

УДК 534.629.114

© 1993

Л.Г.Лобас, В.Г.Хребет  
**О БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО  
 ЦИКЛА ИЗ УСТОЙЧИВОГО ФОКУСА И ОЦЕНКЕ  
 ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В МАЯТНИКОВЫХ ДВУХЗВЕННЫХ  
 СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ**

Задача о многообразиях стационарных состояний одиночных пневмоколесных машин, в неявной форме прозвучавшая в [13], получила значительное расширение в работе [17], из результатов которой стало ясно, что при изменении скорости движения возможны узло-седловые бифуркации. Затем бифуркации рождения (генерации) и слияния (аннигиляции) стационарных состояний одиночных и двухзвенных машин исследовались в [3-5,7]. Помимо дивергентной неустойчивости, характерной в рамках постановок [7] для одиночных машин, в двухзвенных машинах возможна также флаттерная неустойчивость [6]. Важное значение при исследовании четырехмерных динамических систем имеет работа [14]. Основываясь на ней, в [15,16,18-21] с помощью приведения исходной системы к трехмерной системе на центральном многообразии, расщепления последней на одно- и двумерную подсистемы и удержания лишь главных частей нелинейностей (до третьего порядка включительно) выполнен постбифуркационный анализ связанных флаттерных и дивергентных движений в задаче о плоскопараллельном движении связки ведущего и одного ведомого звена. Случай двух последовательно соединенных ведомых звеньев при условии, что точка сцепки ведомого звена с ведущим звеном движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$  рассмотрен в [8-10].

Ниже для уравнений возмущенного движения, содержащих отклонения переменных до третьей степени включительно, методом Пуанкаре-Ляпунова-Малкина [11] построено периодическое решение в виде отрезка ряда, члены которого являются периодическими функциями времени. Приведены аппроксимации устойчивого и неустойчивого предельных циклов методом усреднения. Характерные случаи проиллюстрированы графиками.

**§1. Кубическое приближение уравнений плоскопараллельного движения связки ведомых звеньев.** Приняв величины  $m_1, d_1, k_3$  в качестве базисных, запишем уравнения [10, (1.1)] в безразмерной форме, а затем при  $v \neq v_0$  представим их в виде [10, (2.1)]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \dot{\xi}_3 &= \kappa \xi_3 - \omega \xi_4 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \dot{\xi}_4 &= \omega_1 \xi_1 + \kappa \xi_4 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\omega > 0, \kappa < 0, \omega_1 > 0$  при  $V \neq v_0$ ; знак  $\varepsilon$  зависит от выбранных значений  $l$  и  $v$ .

С целью анализа локальной бифуркации Андронова-Хопфа, описывающей движения с малыми амплитудами для  $v > v_0$  (т.е.  $\varepsilon > 0$  [8]) вблизи границы  $v = v_0(l_1^2)$ , положим  $\xi_k = \sqrt{\varepsilon} \eta_k$  ( $k=1, \dots, 4$ ).

Вместо (1.1) получим

$$\dot{\eta}_1 = -\omega \eta_2 + \varepsilon[\eta_1 + f(\eta_1, \dots, \eta_4)], \quad \dot{\eta}_2 = \omega \eta_1 + \varepsilon[\eta_2 + F(\eta_1, \dots, \eta_4)], \quad (1.2)$$

$$\dot{\eta}_3 = \kappa \eta_3 - \omega_1 \eta_4 + \varepsilon f_3(\eta_1, \dots, \eta_4), \quad \dot{\eta}_4 = \omega_1 \eta_3 + \kappa \eta_4 + \varepsilon f_4(\eta_1, \dots, \eta_4),$$

где

$$\text{col}(f, F, f_3, f_4) = \sum_{l, m, n} \text{col}(A_{lmn}^{(1)}, \dots, A_{lmn}^{(4)}) \eta_l \eta_m \eta_n + \dots$$

§2. Построение периодического решения системы (1.2). Учитывая автономность системы и периодичность искомого решения ее, начало отсчета времени выберем из условия  $\eta_2|_{t=0} = 0$ .

Перейдем от  $t$  к  $\tau$  таким образом, чтобы решению с периодом

$$2\pi\omega^{-1} + \alpha = 2\pi\omega^{-1}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)$$

по переменной  $t$  соответствовало  $2\pi$ - периодическое решение системы (1.2) по переменной  $\tau$  [11]. Систему, полученную из (1.2) заменой

$$t = \frac{\tau}{\omega}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (2.1)$$

пытаемся удовлетворить формальными рядами

$$\eta_s(\tau) = \eta_s^{(0)}(\tau) + \varepsilon \eta_s^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 \eta_s^{(2)}(\tau) + \dots, \quad (2.2)$$

$$\eta_s^{(j)}(\tau + 2\pi) = \eta_s^{(j)}(\tau) \quad (s=1, \dots, 4; j=1, 2, \dots).$$

Так как  $\eta_2^{(0)}(0) = 0$ , то порождающее решение есть

$$\eta_1^{(0)} = M_0 \cos \tau, \quad \eta_2^{(0)} = M_0 \sin \tau, \quad \eta_3^{(0)} = 0, \quad \eta_4^{(0)} = 0.$$

Для нахождения первого приближения имеем систему, распадающуюся на две подсистемы

$$\frac{d\eta_1^{(1)}}{d\tau} + \eta_2^{(1)} = -h_1 M_0 \sin \tau + [M_0 \cos \tau + A_{III}^{(1)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{II2}^{(1)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} +$$

$$+ 3A_{122}^{(1)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(1)} \eta_2^{(0)3}] \omega^{-1},$$

$$\frac{d\eta_2^{(1)}}{d\tau} - \eta_1^{(1)} = h_1 M_0 \cos \tau + [M_0 \sin \tau + A_{III}^{(2)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{II2}^{(2)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} +$$

$$+ 3A_{122}^{(2)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(2)} \eta_2^{(0)3}] \omega^{-1},$$

$$\frac{d\eta_3^{(1)}}{d\tau} = (\kappa \eta_3^{(1)} - \omega_1 \eta_4^{(1)} + A_{III}^{(3)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{II2}^{(3)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} +$$

$$+ 3A_{122}^{(3)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(3)} \eta_2^{(0)3}) \omega^{-1},$$

$$\frac{d\eta_4^{(1)}}{d\tau} = (\omega \eta_3^{(1)} + \kappa \eta_4^{(1)} + A_{III}^{(4)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{II2}^{(4)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} +$$

$$+ 3A_{122}^{(4)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(4)} \eta_2^{(0)3}) \omega^{-1}.$$

Периодическое решение этой системы существует тогда и только тогда, когда существует периодическое решение первых двух уравнений. Запишем их в виде

$$\frac{d\eta_1^{(1)}}{d\tau} + \eta_2^{(1)} = \left(\frac{M_0}{\omega} + a_1\right) \cos \tau + (b_1 - h_1 M_0) \sin \tau + a_3 \cos 3\tau + b_3 \sin 3\tau \quad (2.4)$$

$$\frac{d\eta_2^{(1)}}{d\tau} - \eta_1^{(1)} = (h_1 M_0 + c_1) \cos \tau + \left(\frac{M_0}{\omega} + d_1\right) \sin \tau + c_3 \cos 3\tau + d_3 \sin 3\tau,$$

Из необходимых и достаточных условий периодичности решения системы (2.4)

$$\frac{M_0}{\omega} + a_1 = -\left(\frac{M_0}{\omega} + d_1\right), \quad b_1 - h_1 M_0 = h_1 M_0 + c_1 \quad (2.5)$$

находим

$$M_0^2 = -\frac{2\pi}{\omega \alpha_3(v)}, \quad h_1 = \frac{Q M_0^2}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Величины  $Q$  и  $\alpha_3(v)$  описаны в [10], причем  $\alpha_3(v)$  является продолжением по параметру  $v$  в область  $v > v_0$  первого ляпуновского коэффициента  $\alpha_3(v)$  явное выражение которого для систем с кубическими нелинейностями получено в [2]. При условиях (2.5) система (2.4) имеет решение

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)} &= M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + A_3 \cos 3\tau + B_3 \sin 3\tau, \\ \eta_2^{(1)} &= M_1 \sin \tau - N_1 \cos \tau + C_3 \cos 3\tau + D_3 \sin 3\tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{M_0^3}{32\omega} A_{30}, \quad B_3 = \frac{M_0^3}{32\omega} B_{30}, \quad C_3 = \frac{M_0^3}{32\omega} C_{30}, \quad D_3 = \frac{M_0^3}{32\omega} D_{30}, \\ A_{30} &= A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)} - 9A_{112}^{(1)} + 3A_{222}^{(1)}, \quad B_{30} = 3A_{111}^{(1)} - 9A_{122}^{(1)} + 3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)}, \\ C_{30} &= 3A_{122}^{(1)} + 3A_{222}^{(2)} - A_{111}^{(1)} - 9A_{112}^{(2)}, \quad D_{30} = 3A_{111}^{(2)} - 9A_{122}^{(2)} - 3A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)}. \end{aligned}$$

Из условия  $\eta_2^{(1)}(0) = 0$  находим  $N_1 = C_3$ . Другая произвольная постоянная  $M_1$  в (2.7), а также величина  $h_2$  в (2.1) определяются условиями периодичности второго приближения, из которых получаем

$$M_1 = -\frac{3}{512} \frac{M_0^5}{\omega} M_{10}, \quad h_2 = h_1^2 - h_{20}, \quad h_{20} = \frac{3}{256} \frac{M_0^4}{\omega} \left( h_1 M_{10} + \frac{H}{\omega} \right),$$

$$M_{10} = A_{30} A_{31} - B_{30} B_{31} - D_{30} D_{31} - C_{30} C_{31},$$

$$H = A_{31} B_{30} + A_{30} B_{31} + C_{30} D_{31} - C_{31} D_{30}, \quad A_{31} = A_{122}^{(1)} - A_{111}^{(1)} + 2A_{112}^{(2)},$$

$$B_{31} = 2A_{112}^{(1)} + A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)}, \quad C_{31} = A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)} - 2A_{122}^{(2)},$$

$$D_{31} = 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)}.$$

Периодическое решение двух последних уравнений системы (2.3) имеет вид

$$\eta_3^{(1)} = T_1 \cos \tau + S_1 \sin \tau + T_2 \cos 3\tau + S_2 \sin 3\tau,$$

$$\eta_4^{(1)} = T_3 \cos \tau + S_3 \sin \tau + T_4 \cos 3\tau + S_4 \sin 3\tau,$$

причем величины  $T_1, S_1, \dots, S_4$  имеют тот же смысл, что и в [10].

Такова процедура отыскания первого приближения

$$\eta_1 = M_0 \cos \tau + \varepsilon \eta_1^{(1)}(\tau), \quad \eta_2 = M_0 \sin \tau + \varepsilon \eta_2^{(1)}(\tau) \quad (2.8)$$

$$\eta_3 = \varepsilon \eta_3^{(1)}(\tau), \quad \eta_4 = \varepsilon \eta_4^{(1)}(\tau)$$

решения системы (1.2). Аналогичным образом находятся сколь угодно высокие приближения искомого решения. Поскольку существование периодического решения системы (1.2) доказано в [10], должен существовать по крайней мере один ряд вида (2.2), формально удовлетворяющий (после возвращения к старой независимой переменной  $t$ ) системе (1.2). В силу то-

го, что такой ряд оказался единственным, он с необходимостью представляет искомое решение и, следовательно, сходится.

§3. Явный вид периодического решения задачи. Первому приближению (2.8) системы (1.2) соответствует следующее решение системы (1.1):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1' + \xi_1'', & \xi_2 &= \xi_2' + \xi_2'', \\ \xi_3 &= \xi_3'', & \xi_4 &= \xi_4'', \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \tau, & \xi_2' &= \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \tau, \\ \xi_1'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_1^{(1)}(\tau), \\ \xi_2'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_2^{(1)}(\tau), & \xi_3'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_3^{(1)}(\tau), \end{aligned}$$

$$\xi_4'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_4^{(1)}(\tau), \quad (3.2)$$

$$\tau = \Omega t, \quad \Omega = \omega (1 - h_1 \varepsilon + h_{20} \varepsilon^2 + \dots).$$

Так как [10]

$$v_1 = \sum_{s=1}^4 \alpha_{1s} \xi_s, \quad v_2 = \sum_{s=1}^4 \alpha_{2s} \xi_s,$$

то с принятой степенью точности

$$v_1 = v_1' + v_1'' + \dots, \quad v_2 = v_2' + v_2'' + \dots$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_1' &= \sqrt{\varepsilon} M_0 (a_{23} \cos \Omega t + \alpha_{12} \sin \Omega t), \\ v_2' &= \sqrt{\varepsilon} M_0 [ -(\omega^2 + a_{21}) \cos \Omega t + \\ &\quad + \omega a_{22} \sin \Omega t ], \\ v_1'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [ (a_{24} M_0 + a_{23} M_1 - \alpha_{12} N_1 + \\ &\quad + \alpha_{13} T_1 + \alpha_{14} T_3) \cos \Omega t + \\ &\quad + (a_{23} N_1 + \alpha_{12} M_1 + \alpha_{13} S_1 + \\ &\quad + \alpha_{14} S_3) \sin \Omega t + \\ &\quad + (\alpha_{12} C_3 + a_{23} A_3 + \alpha_{13} T_2 + \\ &\quad + \alpha_{14} T_4) \cos 3 \Omega t + \\ &\quad + (\alpha_{12} D_3 + a_{23} B_3 + \alpha_{13} S_2 + \alpha_{14} S_4) \sin 3 \Omega t ], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \{ [ -a_{22} (M_0 + \omega N_1) - (\omega^2 + a_{21}) M_1 + \alpha_{33} T_1 + \\ &\quad + \alpha_{34} T_3 ] \cos \Omega t + [ \omega a_{22} M_1 - (\omega^2 + a_{21}) N_1 - 2 \omega M_0 + \\ &\quad + \alpha_{33} S_1 + \alpha_{34} S_3 ] \sin \Omega t + [ \omega a_{22} C_3 - (\omega^2 + a_{21}) A_3 + \end{aligned}$$

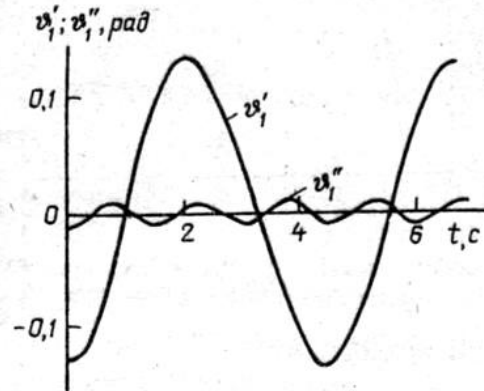


Рис. 1

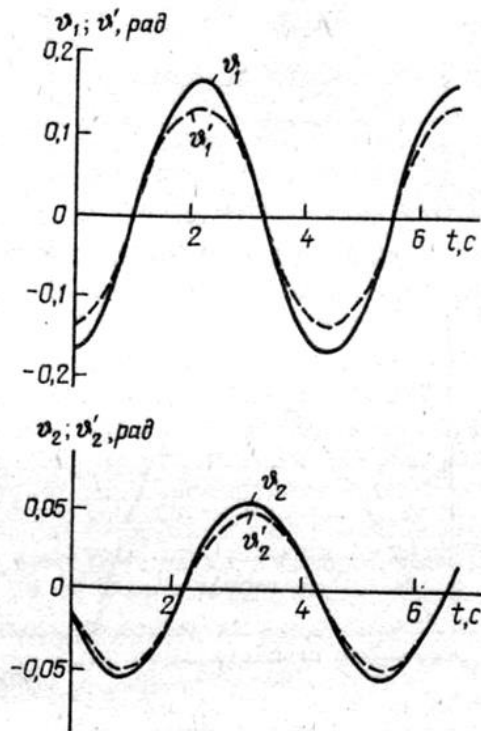


Рис. 2

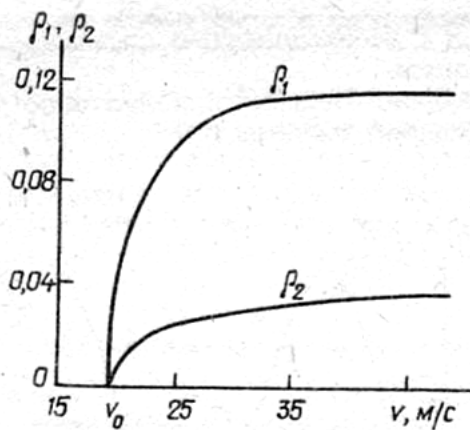


Рис. 3

ды колебаний

$$\rho_1 = M_0 \sqrt{\epsilon (a_{23}^2 + a_{12}^2)}, \quad \rho_2 = M_0 \sqrt{\epsilon [(\omega^2 + a_{21}^2) + \omega^2 a_{22}^2]},$$

возрастают (рис.3). Угол увода  $\delta_3$  колес первого ведомого звена находится в области нелинейной зависимости  $Y_3(\delta_3)$ , тогда как для колес второго

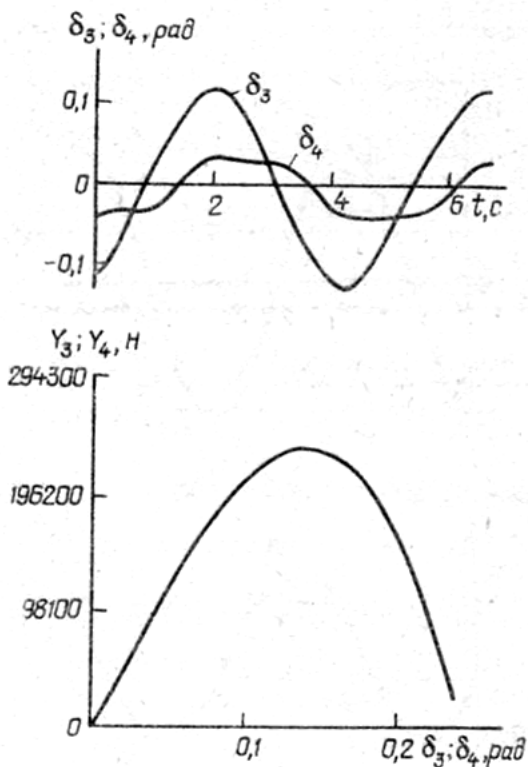


Рис. 4

$$+ \alpha_{33} T_2 + \alpha_{34} T_4] \cos 3 \Omega t + [\omega a_{22} D_3 - \{ -(\omega^2 + a_{21}) B_3 + \alpha_{33} S_2 + \alpha_{34} S_4 \} \sin 3 \Omega t \}.$$

Возьмем числовые значения параметров связи двух ведомых звеньев, указанные в [10]. Тогда  $v_0 = 19,4419$  м/с.

При  $v = 30$  м/с период решения  $2\pi/\Omega = 4,5674$  с. Из рис.1 следует, что  $v_1'(t) > v_1''(t)$ . На рис.2 штриховыми линиями изображены графики функций  $v_1'(t)$ , сплошными —  $v_1(t)$ , различие между ними оказывается весьма незначительным при  $\forall v > v_0$ , т.е.  $v_1(t) \approx v_1'(t)$ .

С ростом скорости движения  $v$  амплитуды колебаний

ведомого звена допустима линеаризация функции  $Y_4(\delta_4)$  (рис.4).

§4. Упрощенный подход с использованием оператора усреднения. Сравнение между собой кривых  $v_1 = v_1'(t)$  и  $v_1 = v_1''(t)$  однозначно указывает на то, что в данном случае несмотря на неаналитическую зависимость функций  $v_1(t)$  от  $\epsilon$  имеет место часто встречающаяся ситуация наложения быстроосциллирующей составляющей  $v_1''(t)$  на основную медленноэволюционирующую составляющую  $v_1'(t)$  решения. Для нахождения эволюции системы эффективным, как известно, является метод усреднения. Рассмотрим первые два уравнения системы (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 = & \epsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + A_{III}^{(1)} \xi_1^3 + \\ & + 3 A_{II2}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + 3 A_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + \\ & + A_{222}^{(1)} \xi_2^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 = & \omega \xi_1 + \epsilon \xi_2 + A_{III}^{(2)} \xi_1^3 + \\ & + 3 A_{II2}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + 3 A_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(2)} \xi_2^3 + \dots \end{aligned}$$

Перейдя к полярным координатам заменой  $\xi_1 = r \cos v$ ,  $\xi_2 = r \sin v$ , представим уравнения (4.1) в виде

$$\dot{r} = \epsilon r + r^3 f_1(v) + \dots, \quad \dot{v} = \omega + r^2 f_2(v) + \dots \quad (4.2)$$

Функции  $f_1(v)$  и  $f_2(v)$  являются  $2\pi$ -периодическими. Поставим в соответствие уравнениям (4.2) следующие

$$\dot{\rho} = \varepsilon \rho + \rho^3 \alpha' + \dots, \quad \dot{\theta} = \omega + \rho^2 \gamma' + \dots \quad (4.3)$$

Здесь

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(v) dv, \quad \gamma' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(v) dv. \quad (4.4)$$

Величину  $\rho_0 = \text{const}$  конкретизируем дальше. Каждое из уравнений (4.3) интегрируется независимо. Из (4.4) следует

$$\alpha' = \frac{\omega}{2\pi} \alpha_3(v), \quad \gamma' = -\frac{\omega}{2\pi} Q.$$

*Аппроксимация устойчивого предельного цикла  $\Gamma^{4.1}$  для случая  $l_1 > l_1^*$ ,  $v > v_0$  [10].* Так как  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha_3(v) < 0$ , то первое уравнение (4.3) имеет одну неустойчивую особую точку  $\rho_0 = 0$  и две устойчивые особые точки  $\rho = \pm \rho_0$ , где  $\rho_0 = \sqrt{\varepsilon} M_0$ . Из второго уравнения (4.3) находим

$$\theta = \Omega t, \quad \Omega = \omega [1 - \varepsilon Q (2\pi M_0^2)^{-1}].$$

Составив выражения  $\xi_1 = \rho_0 \cos \theta$ ,  $\xi_2 = \rho_0 \sin \theta$  и сравнив их с (3.2), заключаем, что  $\rho_0 \cos \theta = \xi_1'$ ,  $\rho_0 \sin \theta = \xi_2'$ , т.е. приведенная процедура усреднения дает приближенное решение

$$\xi_1 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \Omega t, \quad \xi_2 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \Omega t, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0 \quad (4.5)$$

системы (1.1), которое получается из (3.1) отбрасыванием выражений с двумя штрихами.

*Аппроксимация неустойчивого предельного цикла  $\Gamma^{3.2}$  для случая  $l_1 > l_1^*$ ,  $v > v_0$  [10].* Так как  $\varepsilon < 0$ ,  $\alpha_3(v) > 0$ , то первое уравнение (4.3) имеет одну устойчивую особую точку  $\rho_0 = 0$  и две неустойчивые особые точки  $\rho = \pm \rho_0$ , где  $\rho_0 = \sqrt{-\varepsilon} M_0$ . Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим для неустойчивого предельного цикла аппроксимацию (4.5), в которой  $\varepsilon$  следует заменить на  $-\varepsilon$ .

**§5. Заключительные замечания.** Вытекающий из (3.1), а также из (4.5) результат о том, что амплитуда автоколебаний маятниковых систем с качением пропорциональна  $\sqrt{\varepsilon}$ , согласуется с теоремой Хопфа [12] о том, что радиус предельного цикла, родившегося из устойчивого фокуса, растет как  $\sqrt{\varepsilon}$ . При  $v = v_0$  величина  $\alpha_3(v)$  играет роль «нелинейного декремента» (термин, введенный в [1] при исследовании бифуркаций фазового портрета системы дифференциальных уравнений второго порядка, в которой выделены резонансные мономы, в случае  $\lambda_1 = i\omega$ ,  $\lambda_2 = -i\omega$ ). Из (2.6) следует, что при  $v \neq v_0$ , во-первых, величина  $\alpha_3(v)$  существенно влияет на радиус предельного цикла, во-вторых, частота соответствующего периодического решения определяется совокупностью значений коэффициентов  $A_{112}^{(1)}$ ,  $A_{222}^{(1)}$ ,  $A_{111}^{(2)}$ ,  $A_{122}^{(2)}$ , не входящих в  $\alpha_3$  (см. выражения для  $\alpha_3(v)$  и  $Q$  в [10]).

Как отмечалось выше, величина  $\alpha_3(v)$  определяет собой продолжение по параметру  $v$  первого ляпуновского коэффициента  $\alpha_3(v_0)$ .

Р Е З Ю М Е. Для кубічного наближення рівнянь збуреного руху методом Пуанкара-Ляпунова-Малкіна побудовано періодичний розв'язок у вигляді відрізка ряду, члени якого є періодичними функціями часу. Наведені апроксимації стійкого і нестійкого граничних циклів методом осереднення. Допускається, що рух ведучої точки маятникової системи відбувається зі швидкостями, при яких одна пара комплексних значень матриці рівнянь лінійного набли-

ження має від'ємну дійсну частину; дійсна частина другої пари може бути в залежності від швидкості руху як додатною, так і від'ємною.

**S U M M A R Y.** A A periodic solution in a form of a selection of the series whose terms are periodical functions of time has been constructed by the Poincare-Lyapunov-Malkin method for the cubic approximation of equations of disturbed motion. Approximations of the stable and unstable limiting cycles by the method of averaging are presented. The motion of the loading point of the pendulum system is supposed to proceed with the rates under which one pair of the complex eigen values of the matrix of equations of linear approximation has its negative and positive part; The valid part of the other pair may depend on both positive and negative motion velocity.

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М.: Наука, 1984. — 384 с.
3. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации и устойчивость стационарных движений колесного экипажа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1988. — № 1. — С. 57 — 63.
4. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации и устойчивость стационарных движений пневмоколесных машин в постоянных силовых полях // Там же. — 1991. — № 1. — С. 28 — 33.
5. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел // Там же. — 1991. — № 3. — С. 30 — 37.
6. Лобас Л.Г. Курсовая устойчивость двухзвенных колесных машин // Прикл.механика. — 1989. — 25, № 1. — С. 104 — 111.
7. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. — Киев: Наук. думка, 1990. — 232 с.
8. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О маятниковых двухзвенных системах с качением // Прикл. механика. — 1993. — 29, №2. — С. 82 — 88.
9. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Динамическое поведение маятниковой двухзвенной системы с качением на границе области устойчивости // Там же. — 1993. — 29, № 4. — С. 78—86.
10. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О предельных периодических движениях маятниковых двухзвенных систем с качением // Там же. — 1993. — 29, №8. — С.85—94.
11. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.; Л.: ГИИТТЛ, 1949. — 244 с.
12. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
13. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля. — М.: Машгиз, 1947. — 156 с.
14. Holmes P.J. Center manifolds, normal forms and bifurcations of vector fields with application to coupling between periodic and steady motions // Physica. — 1981. — 2D. — P. 449 — 481.
15. Kasani V. Anwendung der nichtlinearen Stabilitätstheorie zur Untersuchung der Fahrdynamik eines Lastkraftwagens mit Anhänger // Fortschritt— Berichte der VDI. — 1988. — 12, N 100. — S. 1 — 111.
16. Kasani V., Stribersky A., Troger H. Maneuverability of a truck-trailer combination after loss of lateral stability // Vehicle System Dynamics. — 1988. — V. 17, Suppl. — P. 186 — 198.
17. Pacejka H.B. Tire factors and vehicle handling // Delft Univ. Technol. — 1978. — N 108. — 31 p.
18. Scheidl R., Stribersky A. Gekoppelte Divergenz — und Flutterinstabilität eines Sattelschleppzuges // ZAMM. — 1986. — 66, N.4. — P. 87 — 89.
19. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Driving behaviour of a tractor-semitrailer vehicle in steady state downhill motion // Vehicle System Dynamics. — 1985. — 14, N 1 — 3. P. 184 — 188.
20. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Nonlinear stability behaviour of a tractor-semitrailer in downhill motion // Vehicle System Dynamics. — 1986. — V. 15, Suppl. — P. 509 — 522.
21. Troger H., Zeman K. A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of a tractor-semitrailer // Vehicle System Dynamics. — 1984. — 13, N 4. — P. 161. — 172.

Ин-т механики АН Украины, Киев  
(Украина)

Поступила 28.02.92