зміщуємо точку O_2 по горизонталі на 2 м і отримуємо точку O_7 , центр обертання кривої ковзання, для якої маємо:

$$R_7 = 18,8 \text{ м}, \quad O_7 B_7 = 4 \text{ м}, \quad O_7 F_4 = 17 \text{ м}, \quad O_7 F_1 = 14,0 \text{ м}.$$

Таблиця 1.9

Результати обчислень для кривої ковзання з центром обертання O_6

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_6 : b_i$, м	Активний момент: $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \operatorname{tg} \varphi_i R_6$
1	74,75	142,03	9,83	1396,6	1595,3
2	34,5/1,8	89,9	4,0	359,6	525,9
3'	6,0/1,85	15,1	1,0	15,1	88,3
3''	6,0/1,95	15,3	1,0	-15,3	89,5
4'	12,0/2,0	26,8	4,0	-107,2	156,8
4''	8,0	15,2	7,77	-118,1	170,7
Усього				1530,7	2626,5

Із $\Delta O_7 B_2 A_7, O_7 F_1 D_7 O_7 F S$:

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_7 B_2}{R_7} = \frac{4,0}{18,8} = 0,2128 \rightarrow \alpha_1 = 1,3564; \quad 77,7^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_7 F_1}{R_7} = \frac{14,0}{18,8} = 0,7447 \rightarrow \alpha_2 = 0,7307; \quad 41,87^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_7 F}{R_7} = \frac{17,0}{18,8} = 0,9043 \rightarrow \alpha_3 = 0,4412; \quad 25,28^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання:

$$L_1^7 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \cdot R_7 =$$

$$= 1,3564 + 0,7307 - 2 \cdot 0,4412 \cdot 18,8 = 22,65 \text{ м};$$

$$L_2^7 = 2\alpha_3 R_7 = 2 \cdot 0,4412 \cdot 18,8 = 16,59 \text{ м};$$

$$L^7 = L_1^7 + L_2^7 = 22,65 + 16,59 = 39,24 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення по кривій ковзання відносно O_7

$$L_1^7 C_1 + L_2^7 C_2 \cdot R_7 = 22,65 \cdot 0,2 + 16,59 \cdot 2,8 \cdot 18,8 = 958,46 \text{ тм}.$$

Обчислення активних та утримувальних внутрішніх зусиль в окремих блоках відносно O_7 :

Блок 1. Півпростір із шару піску ASK:

- площа

$$\omega_1^7 = \frac{10,3 \cdot 13}{2} = 66,95 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_1^7 = \omega_1^7 \gamma_n = 66,95 \cdot 1,9 = 127,2 \text{ т};$$

- відстань центра ваги блоку 1 відносно O_7

$$b_1^7 = B_2 K + \frac{KA_7}{3} = 8 + \frac{10,3}{3} = 11,433;$$

- діючий момент від ваги блоку G_1^7 відносно O_7

$$G_1^7 b_1^7 = 127,2 \cdot 11,433 = 1454,3 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил від ваги блоку 1 (сил тертя)

$$G_1^7 \text{ tg } \varphi_n R_7 = 127,2 \cdot 0,624 \cdot 18,8 = 1492,2 \text{ тм}.$$

Блок 2. Площа стінки *KSECM* та півпростір із шару суглинку:

- площа бетонної стіни

$$\omega_2^{\text{ст}} = 34,5 \text{ м}^2;$$

- площа суглинку

$$\omega_2^{\text{суг}} = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 4 = 3,0 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_2^7 = \omega_2^{\text{ст}} \gamma_{\text{ст}} + \omega_2^{\text{суг}} \gamma_{\text{суг}} = 34,5 \cdot 2,5 + 3,0 \cdot 2,0 = 92,25 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 2 відносно O_7

$$b_2^7 = F_1 C + \frac{ES}{2} = 4,0 + \frac{4}{2} = 6,0 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блоку 2 відносно O_7 (проти годинникової стрілки)

$$G_2^7 b_2^7 = 92,25 \cdot 6,0 = 553,5 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил (сил тертя) блоку 2

$$G_2^7 \text{ tg } \varphi_{\text{суг}} R_7 = 92,25 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 563,65 \text{ тм}.$$

Блок 3. Площа з піщаного шару *CEFD* і шару суглинку

- площа піщаного шару

$$\omega_{3(\text{п})}^7 = 4 \cdot 3 = 12,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{3(\text{суг})}^7 = \frac{1,8 + 1,5}{2} \cdot 4,0 = 6,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3^7 = \omega_{3(\text{п})}^7 \gamma_{\text{п}} + \omega_{3(\text{суг})}^7 \gamma_{\text{суг}} = 12,0 \cdot 1,9 + 6,6 \cdot 2,0 = 36,0 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 3 відносно O_7

$$b_3^7 = \frac{F_1 C}{2} = \frac{4,0}{2} = 2,0 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку 3 відносно O_7 (за годинниковою стрілкою)

$$G_3^7 b_3^7 = 36,0 \cdot 2,0 = 72,0 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил у блоці 3 відносно O_7

$$G_3^7 \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_7 = 36,0 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 220,0 \text{ тм}.$$

Блок 4' (блок 4 містить два підблоки 4' і 4''). Площа півпростору з піщаного шару $\Delta FF'D$:

- площа піщаного шару

$$\omega_{4'(\text{п})}^7 = 8 \cdot 3 = 24,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{4'(\text{суг})}^7 = \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{4'}^7 = \omega_{4'(\text{п})}^7 \gamma_{\text{п}} + \omega_{4'(\text{суг})}^7 \gamma_{\text{суг}} = 24,0 \cdot 1,9 + 7,2 \cdot 2,0 = 60,0 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 4' відносно O_7

$$b_{4'}^7 = \frac{F_1 D_5}{2} = \frac{8,0}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блоку 4' відносно O_7 (проти годинникової стрілки)

$$G_{4'}^7 b_{4'}^7 = -60,0 \cdot 4 = -240,0 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил (тертя) у блоці 4' відносно O_7

$$G_{4'}^7 \operatorname{tg} \varphi_{\text{суг}} R_7 = 60,0 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 366,7 \text{ тм}.$$

Блок 4"

Площа трикутника $\Delta D_7 D_5 D_8$:

- площа $\omega_{4'}^7 = \frac{1}{2} 4,5 \cdot 3 = 6,75 \text{ м}^2$;

- вага $G_{4'}^7 = \omega_{4'}^7 \gamma_n = 6,75 \cdot 1,9 = 12,83 \text{ т}$;

- координата центра ваги блоку 4" відносно O_7

$$b_{4'}^7 = F_1 D_5 + \frac{D_5 D_7}{3} = 8,0 + \frac{4,5}{3} = 9,5 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блоку 4" відносно O_7 (проти годинникової стрілки)

$$G_{4'}^7 b_{4'}^7 = -12,83 \cdot 9,5 = -121,9 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил блоку 4" відносно O_7

$$G_{4'}^7 \operatorname{tg} \varphi_n R_7 = 12,83 \cdot 0,624 \cdot 18,8 = 150,5 \text{ тм}.$$

Результати обчислень зводимо до табл. 1.10.

$$K_{\text{зап}} = \frac{2793,0 + 958,5}{1717,9} = 2,184.$$

Таблиця 1.10

Результати обчислень для кривої ковзання з центром обертання O_7

Номер блока	Площа блока, м^2	Вага блока, т	Плече моменту відносно O_7 : b_i , м	Активний момент: $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \operatorname{tg} \varphi_i R_7$ тм
1	66,95	127,2	11,43	1454,3	1492,2
2	34,5/3,0	92,25	6,0	553,5	563,65
3	12,0/6,6	36,0	2,0	72,0	220,0
4'	24,0/7,2	60,0	4,0	-240,0	366,6
4"	6,75	12,83	9,5	-121,9	150,5
Усього				1717,9	2793,0

18. Зміщуємо точку центра ваги обертання кривої O_2 вправо в точку O_8 , для якої маємо:

$$R_8 = 17,3 \text{ м}; \quad O_8 B_3 = 4 \text{ м}, \quad O_8 C_4 = 17,0 \text{ м}, \quad O_8 C_3 = 14,0 \text{ м}.$$

$$\text{Із } \Delta O_8 B_3 A_8, \quad O_8 C_3 D_8, \quad O_8 C_4 S :$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_8 C_3}{R_8} = \frac{4,0}{17,3} = 0,2312 \rightarrow \alpha_1 = 1,3375;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_8 C_3}{R_8} = \frac{14,0}{17,3} = 0,8092 \rightarrow \alpha_2 = 0,6279;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_8 C_4}{R_8} = \frac{17,0}{17,3} = 0,9827 \rightarrow \alpha_3 = 0,1865; \alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$L_1^8 = (C_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) R_8 = (3,375 + 0,6279 - 2 \cdot 0,1865) \cdot 17,3 = 27,55 \text{ м};$$

$$L_2^8 = 2\alpha_3 R_8 = 2 \cdot 0,1865 \cdot 17,3 = 6,45 \text{ м}.$$

Загальна довжина

$$L^8 = L_1^8 + L_2^8 = 27,55 + 6,45 = 34,0 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення по кривій ковзання відносно O_8

$$(L_1^8 C_1 + L_2^8 C_2) R_8 = (7,55 \cdot 0,2 + 6,45 \cdot 2,8) \cdot 17,3 = 407,8 \text{ тм}.$$

Обчислення активних і утримуючих внутрішніх зусиль в окремих блоках відносно O_8 :

Блок 1. Півпростір із шару піску ASK:

- площа

$$\omega_1^8 = \frac{14,4 \cdot 13}{2} = 93,6 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^8 = \omega_1^8 \gamma_n = 93,6 \cdot 1,9 = 177,8 \text{ т};$$

- відстань центра ваги блока 1 відносно O_8

$$b_1^8 = B_3 K + \frac{KA_8}{3} = 2,0 + \frac{14,4}{3} = 6,8 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока G_1^8 відносно O_8

$$G_1^8 b_1^8 = 177,8 \cdot 6,8 = 1209,0 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил від ваги блока 1 (сил тертя)

$$G_1^8 \operatorname{tg} \varphi_n R_8 = 177,8 \cdot 0,624 \cdot 17,3 = 1919,4 \text{ тм}.$$

Блок 2. Площа стінки KSECM та півпростір із шару суглинку:

- площа бетонної стіни

$$\omega_2^{\text{ст}} = 34,5 \text{ м}^2;$$

- площа суглинку

$$\omega_2^{\text{суг}} = \frac{1}{2} 0,3 \cdot 4 = 0,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_2^8 = \omega_2^{\text{ст}} \gamma_{\text{ст}} + \omega_2^{\text{суг}} \gamma_{\text{суг}} = 34,5 \cdot 2,5 + 0,6 \cdot 2,0 = 87,5 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 2 відносно O_8

$$b_2^8 = 0;$$

- активний момент від ваги блока 2 відносно O_8

$$G_2^8 b_2^8 = 87,5 \cdot 0 = 0;$$

- момент утримувальних сил

$$G_2^8 \text{tg} \varphi_{\text{суг}} R_8 = 87,5 \cdot 0,325 \cdot 17,3 = 492,0 \text{ тм.}$$

Блок 3. Площа з піщаного шару $CEFD$ і шару суглинку:

- площа

$$\omega_3^8 = \frac{1}{2} 8,4 \cdot 3,0 = 12,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3^8 = \omega_3^8 \gamma_{\text{п}} = 12,6 \cdot 1,9 = 23,94 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 3 відносно O_8

$$b_3^8 = CC_3 + \frac{1}{3} D_8 C = 2,0 + \frac{8,4}{3} = 4,8 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 3 відносно O_8 (проти годинникової стрілки)

$$G_3^8 b_3^8 = -23,94 \cdot 4,8 = -114,9 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил у блоці 3 відносно O_8

$$G_3^8 \text{tg} \varphi_{\text{п}} R_8 = 23,94 \cdot 0,624 \cdot 17,3 = 258,4 \text{ тм.}$$

$$K_{\text{зап}} = \frac{2669,8 + 4078}{1094,1} = \frac{3077,6}{1094,1} = 2,81.$$

Результати обчислень зводимо до табл. 1.11.

Таблиця 1.11

Результати обчислень для кривої ковзання з центром обертання O_8

Номер блока	Площа блока, м ²	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_8 : b_i$, м	Активний момент: $G_i b_i$, тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \operatorname{tg} \varphi_i R_8$
1	93,6	177,8	6,8	1209,0	1919,4
2	34,5/0,6	87,5	0,0	0,0	492,0
3	12,6	23,9	4,8	-114,9	258,4
Усього				1094,1	2669,8

1.8. Аналіз розрахунку підпірної стінки на міцність і стійкість з використання числових методів

Розглянемо класичну конструкцію підпірної стінки з похилою передньою і вертикальною задньою стінками з монолітного бетону. Вихідні дані (рис. 1.11):

- ширина фундаменту – 4,0 м;
- висота стінки від подошви фундаменту $H = 13,0$ м;
- ширина стінки на рівні обрізу фундаменту – 3,5 м;
- ширина по верху – 1,0 м;
- заглиблення фундаменту – 3,0 м;
- об'ємна вага бетону $\gamma = 2,4$ т/м³;
- клас бетону $B20 - R_{bm} = 1170$ кгс/см²; $R_{bm} = 9,18$ кгс/см²;

Характеристики ґрунту засипки: пісок;

- об'ємна вага $\gamma = 1,9$ т/м³;
 - кут внутрішнього тертя $\varphi = 32^\circ$;
 - коефіцієнт зчеплення $C = 0,0$ (для числового розрахунку беремо $C = 0,005$ кгс/см²);
 - модуль загальної деформації ґрунту $E_0 = 250,0$ кгс/см²;
- $\gamma_0 = 0,32$.

Характеристики основи: суглинок;

- об'ємна вага $\gamma = 2,0$ т/м³;
- кут внутрішнього тертя $\varphi = 18^\circ$;
- коефіцієнт зчеплення $C = 0,28$ кгс/см²;

модуль загальної деформації ґрунту, коефіцієнт Пуассона $E_0 = 150,0$ кгс/см²; $\gamma_0 = 0,34$.

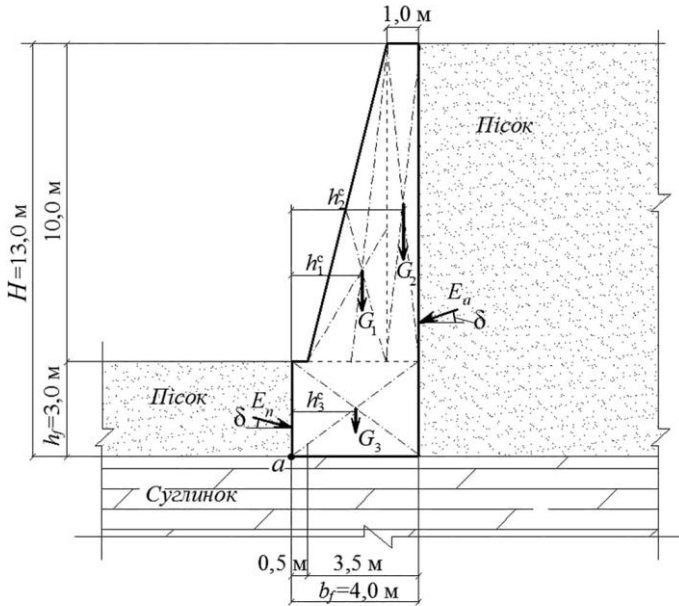


Рис. 1.11. Конструктивна схема підпірної стінки

Алгоритм розрахунку конструкції підпірної стінки:

- на міцність бетонної конструкції;
- на стиск, зсув і згин;
- на стійкість;
- на перекидання відносно ребра a та визначення коефіцієнта запасу.

Розрахунок виконано аналітично та чисельно на основі моментної схеми скінченних елементів (МССЕ)[2]. Для розрахунку на стійкість використано метод круглоциліндричних поверхонь [3]. Виконано порівняльний аналіз результатів інженерного та числового розрахунків конструкції підпірної стінки.

Для реалізації числового розрахунку взаємодії підпірної стінки та ґрунтового півпростору у плоскій постановці побудовано відповідну дискретну модель і розрахункову схему півпростору одиничної товщини (рис. 1.12). Розміри сіткової ділянки півпростору становлять $M1 \times M2 \times M3 = 2 \times 33 \times 36$ ($NUX = 2 \times 33 \times 36 =$

2376), що відповідає кількості рівнянь $K = NUX = 2376 \times 3 = 7128$ без урахування накладених в'язів.

Розміри півпростору по довжині $L = 3400,0$ см і по ширині (глибині) $B = 2100,0$ см. Дискретна модель дає змогу дослідити активну зону півпростору під подошвою фундаменту підпірної стінки на глибину до 8 м ($H_C = 800,0$ см).

На розрахунковій схемі представлені параметри для визначення радіуса і довжини кривої ковзання ґрунтової призми відповідно до методу круглоциліндричної поверхні [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,3467 \text{ рад} \equiv 77,2^\circ; \quad \lambda_2 = 0,6797 \text{ рад} \equiv 38,94^\circ; \\ \lambda_3 &= 0,3349 \text{ рад} \equiv 19,19^\circ; \quad \lambda = L_1 + L_2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Радіус кривої розраховувався за критерієм найменшого коефіцієнта запасу [3] і остаточно визначений за шість ітерацій $R_6 = 18,0$ м.

Відповідно до рівнянь (1.36) (рис. 1.12)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3) R_6; \quad \lambda_2 = 2 \lambda_3 R_6; \\ \lambda_1 &= (1,3467 + 0,6797 - 2 \cdot 0,3349) \cdot 18,0 = 24,42 \text{ м}; \\ \lambda_2 &= 2 \cdot 0,3349 \cdot 18,0 = 12,06 \text{ м}; \quad \lambda = 24,42 + 12,06 = 36,48 \text{ м}. \end{aligned}$$

Зображено колову криву ковзання призми руйнування з певним запасом стійкості на рис. 1.12. Знаком x показано локальні елементи, у яких пластичні деформації досягають максимуму через втрату стійкості підпірною стінкою.

Оскільки для числового розрахунку коефіцієнт зчеплення не може дорівнювати нулю, то його значення у випадку засипання піском беруть рівним $C = 0,005$ кг/см². Визначаються максимальні активний та пасивний тиски у точках з максимальною глибиною за скінченноелементної дискретизації, тобто в СК $n_6^a = 959$, $n_6^n = 947$, для яких параметри глибини становлять відповідно $h_1 = 1250,0$ см і $h_2 = 250,0$ см. Бічний тиск на підпірну стінку з урахуванням еквівалентного тиску, який заміняє величину зчеплення, визначають за формулами [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_2^a &= \sigma_{\phi 2}^a - \sigma_{c 2}^a = \gamma_1 h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) - 2c \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right); \\ \sigma_2^n &= \gamma_1 h_2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) + 2c \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right); \end{aligned}$$

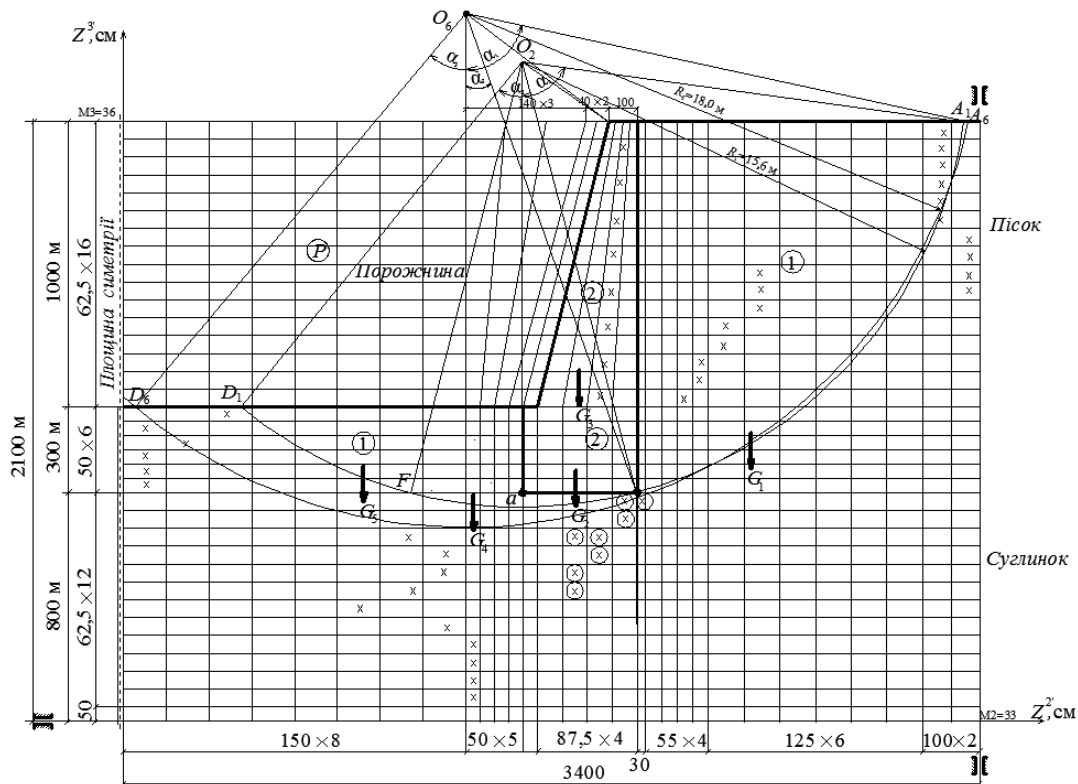


Рис. 1.12. Дискретна модель і розрахункова схема взаємодії підпірної стінки та ґрунтового півпростору

$$\begin{aligned} \sigma_2^a &= 0,0019 \cdot 1250 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{32}{2} \right) - \\ &- 2 \cdot 0,005 \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{32}{2} \right) \cong 0,73 \text{ кг/см}^2; \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\sigma_2^n = 0,0019 \cdot 250 \operatorname{tg}^2 \cdot 61^\circ + 2 \cdot 0,005 \operatorname{tg} \cdot 61^\circ \cong 1,564 \text{ кг/см}^2. \quad (1.38)$$

За результатами числового розрахунку згідно з розрахунковою схемою (рис. 1.12) у зазначених точках $n_g^a = 959$, $n_g^n = 947$ (табл. 1.12 і 1.13) отримано значення активного та пасивного тисків, які можна порівняти з аналітичними розрахунками (1.37) та (1.38):

$$\Delta\sigma_2^a = \frac{0,78 - 0,73}{0,73} \cdot 100 \cong 6,8\%; \quad (1.39)$$

$$\Delta\sigma_2^p = \frac{1,48 - 1,564}{1,564} \cdot 100 \cong 5,4\%. \quad (1.40)$$

Вважаємо, що розбіжність аналітичного та числового розрахунків (1.39), (1.40) за визначенням активного і пасивного тисків цілком задовільні.

За числової реалізації розглянутого прикладу огорожувальної конструкції розраховувалися варіанти за різними критеріями навантаження та рівнянь стану в заграничному стані [5]:

1) з урахуванням (*lode = ,true.*) і без урахування (*lode = ,falce.*) параметра «Лоде-Надаї» під час описання критерію руйнування поверхні (навантажування);

2) урахування або неврахування впливу поперечної анізотропії багатопшару на фізико-механічні характеристики ґрунтових шарів (без урахування коригування E_0 ; з урахуванням коригування E_0).

За результатами визначення активних і пасивних тисків на стінку побудовано епюри і відповідні гістограми для визначення дискретних * повних тисків (рис.1.13). Урахування параметра * (*lode = true.*) на кривих ділянках під час визначення тисків на стінку зумовлює певну нелінійність зміни функції тиску, а без його врахування епюра тисків має майже лінійний характер (без урахування спотворень) – друга епюра.

Таблиця 1.12

Інтенсивність тиску на задню та передню грані підпірної стінки. Активний тиск

Номер точки	Номер-вузла	σ_N^{22} , кгс/см		σ_N^{22} без коригування при <i>lode = false</i>	Осереднені σ_N^{22} , кгс/см	σ^{23} , з коригування, кгс/см	Осереднені $\bar{\sigma}^{23}$	Реакція * $\bar{\sigma}^{23} h_u$
		без коригування	із коригуванням					
1	893	0,31	0,18	0,67	-0,39	1,25	0,7	+87,5
2	959	-1,09	-1,08	-0,78		0,15		
3	1025	-1,06	-1,03	-0,74	-1,16	-0,0065	-0,11	-13,75
4	1091	-1,26	-1,22	-0,89		-0,15		
5	1157	-1,20	-1,17	-0,90	-1,14	-0,22	-0,25	-31,25
6	1223	-1,12	-1,10	-0,89		-0,28		
7	1289	-1,05	-1,04	-0,86	-1,01	-0,32	-0,34	-42,5
8	1355	-0,97	-0,97	-0,82		-0,36		
9	1421	-0,90	-0,89	-0,77	-0,85	-0,38	-0,385	-48,13
10	1487	-0,83	-0,81	-0,72		-0,39		
11	1553	-0,75	-0,73	-0,68	-0,69	-0,40	-0,40	-50,0
12	1619	-0,67	-0,64	-0,63		-0,40		
13	1685	-0,59	-0,56	-0,59	-0,53	-0,40	-0,40	-50,0
14	1751	-0,51	-0,49	-0,54		-0,40		
15	1817	-0,44	-0,40	-0,49	-0,59	-0,44	-0,42	-52,5
16	1883	-0,49	-0,77	-0,44		-0,54		
17	1949	-0,72	-0,78	-0,39	-0,56	-1,48	-1,01	-101,0
18	2015	-0,64	-0,33	-0,33		-0,22		
19	2081	0,07	+0,33	-0,25	+0,31	-0,24	-0,23	-23,0
20	2147	0,19	+0,29	-0,13		-0,23		
21	2213	0,17	+0,20	-0,00	+0,55	-0,23	-0,36	-36,0
22	2279	0,80	+0,89	+0,95		-0,49		
Усього							-360,63	

Таблиця 1.13

Пасивний тиск

Но- мер точки	Но- мер вузла	σ_N^{22} , кгс/см		σ_N^{22} , без ко- ригування <i>lode=false.</i>	Осеред- ний σ_N^{22} , кгс/см
		без коригу- вання	з коригува- вання		
1	881	-0,81	-1,04	-0,571	-0,126
2	947	-1,82	-1,48	-1,32	
3	1013	-1,44	-1,27	-1,20	-0,126
4	1079	-1,68	-1,36	-1,32	
5	1145	-1,79	-1,42	-1,45	-2,045
6	1211	-2,97	-2,12	-2,64	

Згідно з поданими до епюр тисків і гістограм визначаємо повний активний і пасивний тиски і порівнюємо результати з аналітичними значеннями, які визначаємо за формулами:

$$E_a = \frac{1}{2} \sigma_2^a h_1 \cdot 1; \quad (1.41)$$

$$E_p = 2h_2 c \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \gamma_1 h_2^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.42)$$

Підставляючи значення параметрів у рівняння (1.41) і (1.42), отримаємо:

$$\sigma_2^a = 0,2019 \cdot 1300 \operatorname{tg}^2 29^\circ - 0,01 \operatorname{tg} 29^\circ = 0,753 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot 0,753 \cdot 1300 \cdot 1 = 489,45 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_p = 300,0 \cdot 0,018 + \frac{1}{2} \cdot 1,855 \cdot 300 = 286,65 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_a - E_p = 489,45 - 286,65 = 202,8 \text{ кг.}$$

Числові результати за гістограмою (див. рис. 1.13) і табл. 1.14 мають такі значення:

$$E'_a = \sum_{i=1}^9 R_i^a = 690,25 \text{ кгс};$$

$$E'_p = \sum_{i=1}^3 R_i^p = 507,6 \text{ кгс};$$

$$E'_a - E'_p = 690,25 - 507,6 = 182,65 \text{ кгс.} \quad (1.43)$$

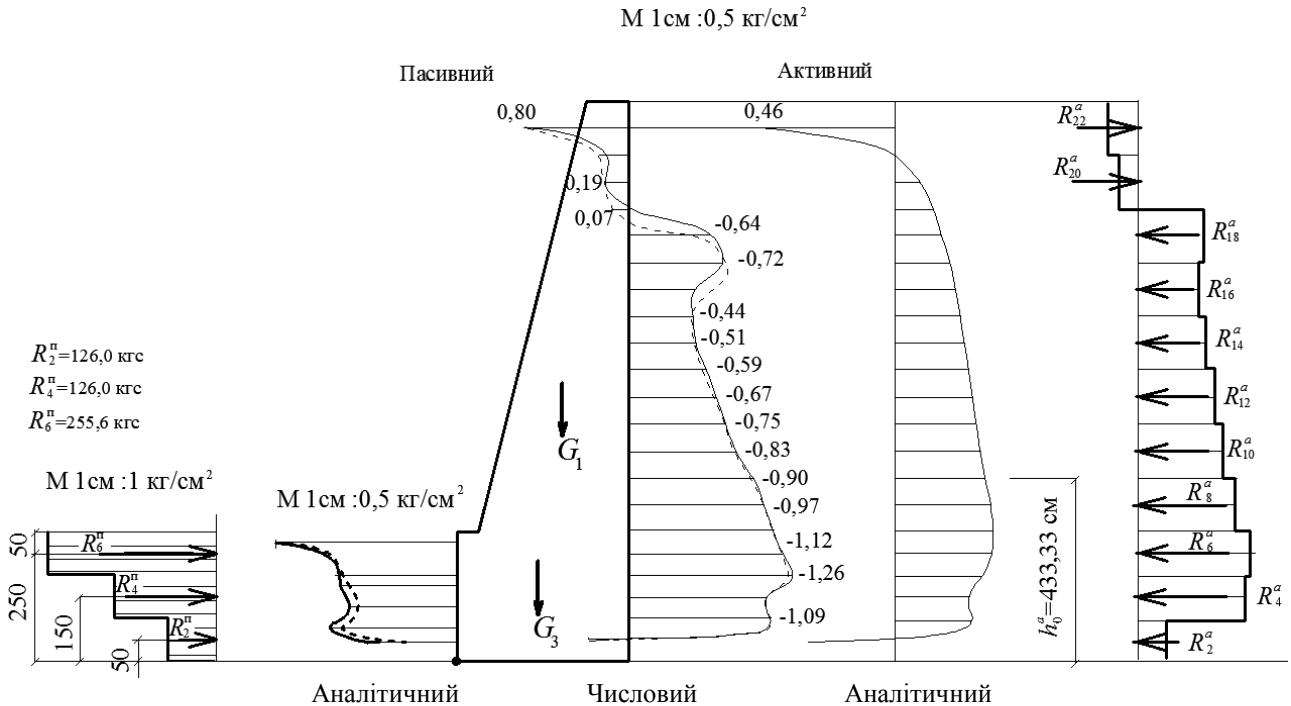


Рис. 1.13. Епюри та гістограми активного і пасивного тиску на підпірну стінку

Різниця тисків при аналітичному розрахунку з урахуванням кута тертя між ґрунтом і стінкою $\delta = 28$ та числовому розрахунку складає:

$$\Delta E' \% = \frac{(82,6 - 202,8 \cos 20^\circ)}{202,8} \approx 3,9 \%$$

Розрахунок стійкості стінки на зсув при інженерному (аналітичному) розрахунку виконуємо з використанням формули [3]

$$K_{\text{зап}} = \frac{P_{\text{см}} \operatorname{tg} \varphi + W_p c_0}{E_a - E_p \cos \delta} \quad (1.44)$$

де $P_{\text{см}}$ – вага перерізу стінки одиничної ширини; φ – кут внутрішнього тертя ґрунту основи по підшві фундаменту підпірної стінки

Таблиця 1.14

Повний тиск, перекидний та утримувальний моменти при дії ґрунту на підпірну стінку

Активний тиск			
Номер точки	Реакції від активного тиску, кгс	Плече реакції відносно ребра a , см	Момент перекидання, кгс см
2	-39,0	50,0	-1950,0
4	-116,0	150,0	-17400,0
6	-114,0	250,0	-28500,0
8	-126,25	362,5	-45765,625
10	-106,25	487,5	-51796,875
12	-86,25	612,5	-52828,125
14	-66,25	737,5	-48859,375
16	-73,25	862,5	-63609,375
18	-70,0	987,5	-69125,0
20	+38,75	1112,5	+43109,375
22	+68,75	1237,5	+85078,125
Усього	-690,25	Всього	-251646,875
Пасивний тиск			
Номер точки	Реакції від пасивного тиску, кгс	Плече реакції відносно ребра a , см	Утримувальний момент, кгс см
2	+126,0	50,0	+6300,0
4	+126,0	150,0	+18900,0
6	+255,6	250,0	+63900,0
Усього	507,6	Усього	89100,0

(для суглинку $\varphi = 18^\circ$); W_p - площа підшови фундаменту підпірної стінки одиничної товщини; δ - кут внутрішнього тертя між вертикальними поверхнями підпірної стінки та ґрунту засипки, $\delta = 20^\circ$; C_0 - коефіцієнт зчеплення ґрунту в основі фундаменту стінки, $C_0 = 0,28 \text{ кгс/см}^2$.

Статична вага перерізу підпірної стінки дорівнює сумі ваги окремих бетонних відсіків (див. рис. 1.11) переріз одиничної товщини ($h_0 = 1,0 \text{ см}$)

$$P_{\text{см}} = G_1 + G_2 + G_3,$$

$$\text{де } G_1 = h_0 S_1 \gamma_\delta = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 300,0 \text{ кг};$$

$$G_2 = h_0 S_2 \gamma_\delta = 1 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 240,0 \text{ кг};$$

$$G_3 = h_0 S_3 \gamma_\delta = 1 \cdot 400 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 288,0;$$

$$P_{\text{см}} = 300 + 240 + 288 = 828 \text{ кгс.}$$

Остаточню маємо:

$$K_{\text{зап}} = \frac{828 \text{ tg } 18^\circ + 400 \cdot 1 \cdot 0,28}{89,45 - 286,65 \overline{\text{с}} \cos 20^\circ} = \frac{381,02}{190,57} \cong 2,0 \quad (1.45)$$

Для числового розрахунку на зсув використовуємо формулу (1.44), але з використанням значення знаменника за отриманими числовими результатами (див. формулу (1.43)):

$$K_{\text{зап}} = \frac{381,02}{182,65} \cong 2,09. \quad (1.46)$$

Таким образом, числовий результат (1.46) майже збігається з аналітичним (1.45).

Стійкість підпірної стінки на перекидання відносно ребра (див. рис. 1.10) визначаємо за формулами:

$$K_{\text{зап}} = \frac{M_{\text{ут}}}{M_{\text{пк}}}, \quad (1.47)$$

$$\text{де } M_{\text{пк}} = E_a \cos \delta h_0^a; \quad h_0^a = \frac{H}{3} \quad (1.48)$$

для аналітичного розрахунку;

$$M'_{\text{пк}} = \sum_{i=1}^9 R_i^a h_0^i$$

для числового розрахунку з використанням гістограми, зображеної на рис. 1.13. Добутки реакцій в ділянках гістограми на відповідні «плечі» зведено до табл. 1.14, тобто маємо

$$M'_{\text{пк}} = -251646,875 \text{ кгс} = -2,5165 \text{ тм}. \quad (1.49)$$

Відповідно до формули (1.48)

$$M_{\text{пк}} = 489,45 \cos 20^\circ \frac{1300}{3} = 489,45 \cdot 0,94 \cdot 433,33 = 1,994 \text{ тм}. \quad (1.50)$$

Утримувальний момент для аналітичного розрахунку визначаємо за формулою

$$M_{\text{ym}} = G_1 h_1^c + G_2 h_2^c + G_3 h_3^c + E_n \cos \delta \frac{h_f}{3} + E_a \sin \delta b_f. \quad (1.51)$$

Відповідно рівняння (1.51) маємо:

$$M_{\text{ym}} = 300 \left(300 \frac{250}{3} \right) + 240 (400 - 50) + 288 \frac{400}{2} + 286,65 \cos 20^\circ \times \\ \times \frac{300}{3} + 489,45 \sin 20^\circ \cdot 400 = 300501,95 \text{ кг} \cdot \text{см} \quad (1.52)$$

Підставляючи значення із формул (1.49) – (1.52) до виразу (1.47), отримаємо

$$K_{\text{зап}} = \frac{3,0050196 \cdot 10^5}{1,994 \cdot 10^5} = 1,507. \quad (1.53)$$

Утримувальний момент за результатами числового розрахунку визначається моментом від ваги окремих відсіків перерізу підпірної стінки аналогічно виразу (1.51) та моменту від горизонтальної складової повного пасивного тиску (табл. 1.14) і вертикальної складової повного активного тиску $\bar{\sigma}^{23} h_u$ (див. табл. 1.12), тобто

$$M'_{\text{ym}} = \sum G_i h_i^c + R_i^n h_n^i + \sum \bar{\sigma}^{23} h_u = 300 \cdot 216,667 + \\ + 240 + 288 \cdot 200 + 89100 + 360,63 \cdot 400 = 439952,1 \text{ кг} \cdot \text{см} \quad (1.54)$$

Ураховуючи рівняння (1.54), коефіцієнт запасу в розрахунках на перекидання підпірної стінки відносно ребра a при обчисленні на підставі числових результатів становить

$$K'_{\text{зап}} = \frac{M'_{\text{ут}}}{M'_{\text{пк}}} = \frac{4,3995 \cdot 10^5}{2,5165 \cdot 10^5} \cong 1,748,$$

що цілком узгоджується з величиною (1.53).

Перевіряємо за міцністю матеріалу підпірну стінку за поздовжнього згину – відцентрове стискання нормальних перерізів. Розглядаючи надземну конструкцію підпірної стінки відповідно до скінченноелементної моделі (див. рис. 1.11), використовуємо числові результати за нормальними напруженнями σ_N^{33} у крайніх СЕ (лівий і правий): ліворуч у точках 1 - 9 ($N = 1281-2271$ через два шари 1 3 2) і праворуч: $N = 1287 - 2277$ теж за нумерації вузлів через 1 3 2. Результати зведено до табл. 1.15, при цьому еюра напружень у перерізі подається у вигляді мембранної (постійної вздовж перерізу) і чистого згину:

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma_{33}^{\text{лів}} - \sigma_{33}^{\text{прав}}}{2}; \quad (1.55)$$

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma_{33}^{\text{лів}} - \sigma_{33}^{\text{прав}}}{2}; \quad (1.56)$$

$$M_u^i = \sigma_u^i W^i, \quad i = 1,9; \quad (1.57)$$

$$N_*^i = \sigma_{\sigma}^i A^i, \quad i = 1,9. \quad (1.58)$$

Результати обчислень внутрішніх зусиль згідно з рівняннями (1.55)–(1.58) на підставі числового розрахунку з використанням нормальних напружень зведено до табл. 1.15.

Перевіряємо розрахункові значення внутрішніх зусиль для матеріалу підпірної стінки – бетону класу В20 для граничного стану за першою групою [6]:

$R_{bt} = 9,18$ кгс/см² – призмової осьової міцності на розтяг зразка;

$R_{bn} = 117$ кгс/см² – призмової міцності на стискання зразка.

Площа перерізу, що розглядається, $A = 1 \cdot 256,25 = 256,25$ см² (див. номер точки 4 табл. 1.15).

Екстремальні значення напружень за дії на переріз, що розглядається, нормальної сили і згинального моменту обчислюємо за формулою [6]:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N^{\text{сеп}}}{A} \pm \frac{M_{\max}}{W_{\text{пер}}}. \quad (1.59)$$

Для перерізу 4 маємо (табл. 1.15):

$$W_{1677-1683} = \frac{bh_c^2}{6} = \frac{10 \cdot 256,25^2}{6} = 1,0944 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

Таблиця 1.15

Погонні згинальні моменти в одиничному перерізі підпірної стінки за її висотою
Варіант з коригуванням ,*lode=false*.

Номер точки	Номер лівих СЕ	σ_N^{33} , кгс/см ²	Номер правих СЕ	σ_N^{33} , кгс/см ²	$\sigma_{(u)}$, кгс/см ²	h_i	Коефіцієнт k	M_u , тм	$\sigma_{(m)}$, кгс	N , кгс/т
1	1281	-2,63	1287	-4,18	+0,775	350,0	$0,2042 \cdot 10^{-5}$	0,15	-3,14	-1191,75
										-1,1918
2	1413	-0,99	1419	-4,82	+1,915	318,75	$0,1693 \cdot 10^{-5}$	0,3242	-2,905	-925,97
										-0,926
3	1545	+0,26	1551	-5,56	+2,91	287,5	$0,1378 \cdot 10^{-5}$	0,401	-2,65	-761,88
										-0,7619
4	1677	+1,41	1683	-6,11	+3,76	256,25	$0,1094 \cdot 10^{-5}$	0,4113	-2,35	-602,19
										-0,602
5	1809	+2,39	1815	-6,39	+4,39	225,0	$0,0844 \cdot 10^{-5}$	0,371	-2,0	-450,0
										-0,45
6	1941	+3,07	1947	-6,23	+4,65	193,75	$0,0626 \cdot 10^{-5}$	0,291	-1,58	-306,13
										-0,306
7	2073	3,14	2079	-5,33	+4,24	162,5	$0,0440 \cdot 10^{-5}$	0,187	-1,095	-177,94
										-0,178
8	2205	+2,00	2211	-3,16	+2,58	131,25	$0,0287 \cdot 10^{-5}$	0,074	-0,58	-76,125
										-0,076
9	2271	+0,73	2277	-2,12	+1,43	115,625	$0,0223 \cdot 10^{-5}$	0,032	-0,695	-80,36
										-0,080

$$\sigma_{\max} = \frac{-602,19}{256,25} + \frac{0,4113 \cdot 10^5}{1,0994 \cdot 10^4} = -2,35 + 3,76 = 1,41 \text{ кгс/см}^2.$$

З урахуванням екстраполяції лінійної функції згинальних напружень від площадки в центрі СЕ і на його краю (див. розрахункову схему на рис. 1.11 і табл. 1.15) отримуємо:

$$\sigma_c \equiv \sigma_{\max} = 1,41 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\sigma_c \cdot 128,25}{96,04} = 1,88 \text{ кгс/см}^2 < 2R_{bt} = 2,0 \cdot 9,18 = 18,36 \text{ кгс/см}^2; \quad (1.60)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-602,19}{256,25} - \frac{0,4113 \cdot 10^5}{1,0944 \cdot 10^4} = -2,35 - 3,76 = -6,11 \text{ кгс/см}^2$$

Ураховуючи екстраполяції за аналогією з рівнянням (1.60) маємо:

$$\sigma_c = \sigma_{\min} = -6,11 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\sigma_c \cdot 128,25}{96,094} = -8,15 \text{ кгс/см}^2 < 2R_{bn} = -117,0 \text{ кгс/см}^2 \quad (1.61)$$

$$\text{Довжини половини перерізу } h_i = \frac{250n}{8} + 100;$$

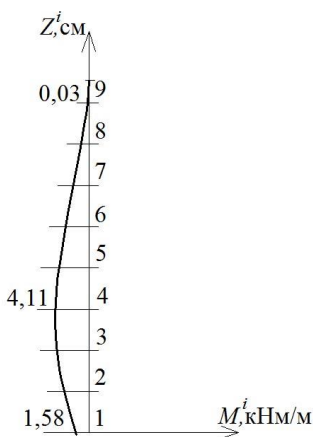


Рис. 1.14. Епюра згинних моментів зведених до нейтральної осі змінних перерізів

$$\sigma_{N_i}^{33} = \frac{\sigma_N^{33} \left(\overset{\sim}{\leftarrow} - \overset{\sim}{\rightarrow} \right)}{2};$$

$$M_{(u)} = \frac{\sigma_{N_i} h^2}{6}; \quad M_u = Rk;$$

$$N = \sigma_{N_i} \left(\overset{\sim}{\leftarrow} \overset{\sim}{\rightarrow} \right); \quad k = \frac{h^2}{6}.$$

За даними табл. 1.15 побудовано епюру згинальних моментів (рис. 1.14) по висоті конструкції підпірної стінки відносно нейтральної осі змінних перерізів.

Для максимального моменту в перерізі 4 і відповідній цьому перерізу поздовжній силі за формулою (1.59) визначено екстремальні напруження.

Значення нормальних напружень (1.60), (1.61) свідчать, що клас бетону В20 задовольняє умови міцності; додаткове армування можна виключити за даними статичного розрахунку.

У цьому прикладі для визначення характеру деформації півпростору переміщення - просадки від чисто компресійних впливів вага ґрунтових мас вилучена, тобто враховуються переміщення, які спричинені порушенням рівноваги від утворення порожнини в ґрунтовому півпросторі.

Побудована SE-модель, що містить $n_e = (m2-1) \times (m3-1) = (33-1) \times (36-1) = 1120$ SE без урахування порожнини в регулярній сітковій ділянці ($16 \times 13 = 208 \rightarrow n_b^p$) і накладених в'язів у розрахунковій схемі (див. рис. 1.12).

Результати числового розрахунку додаткових переміщень зведено до табл. 1.16–1.19, у яких наведено переміщення вузлів: розміщених на задній грані підпірної стінки (табл. 1.16); на дні котловану – нижній площині укусу (табл. 1.17); на вільній поверхні півпростору (табл. 1.18); та на подошві фундаменту підпірної стінки (табл. 1.19).

Отримати числові результати переміщень під час дослідження неоднорідного ґрунтового півпростору досить важко, що зумовлено неадекватним описом фізико-механічних властивостей вузлів, визначених лабораторними та польовими дослідженнями, проявом поперечної анізотропії багатопарового півпростору та ін. [3; 4; 5].

Таблиця 1.16

Додаткові переміщення вузлів задньої грані підпірної стінки

Номер точки	Номер вузла	без коригування $E_{(z)}$		із коригування $E_{(z)}$		u_N^2 см, без коригування $E_{(z)}$, <i>lade=false</i> .
		u_N^2 см	u_N^3 см	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см	
1	893	-2,90	4,08	-1,72	2,16	-3,13
2	959	-2,71	4,08	-1,62	2,16	-2,93
3	1025	-2,52	4,08	-1,53	2,16	-2,73
4	1091	-2,33	4,08	-1,43	2,16	-2,53
5	1157	-2,15	4,08	-1,34	2,16	-2,34
6	1223	-1,96	4,08	-1,24	2,16	-2,14
7	1289	-1,77	4,08	-1,15	2,16	-1,94
8	1355	-1,53	4,08	-1,03	2,16	-1,69

Продовження табл. 1.16

Номер точки	Номер вузла	без коригування		із коригування		$u_N^{2'}$ см, без коригування $E_{(z)}$, <i>lade=false.</i>
		$E_{(z)}$		$E_{(z)}$		
		u_N^2 см	u_N^3 см	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см	
9	1421	-1,30	4,08	-0,91	2,16	-1,44
10	1487	-1,06	4,08	-0,79	2,16	-1,19
11	1553	-0,82	4,08	-0,67	2,16	-0,94
12	1619	-0,59	4,08	-0,55	2,16	-0,69
13	1685	-0,35	4,08	-0,43	2,16	-0,44
14	1751	-0,11	4,08	-0,30	2,16	-0,19
15	1817	+0,13	4,08	-0,18	2,15	0,06
16	1883	+0,37	4,08	-0,06	2,15	0,31
17	1949	0,61	4,08	0,07	2,15	0,57
18	2015	0,85	4,08	0,19	2,15	0,82
19	2081	1,09	4,08	0,32	2,15	1,07
20	2147	1,33	4,08	0,45	2,15	1,33
21	2213	1,58	4,08	0,58	2,15	1,59
22	2279	1,82	4,08	0,71	2,15	1,84
23	2345	2,07	4,08	0,84	2,15	2,10

Таблиця 1.17

Додаткові переміщення вузлів з урахуванням коригування на
дні котловану

Номер точки	Номер вузла	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см
1	1255	0	+6,23
2	1257	-0,14	6,23
3	1259	-0,26	6,21
4	1261	-0,36	6,17
5	1263	-0,41	6,09
6	1265	-0,42	5,95
7	1267	-0,40	5,71
8	1269	-0,42	5,32
9	1271	-0,52	4,68
10	1273	-0,61	4,41
11	1275	-0,77	4,00
12	1277	-0,99	3,46
13	1279	-1,15	2,93
14	1281	-1,15	2,83

Таблиця 1.18

Додаткові переміщення вузлів з урахуванням коригування на вільній поверхні

Номер точки	Номер вузла	u_N^2 см	u_N^3 см
1	2	3	4
1	2345	+0,84	+2,14
2	2347	0,87	1,96
3	2349	0,94	1,66
4	2351	1,00	1,40
5	2353	1,04	1,19
6	2355	1,05	1,00
7	2357	1,02	0,55
8	2359	0,94	0,15
9	2361	0,84	-0,13
10	2363	0,74	-0,38
11	2365	0,64	-0,58
12	2367	0,53	-0,75
13	2369	0,40	-0,92
14	2371	0,27	-1,03
15	2373	0,13	-1,11
16	2375	0,00	-1,13

Таблиця 1.19

Додаткові переміщення точок, що лежать на підшві фундаменту

Номер точки	Номер вузла	u_N^2 , см	u_N^3 , см
1	883	-1,72	+2,93
2	885	-1,72	2,83
3	887	-1,72	2,67
4	889	-1,72	2,50
5	891	-1,72	2,33
6	893	-1,72	2,33

Для розв'язання цієї тестової задачі розглядалися три варіанти рівнянь стану ґрунту: 1) без урахування коригування модуля загальної деформації ґрунту як функції від глибини півпростору; 2) з урахуванням коригування модуля загальної деформації як функ-

ції $E(z)$; 3) без урахування параметра Лоде-Надаї в розглянутому критерії Мізеса. Ці три варіанти розв'язання задачі стійкості підпійної стінки наведено в результатах переміщень задньої грані підпійної стінки (див. табл. 1.16) і відповідно побудовані епюри вузлових переміщень u_N^2 (3'), що показані на рис. 1.15.

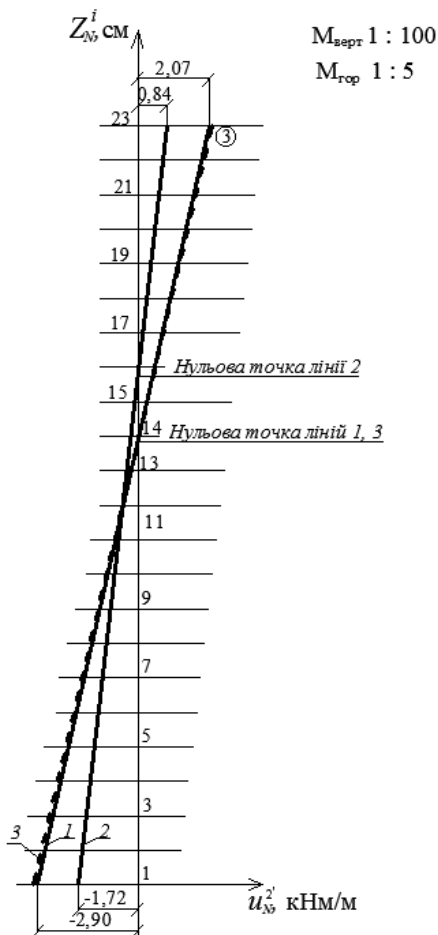


Рис. 1.15. Епюри переміщень задньої грані підпійної стінки:

1 – без урахування коригування $E(z)$; 2 – з урахуванням коригування $E(z)$; 3 – без урахування коригування $E(z)$ і параметра Лоде-Надаї

Епюри вузлових переміщень, що лежать на нижній поверхні укосу (на рівні обрізу фундаменту підпірної стінки) і на вільній верхній поверхні укосу побудовані на рис. 1.16, 1.17. Переміщення точок підпірної стінки – на задній грані і на підшві мають лінійний характер, причому за характером переміщень задньої грані підпірної стінки спостерігається поворот стінки як жорсткого цілого проти годинникової стрілки в бік активного впливу ґрунту на підпірну стінку.

Таким чином, за характером усіх наведених епюр переміщень можна зробити висновок, що стінка зазнає оберտального руху спільно з призмою сповзання. Центр цього оберտального руху розміщений у точці O_6 , визначений за методом круглоциліндричних поверхонь [3]. Задача з розрахунку стійкості основи підпірної стінки розв'язувалася за мінімізацією функції коефіцієнта запасу стійкості, при цьому точка центра рухалася три рази по горизонталі і два рази по вертикалі. Радіус дуги ковзання призми $R = 18,0$ м вимірюється від точки O_6 до нижньої точки задньої грані стінки. При виконанні числового розрахунку СК, у яких спостерігалися найбільш пластичні деформації групуються з певним розкидом у ділянці теоретичної лінії ковзання, при цьому поверхня ковзання складається з комбінації дуг з радіусом кривизни від $R_{\min} = 18,5$ до $R_{\max} = 21,0$ м (див. рис.1.12).

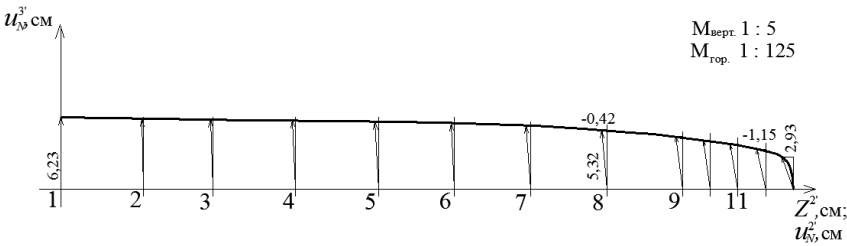


Рис. 1.16. Епюра вузлових векторів переміщень, розміщені на нижній поверхні укосу

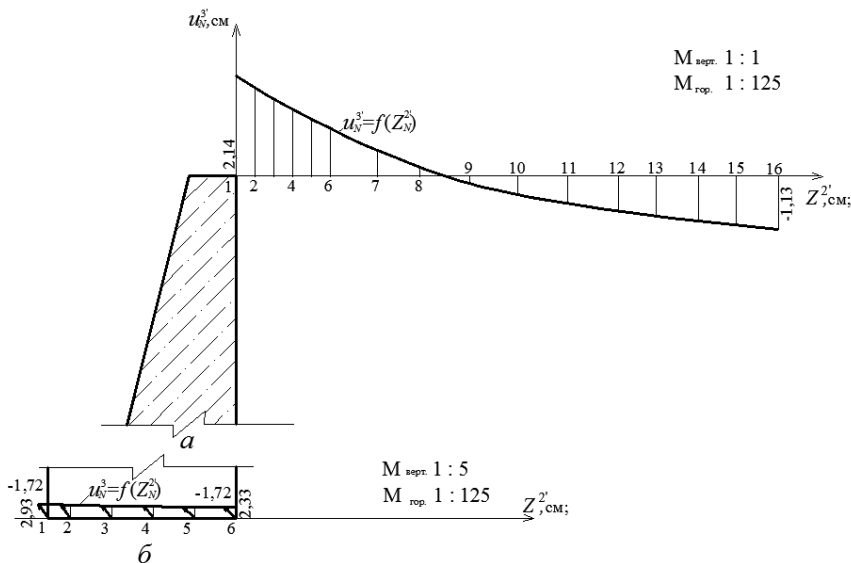


Рис. 1.17. Епюри переміщень u_N^3 : a – вільної поверхні півпростору;
 b – підшви фундаменту підпірної стінки

Запитання та завдання для самоперевірки

1. На яких припущеннях ґрунтуються теорії розподілу напружень усередині сипучого тіла з використанням закону Кулона?
2. У чому полягає загальна теорія граничного стану сипучого середовища?
3. Наведіть основні гіпотези визначення тиску ґрунтової маси на підпірну стінку на основі теорії Кулона.
4. У чому полягає суть графоаналітичного методу визначення тиску на підпірну стінку?
5. Побудуйте діаграму рівноваги сил, що діють від впливу призми руйнування за межами задньої поверхні підпірної стінки.
6. Сформулюйте першу теорему Ребхана і наведіть рівняння реакції поверхні підпірної стінки від дії призми руйнування.
7. Сформулюйте другу теорему Ребхана.
8. Побудуйте схему Понсельє, якщо поверхня землі горизонтальна.
9. Наведіть аналітичний вираз тиску ґрунту на підпірну стінку.

10. Наведіть формули і епюри для визначення повного тиску на підпірну стінку і його інтенсивності при горизонтальній поверхні землі.
11. Наведіть рівняння для окремого відсіку при розрахунку підпірної стінки на міцність та стійкість.
12. У чому полягає суть розрахунку на стійкість підпірної стінки методом круглоциліндричної поверхні ковзання?

РОЗДІЛ 2

РОЗРАХУНКИ ПЛОСКОНАПРУЖЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ

2.1. Співвідношення плоскої задачі теорії пружності у прямокутних координатах

Якщо досліджуване пружне тіло має об'єм, який визначається трьома вимірами, то розв'язуємо просторову задачу ТП. Якщо один із вимірів дуже малий порівняно з іншими, то отримуємо *плоску задачу теорії пружності*.

У плоскій задачі слід відрізнити два випадки:

- 1) плоский напружений стан;
- 2) плоска деформація.

Плоский напружений стан - випадок, коли дуже тонка пластинка несе навантаження, прикладене до контуру по дотичній до площини пластинки. При цьому вважається, що зовнішні сили рівномірно розподілені по товщині пластинки. Унаслідок малої товщини напруження у пластинці не можуть істотно змінюватися у разі переходу від однієї граничної поверхні до іншої, тобто вони рівномірно розподілені по товщині і не залежать від координати z . Усі процеси деформування відбуваються у площині XOY . Але завдяки здатності всіх пружних тіл до поперечної деформації (коли зусилля діють тільки у площині), то у загальному випадку пластинка у плоскому напруженому стані деформуватиметься у напрямі осі OZ , тобто залежно від дії зовнішніх сил буде потовщуватися або потоншуватися, при цьому:

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z \neq 0.$$

Прикладом такої пластинки є конструкція балки-стілки.

Плоска деформація відбувається у разі, якщо пружне тіло у напрямі осі OZ є дуже великим за розміром і поперечні перерізи тіла у площинах, перпендикулярних до цієї осі, однакові за геометрією. При цьому навантаження діють у площинах, паралельних OXY , і не залежать від координати Z . Прикладом такої системи є конструкція прямолінійної нескінченно довгої підпірної стінки, на яку діє тиск ґрунту, що рівномірно розподілений по довжині цієї стінки.

Розглянемо напружено-деформований стан цієї конструкції. Для розрахунку вирізаємо одиничну пластинку. Отримуємо плоску задачу, оскільки деформування відбувається в одній площині. Цей випадок збігається з першим, але за характером напружено-деформованого стану він суттєво відрізняється від першого. Поперечні деформації пластинки у напрямі осі OZ неможливі, тому що цьому протидіють сусідні пластинки, які знаходяться у однакових умовах.

Завдяки цій протидії у напрямку осі OZ при $\nu > 0$ виникають напруження, тобто маємо:

$$\sigma_z \neq 0, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (2.2)$$

Для плоскої задачі, як і для просторової, маємо три групи рівнянь [9, 10]:

1) Статичні рівняння.

Диференціальні рівняння рівноваги (у декартовій системі координат) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

З урахуванням $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ маємо два рівняння з трьома невідомими ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$). Якщо розв'язувати задачу у напруженнях з умовами на контурі (складної конфігурації), то у загальному випадку:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha; \\ \bar{Y} &= \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2) Геометричні рівняння (диференціальні рівняння Коші)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.5)$$

3) Фізичні рівняння – узагальнений закон Гука:

– для плоского напруженого стану:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (2.6)$$

– для плоскої деформації:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]; \\
\varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]; \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Якщо позначити у рівнянні (2.3) $\frac{E}{1-\nu^2} \equiv E_1$; $\frac{\nu}{1-\nu} \equiv \nu_1$, то отримаємо для плоскої деформації:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1\sigma_y); \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1\sigma_x); \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}.
\end{aligned}$$

Тоді фізичні рівняння для плоского напруженого стану і плоскої деформації за формою збігаються, тобто для плоскої задачі під час розв'язання у деформаціях (переміщеннях) маємо вісім рівнянь: два рівноваги, три – Коші, три – закону Гука; та вісім невідомих $u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, які задовольняють умовам цих восьми рівнянь.

Таке розв'язання теорії пружності є досить складним. Якщо застосувати спрощення для плоскої задачі, то можна звести цю задачу до невідомих у напруженнях. Для цього у рівняння сумісності деформацій [9] треба підставити рівняння закону Гука. Виконуючи диференціювання рівняння Коші двічі відповідно за y і x , а потім, склавши результати, отримаємо рівняння сумісності деформацій (рівняння нерозривності деформацій):

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_{xy}}{\partial x \partial y}.
\tag{2.4}$$

Підставляючи у вираз (2.4) рівняння (2.3), після деяких перетворень з урахуванням рівнянь (2.1) для вилучення τ_{xy} , остаточно дістаємо:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -\left(1 - \nu(\nu_1)\right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

або

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\left(1 - \nu(\nu_1)\right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (2.5)$$

У рівнянні (2.5) показано, що може використовуватися величина ν або $1 - \nu(\nu_1)$. Якщо на однорідне тіло діятимуть об'ємні сили власної ваги, які не будуть залежати від координат x і y , то права частина рівняння (2.5) дорівнюватиме нулю:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (2.6)$$

тому рівняння сумісності у напруженнях для обох випадків плоскої задачі буде єдиним (2.6).

Отже, можна зробити висновок, що для обох випадків плоскої задачі напруження будуть однакові, але деформації різні.

Рівняння (2.6) можна записати з використанням оператора (уведеного для диференціювання тензорних (векторних) функцій) – умовного вектора:

$$\nabla = \bar{e}^s \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^s}; \quad \nabla \varphi - \text{вектор};$$

$$\nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi - \text{скаляр};$$

$\nabla^2 \varphi$ називають також оператором Лапласа другого порядку.

Він вказує, що потрібно взяти другі похідні окремо за x^1, x^2, x^3 і скласти їх. Користуючись правилом Ейнштейна [27] тензорного аналізу (сумуванням за однаковими індексами, що стоять на різних рівнях), маємо:

$$\nabla = \bar{e}^s \frac{\partial(\)}{\partial x^s}, \quad s = 1, 2;$$

$$\nabla = \sum_{s=1}^2 \bar{e}^s \frac{\partial(\)}{\partial x^s} = \bar{e}^1 \frac{\partial(\)}{\partial x^1} + \bar{e}^2 \frac{\partial(\)}{\partial x^2}.$$

Для дії об'ємної сили власної ваги для розв'язання плоскої задачі маємо три невідомих і три рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - P = 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

із забезпеченням умов на контурі.

Ця задача має велике практичне значення.

Якщо ввести скалярну функцію напружень або функцію Ері, то належить задати умови:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad (2.8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Px.$$

Отже, якщо перші два рівняння тотожно задовольняються, то для розв'язання задачі вони непотрібні і залишається одне рівняння із системи (2.7). Якщо в нього підставити рівняння (2.8), тоді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Із використанням набла-оператора в окремому випадку оператора Лапласа отримаємо бігармонічне рівняння для плоскої задачі теорії пружності:

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi) = 0 \rightarrow \nabla^4\varphi = 0.$$

У розгорнутому вигляді:

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Таким чином, спочатку для розв'язання внутрішньо статично невизначеної задачі було вісім рівнянь, які зведено до шести (без урахування переміщень). Після вилучення деформацій (до трьох) і шляхом введення функції Ері отримали одне рівняння.

Із математичного аналізу відомо, що коли деяка функція задовольняє однорідне диференціальне рівняння, то і будь-яка похідна його задовольняє. Тобто можна вважати, що

$$\frac{\partial^4\sigma_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\sigma_x}{\partial y^4} = 0 \text{ і т.д. для } \sigma_y, u, x.$$

Розв'язуючи будь-яку задачу, потрібно підібрати таку функцію $\varphi(x, y)$, яка б задовольняла рівняння (2.10) і одночасно граничні умови на контурі. Визначивши функцію $\varphi(x, y)$, можна отримати відповідні формули для визначення напружень у будь-якій точці із заданими координатами. Потім з рівнянь стану знаходяться деформації. Якщо треба знайти переміщення, то, виходячи з формул Коші, підставляючи деформації як функції координат, їх треба проінтегрувати. Необхідність розв'язання одного рівняння є значною перевагою цього підходу. Однак виникають труднощі у підборі функцій, що задовольняють одночасно граничні умови. Тому деякі задачі треба розв'язувати у полярних координатах.

2.2. Розв'язання плоскої задачі теорії пружності у поліномах

Як відомо підбір функції напружень φ , яка задовольняла б рівняння сумісності (2.10) та граничні умови (на контурі), пов'язаний з деякими труднощами. Тому на певному класі функцій доцільно виконати аналіз через зворотну задачу:

- 1) задати вид функції;
- 2) дослідити випадок напруженого стану, якому вона відповідає.

Задамо, наприклад, функцією у вигляді степеневого полінома:

$$\varphi = (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^2 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + (a_4x^4 + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 + e_4y + c_5x^3y^2 + d_5x^3y^2 + e_5xy^4) + \dots, \quad (2.11)$$

для якого можна отримати ряд розв'язків.

Члени з координатами у першому степені брати недоцільно, оскільки при визначенні напружень за формулами (2.8) вони дорівнюватимуть нулю, тобто функція φ при цьому описуватиме нату-ральный (ненапружений) стан. Розглядаючи спочатку прості випадки, коли функція φ складається з одного або декількох членів полінома (2.11) до п'ятого степеня включно, проаналізуємо, які умови на контурі вона задовольняє, а потім перейдемо до більш складних випадків із комбінації найпростіших.

Виконаємо дослідження напруженого стану у прямокутній пластинці завдовжки l і заввишки h з одиничною товщиною (рис. 2.1). Вважаємо, що смуга невагома ($P = 0$ у рівняннях (2.7)).

Розглянемо поліном другого та третього степенів:

$$\varphi = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + a_3x^2 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3. \quad (2.12)$$

Поліном (2.12) задовольняє рівняння (2.10) за будь-яких значень коефіцієнтів:

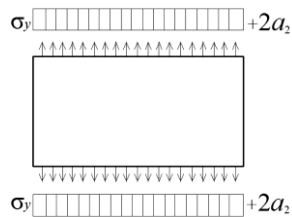
$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial y^4} = 0.$$

Проте зручніше провести дослідження, поступово задаючи всі коефіцієнти, крім одного, рівними нулю. Для даного поліному маємо сім випадків.

Випадок 1. $\varphi = a_2x^2$; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_2; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Аналіз граничних умов на контурі свідчить, що напруження на верхній і нижній поверхнях мають зрівноважуватися зовнішнім навантаженням згідно з рис. 2.2, де епюри напружень одночасно є епюрами зовнішнього навантаження. Тут маємо випадок простого розтягу у вертикальному напрямі.



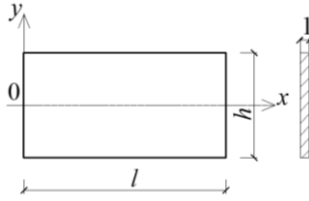


Рис. 2.1. Схема прямокутної пластинки

Рис. 2.2. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = a_2 x^2$

Випадок 2. $\varphi = b_2 xy$; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2.$$

Маємо випадок чистого зсуву. По контуру прикладені рівномірно-розподілені зсувні напруження (рис. 2.3).

Випадок 3. $\varphi = c_2 y^2$; напруження: $\sigma_x = 2c_2$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$.

У цьому випадку смуга перебуває під дією рівномірного розтягу у горизонтальному напрямі (рис. 2.4).

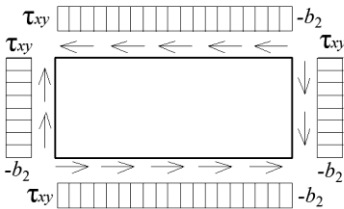


Рис. 2.3 Епюри напруження для функції $\varphi = b_2 xy$

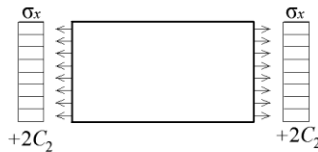


Рис. 2.4. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = c_2 y^2$

Випадок 4. $\varphi = a_3 x^2$; напруження: $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 6a_3 x$; $\tau_{xy} = 0$.

Для цього випадку вертикальне навантаження розподіляється за трикутником (рис. 2.5, а). Якщо взяти початок координат у середині смуги, то отримаємо випадок чистого згину (рис. 2.5, б).

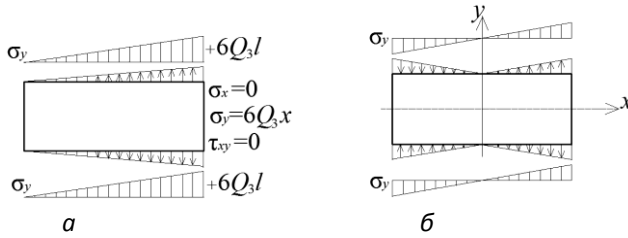


Рис. 2.5. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = a_3x^2$: а) за схемою рис.2.1; б) коли початок координат у середині смуги

Випадок 5. $\varphi = b_3x^2y$; напруження: $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 2b_3y$; $\tau_{xy} = -2b_3x$.

Тут маємо випадок, коли до смуги прикладені нормальні і дотичні навантаження на нижньому і верхньому контурах пластинки (рис. 2.6). Зверху діють розтягувальні сили, оскільки,

якщо $y = +\frac{h}{2}\sigma_y$, то $2b_3h/2 = +b_3h$. Знизу – стискальні сили, оскільки, якщо при $y = -\frac{h}{2}\sigma_y$, то $-2b_3h/2 = -b_3h$.

Дотичні зусилля розподіляються зверху і знизу за законом прямої. Зліва на контурі дотичних зусиль немає, справа вони розподілені рівномірно. Сили, прикладені до смуги, перебувають у рівновазі.

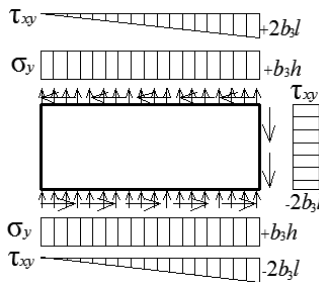


Рис. 2.6. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = b_3x^2y$

Випадок 6. $\varphi = c_3xy^2$; напруження: $\sigma_x = 2c_3x$; $\sigma_y = 0$;
 $\tau_{xy} = -2c_3y$.

Нормальні зусилля прикладені до правого кінця пластинки, дотичні – розподілені рівномірно зверху та знизу і змінюються за прямою на лівому і правому контурах (рис. 2.7).

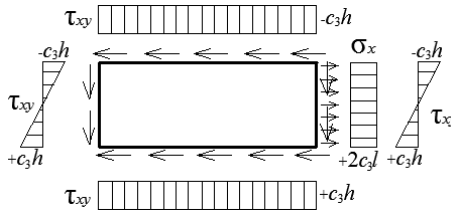


Рис. 2.7. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = c_3xy^2$

Випадок 7. $\varphi = d_3y^3$; напруження: $\sigma_x = 6d_3y$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$.

Тут маємо випадок згину моментами, прикладеними до кінців пластинки (рис. 2.8).

Використання поліномів четвертого і п'ятого степенів.

Розглянемо поліном четвертого степеня:

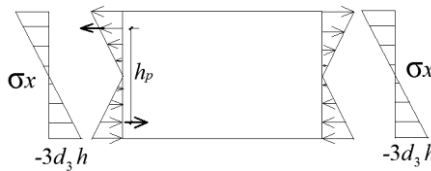


Рис. 2.8. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = d_3y^3$

$$\varphi = a_4x^4 + b_4x^3y + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 + e_4y^4. \quad (2.13)$$

Поліном (2.13) має деякі особливості. Він задовольняє рівняння сумісності (2.10) не за будь-яких значень коефіцієнтів. Між деякими з них повинна бути певна залежність. Візьмемо похідні відповідно до рівняння (2.10):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 24a_4;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4c_4;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24e_4.$$

Підставимо їх у рівняння сумісності (2.10):

$$24a_4 + 2 \cdot 4c_4 + 24c_4e_4 = 0.$$

Отримаємо

$$e_4 = -(a_4 + c_4/3). \quad (2.14)$$

З урахуванням (2.14) маємо:

$$\varphi = a_4x^4 + b_4x^3y + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 - (a_4 + c_4/3)y^4 \quad (2.15)$$

Функція (2.15) задовольняє рівняння сумісності вже за будь-яких значень коефіцієнтів, що входять до її складу.

Розглянемо випадок, який важливий тільки для реальних прикладів, коли всі коефіцієнти, крім d_4 , дорівнюють нулю:

$$\text{Випадок 8. } \varphi = d_4xy^3; \text{ напруження: } \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6d_4xy;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -3d_4y^2.$$

Нормальні зусилля прикладені лише до правого кінця. Дотичні зусилля рівномірно розподілені зверху і знизу та змінюються за законом параболи справа і зліва (рис. 2.9).

Розглянемо поліном п'ятого степеня:

$$\varphi = a_5x^5 + b_5x^4y + c_5x^3y^2 + d_5x^3y^2 + e_5xy^4 + f_5y^5, \quad (2.16)$$

який також задовольняє рівняння сумісності лише за деяких співвідношень між коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 120a_5x + 24b_5y;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 12c_5x + 12d_5y; \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24e_5x + 120f_5y.$$

Підставимо похідні (2.17) у рівняння сумісності (2.10):

$$120a_5x + 24b_5y + 24c_5x + 24d_5y + 24e_5x + 120f_5y = 0. \quad (2.18)$$

Згрупуємо складові (2.18) відносно x і y :

$$x(120a_5 + 24c_5 + 24e_5) + y(24b_5 + 24d_5 + 120f_5) = 0.$$

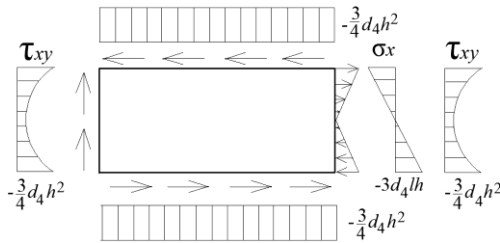


Рис. 2.9. Епюри напруження по контуру для функції $\varphi = d_4xy^3$

З урахуванням незалежності x і y кожний вираз у дужках окремо повинен дорівнювати нулю. Таким чином, отримуємо два рівняння:

$$\begin{cases} 120a_5 + 24c_5 + 24e_5 = 0; \\ 24b_5 + 24d_5 + 120f_5 = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Розв'яжемо рівняння (2.19) відповідно відносно e_5 і f_5 :

$$e_5 = -(5a_5 + c_5);$$

$$f_5 = -1/5(b_5 + d_5). \quad (2.20)$$

З урахуванням (2.20) рівняння функції (2.16) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi = & a_5 x^5 + b_5 x^4 y + c_5 x^3 y^2 + d_5 x^3 y^2 - \\ & - (5a_5 + c_5) x y^4 - 1/5 (b_5 + d_5) y^5. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Функція (2.21) задовольняє рівняння сумісності за будь-яких значень коефіцієнтів, які входять до її складу. Розглянемо найбільш придатний для подальшого випадок значення функції (2.21), коли d_5 не дорівнює нулю:

Випадок 9. $\varphi = d_5(x^2 y^3 - y^5 / 5)$; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = d_5(6x^2 y - 4y^3); \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2d_5 y^3;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -6d_5 x y^2.$$

У цьому випадку маємо досить складний напружений стан із навантаженням рівномірно розподілених і дотичних сил знизу та зверху, а також дії згинальних моментів на кінцях зліва і справа, дотичних сил – справа (рис. 2.10).

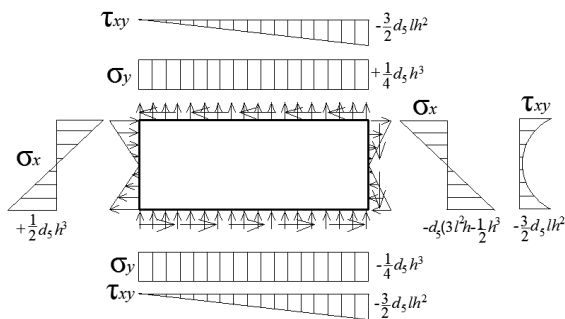


Рис. 2.10. Епюри напруження для функції $\varphi = d_5(x^2 y^3 - y^5 / 5)$

2.3. Аналіз розрахунку балки на згин від рівномірно розподіленого навантаження

Використовуючи розглянуті випадки для підбору функції залежно від граничних умов, розглянемо реальний приклад: згинання консольної пластинки силою, прикладеною на краю. Розрахункову схему показано на рис. 2.11.

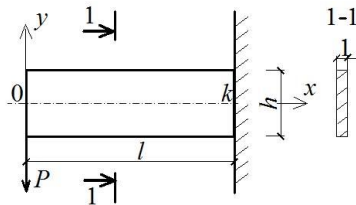


Рис. 2.11. Схема прямокутної консольної пластинки

Навантаження не можна враховувати як зосереджену силу, оскільки у місці її прикладання виникають нескінченно великі напруження. Вважаємо, що навантаження здійснюється дотичними зусиллями, прикладеними на вільному кінцевому перерізі.

Знаходимо вираз функції напружень. Умови на контурі розглянутої пластинки потребують пошуку такого розв'язку, за якого верхня і нижня поверхні консолі не сприймають навантажень. Тобто для них $\sigma_y = 0$, і $\tau_{xy} = 0$. На лівому вільному кінці консолі прикладені дотичні зусилля.

Серед простих випадків 1–7, які б точно відповідали такому навантаженню, немає прикладу, але можна створити подібну комбінацію з наявних простих розв'язків. Наприклад, прийнятні випадки за яких до вільного лівого кінця консолі прикладені тільки дотичні зусилля. Такими є випадки 2 і 6. Але випадок 6 не зовсім придатний, оскільки по верхній і нижній поверхнях контуру дотичні зусилля напрямлені в один бік. Іншого такого розв'язку з напрямленими зусиль в один бік немає.

Тоді залишається випадок 2, що відповідає чистому зсуву, але його треба доповнити розв'язком, у якому дотичні зусилля на вільному краю напрямлені у різні боки. Розглянемо подібні випадки 5, 8 і 9. У випадках 5 і 9 нормальні навантаження, тому вони не придатні. Остаточно можна дійти висновку: доцільно взяти одночасно випадки 2 і 8, тоді функція напружень набуде вигляду:

$$\varphi = b_2xy + d_4xy^3. \quad (2.22)$$

Визначаємо напруження і враховуємо умови на контурі:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6d_4xy; \quad (2.23)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2 - 3d_4y^2. \quad (2.25)$$

Ураховуючи умови на контурі, можна знайти невідомі коефіцієнти b_2 і d_4 .

Згідно з функцією (2.22) напруження σ_x на лівому кінці консолі дорівнюють нулю при $x = 0$ (див. рівняння (2.23)), вертикальні напруження нульові (див. рівняння (2.24)). Дотичні напруження зверху і знизу мають дорівнювати нулю, звідси, якщо

$$y = \pm \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{xy} = 0 \quad \text{або} \quad \tau_{xy} = -b_2 - 3d_4\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{це є першою умовою, що зв'язує } b_2, d_4.$$

Друга умова полягає у тому, що сума дотичних зусиль на лівому кінці консолі дорівнює P :

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dy = P \quad \text{або}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} (-b_2 - 3d_4y^2) dy = -b_2y \Big|_{-h/2}^{+h/2} - 3d_4 \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2} = -b_2h - \frac{d_4}{4} h^3 = P.$$

Остаточно b_2 і d_4 визначаємо з рівнянь

$$\begin{cases} -b_2 - 3/4d_4h^2 = 0; \\ -b_2h - d_4/4h^3 = P, \end{cases}$$

розв'язуючи які, отримуємо

$$b_2 = -\frac{3}{2} \frac{P}{h};$$
$$d_4 = \frac{2P}{h^3}.$$

Підставляючи значення коефіцієнтів b_2 і d_4 у рівняння (2.23)-(2,25), остаточно дістаємо формули для визначення напружень:

$$\sigma_x = \frac{12P}{h^3} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{3P}{h^3} - \frac{6P}{h^3} y^2.$$

Вважаємо, що момент інерції перерізу консолі рівний $I = 1h^3/12$, тоді:

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{P}{I} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right),$$

де Px – згинальний момент; $\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right)$ – статичний момент частин перерізу, яка відокремлюється координатою y , тому остаточно маємо:

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{PS}{1I}. \quad (2.26)$$

Результати (2.26) повністю збігаються з формулами опору матеріалів. Це відповідає допущенню, що сила P визначалась за дотичними зусиллями, розподіл яких відповідає формулі для визначення τ_{xy} . За іншого способу прикладання сили і розв'язок буде іншим. Однак різниця у результатах буде істотною тільки у перерізах, які межують з вільним краєм консолі, а за принципом Сен-Венана не буде надто далеко від нього.

2.4. Розв'язання плоскої задачі теорії пружності у тригонометричних рядах

Розв'язувати задачі у поліномах можна тільки для балок, висота яких не перевищує приблизно півпрогону. За більших висот напруження у перерізах, наближених до кінців, впливають на напруження у прогоні. Тому слід задавати φ в іншому вигляді, наприклад, застосовувати тригонометричні ряди. Наприклад:

$$\varphi = \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot F(y), \quad (2.27)$$

де n – будь-яке ціле число; l – довжина пластинки у напрямі осі x ; $F(y)$ – деяка функція, що залежить від координати y .

Підставляючи вираз (2.27) у рівняння (2.9), знаходимо функцію $F(y)$. Для зручності позначимо: $\alpha = \frac{n\pi x}{l}$, тоді

$$\varphi = \sin(\alpha x)F(y).$$

Похідні:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \sin(\alpha x)F(y);$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \sin(\alpha x)F''(y); \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \sin(\alpha x)F^{IV}(y).$$

Підставивши формули (2.28) у рівняння (2.9), отримаємо:

$$\alpha^4 \sin(\alpha x)F(y) - 2\alpha^2 \sin(\alpha x)F''(y) + \sin(\alpha x)F^{IV}(y) = 0. \quad (2.29)$$

Загальний інтеграл рівняння (2.29) після скорочення на $\sin(\alpha x)$ можна виразити через гіперболічні функції [9]:

$$\alpha^4 F(y) - 2\alpha^2 F''(y) + F^{IV}(y) = 0;$$

$$F(y) = c_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + c_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + c_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + c_4 y \operatorname{ch}(\alpha y).$$

Функція напружень, що задовольняє рівняння сумісності, має вигляд

$$\varphi = \cos(\alpha x)[c_5 \operatorname{sh}(\alpha y) + c_6 \operatorname{ch}(\alpha y) + c_7 y \operatorname{sh}(\alpha y) + c_8 y \operatorname{ch}(\alpha y)].$$

Задаючи різні значення числа n , отримуємо нескінченну множину часткових розв'язків. Загальний розв'язок можна навести нескінченними рядами:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin(\alpha x) [c_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + c_2 \operatorname{ch}(\alpha y) + c_3 y \operatorname{sh}(\alpha y) + c_4 y \operatorname{ch}(\alpha y)] + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos(\alpha x) [c_5 \operatorname{sh}(\alpha y) + c_6 \operatorname{ch}(\alpha y) + c_7 y \operatorname{sh}(\alpha y) + c_8 y \operatorname{ch}(\alpha y)]. \quad (2.30)$$

Коефіцієнти c в рівнянні (2.30) залежать від порядкового номера члена ряду. По суті у формулу (2.30) входить нескінченна кількість коефіцієнтів, але вони пов'язані між собою певним співвідношенням і знаходяться з граничних умов на контурі пластинки. Щоб розв'язати задачу, зовнішнє навантаження за контуром також потрібно розкласти у нескінченні тригонометричні ряди:

$$q = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(\alpha x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin(\alpha x),$$

або після деяких перетворень для симетричного навантаження у вигляді

$$q = 2q_1 \left[\frac{a}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha l} \cos(\alpha x) \right].$$

За допомогою тригонометричних рядів можна знайти розв'язки для багатьох плоских задач теорії пружності. Застосування тригонометричних функцій все ж не є універсальним методом, оскільки далеко не завжди вдається забезпечити граничні умови по бокових поверхнях розрахункового фрагменту конструкції балок-стінок.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які дві складові задачі розглядаються у плоскій теорії пружності?
2. Які допущення використовуються у задачах плоскої деформації та плоского напруженого стану?
3. Запишіть геометричні рівняння для плоскої задачі теорії пружності.
4. Запишіть фізичні рівняння теорії пружності.

5. Запишіть статичні рівняння рівноваги для задач плоскої деформації і плоского напруженого стану. Чим вони відрізняються і що у них є загального?
6. Наведіть бігармонічне рівняння функції напружень $E\epsilon$.
7. Запишіть диференціальні співвідношення функцій компонент тензора напружень і скалярної функції напружень $E\epsilon$.
8. Які тригонометричні функції задовольняє бігармонічне рівняння сумісності?
9. Запишіть поліном другого і третього степенів, які задовольняють функції напружень (рівняння сумісності).
10. У яких випадках для розв'язання плоскої задачі доцільно застосовувати поліном четвертого і п'ятого степенів?
11. Обґрунтуйте, який поліном треба застосовувати для рівняння сумісності для розв'язання задачі згинання консолі силою, прикладеною на кінці.

РОЗДІЛ 3

МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ У РОЗРАХУНКАХ БАЛОК-СТІНОК

3.1. Основи теорії скінченних різниць

Теорія скінченних різниць полягає у заміні похідних відношеннями скінченних величин. Замість одного диференціального рівняння розв'язують систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

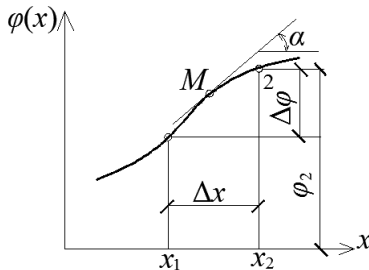
Ідея методу скінченних різниць полягає у тому, що замість частинних похідних у диференціальних рівняннях розв'язуваної задачі використовують співвідношення різниць змінних, які називаються скінченними різницями. Наприклад, якщо розглянути деяку функцію $\varphi(x)$ одновимірної задачі (рис. 3.1), то похідна $\frac{d\varphi}{dx}$ у точці M дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної в точці M до кривої $\varphi(x)$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (3.1)$$

Якщо виділити деякий інтервал Δx в околі точки M досить малих, але скінченних розмірів, тоді можна записати наближений вираз для похідної (3.1):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.2)$$

Чим меншим буде інтервал Δx , тим точніший вираз (3.2).



3.1. Схема до побудови скінченнорізницевих співвідношень для одновимірної задачі

Для одновимірної задачі, що описується диференціальним рівнянням, яке утримує лише першу похідну шуканої функції $\varphi(x)$, треба поділити інтервал зміни аргумента x на скінченне число ділянок Δx , що обмежуються вузлами. Диференціальні рівняння зазначеної задачі можна перетворити, використовуючи співвідношення типу (3.2), і записати їх для кожного вузла. Задавши відповідні граничні умови, знаходимо систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих значень функції у вузлах.

Для розв'язання двовимірних задач у межах досліджуваної області потрібно побудувати скінченнорізницеву сітку з відповідними кроками за координатами Δx і Δy . Для отримання формул, за якими необхідно обчислювати похідні будь-якого порядку, скористаємося співвідношеннями з теорії скінченних різниць, наведених у праці [9].

Задамо деяку криву $\varphi(x)$ (рис. 3.2), три ординати якої $\varphi_{3л}$, φ_0 , $\varphi_{3п}$ відомі, причому φ_0 збігається з віссю ординат. Відстані між ординатами дорівнюють Δx . Треба знайти наближене значення похідної у точці $0'$. Криву в межах $1'0'2'$ можна апроксимувати параболою, тобто задати її рівнянням параболі:

$$\varphi = ax^2 + bx + c.$$

Знайдемо коефіцієнти рівняння (3.1) з умови, що парабола проходить через три точки з ординатами $\varphi_{3л}$, φ_0 , $\varphi_{3п}$, тобто запишемо три рівняння параболі відповідно для точок $1'$, $0'$, $2'$:

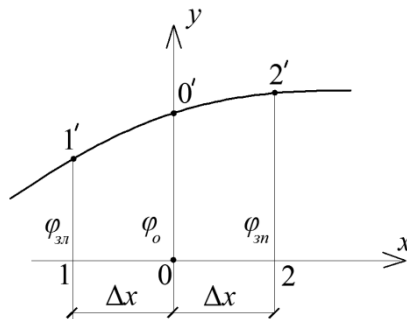


Рис. 3.2. Схема апроксимації кривої параболою

$$\begin{cases} \varphi_{3n} = a \left(\Delta x \right)^2 + b \left(\Delta x \right) + c \\ \varphi_0 = c \\ \varphi_{3n} = a \left(\Delta x \right)^2 + b \left(\Delta x \right) + c \end{cases} \quad (3.3)$$

Розв'язавши рівняння (3.3) відносно невідомих коефіцієнтів a, b, c , отримаємо:

$$a = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3n} + \varphi_{3n}}{2(\Delta x)^2}; \quad b = \frac{\varphi_{3n} - \varphi_{3n}}{2(\Delta x)}; \quad c = \varphi_0. \quad (3.4)$$

Підставивши рівняння (3.4) у систему (3.3), маємо:

$$\varphi = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3n} + \varphi_{3n}}{2(\Delta x)^2} x^2 + \frac{\varphi_{3n} - \varphi_{3n}}{2(\Delta x)} x + \varphi_0.$$

Знаходимо першу і другу похідні, якщо $x = 0$ (у точці $0'$):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{3n} - \varphi_{3n}}{2(\Delta x)}. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3n} + \varphi_{3n}}{\Delta x^2}. \quad (3.6)$$

Якщо вертикальну вісь провести будь-де, формули залишаються правильними. Ці формули будемо використовувати під час розв'язання плоскої задачі теорії пружності.

3.2. Виведення формул для похідних функцій напружень у скінченних різницях із застосуванням рівномірних сіток

На задану пластину, завантажену зовнішніми впливами, накладемо рівномірну сітку з постійними кроками Δx і Δy відповідно по горизонталі та вертикалі (рис. 3.3).

Розглянемо функцію напружень для плоскої задачі теорії пружності $\varphi(x, y)$ у точці k через φ_k . Значення функції напружень для вузлів, сполучених з вузлом k , позначимо через $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d \dots \varphi_n$. Ці значення функції вважаємо невідомими, але на підставі рівнянь рівноваги з рівнянням сумісності між ними повинна бути певна залежність. Знайдемо цю залежність.

На підставі формул (3.5), (3.6) запишемо значення похідних у точці k :

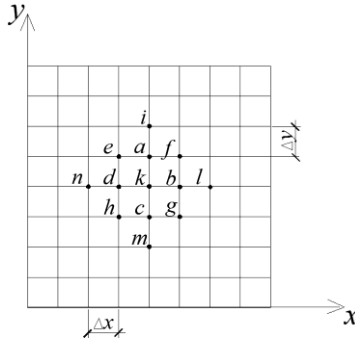


Рис. 3.3. Схема рівномірної сітки з постійними кроками Δx і Δy

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta x}; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d}{\Delta x^2}. \quad (3.8)$$

За аналогією маємо:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{\Delta y^2}; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_c}{2\Delta y} = \frac{\frac{\varphi_e - \varphi_f}{2\Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2\Delta x}}{2\Delta y} = \\ &= \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}. \end{aligned}$$

Знайдемо четверту похідну використовуючи рівняння (3.8):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{-2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_b + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_d}{\Delta x^2}.$$

Другі похідні визначаємо за тими ж формулами (3.8), (3.10) і підставляємо їх у формулу четвертої похідної:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d) + (-2\varphi_d + \varphi_n + \varphi_k) + (-2\varphi_b + \varphi_k + \varphi_e)}{Dx^4};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_d + \varphi_b) + (\varphi_n + \varphi_e)}{Dx^4}. \quad (3.11)$$

За аналогією маємо

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_c + \varphi_a) + (\varphi_m + \varphi_i)}{Dy^4}. \quad (3.12)$$

Четверта змішана похідна визначається з використанням рівняння (3.6) і (3.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d}{Dx^2} \right) = \\ &= \frac{-2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_b + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_d}{Dx^2} = \\ &= \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a) + (-2\varphi_d + \varphi_h + \varphi_e) + (-2\varphi_b + \varphi_g + \varphi_f)}{Dx^2 Dy^2}; \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{4\varphi_k - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_f + \varphi_h + \varphi_g)}{Dx^2 Dy^2}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Знайдені значення похідних (3.11), (3.12) і (3.13) підставимо у рівняння сумісності $\nabla^4 \varphi = 0$:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad \text{тоді}$$

$$\varphi_k (6\alpha^2 + 8\alpha + 6) - 4\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d + \alpha + 1 + 2\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h + \alpha + \varphi_i + \varphi_l \alpha^2 + \varphi_m + \varphi_n \alpha^2 = 0, \quad (3.14)$$

де $\alpha = \frac{Dy^2}{Dx^2}$.

У рівняння сумісності (3.14), у скінченних різниціях входять 13 невідомих значень функції $\varphi(x, y)$.

Якщо сітка є квадратною ($\Delta y = \Delta x$ і $\alpha = 1$), то рівняння дещо спроститься:

$$20\varphi_k - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + (\varphi_i + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння має деяку подібність з рівнянням трьох моментів методу переміщень при розрахунках статично невизначених систем.

Визначимо в скінченних різницях напруження у точці k :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{\Delta y^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b}{\Delta x^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}.$$

Також можна отримати і формули для переміщень.

3.3. Побудова систем рівнянь для прямокутної сіткової ділянки з використанням балкових функцій

Рівняння сумісності (3.14) і (3.15) можна скласти для кожного вузла сіткової ділянки. Їх буде стільки, скільки є вузлів всередині контуру, але в ці рівняння увійдуть невідомі значення функції напружень $\varphi(x, y)$ для вузлів на контурі та для вузлів на відстанях Δx і Δy зовні контуру (рис. 3.4).

Припускаємо за невідомі значення функції φ на контурі і зовні нього, а додаткові рівняння отримаємо, виходячи з умов на контурі, наприклад: $\sigma_y = q$, $\tau_{xy} = 0$, або $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$ і т. ін.

Як приклади для пластинки, показаної на рис. 3.4, маємо 60 невідомих значень функції напружень φ , а кількість рівнянь – 56, оскільки зникають умови в кутах, тому що дотичні напруження дорівнюють нулю. Якщо їх ввести, то потрібно буде знаходити φ ззовні контуру в кутах сітки (за зовнішнім обводом).

Таким чином, не вистачає чотирьох рівнянь. Вони можуть бути довільними, якщо відкласти перпендикулярно до пластинки ординати, які б дорівнювали значенням φ (у будь-якому масштабі).

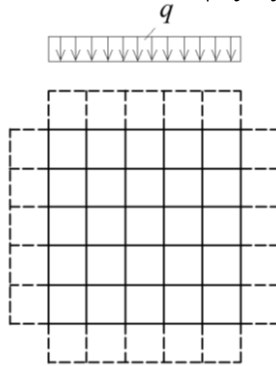


Рис. 3.4. Схема пластинки з накладеною сіткою

При цьому отримані вершини ординат на деякій площині не змінюють напруження, оскільки всі значення φ змінюються величинами, пропорційними відстаням від x і y (різниці залишаються без змін).

На практиці більш зручно оперувати меншою кількістю рівнянь, тому доцільно застосувати інший варіант: вилучити рівняння для контурних і позаконтурних значень φ безпосередньо, виходячи з граничних умов [11].

Наприклад, припустимо, що на верхньому контурі пластинки прикладене рівномірно розподілене навантаження, напрямлене зверху вниз. Тоді граничні умови на верхньому контурі пластинки такі:

$$\sigma_y = -q = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (3.16)$$

Інтегруючи рівняння (3.16), отримаємо

$$\varphi = -\iint q dx^2 + f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{y}).$$

Але $f_1(y)$ і $f_2(y)$ на верхньому контурі є постійними, тоді

$$\varphi = -\iint q dx^2 + c_1 x + c_2.$$

Для стрижневої системи, наприклад, для балки, подвійним інтегралом від рівномірно розподіленого навантаження є згинальний момент із протилежним знаком, тобто

$$\varphi = M + c_1 x + c_2.$$

Таким чином, по верхньому краю пластинки значення функції φ повинно дорівнювати значенням згинального моменту від рівномірно розподіленого навантаження для умовної балки. Додатні члени c_1 і c_2 можна брати довільно, при цьому не важливо, яку умовну балку обрати – вільно сперту, чи на опорах: відмінність полягає у значеннях довільних сталих c_1 і c_2 . Балку також можна вважати ригелем рами – тоді матимемо рамну аналогію за контуром пластинки.

Нагадаймо, що всі значення φ можна змінювати на одну й ту саму величину або на величини, пропорційні відстаням від осей.

Для нижнього краю контуру пластинки значення φ дорівнюють моментам із протилежним знаком. Там, де по контуру не прикладені навантаження, функція φ змінюється за законом прямої, або є постійною, чи дорівнює нулю. Значення функції φ у кутах пластинки та по краях слід вважати однаковими.

Окрім самих значень функції φ по верхньому, нижньому та по бокових краях, потрібно визначити похідні, відповідно $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ і

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Використовуємо також умову

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y_1} \quad (3.17)$$

без урахування об'ємного навантаження.

Інтегруючи для кожної ділянки вираз (3.17), отримаємо похідні: для верхнього та нижнього країв пластинки $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, для бокових

країв – $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. При цьому враховуємо рівність похідних у місцях сполучення ділянок.

Маючи похідні для певних ділянок контуру, визначаємо позаконтурні значення φ за формулами (3.7), (3.9). Для верхнього краю (рис. 3.5, а) маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \Delta y}; \quad \varphi_a = 2 \Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_c.$$

Для бокового краю пластинки (рис. 3.5, б):

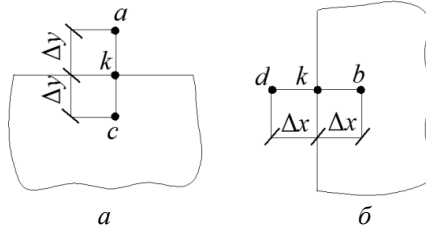


Рис. 3.5. Схеми для визначення φ зовні контуру:
 а – для верхнього краю; б – для бокового краю

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \Delta x}; \quad \varphi_d = 2 \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_b.$$

Отже, невідомим значенням функції φ залишається лише значення φ у внутрішніх точках сіткової ділянки пластинки. Так, для прикладу (див рис. 3.4) замість 60 невідомих маємо тільки 16 і відповідно 16 рівнянь. Тобто маємо сумісну систему для знаходження невідомих значень функції φ .

Після знаходження значень φ у сітковій ділянці пластинки знаходимо відповідні значення функцій напружень, деформацій і переміщень.

Використання методу скінченних різниць потребує трудомісткого обчислювального процесу. Чим більша потрібна точність значення внутрішніх зусиль і деформацій, тим густішою має бути сіткова ділянка розрахункового фрагменту пластинки і відповідно тим більшою за розмірами буде система розв'язувальних рівнянь рівноваги.

Переваги методу скінченних різниць на відміну від методів, які розглядалися раніше полягають у тому, що його можна використовувати у будь-яких випадках: для складного контуру з отворами, вирізами тощо.

3.4. Приклад розрахунку балки-стілки за методом сіток для реальної конструкції стінової панелі

Розглянемо розрахунок балки-стінки за методом сіток для реальної конструкції стінової панелі.

Розрахункову схему конструкції окремої стінової панелі, яку з точки зору будівельної механіки називають балкою-стінкою показано на рис. 3.6. У розрахунках власну вагу балки-стінки не враховують. Її товщина одинична, тобто в розрахунках її теж не враховують. Розміри балки-стінки подано на рис. 3.6.

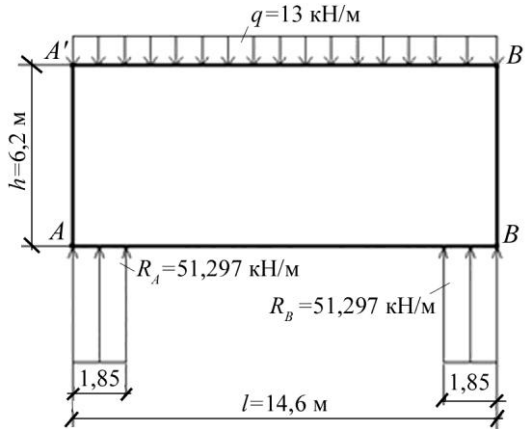


Рис. 3.6. Розрахункова схема балки-стінки

Напруження визначаємо на одиницю довжини або висоти. Реакції пілонів припускаємо рівномірно розподіленими по довжині спирання 1,85 м. Інтенсивність реакцій пілонів знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 1,85 \cdot 14,6 - q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2} = 0;$$

$$R_A \cdot 1,85 \cdot 14,6 = q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2}; \quad R_A \cdot 1,85 = q \cdot 7,3;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 7,3}{1,85} = \frac{13 \cdot 7,3}{1,85} = 51,297 \text{ кН/м};$$

$$\sum M_A = 0: -R_B \cdot 1,85 \cdot 14,6 + q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2} = 0;$$

$$R_B \cdot 1,85 \cdot 14,6 = q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2}; \quad R_B \cdot 1,85 = q \cdot 7,3;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 7,3}{1,85} = \frac{13 \cdot 7,3}{1,85} = 51,297 \text{ кН/м.}$$

Для побудови дискретної моделі розрахункового фрагменту (тільки для навчального прикладу) обмежуємося рідкою сіткою, припускаючи: $Дx = \frac{l}{4} = \frac{14,6}{4} = 3,65 \text{ м}$; $Дy = \frac{h}{4} = \frac{6,2}{4} = 1,55 \text{ м}$. Початок координат – у лівому нижньому куті сітки (рис. 3.7).

Типи вузлів сіткової ділянки (рис. 3.7): внутрішні, контурні та позаконтурні (1–26 з урахуванням симетрії).

Невідомими є значення функції напружень $E\epsilon - \varphi(x, y)$.

Виконуємо моделювання країв пластинки 1, 2, 3, 4 як звичайних балок на двох опорах. Тоді значення φ на цих краях визначаємо як значення згинальних моментів у балках, тобто використовуємо балкові функції.

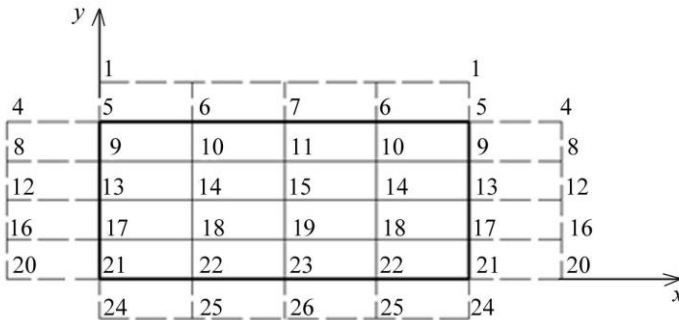


Рис. 3.7. Дискретна модель розрахункового фрагменту балки-стілки

Визначення контурних значень $\varphi(x, y)$ для кожної ділянки (1, 2, 3, 4), починаючи з верхньої 1.

Ділянка 1. Моделюємо верхню ділянку краю балки-стілки вілжно спертою балкою прогоном 14,6 м на двох опорах – шарнірно-нерухомій і шарнірно-рухомій (рис. 3.8).

Визначаємо функцію згинального моменту в балці за розрахунковою схемою (рис. 3.8):

$$M \llcorner \rceil \frac{ql}{2}x - q\frac{x^2}{2} = q\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = 94,9x - 6,5x^2.$$

Оскільки $M_x \equiv \varphi$, то $\varphi = q \left(7,3x - \frac{x^2}{2} \right)$.

Для точок 5, 6, 7 маємо:

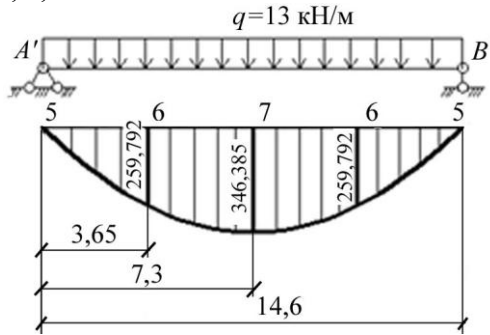


Рис. 3.8. Моделювання верхнього краю балки-стілки.
(балкова еюра згинальних моментів)

$$\varphi_5 = 0; \quad \varphi_6 = M_{x=3,65} = q \left(7,3 \cdot 3,65 - \frac{3,65^2}{2} \right) = 259,792 \text{ кНм};$$

$$\varphi_7 = M_{x=7,3} = q \left(7,3 \cdot 7,3 - \frac{7,3^2}{2} \right) = 26,645q = 346,385 \text{ кНм};$$

Знаходимо похідну за x : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = q(7,3 - x)$.

Тоді на лівій опорі при $x = 0$: $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 7,3q$.

Другу похідну визначаємо за формулою

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

За контуром 1 для цієї задачі $\tau_{xy} = 0$, тому

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.18)$$

Інтегруючи похідну (3.18), знаходимо

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_1,$$

оскільки для верхнього краю $f(y)$ не залежить від y .

Величину c_1 знайдемо пізніше з умови рівності похідних у точці 5 (у куті).

Ділянка 2. Навантаження немає, тому φ може змінюватися за законом прямої (яку можна провести через дві точки), відповідно маємо значення $\varphi_5 = 0$ і $\varphi_{21} = 0$, тобто пряма проходить по самій ділянці 2, тому

$$\varphi_5 = \varphi_9 = \varphi_{13} = \varphi_{17} = \varphi_{21} = 0.$$

Похідна за y відповідно буде становити

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Із рівності похідних у точці стику ділянок 1 і 2 у верхньому куті 5 маємо:

$$c_1 = 0.$$

Таким чином, і по верхньому краю $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

$$\text{З умови } \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.19)$$

Після інтегрування рівняння (3.19) знаходимо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(x) = c_2,$$

але у точці 5 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 7,3q$, тому на ділянці 2:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x) = c_2 = 7,3q.$$

Ділянка 3. Маємо вільно обперту балку на двох опорах (рис 3.9).

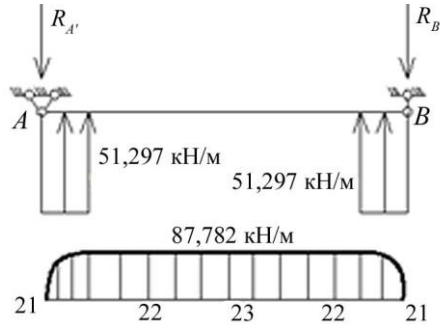


Рис. 3.9. Моделювання нижнього краю балки-стінки

Визначаємо реакції $R_{A'}$ і $R_{B'}$:

$$\sum M_{B'} = 0: R_{A'}l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$R_{A'} = q \cdot \frac{l}{2}; \quad R_{A'} = \frac{q \cdot 14,6}{2} = \frac{13 \cdot 14,6}{2} = 94,9 \text{ кН/м.}$$

$$\sum M_{A'} = 0: -R_{B'}l + ql \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$R_{B'} = \frac{q \cdot 14,6}{2} = \frac{13 \cdot 14,6}{2} = 94,9 \text{ кН/м.}$$

На ділянці 3:

$$M_{\leftarrow} = R_{A'}x \frac{x}{2} - R_{A'}x = 51,297 \frac{x^2}{2} - 94,9x;$$

$$\varphi = -M = 94,9x - 51,297 \frac{x^2}{2}. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) не потрібне для визначення функції φ на ділянці 3, оскільки довжина ділянки менша, від значення Δx . Однак потрібно визначити похідну на ділянці 3:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 94,9 - 51,292x.$$

$$\text{У точці 21 (якщо } x = 0): \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 7,3q = 94,9.$$

Отже, у точці 21 похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ така сама, що і в точці 5 ділянки 1.

Так і повинно бути, тому що вони дорівнюють опорним реакціям балок зверху і знизу.

З умови на ділянці 3

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_3.$$

Але оскільки на ділянці 2 у точці 21 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, то і в межах ділянки 3 маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_3 = 0.$$

Ділянка 4. Згинальний момент визначаємо за формулою

$$M_{\curvearrowright} = R_A \cdot 1,85 \left(x - \frac{1,85}{2}\right) - R_A' \cdot x = -R_A \cdot \frac{1,85^2}{2} = -87,782 \text{ кНм.}$$

$$\varphi = -M = 87,782 \text{ кНм}; \quad \varphi_{22} = \varphi_{23} = 87,782 \text{ кНм.}$$

$$\text{Похідна } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

З умови на ділянці 4 $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ отримаємо

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_4.$$

У точці стику ділянок 3 і 4 похідні однакові, тому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_4 = 0.$$

Визначення функції $\varphi_{\curvearrowright}, y_{\curvearrowright}$ в позаконтурних точках.

Ділянка 1. Із формули $\varphi_a = 2Dy \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_c$ знаходимо:

$$\varphi_1 = 2Dy \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_9 = 2Dy \cdot 0 + \varphi_9 = \varphi_9 = 0;$$

$$\varphi_2 = 2Dy \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_{10} = \varphi_{10}; \quad \varphi_3 = 2Dy \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_{11} = \varphi_{11}.$$

Ділянка 2. Із формули $\varphi_d = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_b$ дістанемо

$$\varphi_4 = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_6 = -2 \cdot 3,65 \cdot 94,9 + 259,792 = -432,978;$$

$$\varphi_8 = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{10} = \varphi_{10} - 692,770;$$

$$\varphi_{12} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{14} = \varphi_{14} - 692,770;$$

$$\varphi_{16} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{18} = \varphi_{18} - 692,770;$$

$$\varphi_{20} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{22} = -2 \cdot 3,65 \cdot 94,9 + 87,782 = -604,988.$$

Ділянки 3 і 4. Із формули $\varphi_d = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_b$ знаходимо

$$\varphi_{24} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{17} = -2Dy \cdot 0 + \varphi_{17} = 0;$$

$$\varphi_{25} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{18} = \varphi_{18};$$

$$\varphi_{26} = -2Dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{19} = \varphi_{19}.$$

Для зручності випишемо отримані значення на сітковій ділянці балки-стілки (рис. 3.10)

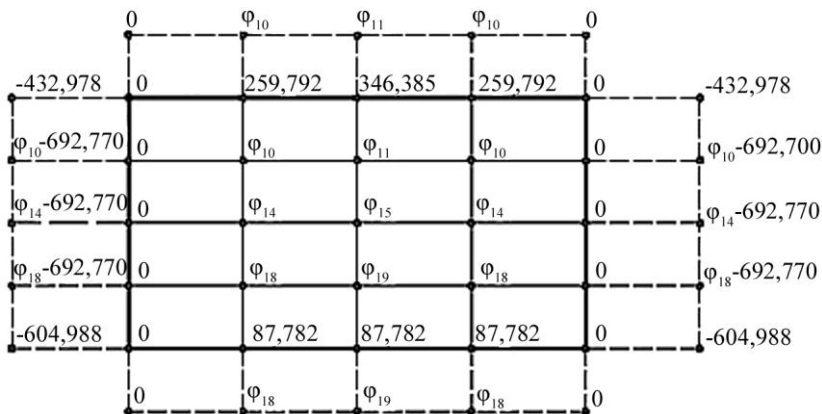


Рис. 3.10. Значення невідомих функцій дискретної моделі балки-стінки

Рівняння сумісності в скінченних різницях треба скласти тільки для внутрішніх (середніх) вузлів сіткової ділянки, з урахуванням симетрії їх буде шість (для вузлів з невідомими функції напружень – $\varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{14}, \varphi_{15}, \varphi_{18}, \varphi_{19}$):

$$\alpha = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = \frac{1,55^2}{3,65^2} = \frac{2,4025}{13,3225} = 0,180334.$$

Для вузла φ_{10}

$$\begin{aligned} & \varphi_{10} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (259,792 + \varphi_{14} + \\ & + 0 \cdot 0,180334 + 0,180334 \cdot \varphi_{11}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (0 + 346,385 + 0 + \varphi_{15}) \cdot 0,1803 + \\ & + (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{10} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{10}) = 0. \end{aligned}$$

Для вузла φ_{11}

$$\begin{aligned} & \varphi_{11} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (346,385 + \varphi_{15} + \varphi_{10} \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{10}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (259,792 + 259,792 + \\ & + \varphi_{14} + \varphi_{14}) \cdot 0,1803 + (\varphi_{11} + \varphi_{19} + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Для вузла φ_{14}

$$\begin{aligned} & \varphi_{14} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0 \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{15}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (0 + \varphi_{11} + 0 + \varphi_{19}) \cdot 0,1803 + \\ & + (259,792 + 87,782 + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{14} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{14} = 0. \end{aligned}$$

Для вузла φ_{15}

$$\begin{aligned} & \varphi_{15} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{11} + \varphi_{19} + \varphi_{14} \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{14}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (\varphi_{10} + \varphi_{10} + \varphi_{18} + \varphi_{18}) \cdot 0,1803 + \\ & + (346,385 + 87,782 + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Для вузла φ_{18}

$$\begin{aligned} & \varphi_{18} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{14} + 87,782 + 0 \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{19}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (0 + \varphi_{15} + 0 + 87,782) \cdot 0,1803 + \\ & + (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{18} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{18}) = 0. \end{aligned}$$

Для вузла φ_{19}

$$\begin{aligned} & \varphi_{19} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{15} + 87,782 + \varphi_{18} \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{18}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (\varphi_{14} + \varphi_{14} + 87,782 + \\ & + 87,782) \cdot 0,1803 + (\varphi_{11} + \varphi_{19} + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Для отримання системи із симетричними коефіцієнтами домножимо на 2 рівняння для вузлів φ_{10} , φ_{14} і φ_{18} . Необхідність домноження на 2 цих рівнянь зумовлена тим, що з урахуванням симетрії не будемо складати такі самі рівняння для правої половини балки-стінки. Після розкриття дужок і зведення подібних членів маємо:

$$\begin{aligned} & 17,41\varphi_{10} - 1,70\varphi_{11} - 9,44\varphi_{14} + 0,72\varphi_{15} + 2\varphi_{18} = 2248,33; \\ & -1,7\varphi_{10} + 8,64\varphi_{11} + 0,72\varphi_{14} - 4,72\varphi_{15} + \varphi_{19} = 1448,04; \\ & -9,44\varphi_{10} + 0,72\varphi_{11} + 15,41\varphi_{14} - 1,7\varphi_{15} - 9,44\varphi_{18} + 0,72\varphi_{19} = -650,08; \\ & 0,72\varphi_{10} - 4,72\varphi_{11} - 1,7\varphi_{14} + 7,64\varphi_{15} + 0,72\varphi_{18} - 4,72\varphi_{19} = -434,17; \\ & 2\varphi_{10} - 9,44\varphi_{14} + 0,72\varphi_{15} + 17,4\varphi_{18} - 1,7\varphi_{19} = 810,62; \\ & \varphi_{11} + 0,72\varphi_{14} - 4,72\varphi_{15} - 1,7\varphi_{18} + 8,64\varphi_{19} = 351,36. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Розв'язавши систему рівнянь (3.21), отримаємо:

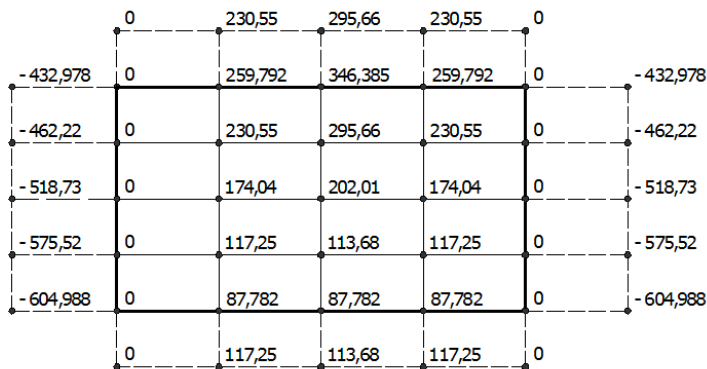


Рис. 3.12. Значення функцій Ері дискретної моделі балки-стінки

Визначимо напруження в характерних точках та побудуємо епюри (рис. 3.13):

У точці 6:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_6 + \varphi_{10} + \varphi_2}{Dy^2} = \frac{-2 \cdot 259,79 + 230,55 + 230,55}{1,55^2} = -24,34 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_6 + \varphi_5 + \varphi_7}{Dx^2} = \frac{-2 \cdot 259,79 + 0 + 346,39}{3,65^2} = -13 \text{ кН/м}^2.$$

У точці 10:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_{10} + \varphi_{14} + \varphi_6}{Dy^2} = \frac{-2 \cdot 230,55 + 174,04 + 259,79}{1,55^2} = -11,35 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_9}{Dx^2} = \frac{-2 \cdot 230,55 + 295,66}{3,65^2} = -12,42 \text{ кН/м}^2.$$

У точці 23:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_{23} + \varphi_{26} + \varphi_{19}}{Dy^2} = \frac{-2 \cdot 87,782 + 113,68 + 113,68}{1,55^2} = 21,559 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_{23} + \varphi_{22} + \varphi_{22}}{Dx^2} = \frac{-2 \cdot 87,782 + 87,782 + 87,782}{3,65^2} = 0.$$

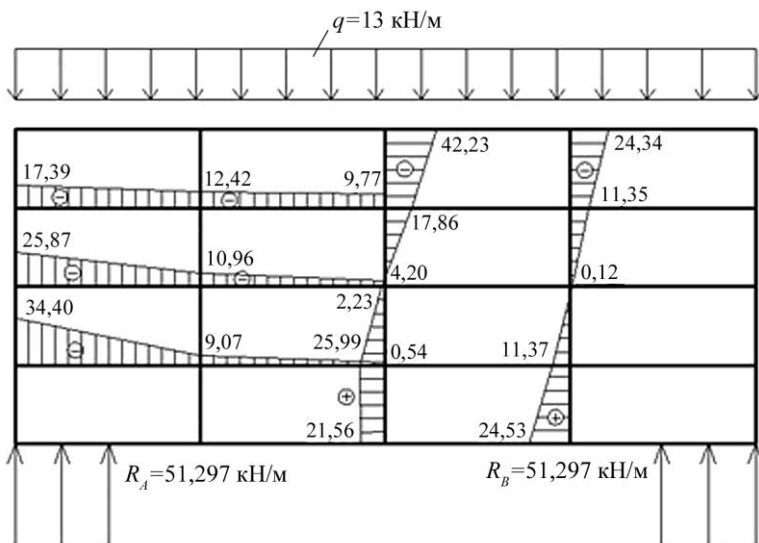


Рис. 3.13. Епюри напружень σ_x і σ_y

Запитання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає суть теорії скінченних різниць?
2. Запишіть рівняння кривої параболи у декартовій плоскій системі координат. Визначте похідні у центральній точці кривої якщо $x = 0$.
3. Побудуйте сітку на площині з постійними кроками координат $-\Delta x$, Δy і знайдіть часткові четверті похідні у різницях у точці k .
4. Наведіть рівняння сумісності у скінченних різницях для функції напружень у точці k , якщо $\Delta x = \Delta y$.
5. У чому полягає суть розв'язання плоскої задачі теорії пружності за допомогою методу скінченних різниць?

6. Наведіть дискретну модель розрахунку балки-стілки методом скінченних різниць. З яких умов визначається кількість невідомих систем розв'язувальних рівнянь для побудованої дискретної моделі.
7. Наведіть розрахункову модель конструкції балки-стілки на двох опорах з використанням балкових функцій як граничних умов.
8. З яких умов отримують значення функції напружень у контурних і позаконтурних точках дискретної моделі?
9. Як формується система розв'язувальних рівнянь для дискретної моделі конкретної конструкції балки-стілки з урахуванням площини симетрії?
10. Наведіть якісний характер епюр нормальних напружень у дискретному просторі балки-стілки. Як він відрізняється від розв'язків балок за опором матеріалів?

РОЗДІЛ 4

РОЗРАХУНОК ТОНКИХ ПЛАСТИНОК НА ЗГИН

4.1. Теорія розрахунку тонких пластинок з використанням гіпотез Кірхгофа–Лява

Тонкими вважаються плити (пластинки), що мають відношення товщини t до найменшого характерного розміру b у плані в таких межах [12]:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{t}{b} \geq \frac{1}{80}$$

та величину очікуваних прогинів не більшу за $\frac{1}{4}t$.

Пластинки, у яких $\frac{t}{b} > \frac{1}{5}$, розраховують за теорією товстих плит (пластин), а пластинки, що мають прогини більші за $\frac{1}{4}t$, – за теорією гнучких пластинок або мембран.

Тонкі пластинки можна розраховувати за наближеною теорією технічного згину пластинок, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа–Лява [13]:

1. Гіпотеза прямих незмінних нормалей: елемент нормалі до серединної поверхні пластинки залишається нормальним і незмінним (за довжиною) до цієї поверхні після деформації. Виконується гіпотеза плоских перерізів* плити, як і у балці, тобто зсувів (зсувних деформацій) у площинах за товщиною не відбувається:

$$\gamma_{zy} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0,$$

(4.1)

як і деформацій уздовж товщини t (рис. 4.1):

$$\varepsilon_z = 0.$$

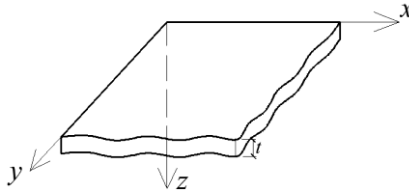


Рис. 4.1. Розрахункова схема пластинки

* за терміном дисципліни «Опор матеріалів».

2. Гіпотеза про нерозтяг серединної поверхні площини пластинки свідчить про те, що відсутні деформації розтягу, стиску і зсуву на серединній поверхні, а це означає, що серединна площина є нейтральною і тангенціальні переміщення у ній нульові:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0.$$

3. Гіпотеза про відсутність тиску між шарами пластинки напруженнями σ_z можна знехтувати:

$$\sigma_z = 0.$$

Пластинка, таким чином, досліджується на *поперечне нормальне навантаження*. Під дією навантаження пластинка прогинається і відбуваються лише вертикальні переміщення W . Відповідно до гіпотези Кірхгофа–Лява прогини W не залежать від координати z :

$$\omega = \omega(x, y),$$

а точки, що розміщені на одній вертикалі, отримують однакові зміщення. Тобто достатньо визначити прогини серединної площини пластинки (як у балці визначити прогини *нейтральної осі стрижня*).

На підставі гіпотези Кірхгофа–Лява (4.1) (з рівнянь деформацій Коші) маємо:

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

(4.2)

Інтегруванням за z з рівняння (4.2) отримаємо:

$$u = -z \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_1(x, y);$$

$$v = -z \frac{\partial \omega}{\partial y} + f_2(x, y).$$

(4.3)

Із граничних умов, коли $z = 0$, $u_0 = v_0 = 0$, а з рівняння

(4.3) маємо:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0;$$

$$v_0 = f_2(x, y) = 0,$$

тоді остаточно дістаємо:

$$u = -z \frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

(4.4)

Таким чином, згідно з рівняннями (4.4) складові вектора переміщень точок пластинки у напрямі осей x і y визначаються через функцію прогинів серединної поверхні, і, як наслідок, за формулами Коші можна визначити складові тензора деформацій у тонкій пластинці:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2};$$

(4.5)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.$$

4.2. Рівняння Коші та узагальненого закону Гука з урахуванням гіпотез і допущень технічної теорії згину

Якщо використати рівняння стану на основі узагальненого закону Гука з урахуванням $\sigma_z = 0$, то отримаємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Складемо обидві рівності рівняння (4.6), попередньо помноживши другу на ν :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{3}(\sigma_x - \chi\sigma_y) \\ + \\ \nu\varepsilon_y &= \frac{1}{3}(\chi\sigma_y - \chi^2\sigma_x)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x + \chi\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_x - \chi\sigma_y + \chi\sigma_y - \chi^2\sigma_x);$$

$$\varepsilon_x + \chi\varepsilon_y = \sigma_x \frac{1 - \chi^2}{E}.$$

(4.7)

Із рівняння (4.7) отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1 - \chi^2)}(\varepsilon_x + \chi\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1 - \chi^2)}(\varepsilon_y + \chi\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \chi)}\gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Підставивши рівняння (4.5) у (4.8), дістаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1 - \chi^2)}\left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \chi\left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)\right); \\ \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \chi^2}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right);\end{aligned}\quad (4.9)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-x^2)} \left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + x \left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right);$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right);$$

(4.10)

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+x^2)} \left(-2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{Ez}{(1+x^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.$$

(4.11)

Дотичні напруження у двох площинах, ортогональних до серединної поверхні, за формулами закону Гука і другою гіпотезою перетворюються у нульові значення:

$$\tau_{zy} = \frac{E}{2(1+x)} \gamma_{zy} = 0;$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+x)} \gamma_{zx} = 0.$$

(4.12)

Цей результат отримано згідно з гіпотезою Кірхгофа–Лява, але він суперечить умовам рівноваги, тобто в дійсності ці дотичні напруження не дорівнюють нулю і їх не можна визначити за формулами (4.12). Щоб знайти вирази для цих напружень, розглянемо вихідні рівняння рівноваги. Для першого з них, нехтуючи об'ємними силами, маємо:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

(4.13)

Із рівняння (4.13) і формул (4.9), (4.11) отримаємо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + x \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}.$$

(4.14)

Після спрощення формули (4.14) маємо

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad \text{або}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

(4.15)

Інтегруючи вираз (4.15) за z , дістаємо:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1+x^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_1(x, y).$$

(4.16)

Для визначення довільної функції $f_1(x, y)$ маємо граничні умови: на верхній і нижній поверхнях пластинки, де немає дотичних навантажень, тобто якщо $z = \pm \frac{h}{2}$, то $\tau_{zx} = 0$. Підставляючи ці умови у формулу (4.16), маємо:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_1(x, y)$$

і визначаємо

$$f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

(4.17)

Підставимо рівняння (4.17) у співвідношення (4.16), тоді

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-x^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

(4.18)

Розв'язавши друге загальне рівняння рівноваги, отримаємо:

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-x^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega.$$

(4.19)

Рівняннями (4.18), (4.19) доповнюємо рівняння (4.9), (4.10) і (4.11):

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right);$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+x^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y};$$

(4.20)

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-x^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega;$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-x^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega.$$

Напруження чистого згину σ_x , σ_y і $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ розподіляються, перетворюючись в нуль у точках серединної площини пластинки, а напруження τ_{yz} і τ_{zx} розподіляються за параболою, досягаючи у точках серединної площини максимального значення.

4.3. Диференціальне рівняння рівноваги тонкої пластинки від дії поперечного навантаження.

У перерізах, ортогональних серединній площині пластинки вздовж x і y , виникають напруження, показані на рис. 4.2.

Якщо ці напруження проінтегрувати за товщиною пластинки за z , то отримаємо внутрішні зусилля у перерізах, ортогональних серединній площині. Ці внутрішні зусилля дають складові погонних згинальних моментів M_x, M_y, M_{xy} та поперечних зусиль Q_x і Q_y .

Запишемо ці рівняння:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz;$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} h^3 = \frac{1}{12} h^3;$$

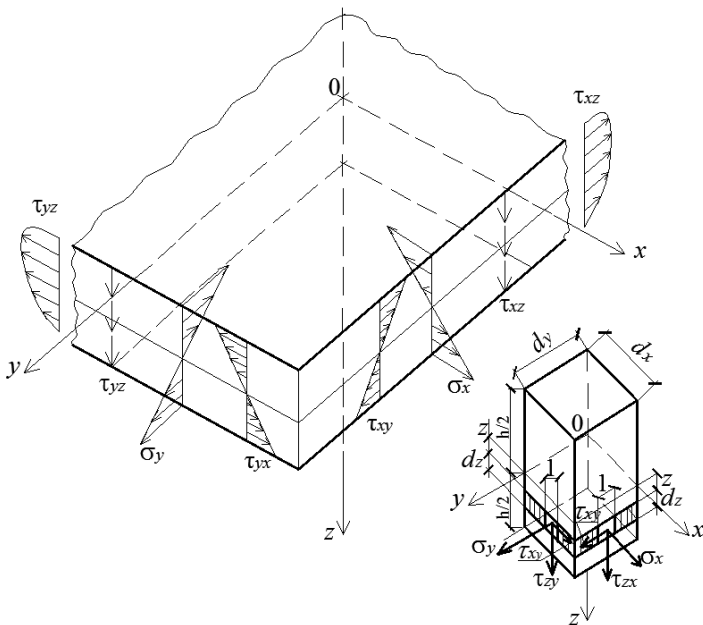


Рис. 4.2. Епюри розподілу напружень по товщині пластинки

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

(4.21)

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-x^2)}$ – циліндрична жорсткість.

Циліндрична жорсткість пластинки є її фізичною і геометричною характеристикою при згинанні.

Аналогічно:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right);$$

M_x M_y – згинальні моменти у перерізах з нормаллями за x , y ;

$$M_{yx} = M_{xy} \equiv H = -D(1-x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \text{ – крутні моменти.}$$

Погонна поперечна сила у перерізі з нормаллю x дорівнює:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{E}{2(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

Аналогічно:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega.$$

Таким чином, у перерізах пластинки, перпендикулярних до її середньої площини, під дією поперечного навантаження виникають такі погонні зусилля:

- згинальні моменти:

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \end{cases} \quad (4.22)$$

- поперечні сили:

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega; \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega; \end{cases} \quad (4.23)$$

- крутні моменти:

$$H = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \quad (4.24)$$

Напрями додатних значень знайдених внутрішніх зусиль показані на рис. 4.3, при цьому додатні значення зусиль збігаються з напрямками дії відповідних додатних складових напружень, а також з правилами визначення знака внутрішніх зусиль в опорі матеріалів (рис. 4.4).

Запишемо диференціальні рівняння рівноваги відносно серединної площини пластинки, що згинається під дією зусиль. Для цього вирізаємо із серединної площини пластинки нескінченно малий елемент розмірами dx , dy та знаходимо всі діючі на нього зусилля і навантаження у додатному напрямі (рис. 4.5).

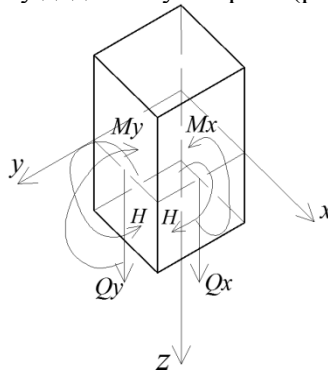


Рис. 4.3. Схема елемента пластинки із зображенням напрямів дії внутрішніх зусиль

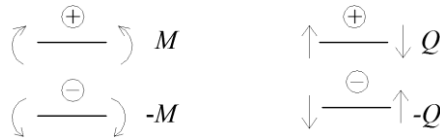


Рис. 4.4. Правила визначення знака внутрішніх зусиль

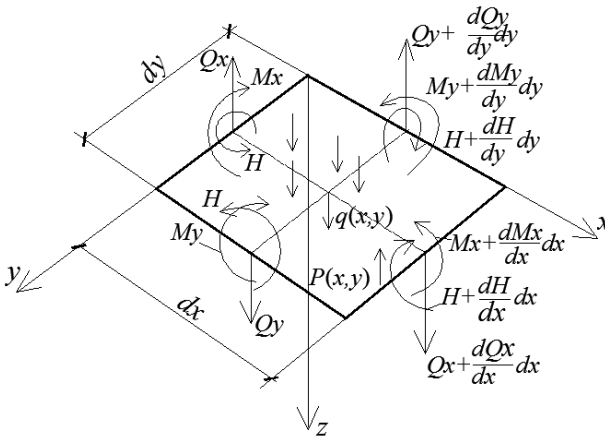


Рис. 4.5. Схема діючих зусиль та навантажень на елемент серединної поверхні пластинки: $q(x, y)$ – зовнішнє поперечне навантаження; $p(x, y)$ – реакція пружної основи

Спроєктуємо всі сили на вісь z і моменти відносно осей x, y , отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q(x, y) + p(x, y); \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x; \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_x. \end{cases} \quad (4.25)$$

Із системи рівнянь (4.25) виключаємо поперечні сили. Для цього диференціюємо друге і третє рівняння системи відповідно за x та y , складаємо їх і замість отриманої правої частини підставляємо її значення з першого рівняння. Остаточно маємо:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) + p(x, y). \quad (4.26)$$

Підставляємо у вираз (4.26) значення M_x , M_y і H , відповідно використовуючи рівняння (4.22) і (4.24), отримаємо:

$$\begin{aligned} -D \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-x) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \\ = -q(x, y) + p(x, y). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Спростивши рівняння (4.27), дістаємо:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q(x, y) - p(x, y)$$

або

$$D \nabla^4 \omega - q(x, y) + p(x, y) = 0. \quad (4.28)$$

Рівняння (4.28) є диференціальним рівнянням зігнутої серединної поверхні пластинки і має назву рівняння Софі Жермен.

Під час інтегрування рівняння (4.28), виникнуть довільні сталі інтегрування, які визначають з умов на контурі пластинки, що залежать від характеру закріплення її країв.

4.4. Методика розв'язання задач на згин тонких пластинок. Умови на контурі

Визначимо загальний порядок розв'язання задачі на поперечний згин тонких пластинок. Розрахунок тонкої пластин-

ки слід починати з пошуку такої функції прогину ω , яка б задовольняла основне диференціальне рівняння Софі Жермена та умови на контурі. Пошук цієї функції здійснюється шляхом її поступового підбору і перевірки на відповідні умови на контурі та диференціальному рівнянні рівноваги. Якщо для конкретного випадку буде знайдена функція прогинів ω , то далі знаходимо згинальні та крутні моменти у будь-якому перерізі пластинки за відповідними координатами x і y .

Поперечні сили можна визначити, використовуючи рівняння рівноваги, підставляючи у них значення згинальних і крутних моментів:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y};$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x},$$

або за формулами (4.23).

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

(4.29)

Якщо скористатися формулами (4.20) і (4.22):

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right);$$

(4.30)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

(4.31)

визначивши множник у дужках з рівняння (4.31) і підставивши його в рівняння (4.30), з урахуванням рівняння (4.21), отримаємо

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-x^2} \left(\frac{M_x}{D} \right) = +\frac{M_x Ez \cdot 12(1-x^2)}{(1-x^2)Eh^3} = \frac{M_x}{I} z, \quad (4.32)$$

де I – момент інерції одиничної смуги пластинки, $I = \frac{1h^3}{12}$.

Вираз (4.32) свідчить, що напруження σ_x у тонких пластинках визначаються за згинальними моментами так само, як і у звичайних балках:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z,$$

а для екстремальних значень у верхньому і нижньому волокнах пластинки за відповідними формулами опору матеріалів:

$$\sigma_{x \max} = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \sigma_{y \max} = \pm \frac{M_y}{W},$$

де W – момент опору розрахункового перерізу пластинки.

Відповідно для горизонтальних дотичних напружень у вертикальних перерізах пластинки маємо:

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z; \quad \tau_{xy \max} = \pm \frac{M_{xy}}{W}.$$

Для вертикальних дотичних напружень, а також таких, що дорівнюють їм, дотичних напружень у горизонтальних площинах (закон парності дотичних напружень) теж застосовуються формули опору матеріалів:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_x S}{I}; \quad \tau_{yz} = \pm \frac{Q_y S}{I},$$

де S – статичний момент у точці для відсіченої площі одиничного перерізу пластинки. Для точки у центрі перерізу на серединній площині

$$S = \frac{1h^2}{8} = \frac{h^2}{8}; \quad I = \frac{1h^3}{12}.$$

Тоді максимальні вертикальні дотичні напруження в ортогональних перерізах пластинки на нейтральній площині визначаються за формулами опору матеріалів:

$$\tau_{xz_{\max}} = \frac{Q_x h^2 \cdot 12}{28h^3} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{yz_{\max}} = \frac{3Q_y}{2h}.$$

Умови на контурі, які використовуються для визначення сталих інтегрування, залежать від характеру закріплення країв пластинки. На краях пластинки можуть бути задані прогини і кути повороту серединної площини, згинальні і крутні моменти, поперечні сили. Умови, за яких на контурі задаються узагальнені переміщення, тобто прогини, або кути повороту серединної площини, називаються *геометричними граничними умовами*. Якщо на контурі задані узагальнені зусилля, тобто згинальні або крутні моменти та поперечні сили, то такі умови називаються *статичними*. Якщо на контурі одночасно задані і переміщення, і зусилля, то такі умови вважаються *змішаними*. На кожному краю треба задавати три граничні умови. Таким чином маємо: 1) геометричні граничні умови; 2) статичні граничні умови; 3) мішані граничні умови.

Розглянемо деякі граничні умови на прикладі прямокутної пластинки (рис. 4.6):

1. Закріплений край – OA (геометричні умови):

$$y = 0 \rightarrow W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

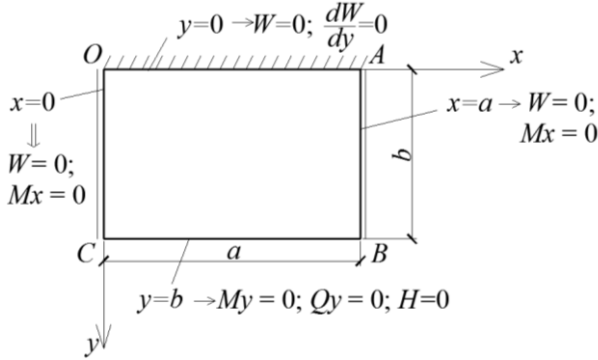


Рис. 4.6. Розрахункова схема прямокутної пластинки

2. Шарнірно-обперті краї OC і AB (змішані умови)

$$\begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \Rightarrow W=0; \quad M_x=0.$$

Якщо виразити M_x через функцію прогину, то

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \text{ повністю геометричні умови.}$$

3. Вільний край CB (статичні умови)

$$y=b \rightarrow M_y=0; \quad Q_y=0; \quad H=0.$$

На вільному краю CB замість двох граничних умов виникають три умови. Ця суперечність зумовлена з тим, що задача розв'язується наближено і задовольнити всі граничні умови неможливо. Але її можна уникнути, якщо об'єднати дві останні умови ($Q_y=0$, $H=0$), тобто крутний момент і поперечну силу на контурі пластинки можна замінити однією силою, яка буде їм статично еквівалентною.

Розглянемо крутний момент інтенсивністю H (погонний), який розподілений уздовж грані CB , паралельній осі x (рис. 4.7, a). На проміжку dx діє крутний момент, що дорівнює величині Hdx , який можна подати у вигляді пари протилежно напрямлених сил H

з плечем dx (рис. 4.7, б). На сусідньому елементі dx крутний момент буде збільшений на нескінченно малу величину dH , тобто

$$(H + dH)dx = \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dx.$$

Крутний момент також можна подати у вигляді пари вертикальних протилежно напрямлених сил величиною $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ з плечем dx . Таку заміну крутних моментів вертикальними силами можна виконати на довжині всієї ділянки грані CB . На межі кожного нескінченно малого елемента dx , за винятком крайніх точок C і B , будуть діяти дві протилежно направлені сили, різниця між якими дорівнює $\frac{\partial H}{\partial x} dx$. Таким чином, уздовж грані CB буде діяти розподі-

лене по довжині навантаження інтенсивністю $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 4.7, в). У точках C і B будуть виникати зосередженні сили H_C і H_B .

Остаточно отримане вертикальне навантаження можна об'єднати з поперечною силою Q_y і вважати, що на грані CB діє зведена поперечна сила інтенсивністю

$$Q_y^{3B} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}.$$

(4.33)

Аналогічно вздовж граней контуру пластинки, паралельних осі y , буде діяти зведена поперечна сила інтенсивністю

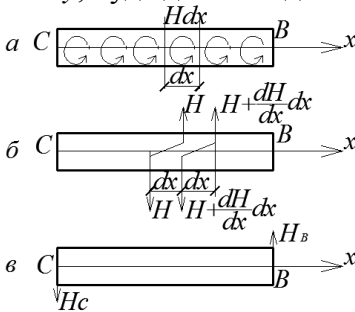


Рис. 4.7. Схеми розподілу крутного моменту на контурі пластинки

$$Q_x^{3B} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.34)$$

Похідні крутних моментів за x і y знайдемо відповідно до формули (4.24), тобто:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -D(1-x) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y};$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -D(1-x) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}.$$

(4.35)

Підставляючи у формули (4.33), (4.34) значення поперечних сил (4.29) і похідних крутного моменту (4.35), отримуємо:

$$Q_x^{3B} = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-x) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right];$$

$$Q_y^{3B} = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-x) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Таким чином, на кожній грані пластинки замість трьох зусиль – згинального моменту, крутного моменту і поперечних сил – можна розглядати тільки два зусилля: згинальний момент та зведену поперечну силу. Додатні напрями цих зведених поперечних сил на всіх гранях прямокутної пластинки та зосереджені сили, що виникають у кутах пластинки, показані на рис. 4.8.

У результаті такої заміни зусиль на вільному від закріплення краю пластинки CB замість трьох умов

$$M_y = 0; \quad Q_y = 0; \quad H = 0$$

можна вимагати виконання лише двох:

$$M_y = 0; \text{ і } Q_y^{3B} = 0.$$

(4.36)

Зазвичай, граничні умови задовольняються наближено, але за принципом Сен-Венана така заміна поперечної сили і крутного моменту статично еквівалентною зведеною поперечною силою зумовлює лише місцеві напруження поблизу розглянутого краю пластинки. Якщо умови (4.36) виразити через функцію прогину $\omega(x, y)$, тоді на вільній грані CB при $y = b$ має бути:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^3} + (2-1) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{cases}$$

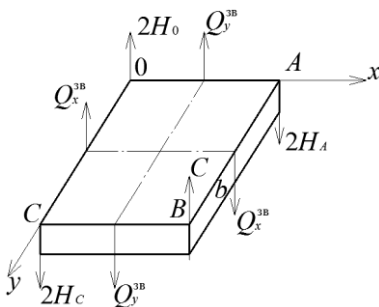


Рис. 4.8. Схема елемента пластинки із зображенням зведених перерізувальних та зосереджених сил

4.5. Приклад аналітичного розрахунку еліптичної тонкої пластинки на поперечний згин

Розглянемо приклад еліптичної тонкої пластинки, закріпленої по контуру та завантаженої по всій площині рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. 4.9).

Розв'язок диференціального рівняння (4.28) без урахування пружної основи для такої пластинки може бути отриманий у замкненому (аналітичному) вигляді. Для розв'язання задачі застосо-

вемо зворотний метод, тобто обираємо за основу вид функції прогинів $\omega(x, y)$ і визначаємо, чи задовольняє вона диференціальне рівняння (4.28), навантаження і граничні умови.

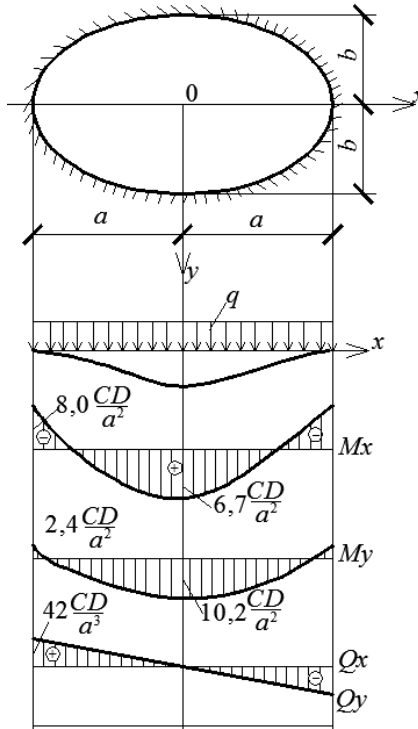


Рис. 4.9. Епюри згинальних моментів та поперечних сил для еліптичної пластинки

Рівняння контуру еліптичної пластинки (рис. 4.9) відповідає канонічній формі еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Беремо функцію прогинів у вигляді степеневого полінома:

$$\omega(x, y) = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (4.37)$$

де c – сталий коефіцієнт є невідомою величиною в рівнянні (4.37).

З'ясуємо, чи справджується основне рівняння (4.28):

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{4c}{a^2} \left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{xy^2}{b^2} - x \right); \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{4c}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = \frac{4c}{a^2} \left(\frac{6x}{a^2} \right);$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = \frac{24c}{a^4};$$

(4.38)

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{24c}{b^4}; \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4c}{a^2} \left(\frac{2y}{b^2} \right); \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8c}{a^2 b^2}.$$

Підставимо вираз (4.38) у рівняння Софі Жермен (4.28):

$$\frac{24c}{a^4} + 2 \frac{8c}{a^2 b^2} + \frac{24c}{b^4} = \frac{q}{D}.$$

Рівняння (4.28) виконується, якщо

$$c = \frac{q}{D \left(\frac{24c}{a^4} + \frac{16c}{a^2 b^2} + \frac{24c}{b^4} \right)}.$$

Оскільки c – стала величина, то і q має бути сталою. Із цього випливає, що функція (4.37) є розв'язком диференціального рівняння (4.28) при поперечному навантаженні q , рівномірно розподіленому по поверхні пластинки.

До виразу $\omega(x, y)$ входить рівняння еліпса, тому для будь-якої точки контуру $\omega = 0$,

$$\omega(x, y) = \frac{q}{\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

Крім того, завдяки закріпленню по контуру пластинки, похідні функції прогинів також повинні дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \text{ і } \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \text{ Перевіримо це:}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{4cx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

(4.39)

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{4cy}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

До рівняння (4.39) також входять рівняння еліпса, тому скрізь по контуру $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$. Таким чином, і прогини, і кути повороту серединної площини на контурі пластинки дорівнюють нулю. Це свідчить про те, що функцію задано правильно і отримано точний розв'язок. Прогин у центрі пластинки дорівнює значенню c .

Якщо $x = 0$ і $y = 0$, тобто на осях симетрії, крутний момент дорівнює нулю:

$$H = -\frac{8cD}{a^2b^2} (1-x)xy.$$

У центрі пластинки згинальний момент при $x = 0$ і $y = 0$ становить:

$$M_x = \frac{q}{2 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{x}{b^2} \right).$$

(4.69)

Якщо пластинка кругла, то маємо окремий випадок еліптичної пластинки:

$$\text{якщо } b = a, \text{ то } \max \omega = \frac{qa^4}{64D}.$$

Момент у центрі, якщо $x = 0$ і $y = 0$, буде становити:

$$M_x = \frac{(1+\nu)qa^2}{16}.$$

4.6. Основні рівняння згину круглї тонкої пластинки

Для розв'язання задачі на згин круглї пластинки всі рівняння згину пластинки, отримані у декартовій системі, необхідно перетворити в полярну систему координат (рис. 4.10).

Якщо у декартовій системі координат функція прогину і функція зовнішнього впливу для серединної площини пластинки

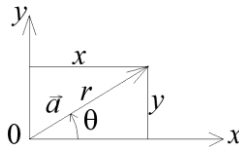


Рис. 4.10. Схема перетворення з декартової у полярну систему координат мають вигляд $\omega(x, y), q(x, y), p(x, y)$, то у полярній системі координат вони набудуть вигляду $\omega(r, \theta), q(r, \theta), P(r, \theta)$.

Рівняння згину серединної площини пластинки у полярній системі координат має вигляд:

$$\begin{cases} D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) = \\ = q(r, \theta) - p(r, \theta); \\ \omega(r, \theta) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \iint_F \frac{p(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}. \end{cases}$$

Замінюємо похідні за x і y на похідні за r і θ :

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right];$$

$$M_{\theta} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + x \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right];$$

$$H = -D \left(-x \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right);$$

$$Q_r^{3B} = Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta}; \quad Q_{\theta}^{3B} = Q_{\theta} + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Для круглої пластинки в осесиметричній задачі, коли навантаження та граничні умови не залежать від полярного кута θ , функція прогинів буде залежати від однієї координати r :

$$\omega = \omega(r), \quad q = q(r), \quad p = p(r).$$

При цьому, бігармонічне рівняння Софі Жермен спрощується і визначається звичайними диференціальними рівняннями четвертого порядку:

$$\left\{ \begin{aligned} D \left(\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\omega}{dr} \right) &= q(r) - p(r); \\ \omega(r, \theta) &= \frac{1 - x_1^2}{\pi E_1} \int_0^a \frac{p(\xi) d\xi}{r - \xi}; \end{aligned} \right.$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right);$$

$$M_{\theta} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + x \frac{d^3 \omega}{dr^3} \right);$$

$$H = 0;$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right);$$

$$Q_{\theta} = 0; \quad Q_r^{3B} = Q_r; \quad Q_{\theta}^{3B} = Q_{\theta}.$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - x^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + x \frac{\omega}{r} \right);$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-x^2} \left(\frac{\omega}{r} + x \frac{\partial \omega}{\partial r} \right).$$

(4.40)

Із рівнянь рівноваги за відсутності об'ємних сил залишається одне рівняння:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0.$$

(4.41)

Підставляючи рівняння (4.41) у вираз (4.40), дістаємо диференціальне рівняння відносно переміщення ω :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} = 0.$$

(4.42)

Диференціальне рівняння (4.42) зі змінними коефіцієнтами зводимо, виконавши підстановки до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$t = \ln r; \quad r = e^t; \quad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}.$$

Зв'язок між похідними від функції ω за старою та новою змінними:

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

(4.43)

З урахуванням рівняння (4.42) друга похідна має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dt} \right) = \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 \omega}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Підставляючи рівняння (4.43) і (4.44) у вираз (4.42), отримаємо

$$\frac{d\omega}{dt^2} - \omega = 0.$$

(4.45)

Розв'язок диференціального рівняння (4.45) відомий:

$$\omega = Ae^t + Be^{-t},$$

або, переходячи до старої змінної r , маємо:

$$\omega = Ar + \frac{B}{r}.$$

Знаючи складову переміщення ω з рівнянь Коші, дістаємо:

$$\varepsilon_r = A - \frac{B}{r^2},$$

$$\varepsilon_\theta = A + \frac{B}{r^2}.$$

Із формул закону Гука отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-x^2} \left[(1+x)A - (1-x)\frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-x^2} \left[(1+x)A + (1-x)\frac{B}{r^2} \right]. \end{cases}$$

Постійні A і B визначаються з граничних умов для конкретної задачі.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які пластинки вважаються тонкими? У чому полягає наближена теорія технічного згину пластинки?
2. Наведіть складові гіпотези Кіргофа–Лява. Які функції переміщень матеріальної точки пластинки незалежні?
3. Наведіть рівняння деформації Коші з урахуванням гіпотези Кірхгофа–Лява для тонкої пластинки.
4. Наведіть рівняння узагальненого закону Гука з урахуванням гіпотези Кірхгофа–Лява для тонкої пластинки.
5. Наведіть схему дії внутрішніх і зовнішніх сил елементарної площини на середній поверхні пластинки і виведіть диференціальні рівняння рівноваги.
6. Виведіть диференціальне рівняння Софі Жермен із диференціальних рівнянь рівноваги діючих зовнішніх і внутрішніх сил у елементарному околі пластинки.
7. Які умови використовуються на контурі для визначення сталих інтегрування для розв'язання диференціального рівняння Софі Жермен?
8. Що таке зведена поперечна сила і для чого вона використовується?
9. У чому полягає розв'язок Нав'є для задачі згину прямокутної пластинки?
10. Наведіть диференціальне рівняння прогинів нескінченної смуги на пружній основі.

РОЗДІЛ 5

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

5.1. Статично невизначувані системи. Основи теорії розрахунку методом сил

Статично невизначуваною механічною системою називають таку систему, яка має зайві в'язі і тому не може бути розрахована з використанням лише умов рівноваги статички, виходячи із системи рівнянь теоретичної механіки.

Система рівнянь вільної механічної моделі з точки зору теоретичної механіки: «геометрично незмінна механічна система буде у рівновазі під дією зовнішніх сил за умови, що головний вектор і головний момент дорівнюють нулю». За зайві в'язі припускають ті в'язі, якими можна знехтувати для отримання статично визначуваної і геометрично незмінної системи. Кількість зайвих в'язів, якими можна знехтувати для перетворення її в основну систему – статично визначувану та геометрично незмінну – називають *ступенем статичної невизначеності*. Ступінь невизначуваності можна підрахувати за формулою

$$n_c = 3k - \text{ш},$$

(5.1)

де k – кількість замкнених контурів; ш – кількість простих шарнірів.

За видом статичної невизначуваності розрізняють механічні системи [14; 15; 16]: зовнішньо статично невизначувані і внутрішньо статично невизначувані.

Зовнішньо статично невизначуваною системою називають таку систему, яка має тільки зовнішні зайві в'язі, тобто зайві в'язі в опорних елементах. Наприклад, трипрогонова рама, показана на рис. 5.1, є п'ять разів статично невизначуваною ($n_c = 3 \cdot 3 - 4 = 5$).

Внутрішньо статично невизначуваною системою для плоских рам називають систему, що має зайві в'язі, які введені для взаємного з'єднання окремих частин (елементів) системи. Наприклад, двохпорна рама з підвищеною затяжкою (рис. 5.2), є зовнішньо статично визначуваною, але внутрішньо один раз статично невизначуваною. Рама, що показана на рис. 5.3 є зовнішньо статично визначуваною, але внутрішньо є дев'ять разів статично невизначуваною.

Статично невизначувані системи мають такі властивості:

- 1) більш жорсткі;
- 2) більш економічні. Тобто в статично невизначуваних системах із великою кількістю елементів за однакових навантажень (порівняно з подібними статично визначуваними системами) діють менші внутрішні зусилля;

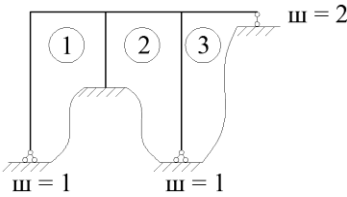


Рис. 5.1. Трипрогонова рама

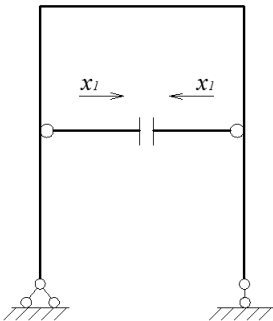


Рис. 5.2. Основна система

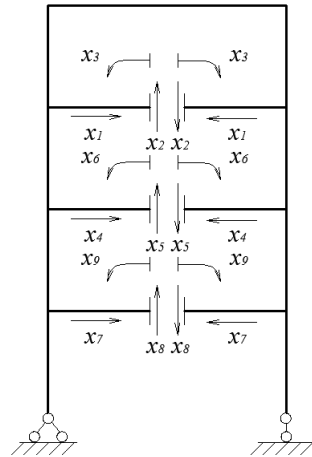


Рис. 5.3. Основна система

двохопорної рами з
підвищеною затяжкою

двохопорної рами з
трьома затяжками

3) порушення зайвих в'язей не призводить до раптової геометрично змінної системи, отже, не спричиняє фізичного руйнування всієї системи;

4) внутрішні зусилля залежать від жорсткості елементів (тобто розподіляються залежно від форми, структури та жорсткості елементів механічної системи – будівлі або споруди). Зміна розмірів і форми перерізів елементів статично невизначуваної системи призводить до зміни зусиль у в'язях та перерозподілу внутрішніх зусиль у всій системі;

5) усадка опор або зміна температури призводять до додаткової деформації та внутрішніх зусиль.

Методи розрахунку статично невизначуваних систем:

- 1) за характером основних невідомих;
- 2) за ступенем точності;
- 3) за ділянками роботи матеріалу елементів механічної системи;
- 4) за особливістю розрахункових операцій.

1. За характером основних невідомих маємо:

- метод сил;
- метод переміщень (деформацій);
- змішаний метод.

Для розрахунків за методом сил основними невідомими є зусилля в зайвих (відкинутих) в'язях.

Для розрахунків за методом переміщень невідомими є переміщення, зумовлені деформаціями системи, значення яких достатні для визначення всіх зусиль.

У разі використання змішаного методу за невідомі вибирають частково сили, частково переміщення.

2. За ступенем точності розрізняють:

- точні методи;
- наближені методи.

Точні методи розрахунку ґрунтуються на загальних основних положеннях, які прийняті для розрахунків досить жорстких споруд. До таких методів належать методи у лінійних

системах, у яких використовуються: узагальнений закон Гука, розрахунки за недеформованою схемою, принцип суперпозиції – складання дії сил та ін.

Наближені методи: крім загальних допущень і гіпотез використовуються додаткові допущення про відсутність відхилень від результатів точних методів .

3. За ділянками роботи матеріалів розрізняють розрахункові конструкцій і споруд у пружній стадії і за граничними станами.

4. За особливістю розрахункових операцій:

- аналітичні та напіваналітичні;
- числові методи;
- експериментальні методи.

Основною системою називають систему, взяту за основу розрахунку заданої статично невизначуваної конструкції. Основну систему отримуємо із заданої (статично невизначуваної) після відкидання зайвих в'язів і заміни їх відповідними зовнішніми зусиллями. За основною системою встановлюються переміщення і внутрішні зусилля, за якими знаходять зайві невідомі, застосовуючи рівняння деформацій і переміщень, а також визначаються остаточні зусилля для заданої системи.

Розглянемо методи сил для плоских рам. Порядок розрахунку рами методами сил [15; 16; 17]:

1. Перехід від заданої статично невизначуваної системи до основної – статично визначуваної, але адекватної заданій. Основна система повинна бути геометрично незмінною системою і утворюватися шляхом відкидання зайвих в'язів.

2. Уведення замість відкинутих зайвих в'язів відповідних їм невідомих сил x_1 , x_2 і т. д.

3. Складання рівнянь деформацій, що визначають умови рівності нулю переміщень за направленням кожної зайвої в'язі.

4. Визначення всіх коефіцієнтів за невідомих і вільних членів рівнянь деформації, розв'язання системи цих рівнянь і пошук зайвих невідомих та побудова епюр M , Q і N для заданої рами.

Рівняння деформацій, що записані у певній прийнятній формі, називаються канонічними рівняннями методу сил.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі двічі статично невизначуваної рами (рис. 5.4), $n_c = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.

Для розглядуваного прикладу можна скласти декілька варіантів основних систем: наводимо три варіанти ОС1, ОС2 і ОС3. Доцільно вибрати той, який має однорідні невідомі замість відкинутих в'язів: тільки сили або тільки згинальні моменти.

5.2. Система розв'язувальних рівнянь і обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Вибираємо основну систему ОС2, тоді маємо умови рівності нулю вертикальних і горизонтальних переміщень точки a :

$$\begin{cases} \Delta x_1(x_1, x_2, q) = 0; \\ \Delta x_2(x_1, x_2, q) = 0. \end{cases}$$

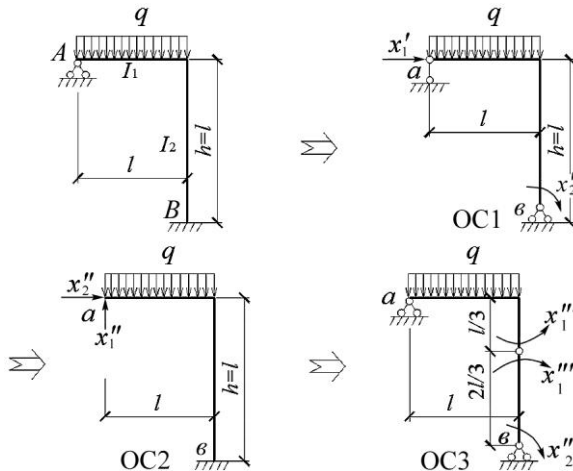


Рис. 5.4. Основні системи рами одержані відкиданням тих чи інших зайвих в'язів

У явній формі через зайві невідомі x_1, x_2 застосовуємо принцип суперпозиції як для лінійної системи: переміщення, викликане системою сил x_1, x_2, q , подаємо у вигляді суми переміщень, що зумовлені силами x_1, x_2, q . Для лінійно деформованої системи переміщення Δx_1 і Δx_2 можуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \Delta x_1 x_1 + \Delta x_1 x_2 + \Delta x_1 p = 0; \\ \Delta x_2 x_1 + \Delta x_2 x_2 + \Delta x_2 p = 0. \end{cases}$$

(5.2)

Для скорочення форми запису (5.2) знехтуємо в індексах буквою x і отримаємо:

$$\begin{cases} \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p} = 0; \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Покажемо графічно переміщення від дії окремих сил x_1, x_2, q (рис. 5.5) в основній системі: для лінійно деформованої системи переміщення $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$, що зумовлені силами x_1, x_2 за законом Гука, пропорційні силам x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \delta_{11} x_1; & D_{12} &= \delta_{12} x_2; \\ D_{21} &= \delta_{21} x_1; & D_{22} &= \delta_{22} x_2, \end{aligned}$$

де δ_{11} – переміщення, за напрямом x_1 від дії одиничної сили $x_1 = 1$;

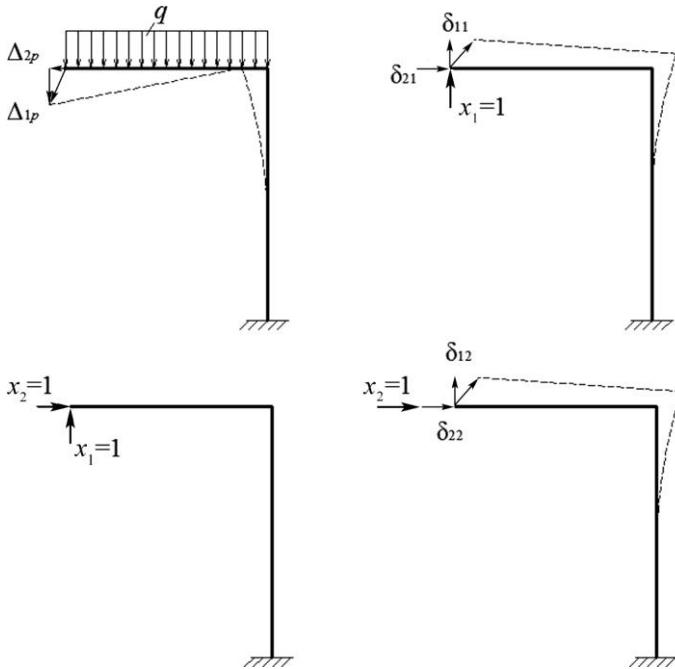


Рис. 5.5. Схеми переміщення рами від дії окремих сил x_1 , x_2 , q

δ_{12} – переміщення, за напрямом x_1 від дії одиничної сили $x_2=1$; δ_{21} – переміщення, за напрямом x_2 від дії одиничної сили $x_1=1$; δ_{22} – переміщення, за напрямом x_2 від дії одиничної сили $x_2=1$. Тоді остаточно з умов (5.2) маємо канонічні рівняння за методом сил:

$$(5.3) \quad \begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + D_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + D_{2p} = 0. \end{cases}$$

Визначаємо коефіцієнти рівнянь (5.3), використовуючи формули Максвелла–Мора для звичайних рам, тобто утримуємо члени, які пов’язані тільки зі згинальними моментами:

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI_{(S(n))}} dS_{(n)},$$

(5.4)

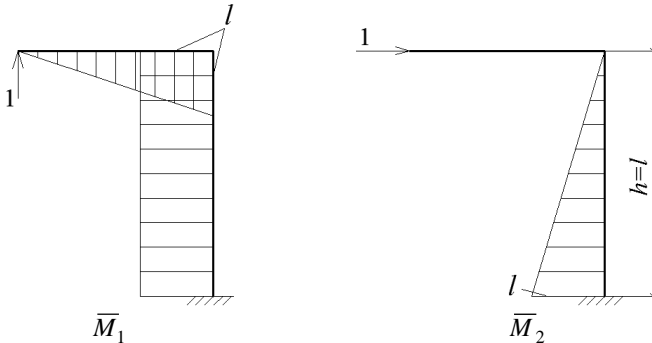
де $\overline{M}_i, \overline{M}_j$ – функції згинального моменту в будь-якому перерізі стрижня рами основної системи від дії сил $x_i = 1, x_j = 1$; S – довжина стрижня рами; k – кількість стрижнів.

Для коефіцієнтів від дії навантаження маємо

$$\Delta_{ip} = \sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_p}{EI_{(S(n))}} dS.$$

Відшукавши функції згинальних моментів $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ і \overline{M}_p , обчислюємо переміщення за формулами Максвелла–Мора, розв’язуємо рівняння і визначаємо зайві невідомі x_1 і x_2 .

Будуємо одиничні епюри (рис. 5.6).



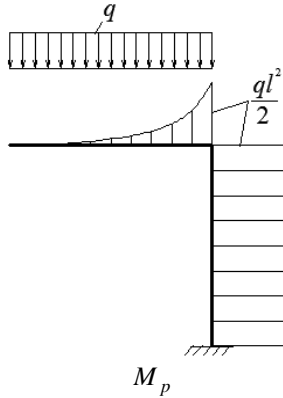


Рис. 5.6. Епюри \bar{M}_1 , \bar{M}_2 від дії одиничних основних невідомих сил x_1 , x_2 та епюра M_p від дії зовнішнього навантаження q

Перемноживши одиничні епюри на їх значення після розв'язання рівнянь (5.3), будуємо епюри для x_1 і x_2 , підсумовуємо їх між собою, а потім з епюром M_p . Таким чином, отримуємо епюри згинальних моментів для статично невинизначуваної системи (рис. 5.7).

Властивості коефіцієнтів канонічної системи методу сил:

1. Якщо записати систему канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторній формі, тоді

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1p} \\ D_{2p} \end{Bmatrix}.$$

2. Ліва частина системи рівнянь називається матрицею піддатливості, коефіцієнти якої визначаються переміщеннями від одиничних сил зайвих невідомих: δ_{11}, δ_{22} – головні коефіцієнти (переміщення), а δ_{12}, δ_{21} – побічні коефіцієнти (переміщення). Матриця є симетричною, оскільки $\delta_{21} = \delta_{12}$. За теоремою про взаємність роботи сил заданої механічної системи [14]: «робота сил заданої системи на переміщення іншої сис-

теми сил дорівнює роботі сил другої системи на переміщення першої».

3. Переміщення від одиничних сил з однаковими індексами завжди додатні $\delta_{11}, \delta_{22} > 0$, виходячи з підінтегральних виразів формул Максвелла–Мора (квадрати згинальних моментів $\overline{M_i M_j}$,

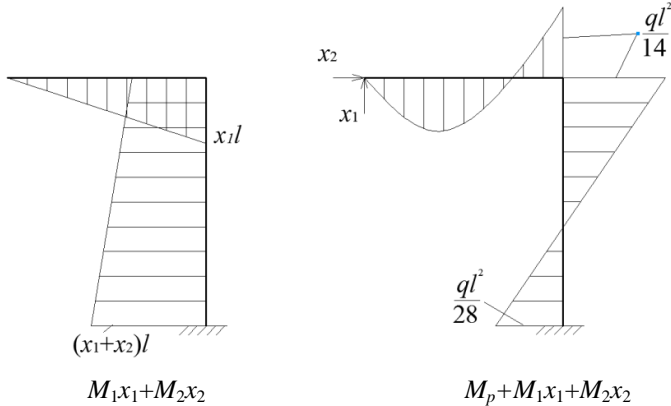


Рис. 5.7. Сумарні епюри згинальних моментів

$i = j$). Розв’язання системи канонічних рівнянь методом сил [15]:

$$x_1 = -\frac{D_1}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} D_{1p} & \delta_{12} \\ D_{2p} & \delta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{D_{1p} \delta_{22} - D_{2p} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2}; \quad (5.5)$$

$$x_2 = -\frac{D_2}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & D_{1p} \\ \delta_{21} & D_{2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{D_{2p} \delta_{11} - D_{1p} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2}. \quad (5.6)$$

Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь за правилами перемноження епюр. Правило Верещагіна: якщо хоча б одна епюра є прямолінійною, то інтеграли (5.4) основної системи дорівнюють

добутку площі однієї епюри на ординату другої. Ордината береться під центром ваги першої (криволінійної) епюри:

$$\sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \bar{M}_l \bar{M}_p dS = \sum_j y_{j(u,v,i)}.$$

Необхідно звернути увагу на таке:

- принаймні одна з епюр, які перемножуються за правилом Верещагіна, має бути прямолінійною;

- ординату y_j потрібно брати на прямолінійній епюрі.

Правило Корноухова–Сімпсона – *окремий випадок* відомої з математичного аналізу формули Сімпсона для обчислення визначених інтегралів, коли інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис. 5.8):

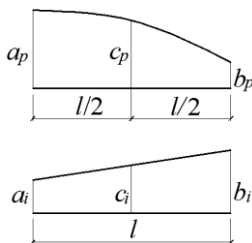


Рис. 5.8. Схеми до правила перемноження епюр

$$\int_0^l M_l M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p).$$

Використовуючи формулу Корноухова – Сімпсона, необхідно, щоб обидві епюри, що перемножуються, не мали зламів, розривів і точок перегину. В іншому разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

5.3. Визначення дійсних внутрішніх зусиль у статично невизначуваних системах

Остаточна епюра згинальних моментів для статично невизначуваної рами визначається за формулою

$$M = M_p + M_1 x_1 + M_2 x_2.$$

Тобто для її отримання треба домножити ординати одиничних епюр згинальних моментів на знайдені значення невідомих сил x_1 і x_2 , підсумувати ці добутки та додати до них епюру M_p . Ці операції можна виконувати або аналітично, або графічно [15] (див. рис. 5.7).

Епюри поперечних сил у перерізах статично невизначуваної рами можна побудувати двома способами:

1) підсумуванням основних епюр (побудованих в основній системі) за формулою

$$Q = Q_p + Q_1x_1 + Q_2x_2, \quad (5.7)$$

де Q_1, Q_2, Q_p – епюри поперечних сил, що відповідають епюрам одиничних та вантажного моментів основної системи (рис. 5.9);

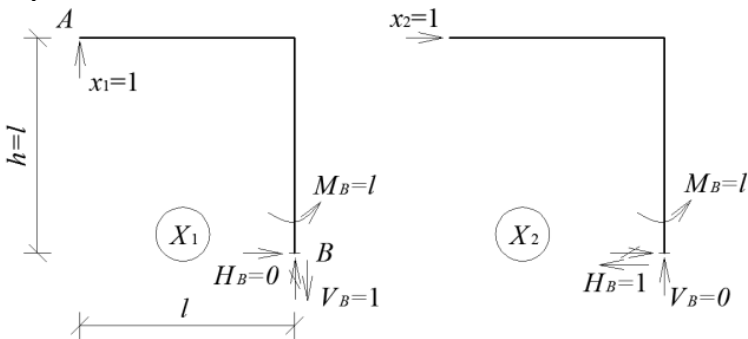
2) аналітично за диференціюванням епюри дійсних згинальних моментів (див. рис. 5.7).

Епюру дійсних поперечних сил Q розглянутої статично-невизначуваної рами з використанням рівняння (5.7) показано на рис. 5.11.

Поздовжні (нормальні до перерізів) сили за аналогією з рівнянням (5.7) можна визначити за формулою

$$N = N_p + N_1x_1 + N_2x_2,$$

де N_1, N_2, N_p – епюри поздовжніх сил отримані з використанням значень реакцій в основній системі за дії одиничних сил та сил



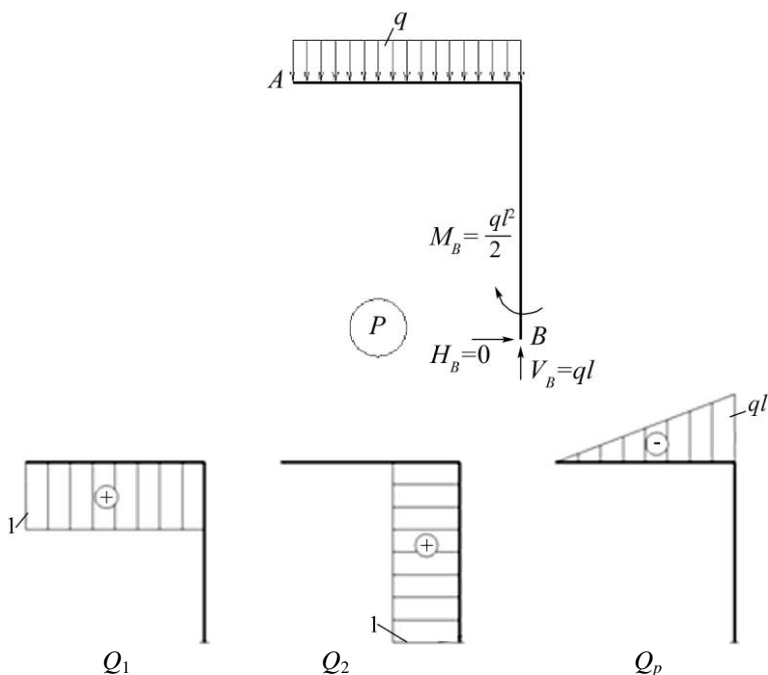


Рис. 5.9. Епюри поперечних сил, що відповідають епюрам одиничних та вантажного моментів основної системи

зовнішнього навантаження. За значеннями реакцій в основній системі побудуємо одиничні епюри N_1, N_2 та епюру N_p (рис. 5.10). Помножимо одиничні епюри на x_1, x_2 та складемо з епюрою N_p . Отримаємо епюру дійсних поздовжніх внутрішніх зусиль N (рис. 5.11).

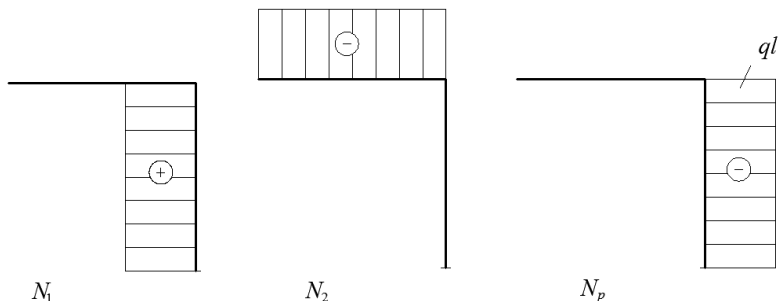


Рис. 5.10. Епюри поздовжніх одиничних сил та сил зовнішнього навантаження

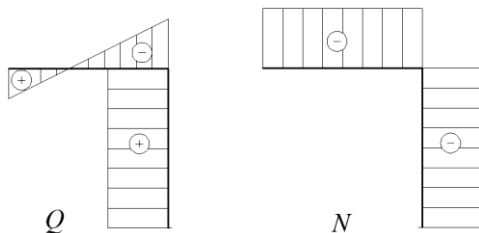


Рис. 5.11. Епюри дійсних поперечних і поздовжніх внутрішніх зусиль

5.4. Статична та кінематична перевірки розрахунку

Статична перевірка розрахунку рами виконується вирізанням її окремих частин.

Для перевірки достовірності отриманих умов рівноваги зусиль у розглянутій статично невизначуваній рамі вирізаємо вузол C (стику ригеля та стояка), на який наносимо у вигляді стрілок згинальні моменти, що відображають дію відкинутих частин рами на залишену. Стрілки розміщуємо так, щоб розтягнуті волокна кожного стрижня з'являлися з належного боку відповідно до епюри згинальних моментів (див. рис. 5.7). Із рис. 5.12 видно, що алгебраїчна сума моментів дорівнює нулю. Аналогічно перевіряємо алгебраїчні суми вертикальних та горизонтальних реакцій у вузлі C (на схемі рівновага забезпечена з точністю до закону).

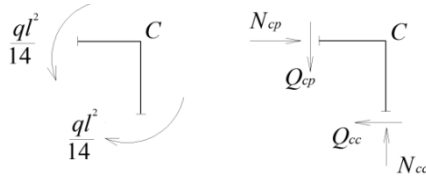


Рис. 5.12. Схема вузла стику ригеля та стояка для перевірки рівноваги зусиль

Необхідно також виконати кінематичну перевірку, яка дає змогу переконатись у тому, що деформації і переміщення механічної системи задовольняють умови опорних закріплень та нерозривності контуру. Задану статично невизначувану раму розглядаємо як основну статично невизначувану систему, яка завантажена зовнішнім навантаженням та залишковими невідомими реакціями у відкинутих в'язях. Переміщення за напрямленням цих в'язів повинно дорівнювати нулю, тому для розглянутої рами маємо:

$$\sum_{n=1}^{n=2} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dS = 0; \quad \sum_{n=1}^{n=2} \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} dS = 0, \quad (5.8)$$

де \bar{M}_1, \bar{M}_2 – епюри згинальних моментів в одиничних станах; M_p – епюра згинальних моментів у стані зовнішніх впливів.

Після обчисленні інтегралів (5.8) різниця між сумою додатних та від'ємних значень повинна становити величину в межах 0,05 – 0,1%. Така точність є цілком достатньою.

5.5. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами за методом сил

Особливості методу сил для розрахунку плоских статично невизначуваних рам найбільш зручно виявити на прикладі триконтурної стрижневої системи, розрахункову систему якої показано на рис 5.13, а.

Визначаємо передусім ступінь статичної невизначуваності за формулою (5.1):

$$n_c = 3k - ш = 3 \cdot 3 - 6 = 3,$$

тобто маємо тричі статично невизначувану раму, задана рама має три зайві в'язі.

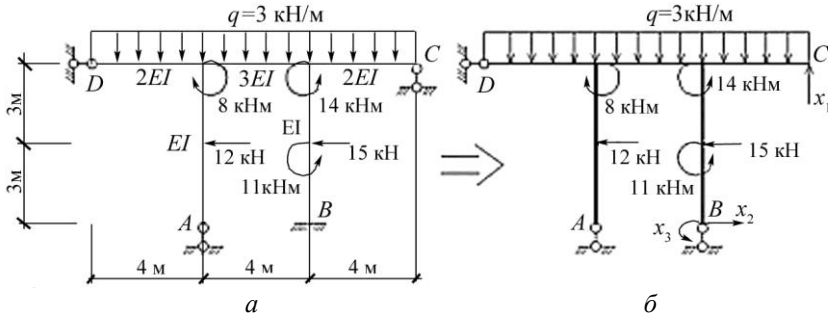


Рис. 5.13. Схема статично невизначуваної рами:
a – розрахункова система *б* – основна система

Будуємо основну систему (рис. 5.13, *б*), забезпечуючи умови її геометричної незмінності та однорідності невідомих силових факторів.

Для отримання основної системи у вузлах *C* і *B* відкидаємо три зайві в'язі і замінюємо їх відповідними зовнішніми зусиллями. Далі виконуємо розрахунки в основній статично визначуваній системі, що є адекватною заданій розрахунковій системі (рис. 5.13, *a*).

Маючи три невідомі силові змінні x_1, x_2, x_3 з умов адекватності деформацій основної і заданої систем (рівності нулю переміщень за напрямленням відкинутих в'язів), складаємо рівняння деформацій, що визначають умови рівності нулю переміщень за напрямком кожної зайвої в'язі x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{1p} = 0; \\ D_{21} + D_{22} + D_{23} + D_{2p} = 0; \\ D_{31} + D_{32} + D_{33} + D_{3p} = 0. \end{cases}$$

(5.9)

Припускаємо $\Delta_{ij} = \delta_{ij} x_j$, тоді

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + D_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + D_{2p} = 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + D_{3p} = 0. \end{cases}$$

Будуємо одиничні епюри в основній системі (рис. 5.14). Складаємо комбіновану систему рівноваги методу сил (для трьох відкинутих в'язей маємо три умови рівноваги основної системи) або:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + D_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + D_{2p} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + D_{3p} = 0. \end{cases}$$

Остаточню маємо систему з трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими X_1, X_2, X_3 .

Для визначення коефіцієнтів $\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ (з урахуванням симетрії) і вільних членів (5.9) $\Delta_{ip}, i = 1, 2, 3$ будуємо епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних сил $M_i - X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ та зовнішнього навантаження M_p , які показано на рис. 5.14 (у тому числі і сумарна епюра $M_1 + M_2 + M_3$).

Записуємо систему канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторній формі [15]:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_{1p} \\ -D_{2p} \\ -D_{3p} \end{Bmatrix}.$$

(5.9)

Обчислюємо коефіцієнти матриці піддатливості за невідомих системи рівнянь (5.9) за правилами перемноження епюр (Верещагіна і Корноухова–Сімпсона):

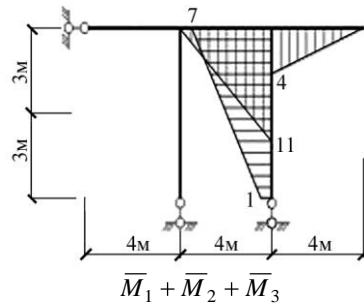
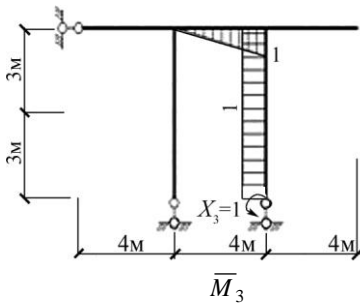
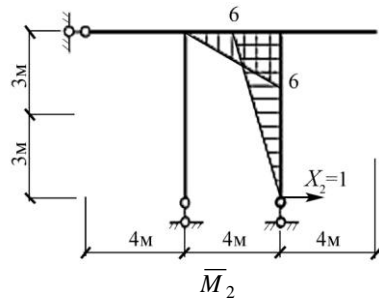
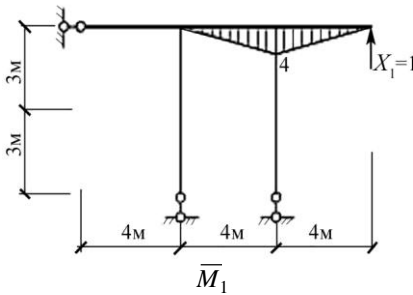
$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{n=7} \int_0^s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI_s} dS;$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{18EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) + \frac{4}{12EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) = \frac{17,777}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{4}{18EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4) = \frac{10,666}{EI};$$

$$\delta_{13} = \frac{4}{18EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1) = \frac{1,777}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{4}{18EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{88}{EI}.$$



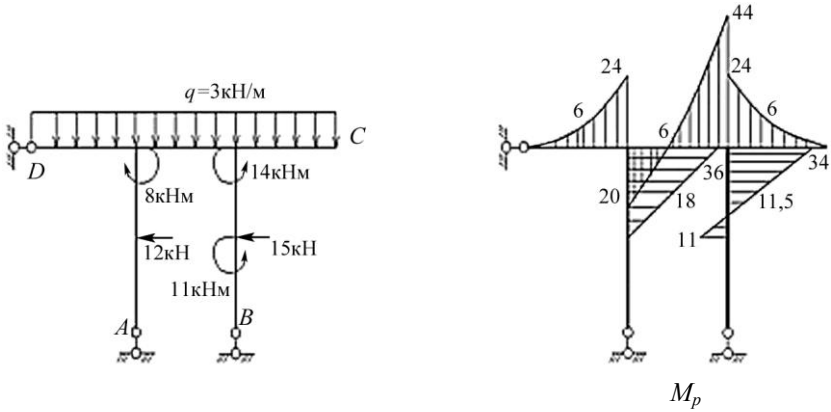


Рис. 5.14. Епюри внутрішніх зусиль в основній системі від дії окремих одиничних невідомих, сумарна та дії зовнішнього навантаження

$$\delta_{23} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 3 + 1 \cdot 6) + \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 6}{EI} = \frac{20,666}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) + \frac{1 \cdot 6 \cdot 1}{EI} = \frac{6,444}{EI}.$$

Виконуємо послідовно всі перевірки.

Перевірки обчислення коефіцієнтів $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{33}$ (головна перевірка на етапі формування системи рівнянь).

Перемножуємо саму на себе епюру $M_1 + M_2 + M_3$. Результат повинен дорівнювати $\delta_{11} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + \delta_{22} + 2\delta_{23} + \delta_{33}$.

$$\int_0^s (M_1 + M_2 + M_3)(M_1 + M_2 + M_3) \frac{1}{EI} ds = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 +$$

$$+ 4 \cdot 5,5 \cdot 5,5 + 11 \cdot 11) + \frac{4}{12EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0) +$$

$$+ \frac{6}{6EI} (7 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1) = \frac{178,444}{EI}.$$

$$\sum_{i=1,3} \sum_{j=1,3} \delta_{ij} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) =$$

$$= \int_0^s (M_1 + M_2 + M_3)(M_1 + M_2 + M_3) \frac{1}{EI} ds = \left(\frac{17,78}{EI} + \frac{88}{EI} + \frac{6,44}{EI} \right) + 2 \cdot \left(\frac{10,66}{EI} + \frac{1,77}{EI} + \frac{20,66}{EI} \right) = \frac{178,444}{EI}.$$

Перевірка співпала.

Обчислюємо вільні члени системи канонічних рівнянь методу сил:

$$\Delta_{ip} = \sum_{n=1}^{n=4} \int_0^s \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dS.$$

Використовуємо при цьому формулу Корноухова–Сімпсона:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 6 \cdot 2 - 44 \cdot 4) + \frac{4}{12EI} (-4 \cdot 24 - 4 \cdot 6 \cdot 2) = \frac{-97,777}{EI}; \\ \Delta_{2p} &= \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 3 \cdot 6 - 6 \cdot 44) + \frac{3}{6EI} (11 \cdot 3 - 4 \cdot 4,5 \cdot 11,5 - 34 \cdot 6) = \frac{-263,666}{EI}; \\ \Delta_{3p} &= \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 6 \cdot 0,5 - 1 \cdot 44) + \frac{3}{6EI} (1 \cdot 11 - 4 \cdot 1 \cdot 11,5 - 1 \cdot 34) = -\frac{46,944}{EI}. \end{aligned}$$

Перевірка обчислення коефіцієнтів, вільних членів системи (5.9): добуток сумарної епюри $(M_1 + M_2 + M_3)$ і епюри M_p повинен дорівнювати $\Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p}$;

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{(M_1 + M_2 + M_3)M_p}{EI_{(s)}} ds &= \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 5,5 \cdot 6 - \\ &- 11 \cdot 44) + \frac{4}{12EI} (-4 \cdot 24 - 4 \cdot 2 \cdot 6 + 0 \cdot 0) + \\ &+ \frac{3}{6EI} (4 \cdot 11 - 4 \cdot 5,5 \cdot 11,5 - 7 \cdot 34) = \frac{-408,388}{EI}. \end{aligned}$$

Перевірка на рівні обчислення коефіцієнтів системи (5.9) достовірна.

Розв'язуємо чисельно систему рівнянь (5.9):

$$\begin{cases} \frac{17,777}{EI} X_1 + \frac{10,666}{EI} X_2 + \frac{1,777}{EI} X_3 - \frac{97,777}{EI} = 0; \\ \frac{10,666}{EI} X_1 + \frac{88}{EI} X_2 + \frac{20,666}{EI} X_3 - \frac{263,666}{EI} = 0; \\ \frac{1,777}{EI} X_1 + \frac{20,666}{EI} X_2 + \frac{6,444}{EI} X_3 - \frac{46,944}{EI} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17,777 X_1 + 10,666 X_2 + 1,777 X_3 - 97,777 = 0; \\ 10,666 X_1 + 88 X_2 + 20,666 X_3 - 263,666 = 0; \\ 1,777 X_1 + 20,666 X_2 + 6,444 X_3 - 46,944 = 0. \end{cases}$$

Остаточню маємо (у матрично-векторній формі):

$$\begin{bmatrix} 17,777 & 10,666 & 1,777 \\ 10,666 & 88 & 20,666 \\ 1,777 & 20,666 & 6,444 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 97,777 \\ 263,666 \\ 46,944 \end{Bmatrix}.$$

На основі формул (5.5), (5.6) маємо:

$$X_1 = -\frac{D_1}{D}; X_2 = -\frac{D_2}{D}; X_3 = -\frac{D_3}{D}.$$

Обчислюємо детермінант D за першим рядком:

$$\begin{aligned} D &= 17,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & 20,666 \\ 20,666 & 6,444 \end{vmatrix} + 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & 20,666 \\ 1,777 & 6,444 \end{vmatrix} + \\ &+ 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & 88 \\ 1,777 & 20,666 \end{vmatrix} = 2488,656 - 341,347 + 113,786 = 2261,09. \end{aligned}$$

Обчислюємо детермінанти D_1, D_2, D_3 і відповідно x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} -97,777 & 10,666 & 1,777 \\ -263,666 & 88 & 20,666 \\ -46,944 & 20,666 & 6,444 \end{bmatrix} = -97,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & 20,666 \\ 20,666 & 6,444 \end{vmatrix} + \\ &+ 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -263,666 & 20,666 \\ -46,944 & 6,444 \end{vmatrix} + 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -263,666 & 88 \\ -46,944 & 20,666 \end{vmatrix} = \\ &= -13688,654 + 7775,994 - 2343,104 = -8255,764. \end{aligned}$$

$$x_1 = -\left(-\frac{8255,764}{2261,09}\right) = 3,651 \text{ кН.}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 17,777 & -97,777 & 1,777 \\ 10,666 & -263,666 & 20,666 \\ 1,777 & -46,944 & 6,444 \end{bmatrix} = 17,777 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -263,666 & 20,666 \\ -46,944 & 6,444 \end{vmatrix} -$$

$$-97,777(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & 20,666 \\ 1,777 & 6,444 \end{vmatrix} + 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & -263,666 \\ 1,777 & -46,944 \end{vmatrix} =$$

$$= -12959,6 + 3128,896 - 56,925 = -9887,629.$$

$$x_2 = -\left(\frac{-9887,629}{2261,09}\right) = 4,372 \text{ кН.}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 17,777 & 10,666 & -97,777 \\ 10,666 & 88 & -263,666 \\ 1,777 & 20,666 & -46,944 \end{bmatrix} = 17,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & -263,666 \\ 20,666 & -46,944 \end{vmatrix} +$$

$$+ 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & -263,666 \\ 1,777 & -46,944 \end{vmatrix} - 97,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & 88 \\ 1,777 & 20,666 \end{vmatrix} =$$

$$= 23431,366 + 341,327 - 6258,238 = 17514,455.$$

$$x_3 = -\left(\frac{17514,455}{2261,09}\right) = -7,742 \text{ кН.}$$

Остаточню маємо значення невідомих:

$$x_1 = 3,651 \text{ кН}; \quad x_2 = 4,372 \text{ кН}; \quad x_3 = -7,742 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

(5.10)

Перемножуємо одиничні епюри \bar{M}_1x_1 , \bar{M}_2x_2 , \bar{M}_3x_3 (рис. 5.15) на значення невідомих (5.10). Потім складаємо їх разом з епюрою M_p основної системи (рис. 5.16). Підсумовуємо епюри: $M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + M_p$ та отримуємо епюру M для вихідної статично невизначуваної рами (рис. 5.17). Аналітичним способом, тобто диференціальними залежностями Q від M , будуємо епюру Q (рис. 5.18).

Виконуємо кінематичну перевірку. Перемножуємо епюру дійсних згинальних моментів (див. рис. 5.18) на будь-яку одиничну епюру. У цьому випадку беремо сумарну одиничну епюру:

$$\Delta \sum P = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 + 4 \cdot 10,546 \cdot 5,5 - 11 \cdot 10,91) +$$

$$+ \frac{3}{6EI} (-1 \cdot 7,742 - 4 \cdot 1,181 \cdot 2,5 + 5,38 \cdot 4) +$$

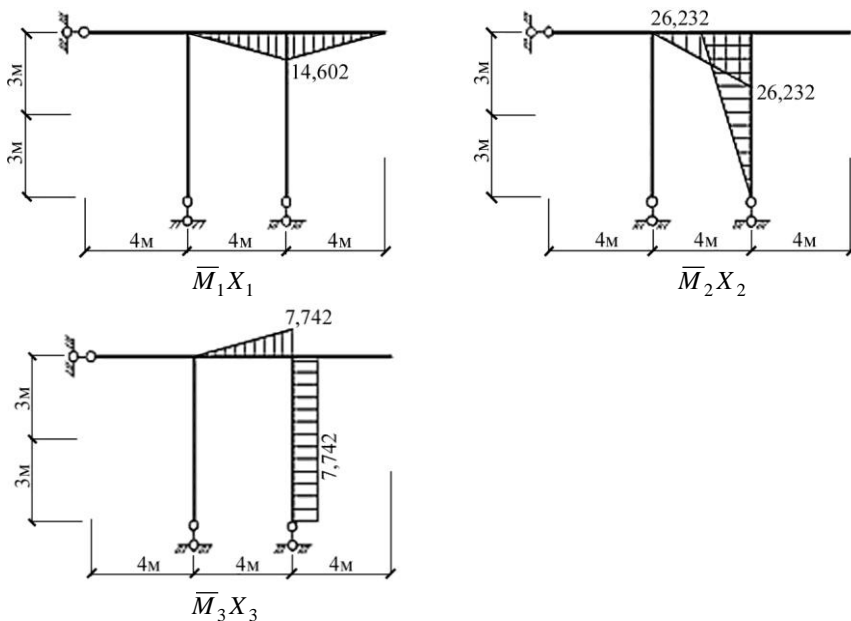


Рис. 5.15. Епюри згинальних моментів в основній системі від дії одиничних сил

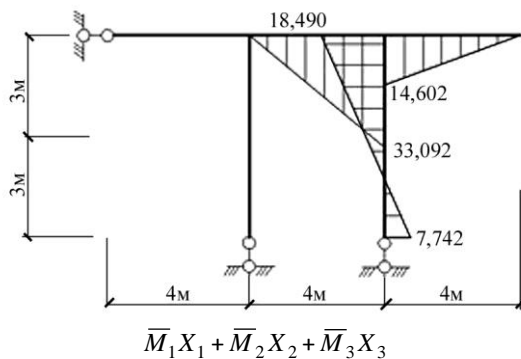


Рис. 5.16. Сумарна еюра згинальних моментів

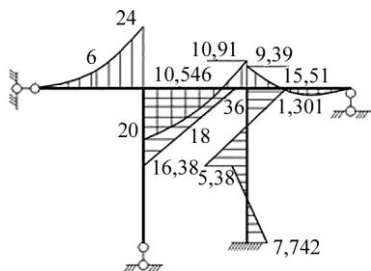


Рис. 5.17. Еюра дійсних згинальних моментів M

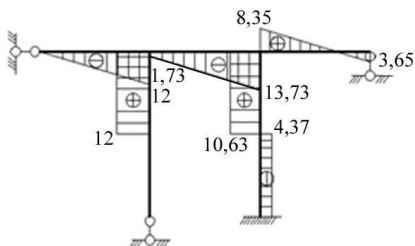


Рис. 5.18. Еюра дійсних поперечних внутрішніх зусиль Q

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{6EI} (4 \cdot 16,38 + 4 \cdot 0,435 \cdot 5,5 - 15,51 \cdot 7) + \\
 & + \frac{0,82}{12EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 1,25 \cdot 0,41 + 2 \cdot 0,82) + \\
 & + \frac{3,18}{12EI} (2 \cdot 0,82 + 4 \cdot 0,088 \cdot 2,41 - 9,39 \cdot 4) \approx 0.
 \end{aligned}$$

Визначивши опорні реакції в статично невизначеній рамі, будемо еяру поздовжніх зусиль (рис. 5.19).

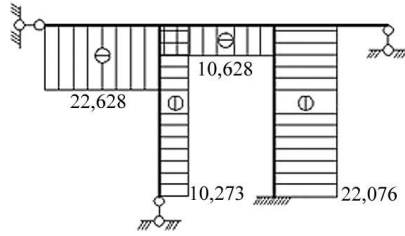


Рис. 5.20. Епюра дійсних поздовжніх внутрішніх зусиль N

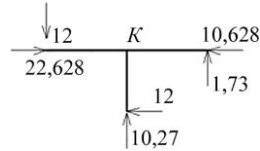
Виконуємо статичні перевірки вузлів K і T .

Вузол K :

$$\sum M_K = 0; \quad -24 - 20 + 8 + 36 = 0;$$

$$\sum F_X = 0; \quad 22,628 - 12 - 10,628 = 0;$$

$$\sum F_Y = -12 + 10,27 + 1,73 = 0.$$

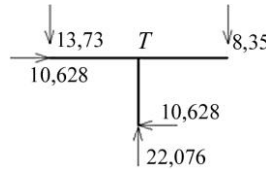
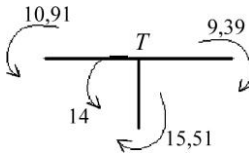


Вузол T :

$$\sum M_T = 0; \quad -10,91 - 14 + 15,51 + 9,39 = 0;$$

$$\sum F_X = 0; \quad 10,628 - 10,628 = 0$$

$$\sum F_Y = 22,076 - 13,73 - 8,35 = 0;$$



Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що означає побудувати основну систему розрахункової схеми статично невизначуваної рами за методом сил?
2. У чому полягає суть розрахунку статично невизначуваних плоских рам методом сил?

3. Наведіть порядок розрахунку плоских рам методом сил. Побудуйте формально систему канонічних рівнянь рівноваги плоскої статично невизначуваної рами за методом сил.
4. Наведіть порядок визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу сил.
5. За яких умов використовується правило Верещагіна.
6. Які умови містить рівняння методу сил? Наведіть правило Корноухова–Сімпсона.
7. Назвіть основні властивості системи канонічних рівнянь методу сил.
8. Розкрийте систему канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторному вигляді. Що визначають коефіцієнти матриці системи рівнянь методу сил?
9. У чому полягає кінематична перевірка обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу сил?
10. Сформулюйте теореми Кастільяно і Менабреа.

РОЗДІЛ 6

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

6.1 Припущення методу переміщень для розрахунку плоских рам

Метод переміщень розроблений і впроваджений у практику пізніше, ніж метод сил. Цей метод набув поширення завдяки простоті та меншій трудомісткості обчислень для значної кількості досліджуваних об'єктів. Метод переміщень на відмінну від методу сил передбачає першочергове обчислення певного набору переміщень, знання яких дозволяє визначити зусилля та переміщення в інших перерізах конструкції. Це стає можливим завдяки тому, що напружено-деформований стан (НДС) стрижневого однозв'язного елемента цілком визначається прикладеним до нього навантаженням і переміщеннями перерізів, у яких цей елемент приєднується до інших частин споруди. Але для статично невизначуваних елементів означену залежність необхідно визначати заздалегідь.

Очевидно найпростіше визначити таку залежність для елементів, якими є *прямолінійні* стрижні. Для таких стрижнів за будь-яких закріплень на кінцях зусилля і поперечні переміщення в усіх перерізах визначаються кутами повороту та відносними лінійними переміщеннями їх кінців і зовнішніми навантаженнями на стрижні.

Тому в методі переміщень як *основний елемент* обирають саме прямолінійний стрижень постійної жорсткості. Такий підхід наближує метод переміщень до МСЕ щодо переміщень для стержневих систем. Але введення до методу переміщень спрощених переміщень значно зменшує кількість основних невідомих, що дає змогу застосовувати його для «ручного» розрахунку на відміну від МСЕ, який призначений лише для комп'ютерного розрахунку.

Існують дві форми реалізації методу переміщень – *канонічна* та *розгорнута* [15]. Розглянемо канонічну форму методу переміщень.

Припущення методу переміщень. Метод переміщень для рамних конструкцій ґрунтується на таких спрощених припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу.

1. Кути між стрижнями, які сходяться у жорсткі вузли, не змінюються після деформації споруди. Це означає, що під час деформування всі кінці стрижнів, які з'єднані між собою припайками, повертаються на однаковий кут.

2. Для згинних стрижнів деформаціями від *поздовжніх* і *поперечних сил* можна знехтувати.

3. Зближення кінців стрижня після його згину не береться до уваги.

4. Довжини проєкції стрижня на його початковий напрям до і після деформації залишаються незмінними.

5. Тангенси і синуси кутів нахилу стрижнів, що виникають у наслідок деформацій системи через їх мале значення дорівнюють самим кутам.

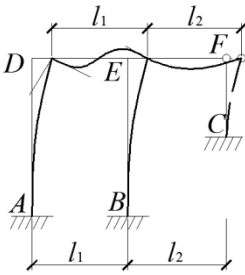


Рис. 6.1. Схема деформації рами

Ці припущення ґрунтуються на тому, що в реальних стрижневих системах переміщення від пружних деформацій значно менші порівняно з розмірами споруди, а отже, і їх вплив на зміну форми споруди можна не враховувати.

Вузли *D, E, F* рамної конструкції, показаної на рис. 6.1, після деформації споруди не мають вертикальних переміщень, а їх горизонтальні переміщення однакові.

З урахуванням наведених припущень у межах методу переміщень, однопрогоновим балкам, зображеним на рис. 6.2, *а, б, в*, еквівалентними є балки на рис. 6.2, *д, е, ж, з* відповідно.

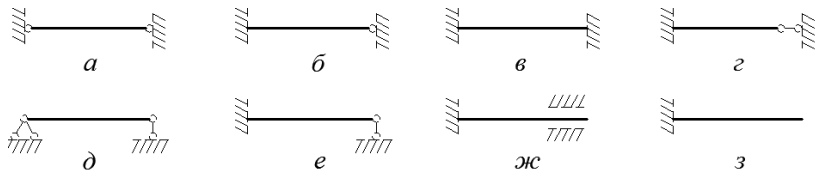


Рис. 6.2. Схеми однопрогонових балок *а, б, в, г* та відповідних їм еквівалентних балок *д, е, ж, з*

6.2. Основна система та основні невідомі методу переміщень

Найбільш поширений спосіб розрахунку статично невизначуваних систем полягає в тому, що замість реальної статично невизначуваної системи розглядається така, що створена з вихідної механічної системи, розрахунок якої можна виконати за допомогою вже відомих засобів. Ця нова система називається *основною системою методу*.

У методі переміщень створюється така основна система, яка складається з основних добре відомих *елементів* – однопрогонових балок постійної жорсткості з будь-якими опорами на кінцях. Для цих балок заздалегідь можна визначити НДС залежно від зовнішнього навантаження і переміщення їх опор, *тобто основною системою методу переміщень* для плоскої статично невизначеної рами є стрижнева система з набору *однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами*, які унеможливають кутові та лінійні переміщення кінців балок. Для цього необхідно усунути можливість кінематичних переміщень усіх вузлів системи. Цієї мети досягають введенням у вузли системи *додаткових в'язів двох видів*:

1. Для усунення повороту всіх жорстких вузлів вводяться *рухомі затиснення* – умовні в'язі, які не дозволяють вузлам повертатись, але не заважають їх поступальному переміщенню. Жорсткими в'язями є всі місця з'єднання за допомогою припайок, між якими ділянка стрижня має постійну жорсткість, тому жорсткими вузлами слід вважати місця, у яких:

- з'єднуються без наскрізних шарнірів два і більше стрижнів;
- змінюється під кутом напрям осі;

- до стрижня приєднується за допомогою прилеглого шарніра інший стрижень або декілька стрижнів;
- змінюється жорсткість стрижня;
- приєднується за допомогою шарніра стрижень або інший вузол до жорсткого вузла будь-якого з перелічених типів.

На рис. 6.3 *е, ж, з, і, к* показані рухомі затиснення при утворенні основної системи методу переміщень, що вставлені до жорстких вузлів, зображених на рис. 6.3, *а, б, в, г, д* відповідно.

2. Можливим незалежним (кінематичним) лінійним переміщенням вузлів усієї системи запобігають установленням

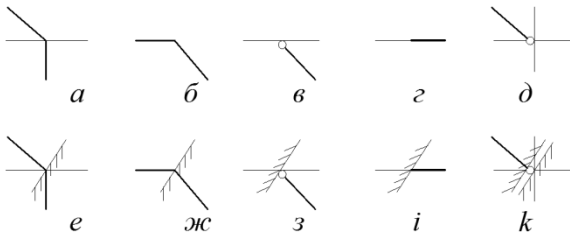


Рис. 6.3. Схеми жорстких вузлів *а, б, в, г, д* та відповідних їм рухомих затиснень *е, ж, з, і, к*

додаткових опорних стрижнів. Кількість таких стрижнів повинна бути мінімальною, але достатньою для забезпечення незмінності, нерухомості (збереження початкової форми) положення всіх стрижнів системи. Наприклад, для рами, зображеної на рис. 6.1, горизонтальні переміщення *D, E, F* взаємозалежні, тому для унеможливлення геометрично (лінійно) залежних переміщень вузлів цієї системи достатньо ввести один додатковий горизонтальний опорний стрижень, прикріплений до будь-якого з цих трьох вузлів. Отже, додаткові опорні стрижні потрібно встановлювати не до всіх вузлів системи, а лише до тих, що мають незалежні лінійні переміщення. Для цього можна скористатися шарнірною схемою системи.

Шарнірна схема системи утворюється з вихідної статично невизначуваної системи введенням наскрізних шарнірів у всі

жорсткі вузли, включаючи опорні. Варто зауважити, що створювати основну шарнірну схему споруди можна без консолей.

Далі виконується якісний кінематичний аналіз побудованої таким чином шарнірної схеми, якою можуть бути за стандартними схемами [14; 15; 16] жорсткий трикутник, схема Полонсо, схема Шухова, спосіб «діад» для ферми тощо. Якщо схема геометрично незмінювана, це свідчить про те, що вихідна система не має незалежних лінійних переміщень. Якщо ж у процесі якісного (структурного) аналізу виявляється можливість лінійного незалежного переміщення якогось вузла шарнірної схеми, необхідно ввести додатковий опорний стрижень, який перешкоджає появі цього переміщення. Кількість таких додаткових опорних стрижнів визначає кількість незалежних лінійних переміщень вузлів вихідної статично невизначуваної системи. Під час створення основної системи методу переміщень потрібно встановити додаткові опорні стрижні у тих самих місцях, що і у шарнірній схемі.

Розглянемо приклад, наведений на рис. 6.4. Вихідна рама має одне незалежне лінійне переміщення. Наведена шарнірна схема має нерухомі вузли A , B , C . Вузли D , E , F не можуть мати вертикальних переміщень і у горизонтальному напрямі будуть з'єднані між собою. Вони не прикріплюються до якогось нерухомого вузла, тому один з них, наприклад вузол D , слід закріпити горизонтальним опорним стрижнем, а вузли E і F послідовно з'єднуються двома стрижнями. Тобто маємо стандартну схему за способом діад, що забезпечує геометрично незмінювану механічну систему.

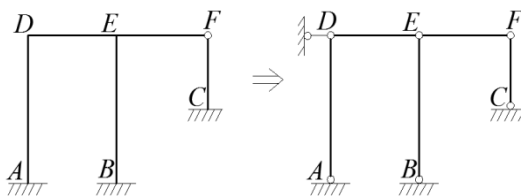


Рис. 6.4. Схеми вихідної рами та відповідної їй шарнірної системи

Вихідна рама (рис. 6.5) має три незалежні лінійні переміщення 1, 2, 3, на які накладаються як опорні в'язі відповідно у вузлах i , B , C .

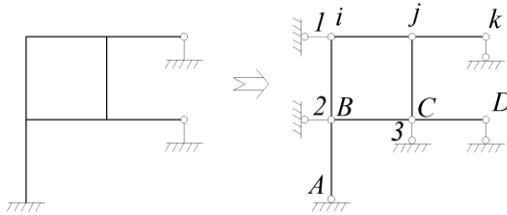


Рис. 6.5. Схеми вихідної рами та відповідної їй шарнірної системи

Вихідна система (рис. 6.6) має одне незалежне лінійне переміщення у вузлі E або зміщення вузла у положення E' , тоді вихідна система не має незалежних лінійних переміщень.

Таким чином, можна дійти висновку, що для побудови *основної системи методу переміщень* необхідно ввести рухомі записнення в усі жорсткі вузли та додаткові опорні стрижні для унеможливлення незалежних лінійних переміщень усіх вузлів.

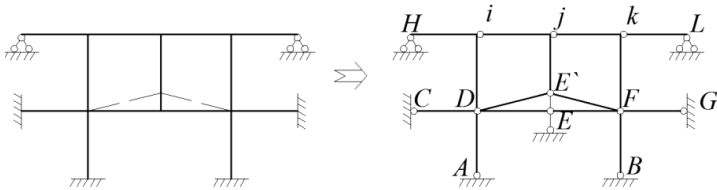


Рис. 6.6. Схеми вихідної рами та відповідної їй шарнірної системи

В основних системах методу переміщень вихідні конструкції перетворюються у *набори однопрогонових балок* з рухомими опорами. Між *вихідною* статично невизначуваною конструкцією та її *основною системою* існують дві суперечності:

- жорсткі вузли вихідної конструкції можуть мати кутові та всі вузлові лінійні переміщення, які в основній системі усуваються додатковими в'язями;
- у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язів.

Перша суперечність усувається введенням основних невідомих методу переміщень, друга – використовується для складних розв'язувальних рівнянь методу переміщень.

Основними невідомими у методі переміщень є узагальнені переміщення (кути повороту жорстких рухомих затиснень і лінійні переміщення у вузлах, у яких накладено в'язі для унеможливлення незалежних лінійних переміщень).

У разі використання канонічної форми методу переміщень ці невідомі позначаються через z_i (рис. 6.7). Для зручності обчислення пропонується нумерувати спочатку невідомі кутові переміщення, а потім лінійні переміщення, хоча принципово це не є важливим.

Кількість основних невідомих методу переміщень називається *ступенем кінематичної невизначуваності системи*, яка визначається за формулою

$$k = k_{\phi} + k_{\delta},$$

де k_{ϕ} – кількість кутових переміщень рухомих затиснень основної системи; k_{δ} – кількість незалежних лінійних переміщень вузлів основної системи.

Висновок. Ступінь кінематичної невизначуваності дорівнює мінімальній кількості додаткових в'язей, які повністю закріплюють вузли системи від можливих узагальнених переміщень (кутових і поступальних).

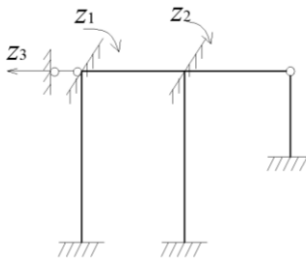


Рис. 6.7. Основна система і невідомі методу переміщень для вихідної рами

6.3. Розв'язувальні рівняння методу переміщень

Для складання розв'язувальних рівнянь методу переміщень використовуємо другу суперечність між вихідною статично невизначуваною системою стрижневої конструкції

та її основною системою, яка полягає в тому, що у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язей.

Розглянемо ці умови на прикладі плоскої рами, зображеної на рис. 6.8.

Для усунення відмінностей у деформаціях двох систем надамо додатковим в'язям невідомі узагальнені переміщення z_1, z_2, z_3 і розглянемо окремі стани цієї основної системи (рис. 6.9), у кожному з яких на систему діє один фактор.

У кожному стані в усіх додаткових в'язях виникають реактивні сили. Уводимо для цих реактивних сил позначення R_{ik} , де i – номер в'язі, k – номер стану (причини дії), у якому виникає реакція на підставі принципу суперпозиції: сумарний реактивний момент, у першому рухомому затисненні від дії всіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

– у стані 1

$$R_{\Sigma 1} = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{1p};$$

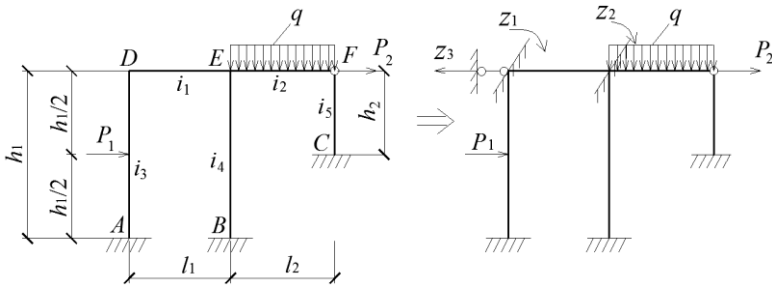


Рис. 6.8 Основна система і невідомі методу переміщень для вихідної рами

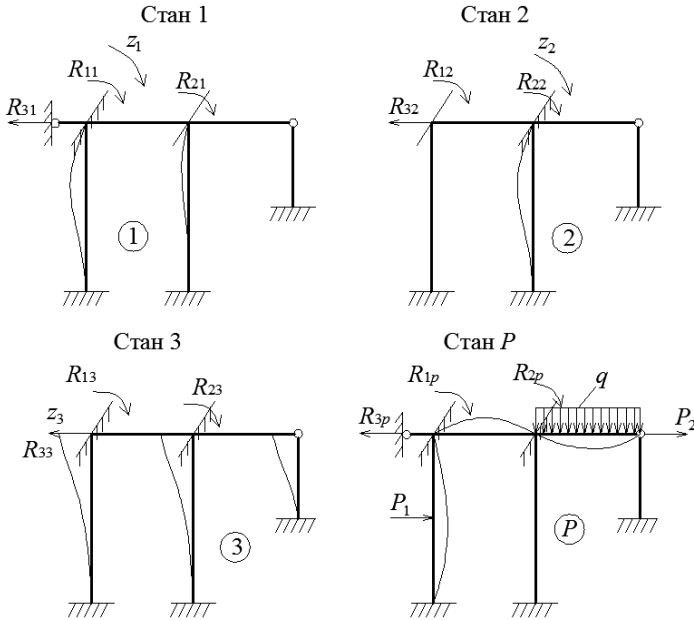


Рис. 6.9. Окремі стани основної системи

- у стані 2

$$R_{\Sigma 2} = R_{21} + R_{22} + R_{23} + R_{2p}$$

у стані 3 – сумарна реакція у додатковому стрижні (третя додаткова в'язь) від усіх невідомих узагальнених переміщень і зовнішнього навантаження:

$$R_{\Sigma 3} = R_{31} + R_{32} + R_{33} + R_{3p}.$$

Але у вихідній системі цих додаткових в'язей немає, тому для забезпечення еквівалентності НДС вихідної і основної систем необхідно, щоб сумарні реактивні сили у додаткових в'язях дорівнювали нулю:

$$R_{\Sigma 1} = 0; \quad R_{\Sigma 2} = 0; \quad R_{\Sigma 3} = 0. \quad (6.1)$$

Реактивні сили у додаткових в'язях від невідомого переміщення, що дорівнює одиниці, називають одиничними реактивними силами. Уведемо для їх позначення r_{ik} . Виходячи з лінійного закону Гука, маємо:

$$R_{ik} = r_{ik}Z_k \quad (6.2)$$

Підставляючи вираз (6.2) у рівняння (6.1), отримаємо систему канонічних рівнянь методу переміщень:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Кількість отриманих рівнянь дорівнює кількості додаткових в'язей, тобто ступеню кінематичної невизначуваності системи, яка дорівнює кількості основних невідомих методу переміщень. Таким чином, система рівнянь (6.3) є канонічною системою розв'язувальних рівнянь методу переміщень.

Фізичний зміст кожного з рівнянь полягає в тому, що сумарна реактивна узагальнена сила у відповідній додатковій в'язі (реактивні моменти у рухомому затисненні або реакція в опорному стрижні) основної системи методу переміщень від усіх невідомих переміщень і зовнішніх сил навантаження дорівнює нулю через відсутність цієї в'язі у вихідній системі. Система рівнянь у матрично-векторній формі має вигляд:

$$[R] \{Z\} + \{R_p\} = 0,$$

де $[R]$ – матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних канонічних рівнянь методу переміщень (матриця жорсткості основної системи);

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3n} \end{bmatrix}; \quad (6.4)$$

$\{Z\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ – вектор основних невідомих системи канонічних рівнянь методу переміщень;

$\{R_p\} = \{R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}\}$ – вектор реакцій від навантаження в основній системі методу переміщень.

Коефіцієнти r_{ii} ($i = 1, 2, 2, \dots, n$), розміщені на головній діагоналі матриці коефіцієнтів системи рівнянь, називаються головними. Коефіцієнти r_{ik} , $i \neq k$ називаються побічними. Згідно з теоремою

про взаємність робіт, побічні коефіцієнти, що розміщені симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному:

$$r_{ik} = r_{ki}.$$

Розв'язувальні рівняння (6.3) називаються системою канонічних рівнянь методу переміщень. Для визначення коефіцієнтів r_{ik} і вільних членів R_{ip} системи канонічних рівнянь необхідно мати епюри зусиль в основній системі методу переміщень в одиничних станах та вантажному стані.

Матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь методу переміщень називається ще матрицею жорсткості системи канонічних рівнянь методу переміщень. Кожен коефіцієнт матриці жорсткості визначає реакцію від одиничного узагальненого переміщення у відповідній додатковій в'язі.

6.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в основній і вихідній системах методу переміщень

Основна система методу переміщень являє собою рамну конструкцію, яка складається з набору однопрогонових балок (як статично визначуваних, так і статично невизначуваних). У статично невизначуваних балках необхідно заздалегідь визначити епюри внутрішніх зусиль (згинальних моментів і поперечних сил) за відомим методом, наприклад, методом сил. Розглянемо два основні типи статично невизначуваних балок з цього набору. На рис. 6.10 наведена балка з лівим затисненням і правим рухомих шарніром.

Обираємо для цієї один раз статично невизначеної балки основну систему за методом сил, будемо одиничні епюри, визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, будемо цю систему, розв'язуємо її відносно невідомих методу сил і будемо епюри внутрішніх зусиль. Розглянемо епюри зусиль від одиничного повороту рухомого затиснення і від одиничного переміщення:

1. Епюри зусиль від одиничного повороту затисненої опори. Спочатку замінюємо затиснення шарнірно-рухомою опорою, відкидаючи в'язь на поворот. Основним невідомим у відкинутій в'язі є реактивний момент x_1 , напрям якого збігається з напрямом кута по-

вороту, тобто за годинниковою стрілкою. При цьому маємо канонічне рівняння з одним невідомим:

$$\delta_{11}x_1 = 1, \quad (6.5)$$

де

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}. \quad (6.6)$$

Відповідно до виразу (6.4) маємо одиничні епюри до основної системи і епюри x_1 для вихідної системи (рис. 6.10, б).

Підставляємо рівняння (6.6) у рівняння (6.5) і розв'язуємо його:

$$\frac{l}{3EI} x_1 = 1;$$

$$\frac{\overleftarrow{EI}}{l_{ab}} = i_{ab}. \quad (6.7)$$

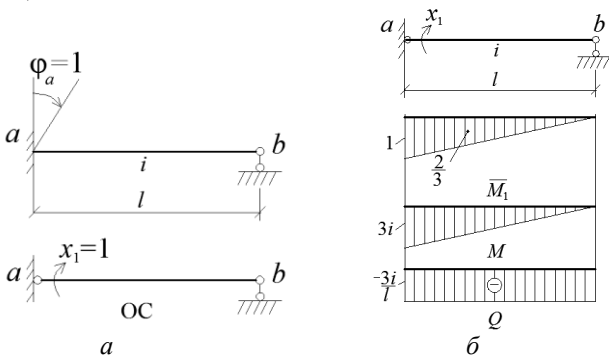


Рис. 6.10. Поворот затиснення на одиничний кут: a – основна система; b – одинична епюра моментів \bar{M}_1 , епюри внутрішніх зусиль M і Q

З урахуванням рівняння (6.7), отримуємо:

$$x_1 = +\frac{1}{\delta_{11}} = +\frac{1}{\frac{1}{3i_{ab}}} = 3i_{ab}.$$

2. Епюри зусиль від одиничного поступального переміщення шарнірної опори. Будемо канонічне рівняння і епюри від одиничного переміщення $\Delta=1$ (рис. 6.11):

$$\delta_{11}x_1 = -1,$$

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} l \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI_1} = \frac{l^2}{3i}; \quad EI = i_{ab}l;$$

$$x_1 = -\frac{1}{\delta_{11}} = -\frac{3i}{l^2}; \quad M_a = \bar{M}_1 l x_1; \quad M_a = -l \frac{3i}{l^2} = -\frac{3i}{l};$$

$$M_b = 0; \quad Q_a = Q_b = \frac{3i}{l^2}.$$

Таким чином, для розтягнутого типу однопрогонової балки можна побудувати епюри згинальних моментів для будь-якого узагальненого переміщення і навантаження [15].

Для статично невизначуваної балки з постійною жорсткістю і затисненням з обох кінців (рис. 6.12) необхідно побудувати одиничні епюри для двох канонічних рівнянь методу сил (епюри наведені у вигляді таблиць (табл. 12.1 у [15])).

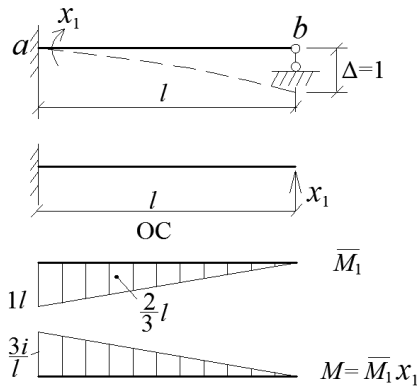


Рис. 6.11. Поступальне одиничне переміщення шарнірної опори

$$\text{Наприклад: } \begin{cases} \delta_{11}x_1 - \delta_{12}x_2 = 1 \\ -\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot l \frac{2}{3} = \frac{l}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dx = \frac{-1}{2} \cdot l \frac{1}{3} = -\frac{l}{6EI};$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{l}{3EI}; \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \frac{l}{6EI};$$

$$\begin{cases} \frac{l}{3EI} x_1 - \frac{l}{6EI} x_2 = 1; \\ -\frac{l}{6EI} x_1 + \frac{l}{3EI} x_2 = 0. \end{cases}$$

З урахуванням рівняння (6.6) маємо

$$\begin{cases} \frac{1}{3i} x_1 - \frac{1}{6i} x_2 = 1 \\ -\frac{1}{6i} x_1 + \frac{1}{3i} x_2 = 0 \end{cases} \Bigg| \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

(6.8)

Складаємо рівняння системи (6.8), попередньо помноживши перше з них на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6i} x_1 - \frac{1}{12i} x_2 = \frac{1}{2} \\ + & -\frac{1}{6i} x_1 + \frac{1}{3i} x_2 = 0 \\ \hline & -\frac{1}{12i} x_2 + \frac{1}{3i} x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x_2 \left(\frac{1}{3i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{1}{2}; \quad x_2 \frac{1}{4i} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{4i}{2} = 2i.$$

(6.9)

Підставляємо рівняння (6.9) у перше рівняння системи (6.8):

$$\frac{1}{3i} x_1 - \frac{1}{6i} 2i = 1; \quad \frac{1}{3i} x_1 - \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{3i} x_1 = 1 + \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{3i} x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_1 = 4i.$$

Остаточно маємо

$$M_{ab} = 4i; \quad M_{ba} = 2i; \quad Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i}{l}.$$

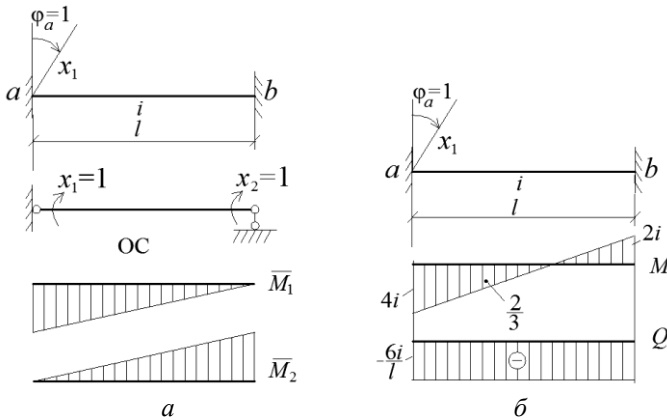


Рис. 6.12. Схема балки з затиснення з обох кінців: a – основна система, одиничні епюри моментів \bar{M}_1, \bar{M}_2 ; b – епюри внутрішніх зусиль M і Q

Внутрішні зусилля затисненої з обох кінців балки від одиничного зміщення опори (рис. 6.13):

1. Будуємо основну систему за методом сил, відкидаючи праворуч дві зайві в'язі (заздалегідь перетворюючи за допущенням методу переміщень жорстке защемлення до опори «повзун») і замінюючи їх невідомими силами $x_1=1$ і $x_2=1$.

2. Будуємо одиничні епюри в основній системі від $x_1=1$ і $x_2=1$.

3. Запишемо систему канонічних рівнянь методу сил і обчислимо коефіцієнти за невідомих на вільні члени (у вигляді зовнішніх впливів). Маємо: $\Delta_{1p} = 0$; $\Delta_{2p} = 1$:

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EI} = \frac{1}{i};$$

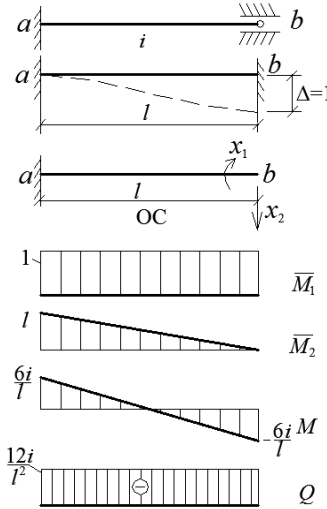


Рис. 6.13. Епюри внутрішніх зусиль затисненої з обох кінців балки від одиничного зміщення опори

$$\delta_{12} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot ll \cdot 1 = \frac{l^2}{2EI} = \frac{1}{2i};$$

$$\delta_{22} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot ll \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI} = \frac{1^2}{3i}.$$

$$\begin{cases} \frac{l}{i} x_1 - \frac{l}{2i} x_2 = 0; \\ \frac{l}{2i} x_1 + \frac{l^2}{3i} x_2 = 1. \end{cases}$$

(6.10)

4. Розв'язуємо систему рівнянь (6.10). Методом підстановки з першого рівняння системи (6.10), отримаємо:

$$\frac{1}{i}x_1 = -\frac{l}{2i}x_2; \quad x_1 = -\frac{l}{2}x_2.$$

Підставляємо у друге рівняння системи (6.10):

$$-\frac{l}{2i} \frac{l}{2}x_2 + \frac{l^2}{3i}x_2 = 1; \quad \frac{l^2}{12i}x_2 = 1; \quad x_2 = -\frac{12i}{l^2}; \quad (6.11)$$

Підставляємо (6.11) у перше рівняння системи (6.10):

$$\frac{1}{i}x_1 + \frac{l}{2i} \frac{12i}{l^2} = 0; \quad x_1 = -\frac{6i}{l}.$$

Склавши епюри $\overline{M}_1x_1 + \overline{M}_2x_2 = M$, отримаємо епюри згинальних моментів M :

$$M_a = -\frac{6i}{l} + \frac{12il}{l^2} = \frac{6i}{l}; \quad M_b = -\frac{6i}{l}.$$

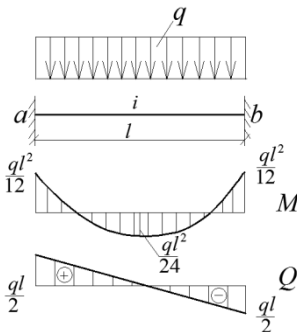
Поперечні сили дорівнюють значенню $Q_b \equiv x_2 = \frac{12i}{l^2}$.

Остаточно маємо:

$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6i}{l}; \quad Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{12i}{l^2}.$$

Випишемо значення згинальних моментів і поперечних сил від зовнішнього навантаження для однопрогової балки з двома затисненнями. Побудуємо епюри:

1. Рівномірно-розподілене навантаження (рис. 6.14):



$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{ql^2}{12};$$

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{24};$$

$$Q_{ab} = -Q_{ba} = \frac{ql}{2}.$$

Рис. 6.14. Епюри внутрішніх зусиль балки з двома затисненнями і рів-

номірно-розподіленим навантаженням

2. Зосереджена сила у довільній точці (рис. 6.15 а):

$$M_{ab} = -Pluv^2;$$

$$M_{ba} = Plu^2v; Q_{ab} = Pv^2 \left(+ 2u \right).$$

3. Зосереджена сила у середній точці (Рис. 6.15 б) :

$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{Pl}{8}; Q_{ab} = -Q_{ba} = \frac{P}{2}.$$

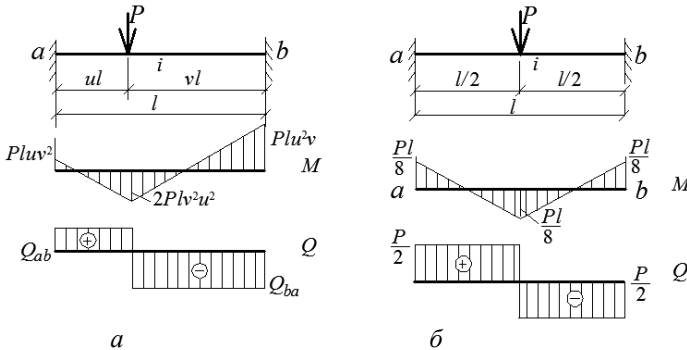


Рис. 6.15. Епюри балки з двома затисненнями і зосередженою силою: а – у довільній точці; б – у середній точці

6.5. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Будуємо епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень для рами, яка зображена на рис. 6.8, в одиничному і вантажному станах: \bar{M}_1 (рис. 6.16), \bar{M}_2 (рис. 6.17), \bar{M}_3 (рис. 6.18), M_p (рис. 6.19).

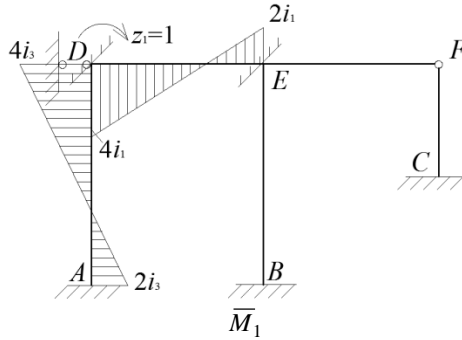


Рис. 6.16. Стан 1 від дії одиничних зміщень $z_1 = 1$ в основній системі

Коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь визначаються виходячи з фізичного змісту – реактивні зусилля, що виникають у відповідній додатковій в’язі основної системи від одиничного значення невідомого переміщення або від зовнішнього

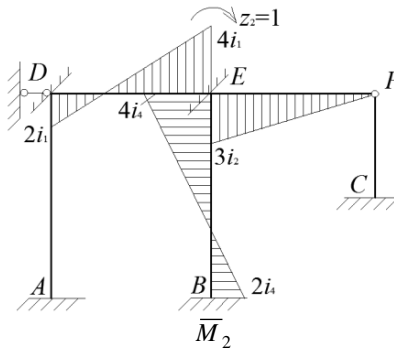


Рис. 6.17. Стан 2 від дії одиничних зміщень $z_2 = 1$ в основній системі

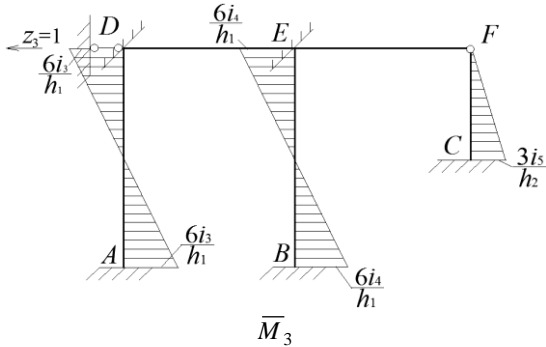


Рис. 6.18. Стан 3 від дії одиничних зміщень $z_3 = 1$ в основній системі

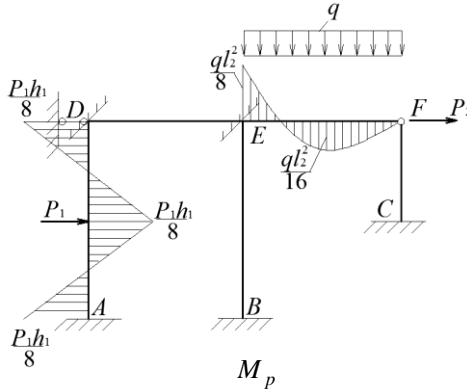


Рис. 6.19. Вантажний стан M_p в основній системі методу переміщень навантаження, повинні дорівнювати нулю. Додатні напрями реактивних зусиль збігаються з напрямками відповідних невідомих переміщень. Для визначення реактивного моменту необхідно виокремити вузол основної системи разом із введенням рухомих затиснень. До цього вузла прикладається невідомий реактивний момент у рухомому затисненні, а також згинальні моменти від одиничних станів, або від вантажного стану $\langle r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{12}, r_{13}, r_{23} \rangle$

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень r_{11} – це реактивний момент у рухомому затисненні, який утворюється у вузлі D основної системи від одиничного кута повороту $Z_1 = 1$, тобто у першому стані. Схему прикладених реактивного моменту у

вузлі D і моментів одиничного першого стану показано на рис. 6.20, a .

Суми моментів у вузлі D :

$$\sum M_D = r_{11} - 4i_1 - 4i_3 = 0; \quad r_{11} - 4i_1 - 4i_3.$$

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень r_{12} – це реактивний момент у рухомому затисненні вузла D основної системи від дії кута повороту $Z_2 = 1$ у другому стані. Вирізаємо вузол D і складаємо рівняння рівноваги моментів реактивного і другого стану (рис. 6.20, b):

$$\sum M_D = r_{12} - 2i_1 = 0; \quad r_{12} - 2i_1.$$

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень r_{13} – це реактивний момент у рухомому затисненні, який встановлений у вузлі D основної системи від дії одиничного лінійного переміщення $Z_3 = 1$ у третьому стані (рис. 6.20, $в$):

$$\sum M_D = r_{13} - \frac{6i_3}{n_1} = 0; \quad r_{13} = \frac{6i_3}{n_1}.$$

Вільний член канонічної системи методу переміщень R_{1p} – це реактивний момент у рухомому затисненні, утворений у вузлі D у стані P (рис. 6.20, $г$):

$$\sum M_D = R_{1p} - \frac{Ph_1}{8} = 0; \quad R_{1p} = \frac{Ph_1}{8}.$$

Аналогічно маємо картину розподілу згинальних моментів у затисненні вузла E . Розглянемо у в'язі другого затиснення реактивні і діючі моменти:

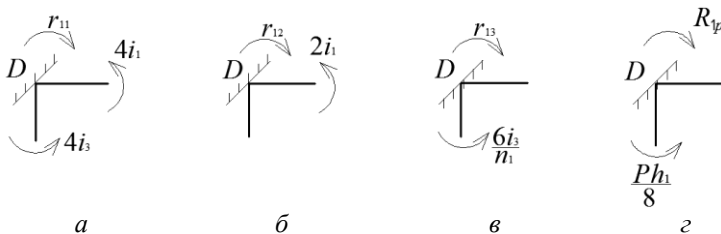


Рис. 6.20. Схеми реактивного і одиничного моментів стану у вузлі D :
 a – стан 1; b – стан 2; $в$ – стан 3; $г$ – стан P

- від дії сил першого стану (рис. 6.21, a):

$$r_{21} - 2i;$$

- від дії сил другого стану (рис. 6.21, б):

$$r_{22} = 4i_1 + 3i_2 + 4i_4;$$

- від дії сил третього стану (рис. 6.21, в):

$$r_{23} = \frac{6i_4}{h_1};$$

- від дії сил у стані P (рис. 6.21, г):

$$\sum M_E = R_{2p} + \frac{ql^2}{8} = 0; \quad R_{2p} = -\frac{ql^2}{8}.$$

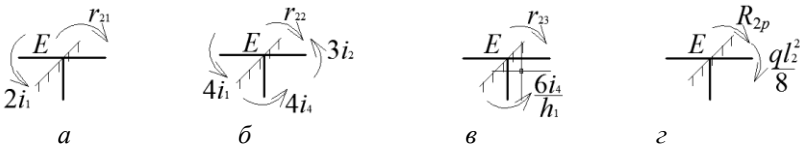


Рис. 6.21. Схеми реактивного і одиничного моментів стану у вузлі D :
 a – стан 1; $б$ – стан 2; $в$ – стан 3; $г$ – стан P

Розглянемо другий вид коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень, до якого належать незалежні лінійні переміщення. Для обчислення їх величини за статичним способом необхідно розглянути умови рівноваги відокремленого сегмента основної системи. Якщо розглянути шарнірну модель основної системи, переріз для відокремлення цього сегмента повинен обов'язково проходити через уведений додатковий стрижень, у якому обчислюється реакція, а також через усі стрижні основної системи, які зазнають перерізу від невідомих незалежних лінійних зміщень. Стрижні доцільно перерізати нескінченно близько до одного з його кінців. У розглянутому прикладі переріз проходить через стрижні AD , BE , CF і через додатковий стрижень, прикріплений до вузла D (рис. 6.22).

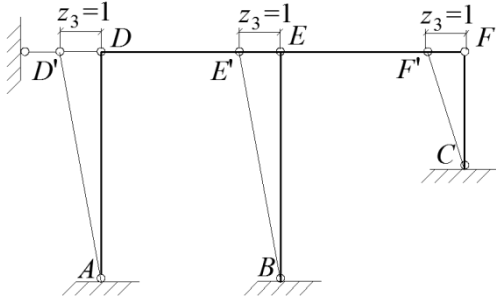


Рис. 6.22. Схема шарнірної моделі основної системи для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

До відокремленого фрагмента слід прикласти всі сили, що діють на нього, у тому числі зусилля у перерізах. Перерізувальні сили у розрізаних стрижнях отримуємо з епюр згинальних моментів відповідно до стану, використовуючи диференціальні залежності функцій M і Q .

Невідомі реакції у додатковому стрижні визначаються з рівняння рівноваги у вигляді суми проєкцій всіх сил на вісь відокремленого сегмента. Цю вісь треба вибрати так, щоб на неї не проєктувались невідомі поздовжні сили у перерізах стрижнів.

Обчислюючи коефіцієнти і вільні члени третього рівняння рівноваги канонічної системи методу переміщень для розглянутого прикладу, маємо: коефіцієнт r_{31} – це реакція у додатковому стрижні від одиничного кута повороту $Z_1 = 1$ – перший одиничний напружений стан. У відокремленому фрагменті основної системи реакція у додатковому стрижні збігається з напрямом невідомого переміщення $Z_3 = 1$. Величини та напрями перерізувальних сил залежать від характеру епюри згинальних моментів першого стану \bar{M}_1 .

На епюрі \bar{M}_1 на стрижнях BE і CE епюри згинальних моментів відсутні, звідки перерізувальні сили є нульовими, а у стрижні AD дорівнюють $\frac{4i_3 + 2i_3}{h_1}$ зі знаком « \leftarrow », тобто напрямлені проти годинни-

кової стрілки відносно вузла D . Таким чином, похідна лінійної функції згинального моменту дорівнює тангенсу кута нахилу лінійної

епюри до осі стрижня AD . Складаємо рівняння рівноваги за умови $\sum F_x = 0$ (рис. 6.23):

- від дії сил у першому стані

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{6i_3}{h_1} - r_{31} = 0; \quad r_{31} = \frac{6i_3}{h_1}.$$

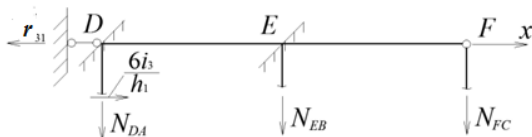


Рис. 6.23. Схема прикладання сил на відокремлений фрагмент у стані 1

Коефіцієнт r_{32} – це реакція у додатковому опорному стрижні від одиничного кута повороту у другому стані, відповідно маємо схему прикладання сил на відокремлений фрагмент основної системи і рівняння рівноваги (рис. 6.24):

- від дії сил у другому стані

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{6i_4}{h_1} - r_{32} = 0; \quad r_{32} = \frac{6i_4}{h_1};$$

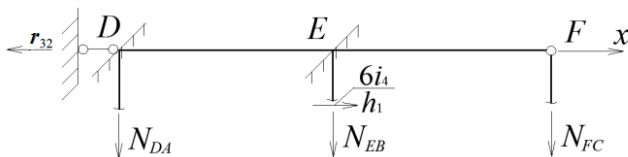


Рис. 6.24. Схема дії сил на відокремлений фрагмент у стані 2

- від дії сил у третьому стані (рис. 6.25):

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} \pm \frac{3i_5}{h_2^2} r_{33} = 0; \quad r_{33} = \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}.$$

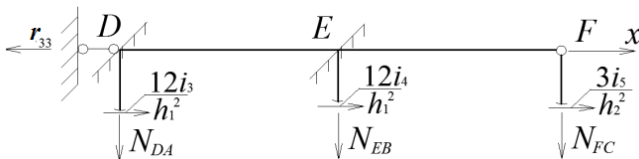


Рис. 6.25. Схема дії сил на відокремлений фрагмент у стані 3

Вільний член R_{3p} – це реакція у додатковому опорному стрижні основної системи від зовнішнього навантаження у вантажному стані P (рис. 6.26).

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{P_1}{2} + P_2 - R_{3p} = 0; \quad R_{3p} = \frac{P_1}{2} + P_2.$$

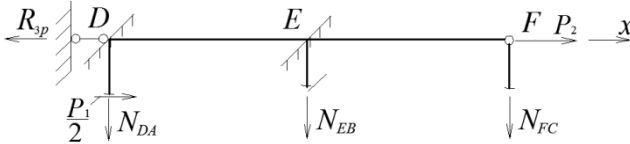


Рис. 6.26. Схема дії сил на фрагмента у вантажному стані P

Підставляємо визначені коефіцієнти матриці жорсткості та вільні члени у систему канонічних рівнянь методу переміщень, отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\mathfrak{C} + i_3 \mathfrak{Z}_1 + 2i_1 Z_2 + \frac{6i_3 Z_3}{h_1} + \frac{P_1 h_1}{8} = 0; \\ 2i_1 Z_1 + (4\mathfrak{C} + i_4) \mathfrak{Z}_2 + 3i_2 Z_2 + \frac{6i_4 Z_3}{h_1} + \frac{q l_2^2}{8} = 0; \\ \frac{6i_3 Z_1}{h_1} + \frac{6i_4 Z_2}{h_1} + \left(\frac{12\mathfrak{C} + i_4}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2} \right) Z_3 + \frac{P_1}{2} + P_2 = 0. \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Система алгебраїчних рівнянь (6.12) на головній діагоналі має додатні коефіцієнти, а побічні коефіцієнти відносно головної діагоналі повинні бути симетричними, що дозволяє під час обчислення виконувати перевірку.

У результаті розв'язання системи рівнянь (6.11) будуть знайдені основні невідомі методу переміщень, що дасть змогу побудувати епюри внутрішніх сил у вихідній системі розрахункової схеми реальної конструкції.

6.6. Кінематичний аналіз розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень

У разі розрахунків статично невизначуваних систем методом переміщень споруди розглядаються як такі, що лінійно

деформуються, для яких справедливі принципи незалежності дії сил та пропорційності.

Невідомими є переміщення вузлів від заданих дій: лінійні переміщення шарнірних і жорстких вузлів та кути поворотів жорстких вузлів. Сумарну кількість невідомих кутових n_ϕ та незалежних лінійних переміщень вузлів n_δ називають *ступенем кінематичної невизначуваності споруди*:

$$k = n_\phi + n_\delta.$$

Кількість невідомих кутових переміщень n_ϕ дорівнює кількості жорстких вузлів споруди. Кількість незалежних лінійних переміщень вузлів споруди n_δ можна визначити за його шарнірною схемою, використовуючи формулу

$$n_\delta = 2Y - C - C_{\text{оп}},$$

де Y – кількість вузлів; C – кількість стрижнів, що з'єднують вузли; $C_{\text{оп}}$ – кількість опорних в'язей.

Основна система методу переміщень утворюється накладанням на вузли споруди в'язей, які перешкоджають їх кутовим і лінійним переміщенням. Якщо кількість накладених на вузли кутових і лінійних в'язей збігається зі ступенем кінематичної невизначеності споруди, то в основній системі методу переміщень всі вузли будуть нерухомі.

Такий спосіб вибору основної системи дає можливість уявити будь-яку плоску стрижневу систему у вигляді набору стандартних стрижнів, кожен із яких можна розраховувати методом сил.

Розглянемо приклад статично невизначуваної рами, конструктивну схему якої показано на рис. 6.27, і виконаємо кінематичний аналіз. Неважко помітити, що вибрана для розрахунку конструктивна схема рами повністю збігається зі схемою, показаною на рис. 5.14, *а*. Це дозволяє порівняти, наскільки простіше розраховувати рамну конструкцію за методом переміщень від розрахунку аналогічної рами за методом сил.

Якщо рамну конструкцію розрахувати методом сил, то отримаємо тричі статично невизначувану раму.

Таким чином, рама є тричі статично невизначуваною. Розрахунок цієї рами за методом сил наведено в підрозділі 5.5.

Розрахуємо раму методом переміщень:

$$n_{\delta} = 0, \quad n_{\varphi} = 2, \quad k = n_{\varphi} + n_{\delta} = 2.$$

Маємо двічі кінематично невизначувану раму. Так як для цієї рами $n_{\delta} = 0$, то накладаються лише кутові в'язі, які перешкоджають поворотам вузлів T і K (рис. 6.28). Шарнірна схема цієї рами геометрично незмінна і не потребує накладання на вузли додаткових лінійних в'язей:

$$i_1 = \frac{EI}{6}; \quad i_2 = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2}; \quad i_3 = \frac{3EI}{4} = 0,75EI.$$

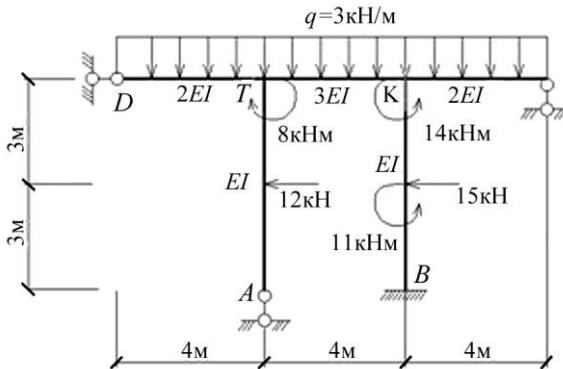


Рис. 6.27. Конструктивна схема статично невизначуваної рами для розрахунку методом переміщень

Невідомі кутові і лінійні переміщення вузлів споруди $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_n$ від різних зовнішніх впливів визначаються із системи канонічних рівнянь методу переміщень, i -те рівняння якої заперечує реакцію в i -й накладеній в'язі в основній системі методу переміщень від переміщення n накладених

в'язей на величини, що дорівнюють $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_n$, і від зовнішніх впливів.

Побудуємо систему канонічних рівнянь методу переміщень:

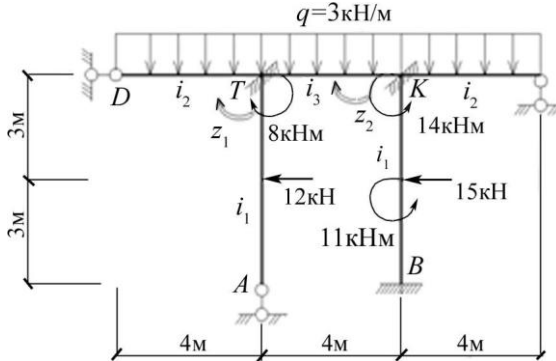


Рис. 6.28. Основна система

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

(6.13)

У системі рівнянь (6.37) коефіцієнти за невідомих r_{ii} є головними, а коефіцієнти r_{ij} – побічними. Фізичний зміст коефіцієнтів r_{ii} і r_{ij} – це реакції у i -й накладеній в'язі відповідно від зміщення i -ї в'язі на величину, що дорівнює одиниці, та зміщення j -ї в'язі на величину 1. Побічні коефіцієнти підлягають теоремі щодо взаємності реакцій, тобто $r_{ij} = r_{ji}$. R_{1p} – це силові реакції в одній накладеній в'язі від зовнішніх впливів.

Розв'язанню системи рівнянь (6.13) передуює обчислення коефіцієнтів при невідомих r_{ii} і r_{ij} та вільних членів R_{1p} , R_{2p} . У методі переміщень ці коефіцієнти можна визначити, побудувавши епюри внутрішніх зусиль в основній системі від зміщення накладених в'язей на величини, які дорівнюють

одиниці, і від силових впливів, тобто маючи результати розрахунків стандартних стрижнів.

Будуємо одиничні епюри в основній системі M_1 , M_2 (рис. 6.29, 6.30) та епюру згинальних моментів від дії зовнішніх силових факторів (рис. 6.31) згідно з рис. 6.27 і 6.28:

Із використанням епюр згинальних моментів, зображених на рис. 6.29–6.31, визначимо коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь рівноваги (6.13):

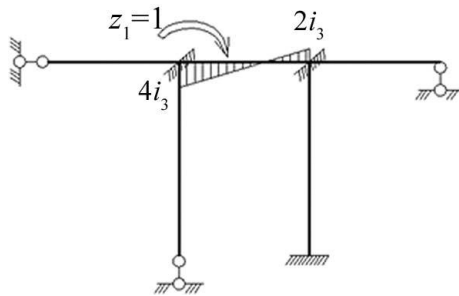


Рис. 6.29. Одинична епюра \bar{M}_1

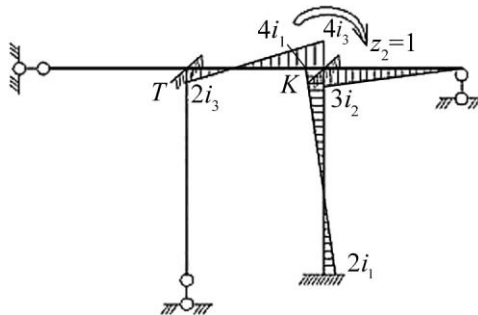


Рис. 6.30. Одинична епюра \bar{M}_2

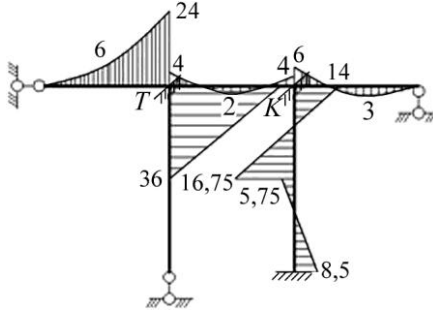


Рис. 6.31. Вантажна еюра M_p

З одиничної еюри \bar{M}_1 (див. рис. 6.29) визначаємо коефіцієнт r_{11} з рівноваги реакцій у затисненні кута T від дії кута повороту $z_1 = 1$ (рис. 6.32, *a*).

$$\begin{aligned} \text{Запишемо умову } \sum M_T = 0; \quad \sum M_T = r_{11} - 4i_3 = 0; \\ r_{11} = 4i_3. \end{aligned}$$

(6.14)

Із еюри \bar{M}_2 (див. рис. 6.30) визначаємо коефіцієнт r_{12} з рівноваги реакцій у затисненні кута T від дії повороту $z_2 = 1$ (рис. 6.32, *б*).

$$\begin{aligned} \text{Запишемо умову } \sum M_T = 0: \quad r_{12} - 2i_3 = 0; \\ r_{12} = 2i_3. \end{aligned}$$

(6.15)

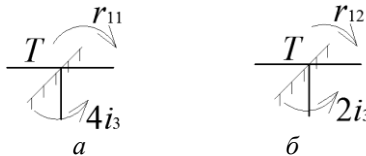


Рис. 6.32. Схема затиснення кута T : *a* – із еюри \bar{M}_1 ; *б* – з еюри \bar{M}_2

Із епюри \bar{M}_2 визначаємо коефіцієнт r_{22} з рівноваги реакцій у затисненні вузла K від дії кута повороту $z_2 = 1$ (рис. 6.33, *a*).

Запишемо умову $\sum M_K = 0$:

$$r_{22} - 4i_3 - 4i_1 - 3i_2 = 0; \quad r_{22} = 4i_3 + 4i_1 + 3i_2.$$

Для перевірки з епюри \bar{M}_2 з рівноваги реакцій в затисненні кута K від дії кута повороту $z_1 = 1$ визначаємо коефіцієнт r_{21} (рис. 6.33, *б*):

Запишемо умову $\sum M_K = 0$:

$$r_{21} - 2i_3 = 0; \quad r_{21} = 2i_3.$$

(6.16)

Бачимо, що рівняння (6.15) і (6.16) тотожні, тобто обчислення виконано правильно.

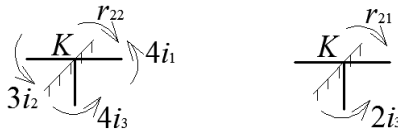


Рис. 6.33. Схема затиснення кута K : *a* – із епюри \bar{M}_1 ; *б* – з епюри \bar{M}_2

Від дії навантаження в стані P (див. рис. 6.31) визначаємо вільний член R_{1p} з рівноваги реакцій у затисненні вузла T (рис. 6.34, *a*).

Запишемо умову $\sum M_T = 0$; $R_{1p} + 36 + 4 - 24 + 8 = 0$;

$$R_{1p} = -24.$$

Вільний член R_{2p} визначаємо з рівняння рівноваги реакцій у затисненні вузла K (рис. 6.34, *б*) від дії навантаження в стані P :

Запишемо умову $\sum M_K = 0$;

$$R_{2p} - 4 + 14 + 6 - 14 = 0;$$

$$R_{2p} = -2.$$

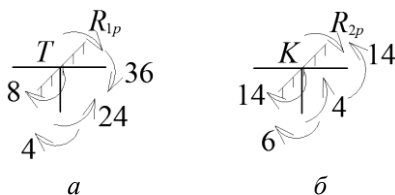


Рис. 6.34. Схема затиснення кута від дії навантаження в стані P :
 a – вузол T ; b – вузол K

Обчислюємо коефіцієнти і вільні члени, підставивши їх значення в рівняння (6.13):

$$r_{11} = 4i_3 = 3EI;$$

$$r_{12} = 2i_3 = 1,5EI;$$

$$r_{22} = 4i_3 + 4i_1 + 3i_2 = 5,167EI;$$

$$R_{1p} = -24 \text{ кНм};$$

$$R_{2p} = -2 \text{ кНм}.$$

Остаточно рівняння (6.13) набуде вигляд:

$$\begin{cases} 3EI \cdot Z_1 + 1,5EI \cdot Z_2 - 24 = 0; \\ 1,5EI \cdot Z_1 + 5,167EI \cdot Z_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

або

$$EI \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 5,167 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$Z_1 = -\frac{D_1}{D}; \quad Z_2 = -\frac{D_2}{D}.$$

(6.17)

Визначаємо числові значення детермінантів:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 5,167 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5,167 - 1,5 \cdot 1,5 = 15,501 - 2,25 = 13,251;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -24 & 1,5 \\ -2 & 5,167 \end{vmatrix} = -24 \cdot 5,167 + 2 \cdot 1,5 = -124,008 + 3 = -121,008;$$

$$Z_1 = \frac{121,008}{13,251} = 9,132 ;$$

(6.18)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -24 \\ 1,5 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 + 24 \cdot 1,5 = -3 + 36 = 30;$$

$$Z_2 = -\frac{30}{13,251} = -2,264.$$

(6.19)

Домножимо одиничні епюри M_1 і M_2 на значення невідомих (6.18), (6.19) та складемо результуючі епюри (рис. 6.35 і 6.36) з епюрою M_p (рис. 6.37):

$$Z_1 = \frac{9,132}{EI} ; Z_2 = \frac{-2,264}{EI} .$$

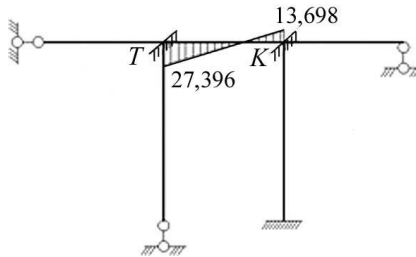


Рис. 6.35. Одинична епюра $\bar{M}_1 z_1$

Виконаємо статичну перевірку:

- рівновага вузлів T, K :

$$\sum M_T = 0 ; 36 + 8 - 20 - 24 = 0 \text{ (рис. 6.39, а);}$$

$$\sum M_K = 0 ; 15,51 + 9,39 - 10,91 - 14 \approx 0 \text{ (рис. 6.39, б).}$$

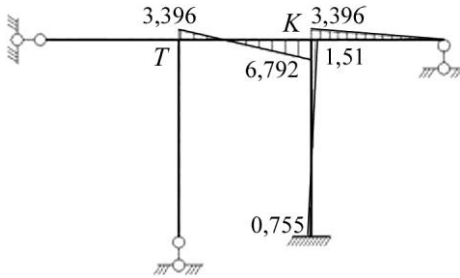


Рис. 6.36. Одинична епора $\bar{M}_2 z_2$

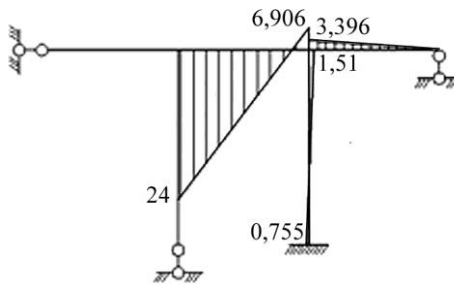


Рис. 6.37. Вантажна епора M_p

За дійсними епорами згинальних моментів (рис. 6.38) побудуємо епюру поперечних зусиль Q (рис. 6.40).

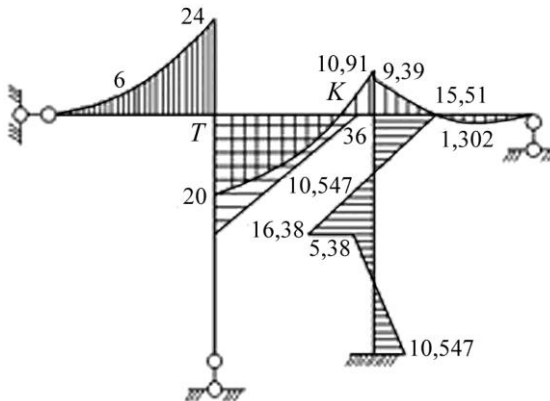


Рис. 6.38. Епора дійсних згинальних моментів

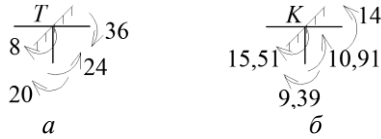


Рис. 6.39. Статична перевірка рівноваги вузлів: *a* – вузол *T*; *б* – вузол *K*

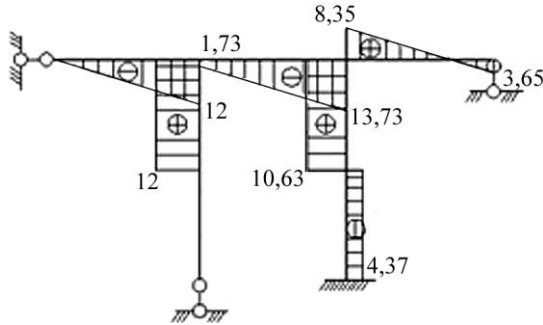


Рис. 6.40. Епюра дійсних поперечних внутрішніх зусиль *Q*

За сумарною епюрою *Q* будемо епюру поздовжніх сил в основній системі (рис.6.41).

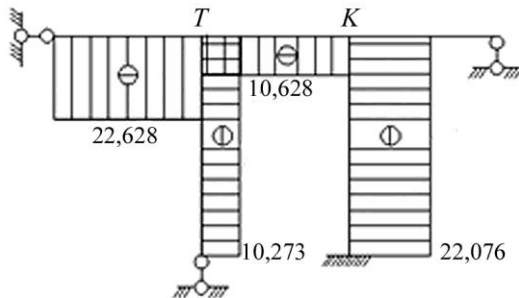


Рис. 6.41. Епюра дійсних поздовжніх внутрішніх зусиль *N*

Виконуємо статичну перевірку вузлів *T* і *K* :

Вузол *T* (рис. 6.42, *a*):

$$\sum F_x = 22,628 - 10,628 - 12 = 0;$$

$$\sum F_y = 12 - 10,27 - 1,73 = 0.$$

Вузол K (рис. 6.42, б):

$$\sum F_x = 10,628 - 10,628 = 0;$$

$$\sum F_y = 13,73 + 8,35 - 22,076 = 0.$$

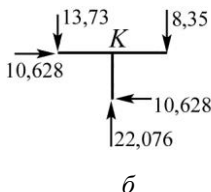
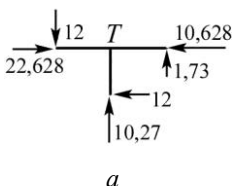


Рис. 6.42. Статична перевірка вузлів: a – вузол T ; b – вузол K

Запитання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає припущення методу переміщень. Назвіть основні переваги методу переміщень.
2. У чому полягає побудова основної системи статично невизначуваної рами за методом переміщень?
3. Наведіть принципи побудови основної системи методу переміщень.
4. Що спільного між методом переміщень і методом скінченних елементів? Чим вони відрізняються?
5. Наведіть систему канонічних рівнянь методу переміщень і її основні властивості.
6. Як визначається ступінь кінематичної невизначуваності плоскої рами?
7. Розкрийте умови побудови рівнянь методу переміщень. Як визначаються незалежні лінійні переміщення за методом переміщень?
8. Покажіть особливості побудови одиничних епюр і епюр від навантаження за методом переміщень.
9. Наведіть основні типи однопрогонових статично невизначуваних балок для побудови основної системи методу переміщень. Як визначаються параметри епюр внутрішніх зусиль від узагальнених одиничних переміщень.
10. Наведіть приклад визначення внутрішніх зусиль від одиничного повороту рухомого затиснення для балки з двома защемленнями.

11. Из яких умов визначаються коефіцієнти та вільні члени системи канонічних рівнянь методу переміщень?
12. Из яких умов складаються рівняння для незалежних лінійних зміщень при розрахунках плоских рам методом переміщень?

РОЗДІЛ 7

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ ЖОРСТКИХ РАМ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

7.1. Основні положення розрахунку рам з урахуванням зсувних деформацій

У прикладних задачах будівельної механіки зазвичай розглядаються пружні однорідні ізотропні матеріали (*тіла*). *Тіло називається однорідним ізотропним, коли у всіх його точках пружні властивості у всіх напрямках однакові. У сучасній техніці крім ізотропних, набули застосування конструктивно-анізотропні тіла. Анізотропним пружним тілом називається таке тіло, у якого пружні властивості якого за різними напрямками різні та однакові за паралельними напрямками у всіх точках тіла. По суті, усі реальні матеріали анізотропні і більшою або меншою мірою неоднорідні, у тому числі і вироби зі сталі, залежно від технології виготовлення та форми лиття та прокату. Анізотропні матеріали за своїм походженням можна поділити на природні та синтетичні. До природних головним чином належать вироби з дерева, до синтетичних – різні полімерні матеріали (склопластик, пластмаси, вироби з пінополіуретану, пінопласту та інших поліме-*

рів). Особливо слід вирізнити конструктивні полімерні вироби, призначені для силових впливів – жорсткі склопластики, текстоліти, деревинно-шаруваті та полістирольні плити тощо.

Полімерні матеріали характеризуються рядом позитивних властивостей: низькою теплопровідністю, малою питомою вагою, високою міцністю, високим коефіцієнтом конструкційної якості тобто відношенням межі міцності до об'ємної ваги, хімічною стійкістю, доброю технологічністю та ін. Використання анізотропних матеріалів дає можливість більш раціонально розмістити матеріал у конструкції. Це досягається шляхом суміщення напряму великої міцності або жорсткості з напрямом найбільших напружень або переміщень, наприклад, використання ортотропних плит у містобудівництві. У різних галузях промислового будівництва, літакобудуванні, суднобудуванні та інших полімерні матеріали використовуються для виготовлення конструкцій у вигляді оболонок, пластин та стрижнів. Ці конструкції здебільшого є тонкостінними: вони більш економічні. Тонкостінні стрижні використовуються як шпангоути і стрингери у па-

нелях, пластинах та оболонках несучих елементів будівель та споруд.

Однорідне пружне анізотропне тіло у загальному випадку відповідно з узагальненим законом Гука [20] характеризується 21 пружною незалежною сталою a_{ij} або A_{ij} . Симетрія внутрішньої будови матеріалу призводить до симетрії пружності. У тілі виникають симетричні напрямлення (конструктивно заплановані), уздовж яких пружні властивості будуть однаковими. Для таких матеріалів узагальнений закон Гука спрощується, кількість незалежних констант зменшується. Так, наприклад, для тіла з однією площиною симетрії їх кількість буде дорівнювати 13 (такі тіла називаються неортотропними), а на випадок, коли у кожній точці тіла є три взаємоперпендикулярні площини пружної симетрії кількість незалежних пружних сталих становитиме дев'ять (такі тіла називаються ортотропними [20]). Якщо в кожній точці тіла є площина, пружні властивості якої у всіх напрямках однакові, а відрізняються лише в ортогональному напрямі відносно цієї площини ізотропії, то для таких тіл кількість незалежних пружних констант дорівнює п'яти (такі

тіла називаються трансверсально-ізоτροпними, або транс-тропними). У разі повної симетрії, коли у кожній точці тіла будь-яка площина є площиною пружної симетрії, кількість пружних незалежних констант дорівнює трьом – E, G, ν : модуль пружності Юнга, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона (такі тіла називаються ізоτροпними). Матеріалами, які наближено можна вважати ортоτροпними, є деревина, фанера, деревинно-шаруватий пластик, текстоліт, склопластик типу СВАН та ін. Прикладом транстропного тіла може бути однонаправлений склопластик, якщо нитки вважати рівномірно розподіленими по перерізу.

Пружні сталі ортоτροпного матеріалу у головних напрямках (коефіцієнти поздовжніх деформацій) можна визначити, виконавши один із дослідів на розтяг, стиск або згин, при цьому вихідними рівняннями під час випробувань є вираження узагальненого закону Гука для ортоτροпного матеріалу [20]. Модулі пружності, знайдені в результаті окремих досліджень, збігаються, тобто метод визначення пружних сталей різномодульних матеріалів із дослідів на згин може бути використаним у лабораторній практиці [19; 21].

Коефіцієнти поперечних деформацій ортотропних матеріалів можна також визначати під час випробувань на розтяг, стиск і згин, вибираючи з досліджуваного матеріалу три зразки у вигляді призм прямокутного перерізу, які орієнтовані по головних напрямках базису ортотропії. Коефіцієнти Пуассона визначаються як відношення поперечної відносної деформації до поздовжньої [21]. В окремих випадках анізотропії – ізотропного, поперечно ізотропного (трансверсального), ортотропного або з однією площиною пружної симетрії матеріалу зразка гіпотеза плоских перерізів при чистому згині є справедливою, проте в загальному випадку анізотропії ця гіпотеза стає несправедливою і зазначені способи визначення пружних властивостей матеріалів використовувати не можна.

Для визначення сталих зсуву з ортотропного матеріалу виготовляють три діагональні зразки прямокутного перерізу, при цьому вісь зразка першого типу (уздовж першої головної осі ортотропії) [21] паралельна головній площині пружності 1–2 і водночас становить кут 45° із головними напрямками пружності матеріалу. З досліду на розтяг (стиснення) цього

зразка першого типу визначають коефіцієнти поздовжніх і поперечних деформацій, а сталу зсуву у площині 1–2 обчислюють як їх подвійну різницю, що є еквівалентною формулі зсуву для цієї площини:

$$G_{12} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})}$$

де E_{45} , ν_{45} - модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона, знайдені в результаті дослідження зразка першого типу. Аналогічно під час дослідження зразків другого і третього типів (уздовж другої та третьої головних осей ортотропії) знаходять коефіцієнти деформації і модулі зсуву a_{44} , G_{23} і a_{55} , G_{13} відповідно.

У будівельній механіці пружні переміщення стрижня і стрижневих систем, як правило, визначаються способом Максвелла–Мора, коли будь-яке (узагальнене) переміщення δ_{ij} за напрямом i , викликане причиною j , через вираження віртуальної роботи внутрішніх сил. Загальна формула для тонкостінного стрижня містить 30 інтегралів, до того ж п'ять з них визначають переміщення тонкостінного стрижня без урахування деформацій зсуву, всі інші з урахування деформацій зсуву. Для перерізу симетричного відносно обох головних осей з

десяти коефіцієнтів зсуву $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ шість дорівнюють нулю. Коефіцієнти зсуву, як правило, обчислюються відносно головних координат x, y, w і залежать від форми і розмірів перерізу. Для прямокутного перерізу коефіцієнт зсуву $\mu_{xx} = 1,2$ для симетричного двотавра з однорідного матеріалу, складеного з вузьких пря-

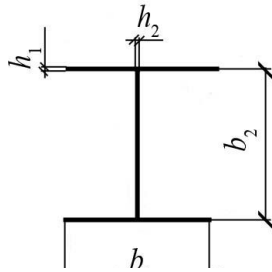


Рис. 7.1. Переріз двотавра

$$\mu_{xx} = \frac{Fb_2^2}{120I_x^2} \left[\frac{5b_1^3h_1^2}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} \left(6b_1^2h_1^2 + 10b_1h_2h_1h_2 + b_2^2h_2^2 \right) \right];$$

$$\mu_{yy} = \frac{3F}{5b_1h_1};$$

$$\mu_{ww} = \frac{2,4F^2}{h_1b_1b_2^2}.$$

Як свідчать дослідження багатьох авторів [21], урахування деформацій зсуву істотно впливає на переміщення, особливо в статично невизначених системах і майже не впливають на кути повороту жорстких кутових елементів у рамах.

Тонкостінні стрижні належать до статично невизначуваних механічних систем.

Під час проектування комбінованих великопрогонових оболонкових систем складної конфігурації для забезпечення місцевої стійкості тонколистових фрагментів широко використовують ребра (шпангоути, стрингери) вставки та інші стабілізувальні елементи з комбінації тонкостінних прокатних і гнутих (закритих і відкритих перерізів) профілів [18; 19]. У загальній дискретній моделі та розрахунковій схемі зазначених комбінованих механічних систем ці тонкостінні стрижневі елементи зводяться до еквівалентних прямокутних перерізів з адекватними поздовжньою і згинальною жорсткістю. У результаті розрахунків на міцність комбінованої оболонкової конструкції на основі ітераційного процесу нелінійного деформування отримуємо інтегральні внутрішні зусилля (поздовжні і перерізувальні сили, поперечні тангенціальні, поздовжні та крутні моменти), що діють в елементах ребер і стабілізувальних елементів комбінованої механічної системи. Проте внутрішні напруження в еквівалентних дискретних системах, які відповідають інтегральним внутріш-

нім зусиллям, абсолютно не відповідають дійсним нормальним і зсувним напруженням у дійсних профілях реальних тонкостінних стрижневих елементів. Тому для забезпечення обмежень за міцністю і деформативністю для перерізів з максимальними інтегральними зусиллями необхідно розв'язувати задачу для статички невизначених тонкостінних стрижнів, підставляючи у формули Максвелла–Мора з урахуванням зсувних інтегралів дійсні внутрішні зусилля з визначенням коефіцієнтів зсуву i , як наслідок, дійсних деформацій та зусиль U зв'язку з цим були проведені дослідження для статично невизначуваних рам із тонкостінних профілів або для прямокутних і двотаврових перерізів із низько-модульних матеріалів, наприклад, із клеєної деревини, на вплив зсувних деформацій.

У сучасному будівництві широкого використання набули споруди з композитних, полімерних матеріалів, металопластику, проте використання цих матеріалів у конструюванні споруд потребує більш досконалих методів їх розрахунків на міцність та деформативність.

Зазвичай розрахунки рам на міцність та деформативність виконуються без урахування деформації зсуву. Проте у деяких випадках доводиться враховувати не тільки деформації згину, а й деформації зсуву. Особливо істотно деформації зсуву відображаються на роботі рам, які складаються з коротких стрижнів, виготовлених із дерева, композитних, полімерних матеріалів або металопластику. Їх широке використання

у сучасному будівництві пояснюється тим, що зазначені матеріали мають порівняно незначну жорсткість на зсув. Практика свідчить, що деформації зсуву також необхідно враховувати у розрахунках металевих рам при використанні тонкостінних стрижнів.

7.2. Використання формул Корноухова для основного типу балкового стрижня

Розрахунки стрижня рами з урахуванням деформації зсуву за методом переміщень розглядав професор М.В. Корноухов. У статті [8] наведено формули для стрижня рами ab (рис. 7.2) у загальному випадку завантаження, ці формули мають вигляд:

$$M_{ab} = -\frac{EI}{l} \left[(3\theta + 1)\varphi_a + (3\theta - 1)\varphi_b - 6\theta\varphi_{ab} \right] + M'_{ab}, \quad (7.1)$$

$$Q_{ab} = -\frac{6EI\theta}{l^2} \left[\psi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab} \right] + Q'_{ab}, \quad (7.2)$$

де

$$M'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{2} \left\{ \left[\left(3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{b_n}{l} + 1 - \theta \right\} \frac{ql^2}{12};$$

$$Q'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{l} \left\{ \left[\left(3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{\theta b_n}{l} + 1 - \theta \right\} \frac{ql}{2};$$

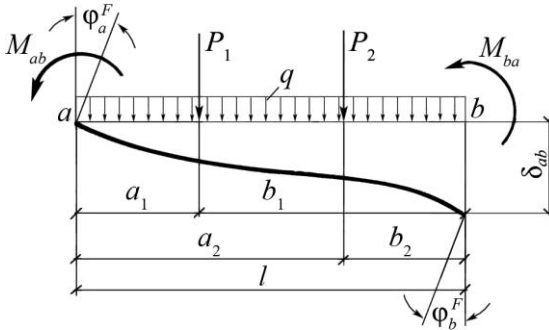


Рис. 7.2. Розрахункова схема стрижня ab

$$\psi_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}; \quad \theta = \frac{1}{1 + \frac{12EI}{l^2GF}}; \quad F_1 = \frac{F}{\mu} = \frac{J^2}{\int_F \left(\frac{S}{b}\right)^2 dF}.$$

$$\mu_I \equiv \mu_{xx} = \frac{F}{F_1}.$$

Коефіцієнти зсуву залежать від форми і розмірів перерізу стрижня. Наприклад, $\mu_{\square} = 1,2$; $\mu_I = \frac{F^I}{F_{\text{ет}}}$.

Для двотавра, складеного з вузьких прямокутників (рис. 7.3),

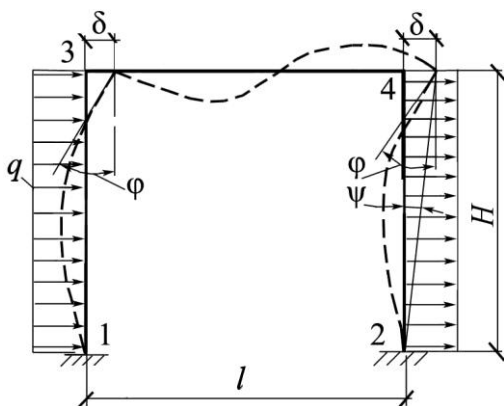
$$\mu = \frac{Fb_2^2}{I_x^2 \left[5b_1^2h_1 + \frac{b_2}{h_2} (10b_1^2h_1^2 + 10b_1b_2h_1h_2 + b_2^2h_2^2) \right]}.$$

Виконуємо розрахунок простої симетричної рами з косиметричним рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 7.3). Розрахункова схема рами тричі кінематично (і

статично) невизначувана, але для цього кососиметричного навантаження маємо лише два невідомих.

Таким чином, невідомими будуть: кут повороту вузла φ

i



кут перекосу
стояка ψ (адекватного незалежному переміщенню).

$$\psi = \frac{\delta}{H}.$$

Рис. 7.3. Розрахункова схема рами

Складаємо систему з двох рівнянь для рами - одне основне рівняння і одне додаткове (рис 7.4).

$$\begin{cases} M_{31} + M_{34} = 0; \\ Q_{13} + Q_{24} - \Sigma W = 0. \end{cases}$$

Виразимо зусилля через невідомі:

$$M_{31} = -\frac{EI}{H} \left[3\theta + 1 \overline{\varphi}_3 - 6\theta \psi_{31} \right] - \frac{qH^2}{12};$$

$$M_{34} = -\frac{EI}{l} \left[3\theta + 1 \overline{\varphi}_3 + 3\theta - 1 \overline{\varphi}_4 - 0 \right] = 0;$$

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[1 + \varphi_3 - 2\psi_{13} \right] - \frac{qH}{2};$$

$$Q_{24} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[1 + \varphi_4 - 2\psi_{24} \right] - \frac{qH}{2};$$

$$\Sigma W = -2qH;$$

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \varphi_4; \quad \psi \equiv \psi_{31} = \psi_{24}.$$

Рівняння рівноваги (7.1) набудуть вигляду

$$\begin{cases} -EI \left[3\theta \left(\frac{1}{H} + \frac{2}{l} \right) + \frac{1}{H} \right] \varphi + \frac{6EI}{H} \theta \psi - \frac{qH^2}{12} = 0; \\ -\frac{12EI}{H^2} \theta \varphi + \frac{24EI}{H^2} \theta \psi - qH = 0. \end{cases}$$

(7.3)

Розв'язавши систему, отримаємо:

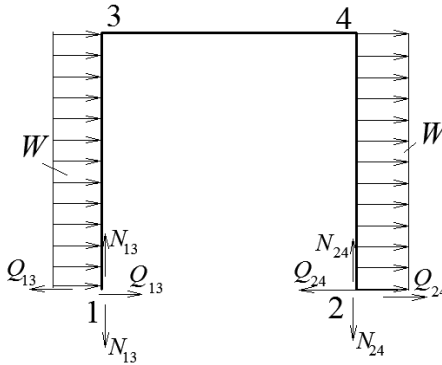


Рис. 7.4. Схема зусиль на опорах рами

$$(7.4) \quad \varphi = \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)}; \quad \psi = \frac{qH^2}{24EI} \left(\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right).$$

7.3. Визначення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь з урахуванням зсувних деформацій

Для забезпечення достовірності отриманих результатів (7.4) виконаємо розрахунок П-подібної рами на основі канонічного розв'язку методом переміщень без урахування зсуву тричі кінематично невизначуваної рами на основі алгоритму, запропонованого у праці [15].

Будуємо основну систему (рис. 7.5). Вихідну статично невизначувану симетричну раму з косиметричним навантаженням зображено на рис. 7.5, а. Відповідно до основної системи (рис. 7.5, б) маємо три невідомі: Z_1, Z_2, δ . Ураховуючи площину косиметричної дії, маємо: $Z_1=Z_2$. Будуємо три стани: два одиничних від $Z_1=1$ і $Z_2=1$ і завантажений стан Р.

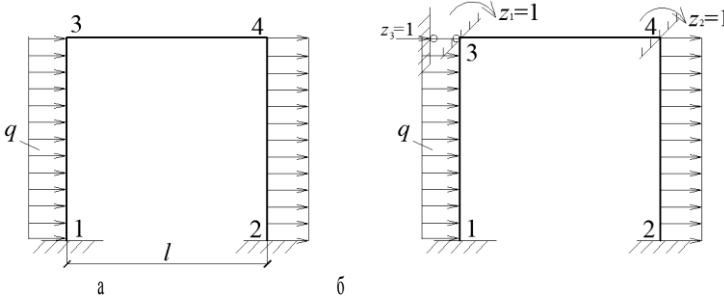


Рис. 7.5. Симетрична рама з косиметричним навантаженням:
а – вихідна система; б – основна система

Відповідно до праці [15] формулюємо канонічну систему методу переміщень (7.2), яка, виходячи із загального підходу, включає три рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Ураховуючи косу симетрію, маємо $Z_2 = Z_1$.

Тоді будемо мати два рівняння: сума першого і другого рівнянь системи (7.5) як основне, третє як додаткове.

Сума рівнянь по вертикалі задає систему

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 + r_{21} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{M}_2 + r_{12} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{M}_3 + r_{23} \mathbf{Z}_3 + R_{1p} + R_{2p} = 0; \\ r_{31} \mathbf{Z}_1 + r_{32} \mathbf{Z}_2 + r_{33} \mathbf{Z}_3 + R_{3p} = 0, \end{cases}$$

або, враховуючи суму по горизонталі, отримаємо:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 + r_{12} \mathbf{Z}_1 + r_{13} \mathbf{Z}_3 + R_{1p} = 0; \\ 2r_{31} \mathbf{Z}_1 + r_{33} \mathbf{Z}_3 + R_{3p} = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Обчислення коефіцієнтів r_{ij} , задіяних у системі рівнянь (7.6), узгоджуються з наступними

З метою визначення моментів рами значення невідомих підставляємо в рівняння:

$$\begin{aligned} M_{31} = M_{42} &= -\frac{EI}{H} \left[\mathbf{M} + 1 \right] \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \\ &- 6\theta \frac{qH^2}{24EI} \left(\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right) \left] - \frac{qH^2}{12} = \\ &= \frac{qH^3}{6H + l} \left[1 + \frac{l}{6H} - \frac{l}{H \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)} - \frac{l^2}{6H^2 \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right]; \end{aligned}$$

$$M_{13} = -\frac{EI}{H} \left[\frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - 6\theta \frac{qH^2}{12EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^3}{4EI} \right] + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{3} + \frac{qHl}{6 \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)}$$

або

$$M_{13} = \frac{qH^2}{2} \left[\frac{2 \left(6 + \frac{l}{H} \right)}{3 \left(4 + \frac{l}{H} \right)} + \frac{l \left(6 + \frac{l}{H} \right)}{3H \left(6\theta + \frac{l}{H} \right) \left(4 + \frac{l}{H} \right)} \right]$$

Позначимо: $\frac{l}{H} = k$, тоді

$$M_{31} = M_{42} = \frac{qH^3}{6H+l} \left[1 - \frac{k}{6\theta+k} \right]; \quad (7.7)$$

$$M_{13} = \frac{qH^2}{2} \left[1 + \frac{2k}{4+k} \frac{1}{6\theta+k} \right]$$

7.4. Приклад аналітичного розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень з урахуванням зсувних деформацій

За отриманими значеннями моментів будуюмо епюру моментів рами (рис. 7.6). За основними формулами (7.2) знаходимо значення поперечних сил:

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[\frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{2qH^3}{24EI\theta} \right] + \frac{qH}{2} = qH;$$

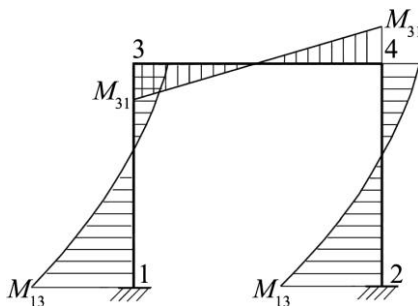


Рис. 7.6. Епюра моментів рами

$$Q_{31} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[+\varphi - 2\psi \right] \frac{qH}{2};$$

Перша складова частина аналогічна Q_{13} і дорівнює $\frac{qH}{2}$, то-

му

$$Q_{13} = \frac{qH}{2} - \frac{qH}{2} = 0;$$

$$Q_{34} = -\frac{6EI\theta}{l^2} 2\varphi = -\frac{12EI\theta qH^2}{l^2 6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} = -\frac{2qH^2\theta}{l \left(6\theta + \frac{1}{H} \right)};$$

або

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6EI + l^2} \left[1 - \frac{k(-\theta)}{6\theta + k} \right];$$

$$Q_{24} = Q_{13} = qH; \quad Q_{42} = Q_{31} = 0.$$

За отриманими значеннями будемо епюру поперечних сил для рами (рис. 7.7).

Для перевірки достовірності отриманих результатів раму розраховуємо і за методом сил без урахування зсуву, якщо $\theta = 1$; отримані епюри моментів та поперечних сил порівнюємо відповідно з рис. 7.6 і 7.7.

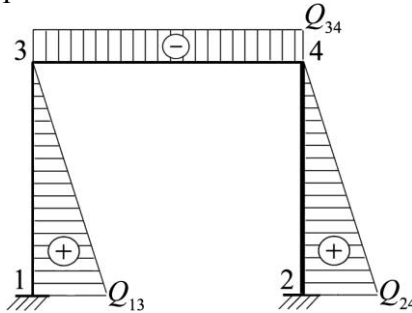


Рис. 7.7. Епюра поперечних сил

Для дослідження впливу деформації зсуву на величини зусиль і переміщень у рамі побудуємо графіки значень найбільшого моменту M_{13} , поперечної сили Q_{34} та незалежного зміщення вузлів рами δ за різних значень θ , тобто побудуємо графіки функцій:

$$M_{13} = f_1(\theta); \quad Q_{34} = f_2(\theta); \quad \delta = f_3(\theta).$$

Перетворимо формулу (7.7):

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+1)}{2(6H+1)} \eta_M(\theta),$$

$$\text{де } \eta_M(\theta) = 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)}.$$

Виконуємо розрахунки $\eta_M(\theta)$ для різних значень k , результати обчислень заносимо до табл. 7.1, за якими будуємо графіки функції $\eta_M(\theta) = f(\theta)$, (рис. 7.8).

Таблиця 7.1

Значення прогинів η_M

θ	$k=0,2$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	1,09	1,33	1,05	1,6
0,2	1,06	1,15	1,35	1,43
0,4	1,03	1,07	1,23	1,29
0,6	1,02	1,03	1,14	1,18
0,8	1,01	1,01	1,06	1,08
1,0	1,0	1	1	1

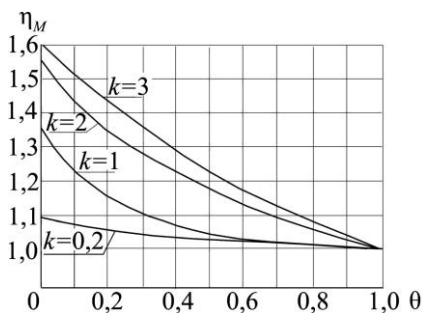


Рис. 7.8. Графіки функції $\eta_M = f(\theta)$ для різних значень k

Аналогічно для поперечної сили отримаємо:

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6HI + l^2} \eta_Q,$$

$$\text{де } \eta_Q = 1 - \frac{k(-Q)}{6\theta + k}.$$

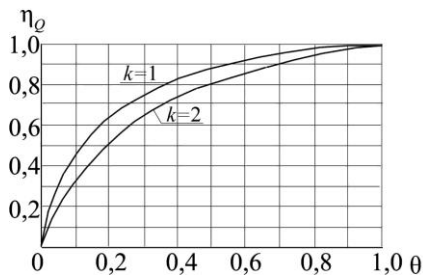
Виконуємо обчислення і заносимо їх до табл. 7.2.

За даними табл. 7.2 будуюмо графіки функцій $\eta_Q = f(\theta)$ (рис. 7.9).

Значення прогинів η_Q

θ	$k=1$	$k=2$
0	0	0
0,2	0,64	0,5
0,4	0,82	0,73
0,5	0,88	0,80
0,6	0,91	0,86
0,8	0,97	0,94
1,0	1,0	0,0

Знаючи кут перекосу стояка ψ , знайдемо зміщення вузлів рами δ :

Рис. 7.9. Графіки функції $\eta_Q = f(\theta)$

$$\delta_{13} = \frac{qH^3}{24EI} \left[\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right] = \frac{qH^4}{24EI} \left[\frac{2\frac{l}{H}\theta + 6\theta + \frac{l}{H}}{\theta \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right] \text{ або}$$

$$\delta = \frac{qH^4(2H+l)}{8EI(6H+l)} \eta_{\delta}(\theta),$$

$$\text{де } \eta_{\delta}(\theta) = \frac{(2\theta+k)(6+k)}{\theta(6\theta+k)(2+k)}.$$

Обчислення функції η_{δ} виконуємо при $k = 1$, оскільки за значень $\zeta = 2$ і $k = 3$ графік майже не змінюється.

Значення функції $\eta_{\delta} = f(\theta)$, заносимо до табл. 7.3 і будемо графік (рис. 7.10).

Таблиця. 7.3

Деформації зсуву і прогини

θ	η_{δ}
0	0
0,2	7,4
0,4	3,1
0,5	2,34
0,6	1,86
0,8	1,3
1	1

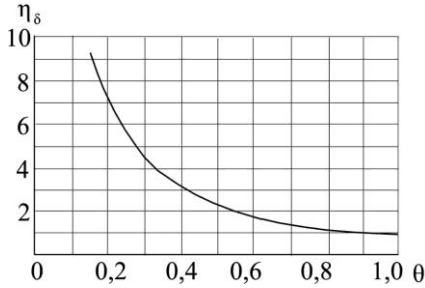


Рис. 7.10. Графік функції $\eta_\delta = f(\theta)$

Виконавши функціональний аналіз за отриманими результатами, можна дійти таких висновків:

1. Деформації зсуву більшою мірою впливають на переміщення, ніж на внутрішні зусилля.

2. Вплив деформації зсуву більше проявляється на низьких рамах при $k=3$, ніж на високих, тобто деформації зсуву пропорційні погоновій жорсткості стрижневих елементів рами.

3. Деформації зсуву під час розрахунків рам необхідно враховувати (з уточненням величини внутрішніх зусиль при розрахунках на міцність понад 5%), якщо для заданого стрижня величина $\theta = 0,2$ для низьких рам при $k = 2 - 3$, або $\theta = 0,2 - 0,4$ при $k=1$, або $\theta = 0,2 - 0,8$ при $k=2 - 3$ і більше.

Отже, виконуючи розрахунки рам на міцність деформації зсуву потрібно враховувати для низьких рам, коли $\theta \leq 0,8$. Якщо значення $\theta > 0,8$, у розрахунках на міцність деформаціями зсуву можна знехтувати.

4. За рахунок деформації зсуву поперечні зусилля в незавантажених стрижнях рами зменшуються, причому швидше ніж збільшується момент у небезпечному перерізі рами.

5. Для уточнення зміщень рами у розрахунках, особливо в разі використання тонкостінних стрижнів, коли значення $\theta \leq 0,75$, деформації зсуву необхідно враховувати для всіх високих і низьких рам, якщо $k = 0,2 - 3$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. У яких випадках при розрахунках статично невизначуваних рам необхідно врахувати деформації зсуву?
2. У яких випадках треба враховувати деформації зсуву при розрахунках металевих рам?
3. Наведіть формули М.В.Корноухова під час визначення внутрішніх зусиль для балки з двома защемленнями від одиничного повороту рухомого защемлення і кута перекошу стояка з защемленням.
4. Наведіть формули аналітичного розв'язання системи рівнянь рівноваги для П-подібної рами з урахуванням деформацій зсуву.
5. Наведіть графіки залежності внутрішніх зусиль для П-подібної рами від погонної жорсткості елементів рами.
6. Як впливає на величину внутрішніх зусиль в елементах жорсткої рами значення модулів пружності і зсуву матеріалу?

РОЗДІЛ 8

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

8.1. Дискретна модель розрахункової схеми стрижневої системи

Метод скінченних елементів для опису НДС суцільних середовищ уперше був застосований у середині 50-х років ХХ ст. Цей метод широко застосовується для розрахунків складних континуальних механічних систем, у гідродинаміці, теорії поля та інших фізико-математичних задачах. Про поширення МСЕ свідчать понад 20 тисяч посилань у наукових працях видатних вчених у сфері будівельної механіки та теорії пружності. Хоча МСЕ застосовують для розв'язання тих самих задач, що і метод скінченних різниць, вони ґрунтуються на різних фундаментальних співвідношеннях і теоріях. Метод скінченних різниць базується на різницевій апроксимації похідних, що входять до диференціальних рівнянь, а математичною основою МСЕ є варіаційне обчислення.

Диференціальні рівняння, що описують конкретну крайову задачу з відповідними граничними умовами застосовуються для постановки варіаційної задачі, яка потім розв'язується безпосередньо.

Варіаційний підхід – це універсальний засіб опису фізичних процесів і закономірностей. У реальних природних процесах деякі величини досягають свого екстремального значення. Ще Аристотель писав, що природа у своїх явищах завжди йде найкоротшим шляхом із найменшими витратами. Перше формулювання варіаційного принципу стосовно закону заломлення променя світла на межі двох середовищ подав Ферма [22]: «з різних напрямів променя світла реалізується той, який доставляє мінімум часу» (тобто який поширюється з найбільшою швидкістю). Варіаційний принцип почали застосовувати як в оптиці, так і в механіці. Цим займалися відомі

вчені XVII-XVIII ст. Основи сучасного варіаційного числення були закладені Леонардом Ейлером, який узагальнив принцип французького вченого Мопертъє: «в істинному русі добуток маси на швидкість і шлях є мінімальним, тобто дія є мінімальною». Ейлер уперше записав функцію дії:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt.$$

Відомий вчений Лагранж завершив розробку принципу найменшої дії, при цьому сформулював закон збереження енергії

$$k \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^2 - v \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = \text{const}$$

у своїй книзі «Аналітична механіка». Формулювання були недостатньо прозорі, що призвело до модифікації принципу найменшої дії вченими Гамільтоном, Якобі, Пуанкаре, Остроградським. У формулюванні Якобі стверджується: «... істинний рух є стаціонарною точкою функціонала дії». Гамільтон запропонував функціонал у вигляді [22]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{K} - W \right) dt,$$

у якому t розглядається як не варійований параметр, а як заданий, пізніше цього висновку дійшов і Остроградський. Під інтегралом маємо функцію Лагранжа.

Функція Лагранжа відновлюється за функціями кінетичної і потенціальної енергії. Якщо розглянути суцільне середовище, то в них діють функціонали від визначальних функцій. Функція визначає числову область на числовій області визначення. Функціонал має числове значення на числовій області функції.

Історично першим варіаційним рівнянням було «золоте правило» механіки – «принцип можливих переміщень», який сформулював Бернуллі. Для матеріальних точок суцільного середовища, які підпорядковані певним кінематичним

зв'язкам, можлива сумарна робота зовнішніх сил дорівнює сумі робіт цих сил на можливих переміщеннях:

$$\delta A^e = \sum_{s=1}^n \bar{F}_{\epsilon} \delta \bar{u}_{\epsilon}.$$

Згідно з принципом Гамільтона, якщо об'єм V – зайнятий суцільним середовищем, то на інтервалі часу $t_0 - t_1$, у межах якого задані значення визначальних функцій (t_0 – початкова конфігурація суцільного середовища, t_1 – деформована конфігурація суцільного середовища) і функціонал дії має стаціонарне значення, то

$$\delta I + \delta A = 0. \quad (8.1)$$

Вираз (8.1) – це відоме варіаційне рівняння Лагранжа.

Для статичної задачі маємо

$$\delta \Pi = \delta U - \delta A = 0,$$

(8.2)

де δU – варіація внутрішньої енергії деформації; δA – віртуальна робота зовнішніх сил.

Варіаційне рівняння (8.2) безпосередньо застосовується в МСЕ для розв'язання задач статички в механіці суцільного середовища. Для тривимірних тіл рівняння (8.2) має вигляд

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv - \int_V p^i \delta u_i dv - \int_S q^i \delta u_i ds = 0, \quad (8.3)$$

де $\sigma^{ij} = c^{ijkl} \epsilon_{kl}$ – тензор напружень в елементарному околі;

p^i, q^i – сили тяжіння і поверхневі сили в елементарному околі області механічної системи (D).

Якщо поділити задану область суцільного середовища на окремі скінченні області e , то загальний інтеграл області D буде дорівнювати сумі інтегралів окремих підобластей [23; 24]:

$$\delta \Pi_{\bullet} = \sum_{e=1}^M \delta \Pi_{\bullet} = \sum_{e=1}^M (\delta U_{\bullet} - \delta A_{\bullet}) = 0,$$

де δU_{\bullet} – варіація енергії деформації в окремому СЕ; δA_{\bullet} – віртуальна робота зовнішніх сил в окремому СЕ.

Таким чином, для реалізації МСЕ треба виконати певні операції, які можна поділити на етапи:

- розбиття вихідної механічної системи на окремі СЕ, тобто побудова дискретної моделі;
- вибір схеми інтерполяції переміщень у середині кожного СЕ;
- визначення залежності між напруженнями і деформаціями у середині СЕ – вибір рівняння стану твердого тіла;
- визначення визначальних рівнянь для всієї дискретної моделі: побудова системи рівнянь рівноваги СЕ-моделі;
- розв'язання системи лінійних рівнянь рівноваги;
- обчислення значень величин НДС – переміщень, деформацій, напружень, внутрішніх зусиль і ін.

Розглянемо плоску стрижневу механічну систему – раму, зображену на рис. 8.1, і виконаємо такі етапи операцій:

1. Будуємо дискретну модель, тобто вводимо рухомі затиснення за такими самими правилами, як і в методі переміщень, за винятком того, що всі навантаження зосереджених сил і моментів мають бути вузловими, а в середині СЕ повинна бути постійна жорсткість стрижня і рівномірно розподілене навантаження. Таким чином, для побудови СЕ-моделі визначаємо окремі ділянки, які будемо вважати стрижневими СЕ. Точки (рухомі затиснення) між СЕ називаються вузлами, їх послідовно пронумеровано (рис. 8.1).

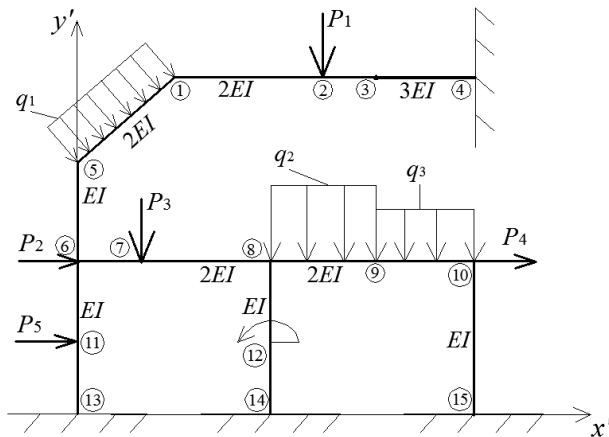


Рис. 8.1. Плоска стрижнева СЕ-модель двоверхової рами

Для визначення енергії деформації всієї дискретної моделі скористаємося співвідношеннями питомих енергій для стрижня з урахуванням поздовжніх сил і згинальних моментів:

$$\delta U = \sum_{s=1}^{12} \left[N \delta_{\varepsilon} dx + \int_{l_s} M \delta_k dx \right],$$

$$\text{де } N = EA \frac{du}{dx}; \quad \delta_{\varepsilon} = \delta \frac{du}{dx}; \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2};$$

$$\delta_k = \delta \frac{1}{\rho_k} dx = \delta \frac{d^2 w}{dx^2} dx.$$

(8.4)

З урахуванням рівняння (8.4) варіація енергії деформації СЕ набуде вигляду

$$\delta U = \int_0^l EA \frac{du}{dx} \delta \frac{du}{dx} dx + \int_0^l EI \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \frac{d^2 w}{dx^2} dx. \quad (8.5)$$

2. Для визначення роботи внутрішніх сил у межах одного СЕ (рис.8.2) потрібно ввести локальну систему координат, розглянути елементарну ділянку стрижня, записати вираз внутрішніх зусиль як функцію локальних координат, проінтегрувати і отримати вираз енергії деформації в СЕ.

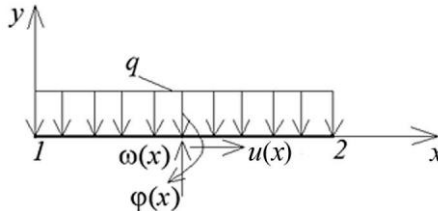


Рис. 8.2. Схема стрижневого СЕ у локальній системі координат

8.2. Вузлові характеристики стрижнів і функцій форми стрижневого скінченного елемента

Розв'язуємо задачу розрахунку рами за методом переміщень, маючи як невідомі узагальнені переміщення, виходячи з технічної теорії згину стрижня-балки, тобто у кожній елементарній точці на нейтральній осі стрижня є три невідомі функції:

$$u(x) = f_1(x); \quad w(x) = f_2(x); \quad \varphi(x) = f_3(x).$$

Ураховуючи гіпотезу плоских перерізів – технічної теорії згину, можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx}.$$

Функції переміщень у межах СЕ кожного стрижня безперервні, що дає можливість зобразити їх наближено – у формі поліноміальних апроксимацій.

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots \quad (8.6)$$

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \dots$$

Постає питання: скільки необхідно утримувати членів поліномів (8.6) для забезпечення вимог достовірності отриманих розв'язків. Кількість утримуваних членів апроксимуючих поліномів визначається порядком похідних у рівняння (8.5) і має бути кратним кількості вузлів СЕ. Виходячи з цього, маємо для $u(x)$ похідну першого степеня, а для $w(x)$ другого, тоді для $u(x)$ потрібно отримати в рівняннях (8.6) два члени полінома, а для $w(x)$ – чотири.

Розглянемо скінченний стрижневий елемент (рис.8.3). Ураховуючи невідомі узагальнені переміщення у вузлах, визначимо коефіцієнти використаних поліномів через ці вузлові переміщення, тоді як невідомими розв'язувальних рівнянь СЕ-моделі будуть тільки незалежні вузлові переміщення, а переміщення точок між вузлами залежатимуть від цих вузлових переміщень.

Для поздовжніх переміщень $u(x)$ остаточно маємо:

$$u(x) = c_1 + c_2x. \quad (8.7)$$

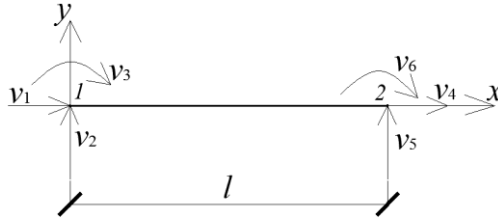


Рис. 8.3. Схема вузлових переміщень стрижневого СЕ

Виходячи з граничних умов і записуючи поліном (8.7) для вузлів 1 і 2, отримуємо два рівняння з невідомими c_1 і c_2 . Розв'язуючи їх, отримуємо:

$$\begin{cases} u \llcorner \rceil_1 = c_1 = v_1; \\ u \llcorner \rceil_2 = c_1 + c_2 l = v_4. \end{cases}$$

(8.8)

Підставивши перше рівняння системи (8.8) в друге, дістанемо:

$$v_1 + c_2 l = v_4; \quad c_2 = \llcorner \rceil_4 - v_1 \frac{1}{l}.$$

Підставляємо значення коефіцієнтів c_1 і c_2 у вираз (8.7). Маємо:

$$u \llcorner \rceil_x = v_1 + \llcorner \rceil_4 - v_1 \frac{1}{l} x = \left(1 - \frac{x}{l}\right) v_1 + \frac{x}{l} v_4.$$

Коефіцієнти при вузлових переміщеннях v_1 , v_4 назовемо *функціями форми*:

$$\Phi_1 \llcorner \rceil_x = 1 - \frac{x}{l}; \quad \Phi_4 \llcorner \rceil_x = \frac{x}{l}.$$

(8.9)

З урахуванням рівняння (8.9) поліном (8.7) має вигляд

$$u \llcorner \rceil_x = \Phi_1 \llcorner \rceil_1 + \Phi_4 \llcorner \rceil_4.$$

(8.10)

Для прогину $w \llcorner \rceil_x$, ураховуючи вимоги до порядку похідної для цієї функції в (8.5) і кратність членів полінома кількості вузлів у СЕ, дістаємо:

$$\omega \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (8.11)$$

Для визначення коефіцієнтів полінома (8.11) виконаємо дії аналогічно поліному (8.7).

Із граничних умов отримуємо:

$$\begin{aligned} & - \text{для переміщень } \omega \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} \\ & \begin{cases} \omega \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} = \alpha_1 = v_2; \\ \omega \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; \end{cases} \end{aligned} \quad (8.12)$$

- для кутів повороту $\varphi \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft}$

$$\begin{aligned} \varphi \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} &= \frac{d\omega \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft}}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2; \\ & \begin{cases} \varphi \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} = \alpha_2 = v_3; \\ \varphi \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6. \end{cases} \end{aligned}$$

(8.13)

Остаточо маємо систему, яка складається із чотирьох рівнянь систем (8.12), (8.13) і чотирьох невідомих

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_2; \\ \alpha_2 = v_3; \\ \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6. \end{cases}$$

(8.14)

Підставляючи перше і друге рівняння системи (8.14) у третє і четверте рівняння, дістаємо

$$\begin{cases} v_2 + v_3 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; \\ v_3 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6. \end{cases}$$

(8.15)

Після деяких перетворень у формулах (8.15) отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5 - v_2 - v_3 l; \\ \alpha_3 2l + \alpha_4 3l^2 = v_6 - v_3; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{cases} \alpha_3 2l^2 + \alpha_4 2l^3 = 2v_5 - 2v_2 - 2v_3 l; \\ \alpha_3 2l^2 + \alpha_4 3l^3 = lv_6 - lv_3; \end{cases} \\
& - \alpha_4 l^3 = 2v_5 - 2v_2 - 2lv_3 - lv_6 + lv_3; \\
& - \alpha_4 l^3 = -2v_2 - lv_3 + 2v_5 - lv_6; \\
& \alpha_4 = \frac{2v_2 + lv_3 - 2v_5 + lv_6}{l^3}. \tag{8.16}
\end{aligned}$$

Підставимо рівняння (8.16) в перше рівняння (8.15):

$$\begin{aligned}
\alpha_3 l^2 &= v_5 - v_2 - lv_3 - 2v_2 - lv_3 + 2v_5 - lv_6; \\
\alpha_3 &= \frac{-3v_2 - 2lv_3 + 3v_5 - lv_6}{l^2}
\end{aligned}$$

Значення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ підставимо у вираз (8.11):

$$\begin{aligned}
\omega \left(\overline{\leftarrow} \right) &= v_2 + v_3 x + \frac{1}{l^2} \left(\overleftarrow{3v_2 - 2lv_3 + 3v_5 - lv_6} \right) x^2 + \\
&+ \frac{1}{l^3} \left(\overleftarrow{v_2 + lv_3 - 2v_5 + lv_6} \right) x^3.
\end{aligned}$$

(8.17)

Згрупуємо всі члени (8.17) відповідно до v_2, v_3, v_5, v_6 :

$$\begin{aligned}
\omega \left(\overline{\leftarrow} \right) &= \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) v_2 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) v_3 + \\
&+ \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) v_5 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) v_6
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\omega \left(\overline{\leftarrow} \right) &= \frac{1}{l^3} \left(\overleftarrow{x^3 - 3lx^2 + l^3} \right) v_2 + \frac{1}{l^2} \left(\overleftarrow{3 - 2lx^2 + l^2 x} \right) v_3 + \\
&+ \frac{1}{l^3} \left(\overleftarrow{2x^3 + 3lx^2} \right) v_5 + \frac{1}{l^2} \left(\overleftarrow{3 - lx^2} \right) v_6.
\end{aligned}$$

Множники з v_2, v_3, v_5, v_6 позначимо як функції форми відповідно $\Phi_2 \left(\overline{\leftarrow} \right), \Phi_3 \left(\overline{\leftarrow} \right), \Phi_5 \left(\overline{\leftarrow} \right), \Phi_6 \left(\overline{\leftarrow} \right)$:

$$\Phi_2 \left(\overline{\leftarrow} \right) = \frac{1}{l^3} \left(\overleftarrow{x^3 - 3lx^2 + l^3} \right);$$

$$\Psi_3 \left(\xi \right) = \frac{1}{l^2} \left(\xi^3 - 2l\xi^2 + l^2\xi \right);$$

(8.18)

$$\Phi_5 \left(\xi \right) = \frac{1}{l^3} \left(2x^3 + 3lx^2 \right);$$

$$\Phi_6 \left(\xi \right) = \frac{1}{l^2} \left(\xi^3 - lx^2 \right);$$

Функції форми переміщень (8.9), (8.18) відносно змінної координати осі стрижня x змінюються у межах $l-0$, а функції $\varphi \left(\xi \right)$ у межах $\pm \frac{1}{8} \dots 0$. Функції (8.9) лінійні, а функції (8.18) – кубічні.

Сума функцій форми $u \left(\xi \right)$ і $\omega \left(\xi \right)$ у будь-якому перерізі дорівнюють одиниці – це умова повноти апроксимуючих поліномів.

Із використанням наведених поліноміальних апроксимацій узагальнених переміщень $u \left(\xi \right)$ і $\omega \left(\xi \right)$ отримуємо:

$$\omega \left(\xi \right) = \Psi_2 \left(\xi \right) \gamma_2 + \Psi_3 \left(\xi \right) \gamma_3 + \Psi_5 \left(\xi \right) \gamma_5 + \Psi_6 \left(\xi \right) \gamma_6. \quad (8.19)$$

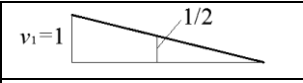
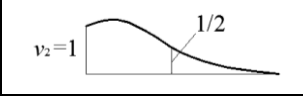
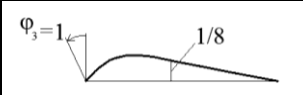
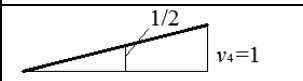
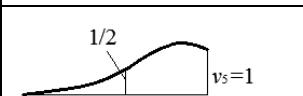
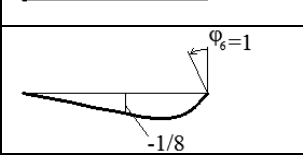
Подання у формі (8.10) і (8.19) дозволяє виразити узагальнений вектор переміщень, а також тензори деформацій і напружень у матрично-векторній формі:

$$\mathbf{u} \left(\xi \right) \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{U} \left(\xi \right) \begin{Bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & \Phi_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{s} \left(\xi \right) \mathbf{U} \left(\xi \right) \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \mathbf{P} \left(\xi \right) \mathbf{s} \left(\xi \right);$$

Таблиця 8.1

Функції форми СЕ стосовно поздовжніх переміщень

Π_1 	$\Pi_1 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$
Π_2 	$\Pi_2 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^3} \left(2 \frac{l^3}{8} - 3 \frac{l^2}{4} + l^3 \right) = \frac{1}{2}$
Π_3 	$\Pi_3 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{l^3}{8} - 2l \frac{l^2}{4} + \frac{l^3}{2} \right) = \frac{1}{8}l$
Π_4 	$\Pi_4 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Π_5 	$\Pi_5 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^3} \left(-2 \frac{l^3}{8} + 3l \frac{l^2}{4} \right) = \frac{1}{2}$
Π_6 	$\Pi_6 x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{l^3}{8} - l \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{1}{8}l$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} & 0 & \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & B_{26} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T;$$

(8.20)

$$\mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{v}$$

(8.21)

8.3. Побудова матриці жорсткості стрижневого СЕ у локальній та глобальній системах координат

Розглянемо варіацію енергії деформації СЕ у загальному вигляді (8.3) з використанням співвідношень (8.20), (8.21) і отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \int_e \delta \mathbf{v}^T \mathbf{e} dx = \int_e \delta \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{v} dx = \\ &= \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_e \mathbf{v}; \end{aligned}$$

де $\mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx$; $\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{v}$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix},$$

K_{ij} , i – направлення, у якому виникає реакція; j – напрямлення в'язі у вузлах від одиничного зміщення, у якій виникає реакція.

Якщо $\delta v_2 = 1$, тоді маємо (рис.8.4)

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{23} \\ B_{14} & 0 \\ 0 & B_{25} \\ 0 & B_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & B_{26} \end{bmatrix} dx =$$

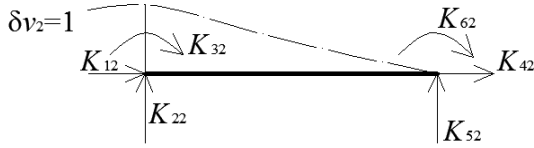


Рис. 8.4. Кінцеві реакції від дії одиничного кінцевого переміщення $\delta v_2 = 1$

$$= \int_0^l \begin{bmatrix} B_{11}B_{11}EA & 0 & 0 & B_{11}B_{14}EI & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}B_{22}EI & B_{22}B_{23}EI & 0 & B_{22}B_{25}EI & B_{22}B_{26}EI \\ 0 & B_{23}B_{22}EI & B_{23}B_{23}EI & 0 & B_{23}B_{25}EI & B_{23}B_{26}EI \\ B_{14}B_{11}EA & 0 & 0 & B_{14}B_{14}EI & 0 & 0 \\ 0 & B_{25}B_{22}EI & B_{25}B_{23}EI & 0 & B_{25}B_{25}EI & B_{25}B_{26}EI \\ 0 & B_{26}B_{22}EI & B_{26}B_{23}EI & 0 & B_{26}B_{25}EI & B_{26}B_{26}EI \end{bmatrix} \times dx. \quad (8.22)$$

Матриця (8.22) симетрична:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}.$$

Обчислимо деякі коефіцієнти матриці жорсткості SE в локальній системі координат (див. матрицю 8.22):

$$K_{11} = \int_0^l B_{11}^2 E A dx = \int_0^l \left(\frac{d\Phi_1}{dx} \right)^2 E A dx = \int_0^l \left(-\frac{1}{l} \right)^2 E A dx = \frac{EA}{l^2} x \Big|_0^l = \frac{EA}{l^2} l = \frac{EA}{l} = f;$$

$$K_{22} = \int_0^l B_{22}^2 E I dx = \int_0^l \left(\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \right)^2 E I dx = \int_0^l \frac{EI}{l^6} (2x - 6l)^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{EI}{l^6} \left(144 \frac{x^3}{3} - 144l \frac{x^2}{2} + 36l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^3} (8 - 72 + 36) = \\
&= \frac{12EI}{l^3} = \frac{12i}{l^2}, \quad i = \frac{EI}{l}; \\
K_{23} &= \int_0^l B_{11} B_{23} E l dx = \int_0^l \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \Phi_3}{dx^2} E l dx = \\
&= \int_0^l \frac{EI}{l^5} (2x - 6l)(x - 4l) dx = \frac{EI}{l^5} \int_0^l (2x^2 - 48lx - 36lx + 24l^2) dx = \\
&= \frac{EI}{l^5} \left(72 \frac{x^3}{3} - 84l \frac{x^2}{2} + 24l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^2} (4 - 42 + 24) = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6i}{l}; \\
K_{26} &= \int_0^l B_{22} B_{26} E l dx = \int_0^l \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \Phi_6}{dx^2} E l dx = \\
&= \int_0^l \frac{EI}{l^5} (2x - 6l)(x - 2l) dx = \frac{EI}{l^5} \int_0^l (2x^2 - 24lx - 36lx + 12l^2) dx = \\
&= \frac{EI}{l^5} \left(72 \cdot \frac{x^3}{3} - 60l \frac{x^2}{2} + 12l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^2} (4 - 30 + 12) = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6i}{l}.
\end{aligned}$$

Обчислюючи всі інтеграли в матриці (8.22) з урахуванням симетрії, отримуємо вираз для визначення компонентів матриці жорсткості SE в локальній системі координат:

$$\mathbf{K}_{\text{л.с.}} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}. \quad (8.23)$$

8.4. Визначення внутрішніх зусиль у стрижневих скінченних елементах

Для обчислення узагальнених (зведених) вузлових сил МСЕ потрібно визначити віртуальну роботу зовнішніх сил, які діють у СЕ, показаному на рис. 8.5, у додатному напрямі:

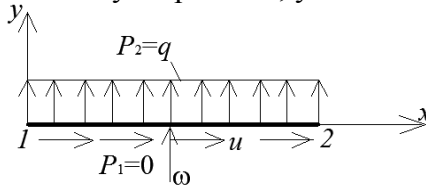


Рис. 8.5. Схема дії зведених вузлових сил у разі $P_2=q$

$$\delta \mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{I}^T \mathbf{A} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix};$$

$$\delta A = \int_0^l \delta \mathbf{A}^T \mathbf{A} dx = \int_0^l \delta \mathbf{A}^T \mathbf{I}^T \mathbf{A} dx =$$

$$= \int_0^l \delta \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \\ 0 & \Pi_3 \\ \Pi_4 & 0 \\ 0 & \Pi_5 \\ 0 & \Pi_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix} dx = \delta \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_2 q \\ \Pi_3 q \\ 0 \\ \Pi_5 q \\ \Pi_6 q \end{bmatrix} dx = \delta \mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix},$$

(8.24)

де \mathbf{A} – вектор зведених вузлових сил.

Наводимо обчислення компонент вектора \mathbf{A} , виконуючи інтегрування за x відповідних компонент матриці-стовпця $\mathbf{A}q$:

$$Q_1 = 0; \quad Q_4 = 0;$$

$$Q_2 = \int_0^l \Pi_2 q dx = \int_0^l \frac{1}{l^3} (x^3 - 3lx^2 + l^3) q dx =$$

$$= \frac{q}{l^3} \left(2 \frac{x^4}{4} - 3l \frac{x^3}{3} + l^3 x \right) \Big|_0^l = ql \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 \right) = \frac{ql}{2};$$

$$Q_3 = \int_0^l \Phi_3 \overleftarrow{q} dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} \left(x^3 - 2lx^2 + l^3 x \right) \overleftarrow{q} dx =$$

$$= \frac{q}{l^2} \left(\frac{x^4}{4} - 2l \frac{x^3}{3} + l^2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^l = \frac{ql^4}{l^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{ql^2}{12};$$

$$Q_5 = \int_0^l \Phi_5 \overleftarrow{q} dx = \int_0^l \frac{1}{l^3} \left(2x^3 + 3lx^2 \right) \overleftarrow{q} dx =$$

$$= \frac{q}{l^3} \left(-2 \frac{x^4}{4} + 3l \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = ql \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{ql}{2};$$

$$Q_6 = \int_0^l \Phi_6 \overleftarrow{q} dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} \left(x^3 - lx^2 \right) \overleftarrow{q} dx =$$

$$= \frac{q}{l^2} \left(\frac{x^4}{4} - l \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = ql^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{ql^2}{12}.$$

У результаті обчислення (8.24) отримуємо вектор зведених вузлових навантажень у наслідок дії зовнішнього вектора

$\overleftarrow{R} \overleftarrow{J} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ q \end{matrix} \right\}$ при додатному напрямі q (див. рис. 8.5):

$$\overleftarrow{R} \overleftarrow{J} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{ql}{2} \\ 2 \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ 2 \\ -\frac{ql^2}{12} \end{matrix} \right\}.$$

У разі дії рівномірно розподіленого навантаження за схемою, показаною на рис. 8.6, отримуємо значення компо-

нент вектора \mathcal{A} з протилежними знаками, тобто якщо

$$\mathcal{A} \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathcal{A} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix}.$$

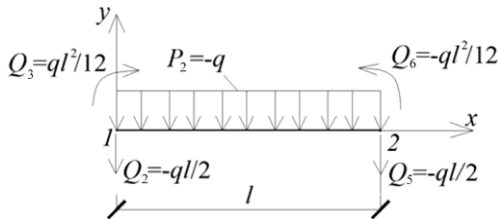


Рис. 8.6. Схема дії зведених вузлових сил у разі $P_2 = -q$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які аналітичні співвідношення є математичною основою МСЕ?
2. Що означає розв'язати задачу математичної фізики за допомогою варіаційного підходу?
3. Наведіть принцип можливих переміщень за формулюванням Бернуллі.
4. Наведіть і поясніть варіаційне рівняння Лагранжа.
5. Наведіть етапи розрахунку механічних систем за МСЕ.
6. Наведіть варіаційне рівняння питомої енергії деформації для стрижневого СЕ.
7. Що таке локальна і глобальна системи координат, які використовуються під час побудови основних співвідношень МСЕ?
8. Що називають функціями форми СЕ?

9. Які існують критерії вибору поліноміальних апроксимуючих функцій для відповідного типу СЕ?
10. Яку функцію у побудові основних співвідношень МСЕ вони виконують?
11. Які апроксимуючі функції використовуються при виведенні основних співвідношень МСЕ для плоских згинальних рам?
12. Скільки степенів свободи має основний тип стрижневого СЕ плоскої рами (з двома защемленнями). Наведіть співвідношення для узагальненого вектора переміщень у матрично-векторній формі.
13. Наведіть рівняння варіації енергії деформації стрижневого СЕ у загальному вигляді у матрично-векторній формі.
14. Наведіть співвідношення для матриці (стовпця) реакцій у матрично-векторній формі у локальній системі координат.
15. Наведіть співвідношення для матриці жорсткості стрижневого СЕ у локальній системі координат.

РОЗДІЛ 9

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

9.1. Вузлові характеристики дискретної моделі

Обчислення внутрішніх зусиль суцільного середовища безпосередньо пов'язано з місцевою (лагранжевою) системою координат [15; 23; 24]. Відповідно до дискретної стрижневої моделі цій місцевій системі відповідає система координат локальної під- області, тобто обчислення внутрішніх зусиль пов'язано зі CE і описується локальною системою координат, показаною на рис. 8.2 і 8.3 і залежною від вузлових узагальнених переміщень v_i $i = 1, 6$. Але систему рівнянь рівноваги CE -моделі доцільно сформувати у єдиній глобальній системі координат $Ox'y'$ відносно узагальнених вузлових переміщень усієї дискретної моделі плоскої стрижневої системи:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{D} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{k} \end{matrix} \right]^{-1} \left\{ \begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{F} \end{matrix} \right\}, \quad (9.1)$$

де $\left\{ \begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{D} \end{matrix} \right\}$ - загальний вектор переміщень для всієї CE -моделі з

регулярною топологією в глобальній системі координат (нумерація вузлів пропонується зліва направо і зверху вниз);

$\left[\begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{k} \end{matrix} \right]^{-1}$ - обернена матриця жорсткості всієї CE - моделі в

глобальній системі координат; $\left\{ \begin{matrix} \text{г.с.к} \\ \vec{F} \end{matrix} \right\}$ - вектор вузлового на-

вантаження всієї CE -моделі в глобальній системі координат.

Для розрахункової механічної плоскої стрижневої системи (рис. 9.1) отримаємо відповідну CE -модель, якій відпо-

відають схеми векторів узагальнених вузлових переміщень (рис. 9.2) і навантажень (рис. 9.3), а також коефіцієнти матриці жорсткості (рис. 9.4).

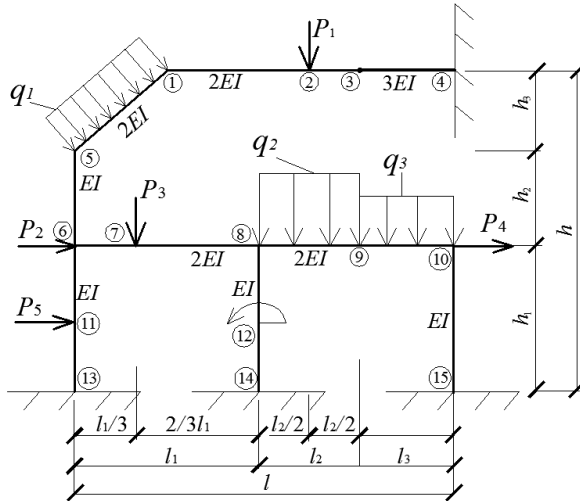


Рис. 9.1. Дискретна модель двоповерхової рами

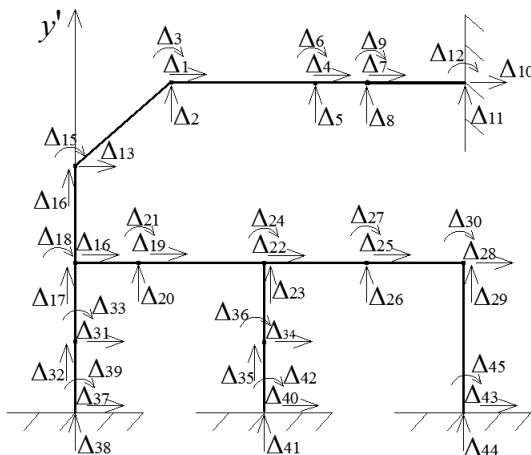


Рис.9.2. Схеми векторів узагальнених вузлових переміщень

Використовуючи матрицю інциденції, побудова якої залежить від типу топологічної схеми конкретної СЕ-моделі, і умови нерозривності деформацій у вузлах дискретної моделі досліджуваної механічної системи, можна обчислити після розв'язання рівнянь рівноваги (9.1) вузлові переміщення конкретного СЕ:

$$\begin{Bmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{\mathbf{C}} \end{Bmatrix} = \mathbf{I}_{CE} \begin{Bmatrix} \Delta_{CE} \\ \mathbf{C}_{CE} \end{Bmatrix},$$

(9.2)

Усі векторно-матричні (тензорні) величини при переході від старої системи координат до нової підпорядковані перетворенню як тензорні величини за певним законом (як коваріантні або контраваріантні компоненти). При цьому тензори перетворень визначаються диференціюванням радіуса-вектора матеріальних

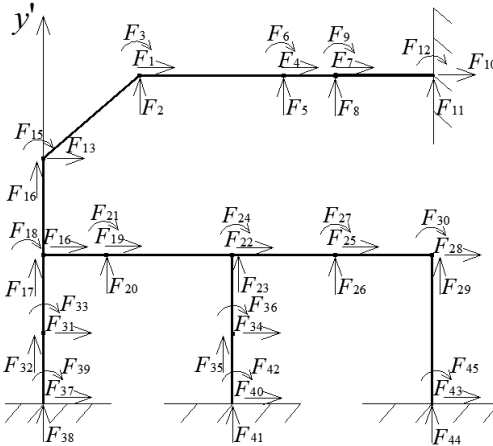


Рис. 9.3. Схеми векторів узагальнених вузлових навантажень

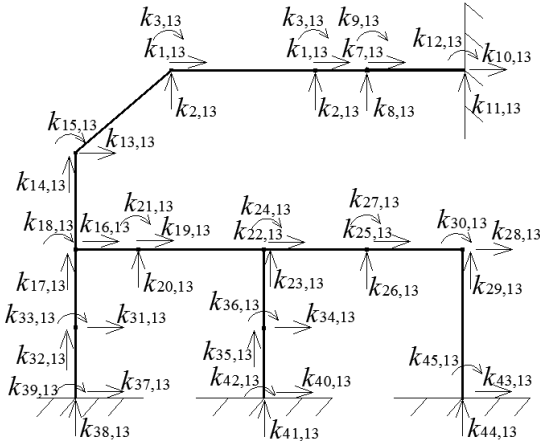


Рис. 9.4. Схеми коефіцієнтів матриці жорсткості

точок суцільного середовища, які описані місцевою (лагранжевою) системою координат і пов'язані з твердим тілом. У цьому випадку місцева система координат Ox і глобальна система координат $O'x'y'$ є декартовими системами координат, тому перехід від старої системи $O'x'y'$ до нової системи координат Ox виконується за законом ортогонального перетворення з використанням ортогонального прямого тензора перетворення \hat{T} (перехід в оберненому напрямі – від Ox до $O'x'y'$ – здійснюється за оберненим тензором перетворення $\hat{T}^{-1} \equiv \hat{T}^*$). Оскільки вибраний стрижневий СЕ має шість степенів свободи, то з використанням відомого ортогонального тензора перетворень (прямого) [15] маємо:

$$\hat{T} = T_{j'}^i \vec{e}_i \vec{e}^{j'}$$

$$\Phi_1' = \cos \alpha; \quad \Phi_2' = \sin \alpha; \quad \Phi_3' = -\sin \alpha;$$

$$\Phi_2'' = \cos \alpha; \quad \Phi_3'' = \Phi_3' = \Phi_1'' = \Phi_2'' = 0; \quad \Phi_3'' = 1.$$

Побудуємо пряму і обернену матриці ортогонального перетворення матрично-векторних величин у шестивимірно-

му просторі локального скінченно-елементного півпростору (див. рис. 8.3):

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$$

Схему переходу від системи координат $O'x'y'$ до системи Oxy (через поворот проти годинникової стрілки осі $O'x'$ до зміщення з віссю Ox) показано на рис. 9.5. Під час перетворення у кожному СЕ початок глобальної системи координат умовно зміщується з початком відповідної локальної системи координат.

Таким чином, якщо за допомогою матриці інциденції обчислений вектор вузлових переміщень СЕ $\tilde{\Delta}_i$, $i=1,6$ відповідно до виразу (9.2), то за законом перетворення коваріантного тензора (рис. 9.3) можна визначити вектор вузлових узагальнених переміщень \tilde{u}_i у локальній системі координат за формулою

$$\left\{ \begin{matrix} \text{л.с.} \\ u \end{matrix} \right\}_i = \mathbf{P}^{-1} \tilde{\Delta}_i$$

(9.3)

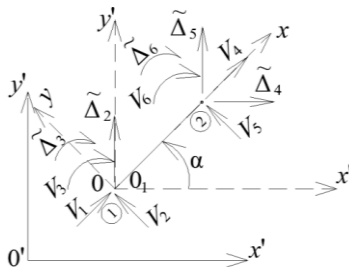


Рис. 9.5. Схема перетворення від глобальної до локальної системи координат

9.2. Визначення векторів реакцій і матриці жорсткості дискретної моделі рами

Згідно з виразом варіації енергії деформації і віртуальної роботи для СЕ див формули (8.5), (8.24) можна отримати такі основні матрично-векторні співвідношення для стрижневого СЕ:

$$\delta U_{\text{СЕ}} = \delta \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \vec{K}_{\text{СЕ}} \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}}; \quad (9.4)$$

$$\delta U_{\text{СЕ}} = \delta \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \vec{R}_{\text{СЕ}}; \quad (9.5)$$

де $\vec{R}_{\text{СЕ}}$ – матриця-стовпець реакцій внутрішніх сил у СЕ.

Підставимо послідовно вираз (9.3) у рівняння (9.4) і (9.5) і отримаємо:

- матрицю жорсткості СЕ у глобальній системі координат для обчислення переміщень

$$\delta U_{\text{СЕ}} = \delta \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \Phi_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \left[\vec{D}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \right] \left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \right] \Phi_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} = \delta \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \right] \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}}$$

де $\left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \right] = \Phi_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \right] \Phi_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}}$ (9.6)

$\left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{г.с.к}} \right]$ – матрицю жорсткості СЕ у глобальній системі координат

для обчислення реакцій у локальній системі координат СЕ:

$$\vec{R}_{\text{СЕ}} = \left[\vec{K}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \right] \Phi_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} = \vec{R}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \vec{u}_{\text{СЕ}}^{\text{л.с.}} \quad (9.7)$$

де
$$\bar{F}_O = \begin{bmatrix} \text{л.с.} \\ \bar{K} \end{bmatrix} \bar{P}_C.$$

(9.8)

Вектор вузлових реакцій R_O у локальній системі координат СЕ зумовлений тільки отриманими після розв'язання системи рівнянь (9.1) узагальненими переміщеннями вузлів дискретної моделі, а для визначення внутрішніх зусиль у міжвузловому просторі кожного окремого СЕ СЕ-моделі і побудови відповідних епюр треба ще враховувати у вузлах СЕ вектор від міжвузлового навантаження (згідно з основною системою МСЕ у формі переміщень). Остаточню можна визначити для окремого СЕ сумарний вектор вузлових реакцій у СЕ:

$$R_O = R_O^A + R_O^B,$$

де R_O^A – вектор реакцій від отриманих значень вузлових переміщень СЕ-моделі як для основної системи МСЕ – аналога основної системи методу переміщень; R_O^B – вектор реакцій від вузлового навантаження.

Для рівномірного розподіленого навантаження маємо такі реакції (зумовлені внутрішніми силами): згинальні моменти і поперечні сили на рухомих защемленнях – кінців стрижневого СЕ (рис. 9.6):

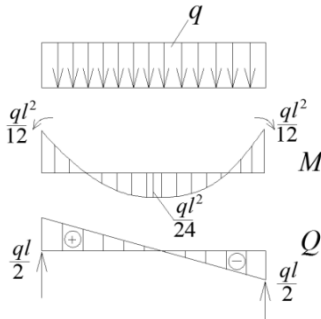


Рис. 9.6. Епюри внутрішніх зусиль від рівномірно розподіленого навантаження

$$R_i^{\leftarrow k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix}. \quad (9.9)$$

Додатні знаки векторів реакцій $R_i^{\leftarrow k}$ і $R_i^{\rightarrow k}$ (на математичному рівні) збігаються з додатними напрямками вектора вузлових узагальнених переміщень стрижневого СЕ (рис. 9.6).

Якщо $R_i^{\leftarrow k} < 0$ після виконання операцій за формулами (9.7), (9.8), то при додаванні реакцій на фізичному рівні напрямки реакцій $R_i^{\leftarrow k}$, що зображені на рис. 9.6, потрібно замінити на протилежні.

Після визначення компонент сумарного вектора вузлових реакцій $S_i^{\leftarrow k}$ необхідно розробити фізичну схему з урахуванням додатного математичного знака, а потім на цій схемі розставити знаки, які відповідають знакам внутрішніх зусиль M , Q , N на кожному кінці СЕ-стрижня.

Наприклад, якщо сумарні компоненти вектора $S_i^{\leftarrow k}$ будуть мати додатний знак, то маємо схему, на якій показано $S_i^{\leftarrow k}$ і відповідні знаки M , Q , N :

Якщо $S_i^{\leftarrow k} < 0$, то знаки відповідних $M^{\leftarrow k}$, $Q^{\leftarrow k}$, $N^{\leftarrow k}$ будуть протилежними. Згинальний момент у середньому перерізі СЕ-стрижня визначаємо за формулою

$$M_{\text{сеп}}^{\text{пр}} = -M^k + Q^k \frac{l}{2} - \left(\frac{ql}{2}\right) \frac{l}{4}.$$

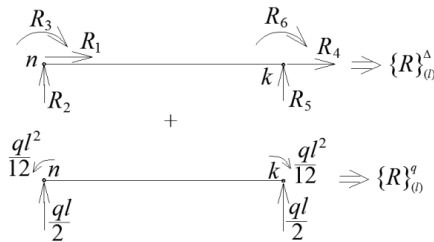


Рис. 9.7.

Приклад обчислення внутрішніх зусиль із міжвузловим рівномірно розподіленим навантаженням: після обчислення системи рівнянь і врахування матриці інциденції маємо, наприклад, для стрижня 2–3, такі значення компонент вектора узагальнених переміщень:

$$\mathbf{R}_{23} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,2 \\ -0,7 \\ 0,55 \\ -0,22 \\ 0,6 \end{Bmatrix}.$$

Обчислюємо з урахуванням виразу (9.8) за формулою (9.7) значення компонент вектора реакцій для стрижня 2–3:

$$R_1^{2-3} = f \cdot 0,5 - f \cdot 0,55 = -f \cdot 0,05 = -50 \cdot 0,05 = -2,5 \text{ кН};$$

$$R_2^{2-3} = -\frac{12i}{l^2} - \frac{6i}{l} 0,7 + \frac{12i}{l^2} 0,22 - \frac{6i}{l} 0,6 = -0,97 \text{ кНм};$$

$$R_3^{2-3} = \frac{6i}{l} 0,2 + 4i \cdot 0,7 - \frac{6i}{l} 0,22 + 2i \cdot 0,6 = 1,985 \text{ кНм};$$

$$R_4^{2-3} = -f \cdot 0,5 + f \cdot 0,55 = 50 \cdot 0,05 = 2,5 \text{ кН};$$

$$R_5^{2-3} = -\frac{12i}{l^2} 0,2 + \frac{6i}{l} 0,7 - \frac{12i}{l^2} 0,22 + \frac{6i}{l} 0,6 = 0,97 \text{ кНм};$$

$$R_6^{2-3} = -\frac{6i}{l}0,2 + 2i \cdot 0,7 - \frac{6i}{l}0,22 + 4i \cdot 0,6 = 1,885 \text{ кНм.}$$

Остаточо отримуємо вектор $R_{2,3}^{\bar{N}}$:

$$R_{2,3}^{\bar{N}} = \begin{Bmatrix} -2,5 \\ -0,97 \\ 1,985 \\ 2,5 \\ 0,97 \\ 1,885 \end{Bmatrix}.$$

За інтенсивності міжвузлового навантаження $q = 3 \text{ кН/м}$ і довжині стрижня 2–3 $l = 4,0 \text{ м}$ згідно з вектором (9.9) маємо:

$$R_{2,3}^{\bar{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,0 \\ -4,0 \\ 0 \\ 6,0 \\ 4,0 \end{Bmatrix}.$$

Сумарний вектор вузлових реакцій відповідно до рівняння (9.8) набуде вигляду

$$R_{2,3}^{\bar{R}} = \begin{Bmatrix} -2,5 \\ 5,03 \\ -2,015 \\ 2,5 \\ 6,97 \\ 5,885 \end{Bmatrix}. \quad (9.10)$$

9.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль для стрижневих скінченних елементів

Відтворюємо фізичну схему дії внутрішніх сил стрижня 2–3 з урахуванням вектора (9.10) і схеми, показаної на рис. 9.8 і 9.9.

Обчислюємо згинальний момент у середньому перерізі стрижня 2–3:

$$M_{\text{сер}}^{\text{np}} = -5,885 + 6,97 \cdot 2,0 - \frac{3}{2} \cdot 4 = 2,055 \text{ кНм};$$

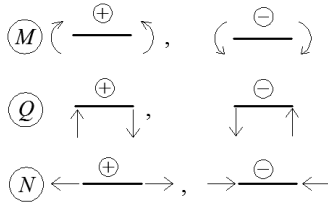


Рис. 9.8. Правило знаків для епюр внутрішніх зусиль

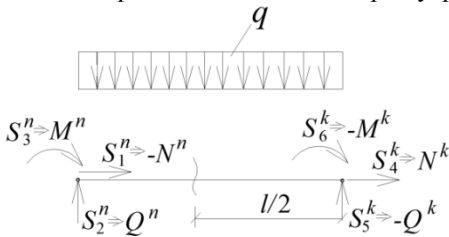


Рис. 9.9. Схема векторів вузлових реакцій

$$Q_{\text{сер}}^{2-3} = Q_2^{\text{сер}} + Q_3^{\text{сер}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5,03 - 6,97}{2} = -0,97 \text{ кН};$$

$$N_{\text{сер}}^{2-3} = 0,5 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ кН}.$$

Із використанням отриманих значень внутрішніх зусиль у стрижні 2–3 (рис. 9.10) побудуємо епюри M , Q , N (рис. 9.11).

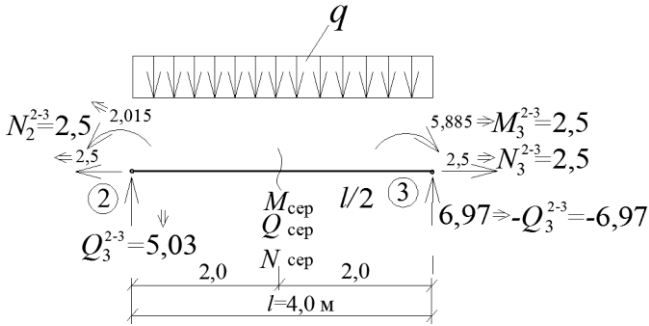


Рис. 9.10. Схема для визначення внутрішні зусилля у стрижні 2–3

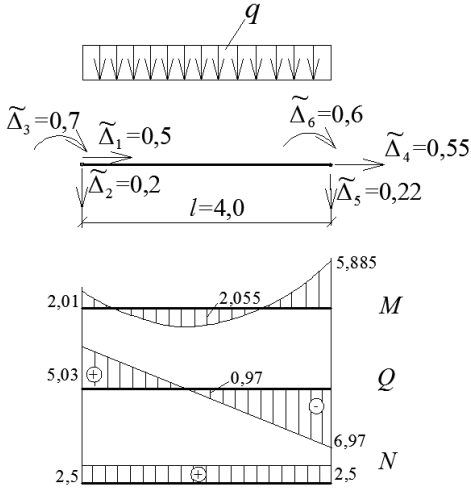


Рис. 9.11. Епюри внутрішніх зусиль у стрижні 2–3

9.4. Приклад розрахунку плоскої рами за методом скінченних елементів

Вихідні дані: погонна жорсткість стрижня при згині; розтягу–стиску:

- стоек – $EI = 1$; $EA = 100$; $f = \frac{EA}{l}$;

- ригель – $EI = 2$; $EA = 200$; $i = \frac{EA}{l}$.

Геометричні розміри та схема навантаження показано на рис. 9.12.

Схему узагальнених переміщень у глобальній системі координат зображено на рис. 9.13.

Схему узагальненого вектора вузлових навантажень дискретної моделі рами – на рис. 9.14.

Вектор вузлових навантажень, тобто обчислення компонент вектора $\{F\}$, будемо з урахуванням сполучення суміжних стрижневих елементів. Розглянемо кожний елемент окремо.

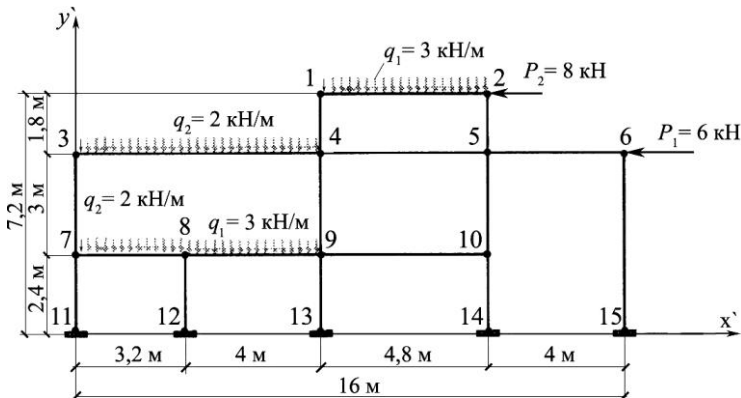


Рис. 9.12. Дискретна модель стрижневої системи

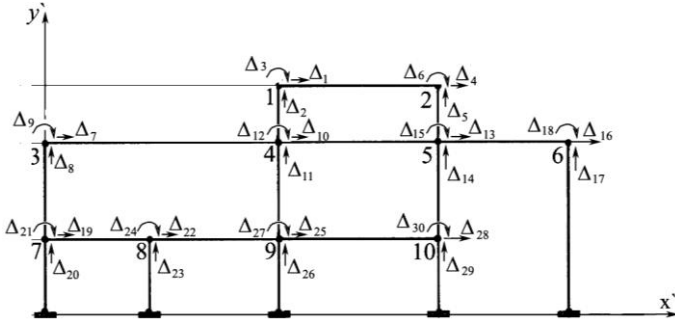


Рис. 9.13. Схема узагальнених переміщень у глобальній системі координат

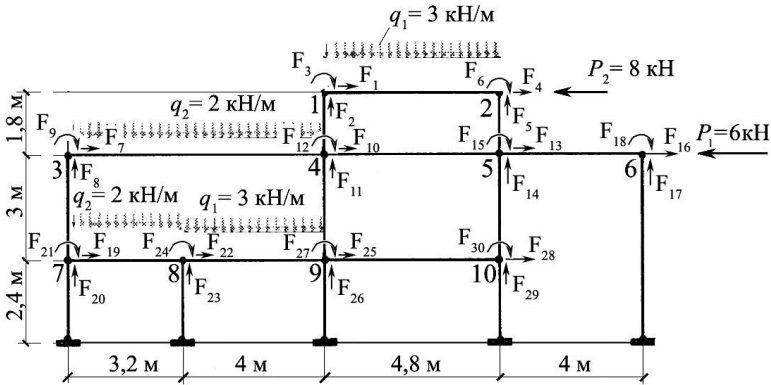
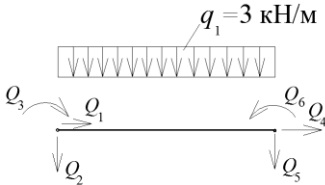


Рис. 9.14. Схема узагальненого вектора вузлових навантажень

1. Стрижень 1 – 2:

$$F_1 = Q_1 = 0;$$



$$F_2 = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4,8}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

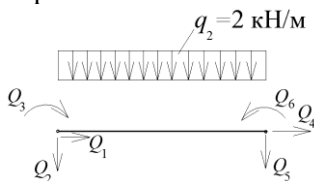
$$F_3 = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{3 \cdot 4,8^2}{12} = 5,76 \text{ кНм};$$

$$F_4 = Q_4 = -P_2 = -8 \text{ кН};$$

$$F_5 = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4,8}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

$$F_6 = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3 \cdot 4,8^2}{12} = -5,76 \text{ кНм}.$$

2. Стрижень 3 – 4:



$$F_7 = Q_1 = 0; \quad F_8 = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 7,2}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

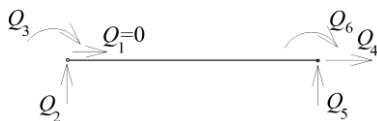
$$F_9 = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{2 \cdot 7,2^2}{12} = 8,64 \text{ кНм};$$

$$F_{10} = Q_4 = 0 \text{ кН};$$

$$F_{11} = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 7,2}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

$$F_{12} = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2 \cdot 7,2^2}{12} = -8,64 \text{ кНм}.$$

3. Стрижень 5 – 6:



$$F_{13} = Q_1 = 0;$$

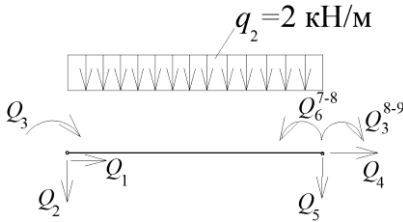
$$F_{14} = Q_2 = 0;$$

$$F_{15} = Q_3 = 0;$$

$$F_{16} = Q_4 = -P = -6 \text{ кН};$$

$$F_{17} = Q_5 = 0; \quad F_{18} = Q_6 = 0; \quad F_{19} = Q_1 = 0;$$

4. Стрижень 7 – 8:



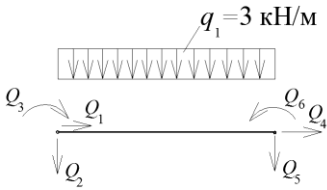
$$F_{20} = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 3,2}{2} = -3,2 \text{ кН};$$

$$F_{21} = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = -\frac{2 \cdot 3,2^2}{12} = 1,71 \text{ кНм}; \quad F_{22} = Q_4 = 0;$$

$$F_{23} = -Q_5^{7-8} - Q_2^{8-9} = -\frac{q_2 l}{2} - \frac{q_1 l}{2} = -\frac{2 \cdot 3,2}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = -3,2 - 6 = 9,2 \text{ кН};$$

$$F_{24} = -Q_6^{7-8} + Q_3^{8-9} = -\frac{q_2 l^2}{12} + \frac{q_1 l^2}{12} = -\frac{2 \cdot 3,2^2}{12} + \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 2,29 \text{ кН}.$$

5. Стрижень 8–9:



$$F_{25} = Q_4 = 0; \text{ кН};$$

$$F_{26} = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ кНм};$$

$$F_{27} = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ кН};$$

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ кНм}; \quad Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4 \text{ кНм}.$$

Позначимо коефіцієнти відповідно до схеми на рис. 9.15 через $k_{i,13}$, $i=1,30$.

Коефіцієнти матриці жорсткості при варіюванні переміщень у кожному рухомому затисненні дискретної моделі визначаємо за загальним шаблоном, показаним на рис. 9.16.

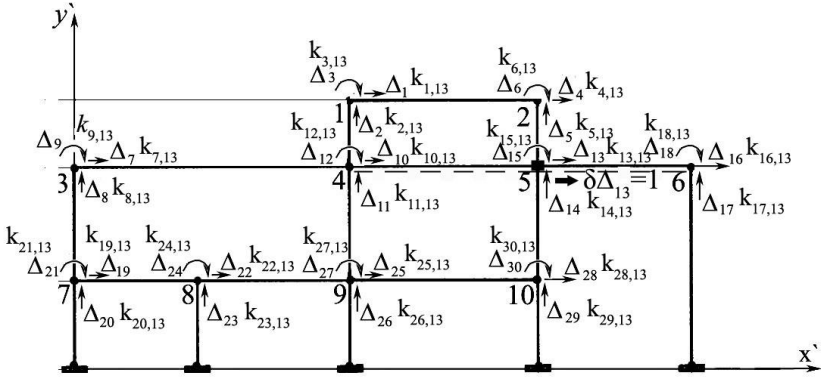


Рис. 9.15. Схема коефіцієнтів матриці жорсткості при варіюванні переміщень у кожному рухомому затисненні

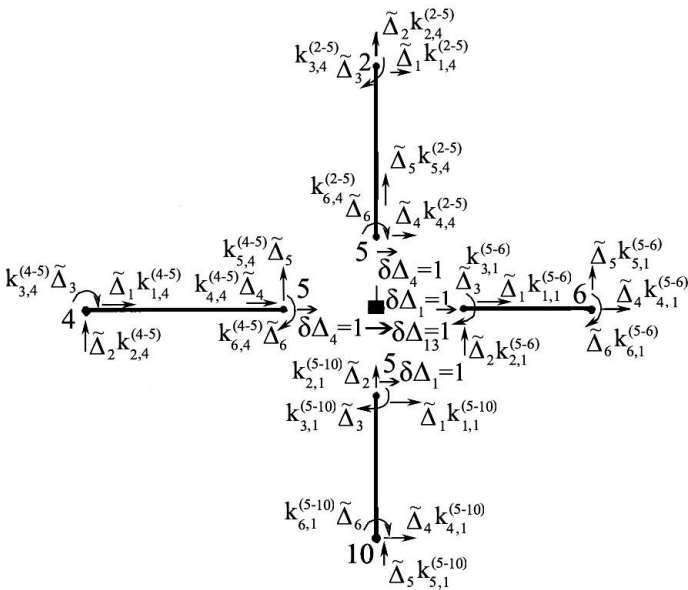


Рис. 9.16. Шаблон

Значення внесків у коефіцієнти матриці жорсткості в глобальній системі координат обчислюємо за формулою (9.6) з використанням виразу (8.23).

$$k_{1,13} = 0; \quad k_{2,13} = 0; \quad k_{3,13} = 0;$$

$$k_{4,13} = k_{1,4}^{\leftarrow-5} = -\left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right) = -\left(55,55 \cdot 0 + \frac{12 \cdot 0,55}{1,8^2} \cdot 1 \right) = -2,0576;$$

$$k_{5,13} = k_{2,4}^{\leftarrow-5} = -sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) = -1 \cdot 0 = 0;$$

$$k_{6,13} = k_{3,4}^{\leftarrow-5} = -\frac{6i}{l} s = -\frac{6 \cdot 0,555}{1,8} \left(1 \right) = 1,8518;$$

$$k_{7,13} = 0; \quad k_{8,13} = 0; \quad k_{9,13} = 0;$$

$$k_{10,13} = k_{1,4}^{\leftarrow-5} = -\left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right) = -41,667;$$

$$k_{11,13} = k_{2,4}^{\leftarrow-5} = -\left(f - \frac{12i}{l^2} \right) sc = 0; \quad k_{12,13} = k_{3,4}^{\leftarrow-5} = -\frac{6i}{l} s = -\frac{6i}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$k_{13,13} = k_{1,1}^{\leftarrow-6} + k_{4,4}^{\leftarrow-5} + k_{4,4}^{\leftarrow-5} + k_{1,1}^{\leftarrow-10} = \left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-6} +$$

$$+ \left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{2-5} + \left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{4-5} + \left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-10} = 94,1687;$$

$$k_{14,13} = k_{2,1}^{\leftarrow-6} + k_{5,4}^{\leftarrow-5} + k_{5,4}^{\leftarrow-5} + k_{2,1}^{\leftarrow-10} = sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-6} +$$

$$+ sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right)^{2-5} + sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right)^{4-5} + sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-10} = 0;$$

$$k_{15,13} = k_{3,1}^{\leftarrow-6} + k_{6,4}^{\leftarrow-5} + k_{6,4}^{\leftarrow-5} + k_{3,1}^{\leftarrow-10} = \left(\frac{6i}{l} s \right)^{5-6} +$$

$$+ \left(-\frac{6i}{l} s \right)^{2-5} + \left(-\frac{6i}{l} s \right)^{4-5} + \left(\frac{6i}{l} s \right)^{5-10} = 1,1852;$$

$$k_{16,13} = k_{4,1}^{\leftarrow-6} = -\left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-6} = -50;$$

$$k_{17,13} = k_{5,1}^{(-6)} = -sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-6} = 0;$$

$$k_{18,13} = k_{6,1}^{(-6)} = \left(\frac{6i}{l} s \right)^{5-6} = 0;$$

$$k_{19,13} = 0; \quad k_{20,13} = 0; \quad k_{21,13} = 0; \quad k_{22,13} = 0; \quad k_{23,13} = 0;$$

$$k_{24,13} = 0; \quad k_{25,13} = 0; \quad k_{26,13} = 0; \quad k_{27,13} = 0;$$

$$k_{28,13} = k_{4,1}^{(-10)} = - \left(fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right) = - \frac{12 \cdot 0,333}{3^2} \langle 1 \rangle = -0,4444;$$

$$k_{29,13} = k_{5,1}^{(-10)} = -sc \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) = 0;$$

$$k_{30,13} = k_{6,1}^{(-10)} = \left(\frac{6i}{l} s \right)^{5-10} = -0,6666.$$

Обчислені коефіцієнти матриці жорсткості СЕ-моделі у заданому (тринадцятому) стовпці зводимо до табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Коефіцієнти матриці жорсткості СЕ-моделі

Коефіцієнт 13 ст.	Значення	Коефіцієнт 13 ст.	Значення
$k_{1,13}$	0	$k_{16,13}$	-50
$k_{2,13}$	0	$k_{17,13}$	0
$k_{3,13}$	0	$k_{18,13}$	0
$k_{4,13}$	-2,0576	$k_{19,13}$	0
$k_{5,13}$	0	$k_{20,13}$	0
$k_{6,13}$	1,8518	$k_{21,13}$	0
$k_{7,13}$	0	$k_{22,13}$	0
$k_{8,13}$	0	$k_{23,13}$	0
$k_{9,13}$	0	$k_{24,13}$	0
$k_{10,13}$	-41,6666	$k_{25,13}$	0
$k_{11,13}$	0	$k_{26,13}$	0
$k_{12,13}$	0	$k_{27,13}$	0
$k_{13,13}$	94,1687	$k_{28,13}$	-0,44444
$k_{14,13}$	0	$k_{29,13}$	0
$k_{15,13}$	1,1852	$k_{30,13}$	-0,66666

Вузлові переміщення заданого СЕ обчислюємо за допомогою матриці інциденції і тензора ортогонального перетворення:

$$\begin{aligned} \bar{l}_i &= c_i^{k'} \bar{e}_{k'}; & \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C} \\ \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C}; & \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C} \\ \bar{l}_i &= c_i^{k'} \bar{e}_{k'}; & \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C} \\ \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C}; & \bar{A}_e &= \bar{A}_e \bar{C} \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{12} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_4 \\ \tilde{\Delta}_5 \\ \tilde{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -28,97499 \\ -1,32699 \\ 0,53785 \\ -29,10925 \\ -0,26295 \\ -4,4241875 \end{Bmatrix};$$

$$\bar{A}_{34} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_4 \\ \tilde{\Delta}_5 \\ \tilde{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22,2151 \\ -0,586001 \\ 1,105959 \\ -22,42686 \\ -1,16511 \\ -4,79266 \end{Bmatrix}.$$

Таблиця 9.2

Вузлові переміщення заданого СЕ

Номер	dx	dy	dF
1	-2,897499 +01	-1,326989	5,378529
2	-2,910925 +01	-2,629493	-4,424175
3	-2,22151 +1	-5,860012	1,105959
4	-2,242686 +1	-1,165111	-4,792665
5	-2,249395 +1	-1,656272	-1,627030
6	-2,258437 +1	1,08012	-1,1767590
7	-6,065397 +0	-3,432820	-3,049940

8	-6,004699 +0	-1,8807240	3,820350
9	-6,041035 +0	-6,122337	-2,368784

Визначаємо вектор реакцій у стрижні 1 – 2

$$R_{1-2} = \begin{bmatrix} R_{1-2}^x \\ R_{1-2}^y \end{bmatrix}$$

$$R_{1-2}^x = f_{1-2} \left(28,97499 \right) - f_{1-2} \left(29,10925 \right) = 5,5942 \text{ кН};$$

$$R_{1-2}^y = \frac{12i}{l^2} \left(1,326989 \right) - \frac{6i}{l} 0,53785 - \frac{12i}{l^2} \left(0,26295 \right) -$$

$$- \frac{6i}{l} \left(4,424175 \right) = 1,793 \text{ кН};$$

$$R_{1-2}^z = -\frac{6i}{l} \left(1,326989 \right) + 4i \cdot 0,53785 + \frac{6i}{l} \left(0,26295 \right) -$$

$$2i \left(4,42418 \right) = -2,23625 \text{ кНм};$$

$$R_{1-2}^x = -f \left(28,97499 \right) + f \left(29,10925 \right) = -5,5942 \text{ кН};$$

$$R_{1-2}^y = -\frac{12i}{l^2} \left(1,326989 \right) + \frac{6i}{l} 0,53785 + \frac{12i}{l^2} \left(0,26295 \right) -$$

$$+ \frac{6i}{l} \left(4,424175 \right) = -1,7932 \text{ кН};$$

$$R_{1-2}^z = -\frac{6i}{l} \left(1,326989 \right) + 2i \cdot 0,53785 + \frac{6i}{l} \left(0,26295 \right) -$$

$$+ 4i \left(4,42418 \right) = -6,373 \text{ кНм};$$

$$\text{Отримаємо: } R_{1-2} = \begin{Bmatrix} 5,594 \\ 1,793 \\ -2,23625 \\ -5,59417 \\ -1,7932 \\ -6,373 \end{Bmatrix}.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть приклад побудови дискретної моделі МСЕ (СЕ-моделі) для плоскої рами за різних видів навантажень і різних жорсткостей окремих стрижневих елементів.
2. Наведіть і поясніть спосіб обчислення узагальнених (зведених) вузлових сил від дії міжвузлового рівномірно розподіленого навантаження.
3. Наведіть систему розв'язувальних рівнянь СЕ-моделі у матрично-векторній формі у глобальній системі координат.
4. Що таке матриця інцидентії і для чого вона використовується? Наведіть рівняння з використанням цієї матриці.
5. Що таке тензор перетворення глобальної системи координат у локальну і навпаки? Поясніть процедури перенесення і повороту, системи координат.
6. Що означає обертальне перетворення матрично-векторних величин? Наведіть і поясніть матрицю ортогонального перетворення у шестивимірному просторі.
7. Поясніть перетворення від глобальної системи координат у локальну для похилого стрижневого елемента на прикладі вектора переміщень.
8. Наведіть вираз варіації СЕ з використанням вектора переміщень у глобальній системі координат.
9. Наведіть і поясніть вираз обчислення матриці жорсткості СЕ у глобальній системі координат.
10. Наведіть і поясніть вираз обчислення матриці реакції у глобальній системі координат.
11. Наведіть і поясніть вираз для обчислення сумарного вектора вузлових реакцій у СЕ.
12. Наведіть процедуру обчислення сумарного вектора вузлових реакцій і зведення його до фізичного стану з використанням внутрішніх зусиль M , Q , N .

РОЗДІЛ 10

РОЗРАХУНОК ПЛОСКОНАПРУЖЕНИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

10.1. Вихідні співвідношення плоскої задачі теорії пружності у матрично-векторній формі

Розглянемо приклад плоского напруженого стану конструкції у вигляді плосконапруженої пластинки (балки-стілки). Балку-стілку при навантаженні на дві грані у вигляді функцій $q_1 \in C_2$, $q_2 \in C_1$ зображено на рис. 10.1. Для визначення НДС балки-стілки необхідно розв'язати плоску задачу теорії пружності – плоский напружений стан, при цьому маємо [25]:

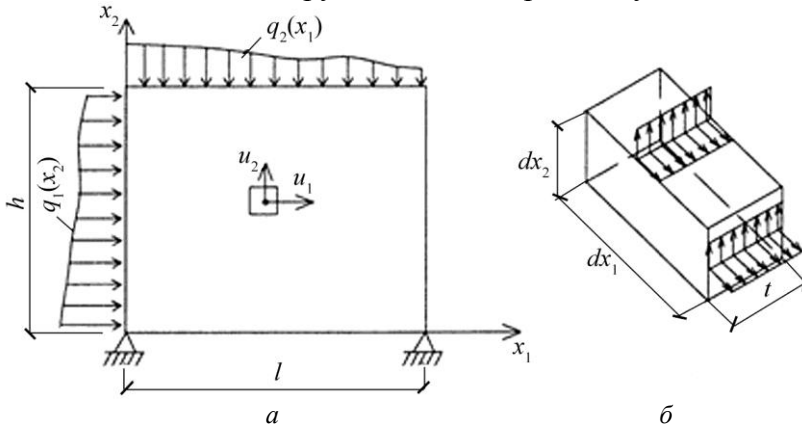


Рис. 10.1. Схема навантаження балки-стілки: а – зовнішніми силами; б – плоский напружений стан в елементарному околі

- диференціальні рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + R_1 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + R_2 = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

або у векторній формі

$$\mathbf{D}^T \mathbf{d} + \mathbf{R} = 0,$$

де

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x_2} & \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x_1} \end{bmatrix} \text{ – матриця диференціювання;}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \text{ – вектор напружень } \langle \sigma_{12} = \tau_{21} \rangle;$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \text{ – вектор об'ємних сил.}$$

Для розв'язання задачі у переміщеннях, що описуються вектором $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ (рис. 10.1), залучаємо, крім рівнянь рівноваги (10.1), геометричні рівняння Коші та фізичні рівняння на основі узагальненого закону Гука:

- геометричні рівняння

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \quad (10.2)$$

- фізичні рівняння у першій формі

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22}; & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11}; & \gamma_{21} &= \gamma_{12}; \end{aligned} \quad (10.3)$$

- фізичні рівняння у другій формі

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \langle \mu + \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} \rangle; \\ \sigma_{22} &= \lambda \varepsilon_{11} + \langle \mu + \lambda \varepsilon_{22} \rangle; & \tau_{12} &= \gamma_{12} G; \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \mu \equiv G. \quad (10.5)$$

Співвідношення (10.2) - (10.5) зручно записати у матрично-векторній формі

$$\mathbf{d} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{s}, \quad (10.6)$$

де

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \text{матриця пружностей}; \quad (10.7)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} - \text{вектор деформацій.} \quad (10.8)$$

10.2. Варіаційне рівняння Лагранжа для розв'язання задачі плосконапруженої пластинки

З використанням співвідношень (10.2) - (10.5) для розв'язання плоскої задачі теорії пружності можна скористатися варіаційним рівнянням Лагранжа [26]

$$\delta U - \delta A = 0, \quad (10.9)$$

де δU - варіація енергії деформації; δA - віртуальна робота зовнішніх сил.

Варіаційну енергію деформації, або віртуальну роботу внутрішніх сил для плосконапруженого стану, можна подати таким чином [26]:

$$\delta U = \int_v \sigma^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} dV. \quad (10.10)$$

Для плосконапруженого стану плити за постійної товщини вираз (10.10) набуває вигляду

$$\delta V = t \int_S \left(\sigma_{11} \delta \epsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \epsilon_{22} + 2\tau_{12} \delta \gamma_{12} \right) dS,$$

або у матрично-векторній формі з урахуванням рівнянь (10.6) - (10.8) маємо:

$$\delta V = t \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} dS. \quad (10.11)$$

Віртуальна робота зовнішніх сил у матрично-векторній формі має вигляд

$$\delta A = t \int_S \delta \mathbf{m}^T \mathbf{R} \mathbf{q} dS, \quad (10.12)$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} q_1 & \mathbf{e}_2 \\ q_2 & \mathbf{e}_1 \end{Bmatrix}$$

(10.13)

10.3. Побудова скінченноелементної моделі та типи скінченних елементів

Для розрахунку плосконапруженої плити, показаної на рис. 10.1, за допомогою методу СЕ, окрім варіаційних рівнянь (10.9) - (10.13), треба побудувати дискретну СЕ-модель за певною схемою МСЕ [25]. Побудуємо дискретну модель за допомогою трикутних СЕ з урахуванням навантаження тільки на верхній кромці балки-стілки, тоді СЕ-модель буде мати вигляд, зображений на рис. 10.2.

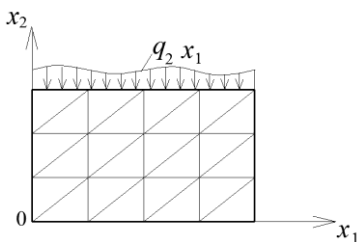


Рис. 10.2. Дискретна модель балки-стілки

Наведена дискретна модель включає два типи СЕ, залежно від орієнтації місцевої декартової системи координат Ox_1x_2 : 1) початок місцевої системи координат розміщений у вузлі з прямим кутом СЕ; 2) початок місцевої системи коор-

динат розміщений у правому непрямому (гострому) куті (рис. 10.3).

Функції переміщень у межах СЕ доцільно навести у вигляді степеневого полінома [26].

У кожній точці простору у плоскому трикутнику маємо два степені свободи, тобто два переміщення u_1, u_2 , вузлові переміщення позначимо через v_1, v_2, v_3, v_5, v_6 за годинниковою стрілкою відповідно у кутах 1, 2, 3 (рис. 10.4). Згідно з орієнтацією $0x_1x_2$ в СЕ першого типу маємо координати вузлів:

$$x_1^1 = 0; \quad x_1^2 = -h; \quad x_2^1 = l; \quad x_2^2 = 0; \quad x_3^1 = 0; \quad x_3^2 = 0 \quad (\text{рис. 10.4}).$$

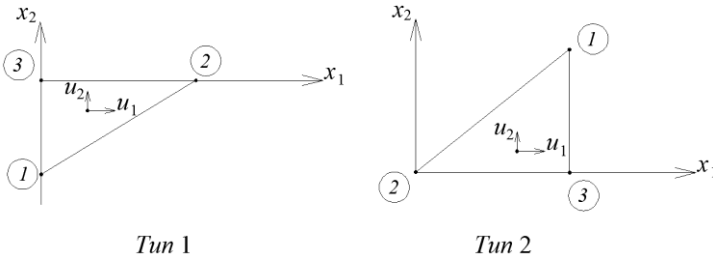


Рис. 10.3. Тип скінченних елементів СЕ-моделі балки-стінки

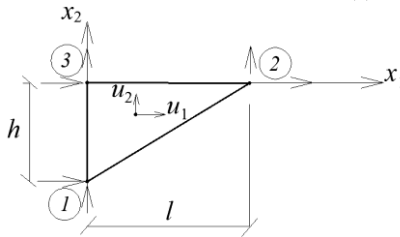


Рис. 10.4. Вузлові координати і переміщення СЕ-1

10.4. Апроксимація переміщень у просторі скінченного елемента та виведення функцій форми

Порядок степеневого полінома повинен бути не меншим ніж порядок похідної невідомої функції функціонала потенціальної енергії, водночас кількість членів полінома має бути кратною кількості вузлів. Таким чином, апроксимуюча полі-

номіальна функція може бути лінійною (три члени поліномів функцій переміщень) $u_1(x_1, x_2)$ або квадратичною (шість членів полінома). Оскільки похідна від функцій переміщень варіації функціонала першого степеня, то зупинимося на лінійному поліномі, тоді

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2. \quad (10.14)$$

Невідомі коефіцієнти полінома (10.14) визначаємо з граничних умов – тобто функції (10.14) дорівнюють вузловим переміщенням $u_\alpha(x_1, x_2)$. Маємо для функції (10.14) три рівняння з граничних умов:

$$\begin{cases} u_1(0, -h) = \alpha_1 - \alpha_3 h = v_1; \\ u_1(0, 0) = \alpha_1 - \alpha_2 l = v_3; \\ u_1(0, 0) = \alpha_1 = v_5. \end{cases} \quad (10.15)$$

Розв'язуючи систему (10.15), отримуємо:

$$\alpha_1 = v_5; \quad \alpha_2 = \frac{1}{l}(v_5 - v_3); \quad \alpha_3 = \frac{1}{h}(v_5 - v_1). \quad (10.16)$$

Підставимо вирази (10.16) у рівняння (10.14), після деяких перетворень дістаємо:

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{x_2}{h} v_1 + \frac{x_1}{l} v_3 + \left(1 + \frac{x_2}{h} + \frac{x_1}{l}\right) v_5.$$

Коефіцієнти при вузлових переміщеннях позначимо відповідно до номерів вузлових переміщень функціями $N_i, i = 1, 6$. Остаточно для функцій переміщень отримаємо такі апроксимуючі функції (функції N_i називають функціями форми відповідного СЕ) [25]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5; \\ u_2(x_1, x_2) &= N_2 v_2 + N_4 v_4 + N_6 v_6; \\ N_1 &= -\frac{x_2}{h}; \quad N_3 = \frac{x_1}{l}; \quad N_5 = 1 + \frac{x_2}{h} + \frac{x_1}{l}; \\ N_2 &= N_1; \quad N_4 = N_3; \quad N_6 = N_5. \end{aligned}$$

У матрично-векторній формі для вектора апроксимуючої функції запропонованих трикутних СЕ маємо:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad (10.16)$$

або

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5 \\ N_2 v_2 + N_4 v_4 + N_6 v_6 \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

10.5. Виведення співвідношень для побудови матриці жорсткості та узагальненого вектора навантажень для трикутного скінченного елемента

Ураховуючи співвідношення (10.6) - (10.8) і (10.16), (10.17), можна записати:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{N} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

Якщо позначити

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{N}$$

тоді:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_5}{\partial x_2} & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{\partial x_2} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до формули (10.6) для вектора напружень маємо

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}.$$

Остаточно отримаємо вираз для варіації енергії деформації для трикутного СЕ:

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{СЕ}} &= \int_S \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dS = \\ &= \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u} dS = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \end{aligned}$$

де $\mathbf{K}_{\text{СЕ}}$ – матриця жорсткості трикутного СЕ,

$$\mathbf{K}_{\text{СЕ}} = \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dS. \quad (10.33)$$

Для отримання узагальненого вектора вузлових навантажень потрібно всі зовнішні сили, діючі у межах СЕ, звести до вузлів за схемою, показаною на рис. 10.5, розглядаючи віртуальну роботу зовнішніх сил для відповідного СЕ:

$$\delta A_{\text{СЕ}} = \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx_1 = \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx_1 = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_{\text{СЕ}}$$

де

$$\mathbf{Q} = \int_l \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx_1$$

(10.18)

\mathbf{q} – вектор узагальнених вузлових навантажень від розподіленого навантаження у межах СЕ.

Ураховуючи формулу (10.18) для вектора \mathbf{Q} , можна записати:

$$\mathbf{Q} = \int_l \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} dx_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 q_2 \\ 0 \\ N_4 q_2 \\ 0 \\ N_6 q_2 \end{bmatrix} dx_1 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}.$$

(10.19)

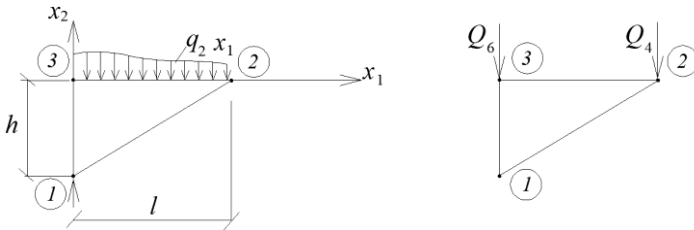


Рис. 10.5. Схема зведення розподіленого навантаження у межах СЕ до компонент вектора \mathbf{Q}

Відповідно до виразу (10.19), оскільки функція першої компоненти вектора розподіленого навантаження дорівнює нулю, маємо

$$Q_1 = Q_3 = Q_5 = 0.$$

Запишемо ненульові компоненти \mathbf{Q} у вигляді інтегралів по координаті x_1 у межах $0 - l$:

$$Q_2 = \int_l N_2 q_2 \langle \xi_1 \rangle dx_1 = \int_l -\frac{x_2}{h} q_2 \langle \xi_1 \rangle dx_1 = 0.$$

Координата x_2 у вузлі 1 дорівнює нулю, тому

$$Q_4 = \int_l N_4 q_2 \langle \xi_1 \rangle dx_1;$$

(10.20)

$$Q_6 = \int_l N_6 q_2 \langle \xi_1 \rangle dx_1.$$

(10.21)

Визначувані інтеграли (10.20), (10.21), у яких підінтегральною функцією є добуток функції форми $\left(N_4 = N_3 = \frac{x_1}{l} \right)$ і функції навантаження $q_2 \langle \xi_2 \rangle$, яку апроксимуємо лінійною функцією (рис. 10.5), можна обчислити за формулою Сімпсона. Таким чином, маємо дві лінійні функції

$$1) \quad N_4 = \frac{x_1}{l} \quad (\text{рис. 10.6});$$

$$2) \quad q_2 \langle \xi_1 \rangle = -\frac{q_3 - q_2}{l} x_1 + q_3,$$

де q_2, q_3 – значення функції $q_2 \langle \xi_1 \rangle$ у вузлах 2, 3, для якої епюра має вигляд (рис. 10.7)

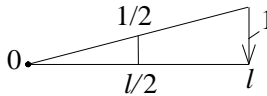


Рис. 10.6. Епюра функції $N_4 \langle \xi_1 \rangle$

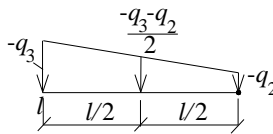


Рис. 10.7. Епюра функції $q_2 \langle \xi_1 \rangle$

Перемножуючи епюри N_4 і q_2 (рис. 10.6, 10.7), обчислюємо інтеграл (10.20) [15]

$$Q_4 = \frac{l}{6} \left(-q_3 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) - 1 \cdot q_2 \right) = \frac{l}{6} (q_3 - 2q_2)$$

$$Q_4 = -\frac{l}{6} (q_3 + 2q_2)$$

За аналогією для інтеграла (10.21) маємо дві функції:

$$1) \quad N_6 = N_5 = 1 + \frac{x_2}{h} - \frac{x_1}{l};$$

$$2) \quad -q_2 = -\frac{q_3 - q_2}{l} x_1 + q_3$$

і відповідні епюри (рис. 10.8)

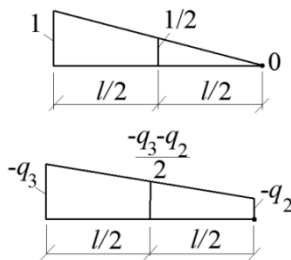


Рис. 10.8. Епюри підінтегральних функцій (10.21)

Перемножуючи епюри функцій, наведених на рис. 10.8, за правилом Сімпсона отримуємо визначуваний інтеграл (10.21):

$$Q_6 = \frac{l}{6} \left(1 \cdot (-q_3) - 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) - 0 \cdot q_2 \right) = \frac{l}{6} (q_3 - q_2 - q_3)$$

$$= -\frac{l}{6} (q_2 + 2q_3)$$

$$Q_6 = -\frac{l}{6} (q_3 + q_2)$$

10.6. Виведення рівнянь рівноваги дискретної моделі плосконапруженої пластинки з використанням трикутного скінченного елемента

Розглянемо приклад для конкретної дискретної моделі балки-стілки і побудуємо для цього прикладу матрицю жорсткості СЕ-моделі плосконапруженої пластинки. Для дискретної моделі на рис. 10.9 позначимо номери вузлів СЕ і вузлові невідомі переміщення у глобальній системі координат Ox_1Y_1 . Нумерацію вузлів виконуємо зліва направо, починаючи знизу [25].

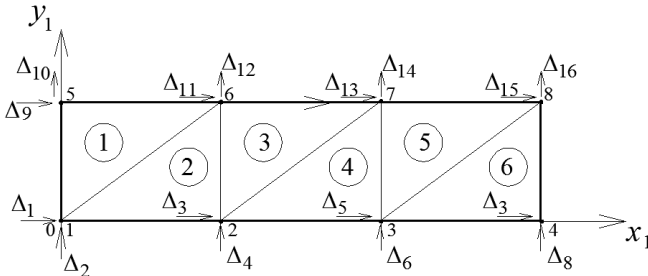


Рис. 10.9. Топологія СЕ-моделі плоско напруженої пластинки

Уводимо узагальнений вектор вузлових переміщень СЕ-моделі пластинки у глобальній системі координат (рис. 10.9):

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_3 \dots \mathbf{U}_{2n-1} \mathbf{U}_{2n}, \quad (10.22)$$

де n – загальна кількість вузлів СЕ-моделі.

Установлюємо відповідність векторів переміщень вузлів одного окремо взятого СЕ від узагальненого вектора \mathbf{U} всієї дискретної моделі:

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{U}, \quad (10.23)$$

де \mathbf{C}_e – матриця відповідності, або інциденції СЕ-моделі для відповідного СЕ e . Наведемо як приклад матрицю $\mathbf{C}_{e=3}$:

$$\begin{cases} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{16} \end{cases}. \quad (10.24)$$

Запишемо умови рівноваги плосконапруженої пластинки з використанням варіаційного рівняння Лагранжа та формул (10.22) - (10.24):

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A &= \sum_e \langle \mathbf{U}_e - \delta \mathbf{A}_e \rangle = \sum_e \langle \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{A}_e \rangle - \delta \langle \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e \rangle \\ &= \sum_e \langle \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e - \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e \rangle = \\ &= \delta \langle \mathbf{K}^* \mathbf{A} \rangle = 0, \end{aligned}$$

(10.25)

де

$$\mathbf{K}^* = \sum_e \mathbf{F}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{F}_e.$$

Із рівняння (10.25) урахувавши, що віртуальні переміщення вектора \mathbf{A} не можуть дорівнювати нулю, маємо рівняння рівноваги дискретної моделі

$$\mathbf{K}^* \mathbf{A} - \mathbf{A}^* = 0.$$

(10.26)

Вираз (10.26) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь рівноваги дискретної SE-моделі плоско-напруженої пластинки (балки-стілки).

Розв'язуючи систему рівнянь (10.26), помножимо ліву і праву частини рівняння на побудовану обернену матрицю жорсткості SE-моделі і отримаємо:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^*.$$

Маючи розв'язок у вигляді вектора переміщень у глобальній системі координат \mathbf{A} , обчислюємо вектори окремих

СЕ дискретної моделі і відповідні реакції в i -му вузлі СЕ-моделі, що сполучені з вузлами безпосередньо (за шаблоном) і обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \mathbf{K}_e \mathbf{U}_i \\ \mathbf{R}_i &= \sum_e \mathbf{K}_e^T \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

де \mathbf{K}_e^T - коефіцієнти матриць жорсткості СЕ, що сполучені з даними вузлами i .

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Поясніть суть понять: дійсна робота та можлива робота зовнішніх сил.
2. Дайте визначення понять: «можливі переміщення», «коефіцієнти піддатливості», «коефіцієнт жорсткості». Яка фізична суть цих понять? Наведіть одиниці їх вимірювання.
3. Дайте визначення потенціальної енергії деформації пружного тіла.
4. У чому полягають відмінності понять «диференціал функції» і «варіація функції»?
5. Запишіть у матричному вигляді статичні рівняння теорії пружності.
6. Запишіть у матричному вигляді геометричні рівняння теорії пружності у прямій і оберненій формах.
7. Запишіть формулу визначення внутрішніх сил континуальної плоско напруженої конструкції.
8. Сформулюйте варіаційний принцип Лагранжа.
9. Побудуйте дискретну модель плосконапруженої пластинки (балки-стілки). Поясніть типи СЕ і функції переміщень від двох переміщень.
10. Запишіть у матрично-векторній формі функцію вектора переміщень плосконапруженої пластинки.
11. Наведіть вираз матриці піддатливості трикутного СЕ.
12. Наведіть процедуру отримання вектора вузлових навантажень за нерівномірно розподіленого міжвузлового навантаження плосконапруженої пластинки.

13. Наведіть конкретну модель плосконапруженої пластинки і приклад визначення відповідності вектора переміщень вузлів одного СЕ від вектора узагальненого вектора переміщень СЕ-моделі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. –М.: Физматгиз, 1960. 282с.
2. *Голушкевич С.С.* Статика предельных состояний грунтовых масс/. –М.: Гостехиздат, 1957. -340с.
3. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем./ – М.: Гослитса и СМ, 1960. – 330с
4. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики грунтов. –М.: Изд-во по стр-ву, 1971. –320с.
5. *Цытович Н.А.* Механика грунтов./ –М.: ГИЛСАиСИ, 1963. –635с.
6. *Лившиц Я.Д.* Упражнения по строительной механике/. –К.:Гостехиздат, 1962. –336с.
7. *Лівшиць Я.Д.* Збірник вправ з будівельної механіки/. –К.: Держбудвидав УРСР, 1960. –280с.
8. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности/. –М.: «Вышш. шк.», 1970. –288с.
9. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем/. –М.: Наука, 1971. –552с.
10. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки./ – М.:Госиздат ФМ, 1963. –635с.
11. *Огибалов П.М.*, Оболочки и пластины. –М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. –695с.
12. *Дарков А.В.* Строительная механика. –М.: Высш. шк., 1986. –607с.
13. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. –К.: КНУБА, 2000. – 584 с.
14. *Снитко Н.К.* Строительная механика/ –М.: Высш. шк. 1972. –488с.
15. *Жемочкин Б.Н.* Расчет рам. –М.: Изд-во по стро-ву, 1965. –406с.
16. *Корноухов Н.В.* Расчет сложных рам по методу перемещений с учетом деформаций сдвига и ширины стержней/. Научные труды КИСИ, В.12. – К.: КИСИ, 1959. –С. 63-71.
17. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела./ – М.: Наука, 1977. –416с.

18. *Семенов П.И.* Расчет прочности и деформативности анизотропных тонкостенных стержней открытого профиля. –К.: Вища шк. 1974, –184 с.
19. *Бердычевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды/ –М.: Наука, 1983. –448с.
20. *Немчинов Ю.И.* Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов)/ –К.: Будівельник, 1980. –231с.
21. *Баженов В.А.*, Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок./ –К.: КНУБА, 2000. –386 с.
22. *Легостаев А.Д.* Метод скінченних елементів. Консп. лекцій/. –К.: КНУБА, 2004. -112с.
23. *Шимановский А.В.*, Теория и расчет сильнонелинейных конструкций/ – К.: Изд-во «Сталь», 2005. – 432 с.
24. *Мак-Конел А.Дж.* Введение в тензорный анализ (с приложениями к геометрии, механике и физике). –М.: Гос. изд-во ФМЛ, 1963. –410с.

ЗМІСТ

ВСТУП

Ошибка! Закладка не определена.[3](#)

РОЗДІЛ

1.....

1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ПІДПІРНИХ СТИНОК **Ошибка!**

Закладка не определена.[6](#)

1.1. Теорія Кулона	6
1.2. Теорія Ребхана і графічна побудова Понселе	7
1.3. Аналітичний метод визначення тиску ґрунту на поверхню підпірної стінки	14
1.4. Діаграма функції повного тиску та його інтенсивності ...	16
1.5. Теорія лінійного деформування ґрунтового півпростору для визначення тиску на підпірну стінку	
1.6. Приклад аналітичного розрахунку підпірної стінки	20
1.7. Приклад розрахунку стійкості підпірної стінки з використанням методу круглоциліндричної поверхні ковзання	28
1.8. Аналіз розрахунку підпірної стінки на міцність і стійкість з використанням числових методів	52
Запитання та завдання для самоперевірки	

РОЗДІЛ

2

[2. РОЗРАХУНКИ ПЛОСКОНАПРУЖЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ](#)

Ошибка! Закладка не определена.[73](#)

[2.1.](#) Співвідношення плоскої задачі теорії пружності у прямокутних координатах

[2.2.](#) Розв'язок плоскої задачі теорії пружності у поліномах

[2.3.](#) Аналіз розрахунку балки на згин від рівномірно розподіленого навантаження **Ошибка! Закладка не определена.**

[2.4.](#) Розв'язок плоскої задачі теорії пружності у тригонометричних рядах

[Запитання та завдання для самоперевірки](#)

89

РОЗДІЛ

3

3. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ У РОЗРАХУНКАХ БА-

ЛОК-СТІНОК

.....

- 3.1. Основи теорії скінченних різниць.....
- 3.2. Виведення формул для похідних функцій напружень у скінченних різницях із застосуванням рівномірних сіток.....
- 3.3. Побудова систем рівнянь для прямокутної сіткової ділянки з використанням балкових функцій.....
- 3.4. Приклад розрахунку балки-стілки за методом сіток для реальної конструкції стінової панелі.....

Запитання та завдання для самоперевірки

РОЗДІЛ

- 4.....
- 4. РОЗРАХУНОК ТОНКИХ ПЛАСТИНОК НА ЗГИН.....
 - 4.4. Теорія розрахунку тонких пластинок з використанням гіпотез Кірхгофа–Лява.....
 - 4.5. Рівняння Коші та узагальненого закону Гука з урахуванням гіпотез і допущень технічної теорії згину.....
 - 4.6. Диференціальне рівняння рівноваги тонкої пластинки від дії поперечного навантаження.....
 - 4.7. Методика розв’язання задач на згин тонких пластинок. Умови на контурі.....
 - 4.8. Приклад аналітичного розрахунку еліптичної тонкої пластинки на поперечний згин.....
 - 4.9. Основні рівняння згину круглої тонкої пластинки.....

Запитання та завдання для самоперевірки

РОЗДІЛ 5

- 5. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ.....

- 5.1. Статично невизначувані системи. Основи теорії розрахунку методом сил.....
- 5.2. Система розв'язувальних рівнянь і обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь.....
- 5.3. Визначення дійсних внутрішніх зусиль у статично невизначуваних системах.....
- 5.4. Статична та кінематична перевірки розрахунку.....
- 5.5. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами за методом сил.....

Запитання та завдання для самоперевірки

РОЗДІЛ 6

6. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ.....
- 6.1. Припущення методу переміщень для розрахунку плоских рам.....
- 6.7. Основна система та основні невідомі методу переміщень....
- 6.8. Розв'язувальні рівняння методу переміщень.....
- 6.9. Побудова епюр внутрішніх зусиль в основній і вихідній системах методу переміщень.....
- 6.10. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь.....
- 6.11. Кінематичний аналіз розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень.....

Запитання та завдання для самоперевірки

РОЗДІЛ 7

7. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ ЖОРСТКИХ РАМ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

7.1. Основні положення розрахунку рам з урахуванням зсувних деформацій.....

7.2. Використання формул Корноухова для основного типу балкового стрижня.....

7.3. Визначення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь з урахуванням зсувних деформацій.....

7.4. Приклад аналітичного розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень з урахуванням зсувних деформацій.....

Запитання та завдання для самоперевірки

.....

РОЗДІЛ 8

8. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....

8.1. Дискретна модель розрахункової схеми стрижневої системи.....

8.2. Вузлові характеристики стрижнів і функцій форми стрижневого скінченного елемента.....

8.3. Побудова матриці жорсткості стрижневого СЕ у локальній та глобальній системах координат.....

8.4. Визначення внутрішніх зусиль у стрижневих скінченних елементах.....
.....

Запитання та завдання для самоперевірки
.....

РОЗДІЛ 9

9. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....

9.1. Вузлові характеристики дискретної моделі

9.2. Визначення векторів реакцій і матриці жорсткості дискретної моделі рами.....

9.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль для стрижневих скінченних елементів.....

9.4. Приклад розрахунку плоскої рами за методом скінченних елементів.....

Запитання та завдання для самоперевірки
.....

РОЗДІЛ 10

РОЗРАХУНОК ПЛОСКОНАПРУЖЕНИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....

10.1. Вихідні співвідношення плоскої задачі теорії пружності у матрично-векторній формі.....

10.2. Варіаційне рівняння Лагранжа для розв'язання

задачі плосконапруженої пластинки.....	
10.3. Побудова скінченноелементної моделі та типи скінченних елементів.....	
10.4. Апроксимація переміщень у просторі скінченного елемента та виведення функцій форми.....	
10.5. Виведення співвідношень для побудови матриці жорсткості та узагальненого вектора навантажень для трикутного скінченного елемента.....	
10.6. Виведення рівнянь рівноваги дискретної моделі плосконапруженої пластинки з використанням трикутного скінченного елемента.....	
Запитання та завдання для самоперевірки.....	
ЗМІСТ.....	
СПИСОК.....	ЛІТЕРАТУРИ.....