А. О. Антонова

Національний авіаційний університет, Україна, Київ

Деякі властивості моделі Гудвіна взаємодії праці та капіталу

Текст доповіді на Першій Міжнародній науково-практичній конференції "Інформаційні технології та моделювання в економіці", Україна, Черкаси, 2009

Анотація.

Як відомо, залежності долі праці в національному доході $u(t)$ *та показник зайнятості населення* $v(t)$ *мають вигляд нелінійних коливань, з окремими фазами яких можна пов'язати експансію, рецесію, депресію та піднесення. Ми показали, що скориставшись властивостями розв'язків системи Лотки-Вольтера, для часів зазначених фаз* $\tau_e, \tau_r, \tau_d, \tau_h$ *можна отримати аналітичні вирази та дослідити їх залежність від початкових умов* u_0, v_0. *Також встановлено низку цікавих співвідношень між амплітудами коливань, часами* τ *та середніми значеннями* $u(t)$, $v(t)$ *та річної ставки заробітної плати* $w(t)$.

Модель Гудвіна взаємодії праці і капіталу [1] вже багато років використовується для моделювання явищ у макроекономіці [1-4]. Як показано в [1], за певних умов існує можливість існування періодичних у часі змін національного доходу $Y(t)$, капіталу $K(t)$, чисельності робітників $L(t)$, річної ставки заробітної плати $w(t)$ та ін.

Ця модель складається з трьох звичайних диференціальних рівнянь, і ґрунтується на наступних припущеннях:

1) Відношення капітал/дохід є сталим

$$\frac{K}{Y} = \sigma . \tag{1}$$

2) Існує рівновага між інвестиціями I та заощадженнями S:

$$I = S$$

і

$$S = Y - wL . \tag{2}$$

3) Темпи зростання продуктивності праці $\frac{Y}{L}$ і населення $N(t)$ є сталими

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{Y}{L} = m , \quad \frac{d\ln N}{dt} = n . \tag{3}$$

4) Динаміка зміни у часі капіталу $K(t)$ визначається рівнянням

$$\frac{dK}{dt} = I = Y - wL \tag{4}$$

5) У відповідності з теорією Філіпса темп зміни ставки заробітної плати $w(t)$ залежить від рівня зайнятості v

$$\frac{\dot{w}}{w} = f(v) . \tag{5}$$

Функція $f(v)$ визначена при $0 \le v < 1$ і має такі властивості:

$$f(v) \text{ монотонно зростає}; \quad f(0) < 0 ; \quad f(v) \to +\infty , \text{ якщо } v \to 1 .$$

Щоб отримати систему рівнянь Гудвіна, введемо нові функції: показник зайнятості населення

$$v = \frac{L}{N}, \quad 0 \le v \le 1 ,$$

і долю праці в національному доході

$$u = \frac{wL}{Y}, \quad 0 \le u \le 1,$$

Диференціюючи по часові тотожності

$$\ln u = \ln w + \ln L - \ln Y, \qquad \ln v = \ln L - \ln N,$$

і використовуючи (1-5), отримаємо

$$\frac{du}{dt} = u\big(f(v) - m\big), \ \frac{dv}{dt} = v\sigma^{-1}(u_s - u)$$

де введено позначення

$$u_s = 1 - (n+m)\sigma .$$

У самому простому випадку $f(v)$ можна апроксимувати лінійною функцію

$$f(v) = -a + bv,$$

де $a > 0, \ b > 0$. Тоді отримаємо наступну систему рівнянь

$$\dot{w} = -w(a - bv), \ \ \dot{u} = ub(v - v_s), \ \dot{v} = v\sigma^{-1}(u_s - u), \qquad (6)$$

де

$$v_s = \frac{a+m}{b}.$$

Із (6) випливає, що якщо

$$u_s = 1 - \sigma(n+m) > 0,$$

то система рівнянь для $u(t), v(t)$ матиме вид системи "хижак-жертва" [5]. Як відомо в системі "хижак-жертва" при додатних початкових умовах

$$u(0) = u_0 > 0, \ v(0) = v_0 > 0$$

функції $u(t), v(t)$ також будуть завжди додатними, і, крім того, періодичними з періодом T, а фазові траєкторії $v(u)$ мають вигляд замкнутих ліній, що охоплюють стаціонарну точку (u_s, v_s). Оскільки за фізичним змістом для введених функцій $u(t), v(t)$ повинні виконуватися умови

$$0 < u \le 1, \quad 0 < v \le 1,$$

то циклічна поведінка у часі долі праці в національному доході та показника зайнятості населення можлива лише за виконання нерівностей

$$0 < u_s < 1, \ 0 < v_s < 1$$

або

$$\sigma(n+m) < 1, \quad a + m < b. \qquad (7)$$

Отже, в моделі Гудвіна для існування циклів важливими є не тільки припущення 1- 5, а і обмеження на параметри (7).

Зауваження. Існує ще одне обмеження на початкові умови, яке випливає з умови, що на траєкторії $\min\big(\max\big(u(t), v(t)\big)\big) \le 1$.

Якщо задати початкові значення $Y(0)$, $L(0)$, $w(0)$, $N(0)$, можна числовими методами розрахувати динаміку процесу. Типова поведінка функцій $u(t), v(t)$ показана на рис. 1. Криві на цьому рисунку побудовані для малих (1а) і великих (1б) початкових значень $u(0), v(0)$ відносно їх стаціонарних значень u_s, v_s. Відповідні фазові траєкторії показані на рис. 2. На рис.3 зображені залежності $\ln\frac{Y(t)}{Y(0)}, \ \ln\frac{L(t)}{L(0)}, \ \ln\frac{w(t)}{w(0)}$.

Як і слід було чекати, залежності $u(t), v(t)$ на рис.1а близькі до гармонічних коливань, а відповідна фазова траєкторія на рис.2 до еліпса. Можна показати, що форма траєкторії визначається величиною

$$E_0 = \sigma^{-1}\left(u_0 - u_s - u_s \ln\frac{u_0}{u_s}\right) + b\left(v_0 - v_s - v_s \ln\frac{v_0}{v_s}\right).$$

При збільшенні параметра E_0 коливання $u(t)$, $v(t)$ стають нелінійними (їх період залежить від E_0, $T = T\left(E_0\right)$, і $T\left(E_0\right)$ зростає при зростанні E_0) і вони стають істотно ангармонічними (рис.1б). Для невеликих $E_0 \le 1$ можна знайти наближені аналітичні вирази для функцій $u(t)$ і $v(t)$ методами теорії збурень [6, 7].

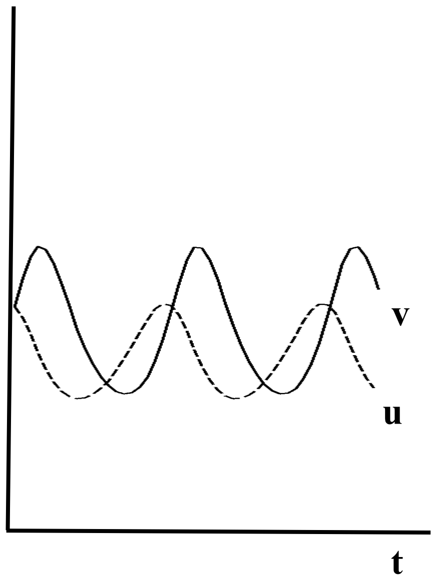

Рис.1а

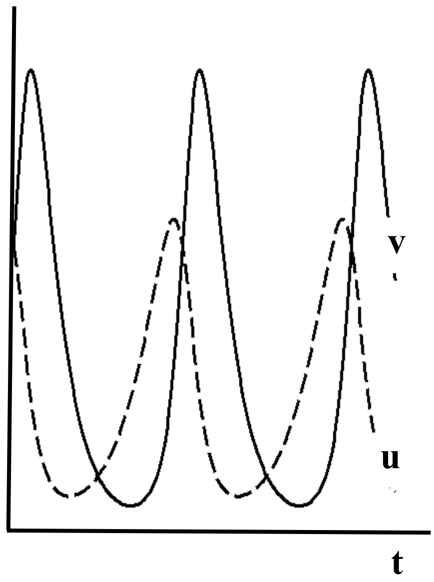

Рис.1б

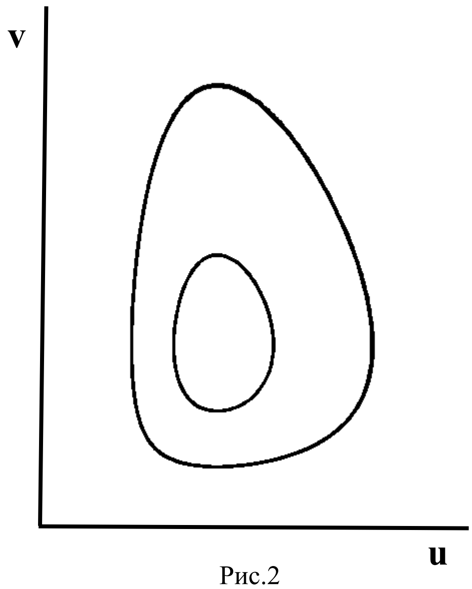

Рис.2

Часова поведінка національного доходу, чисельності робітників та річної ставки заробітної плати показана на рис.3. Всі ці криві зростають, але їм притаманні і коливальні властивості.

Вивчимо деякі властивості розв’язків системи Гудвіна. З системи рівнянь для функцій $u(t)$, $v(t)$ випливає “закон збереження середніх ” Вольтерра [5] : середні за період T значення u і v дорівнюють їх стаціонарним значенням,

$$< u >= u_s,\ < v >= v_s,$$

де

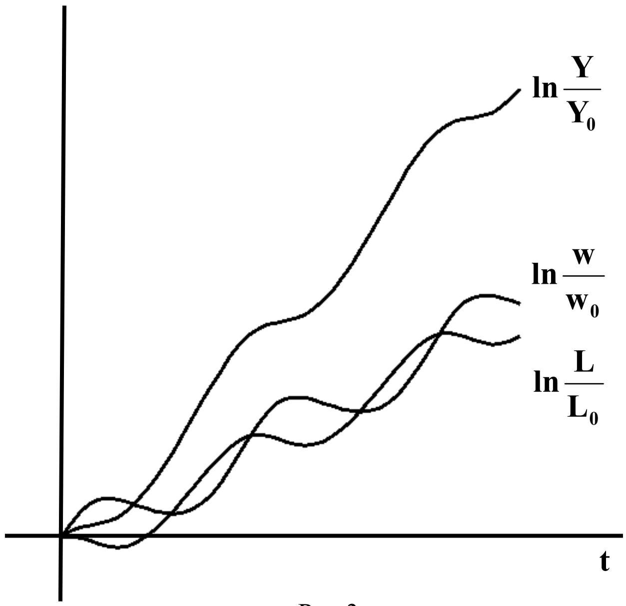

Рис.3

$$< g >= \frac{1}{T}\int_{t}^{T+t} g(t)dt .$$

Крім того, користуючись періодичністю функцій $u(t)$, $v(t)$, можна отримати низку важливих властивостей для темпів зміни за період введених вище величин. Так,

$$\left\langle \frac{dw}{wdt} \right\rangle = -a + bv_s = m .$$

Осереднюючи співвідношення

$$\frac{dv}{vdt} = \frac{dL}{Ldt} - \frac{dN}{Ndt},$$

одержимо

$$\left\langle \frac{dL}{Ldt} \right\rangle = n .$$

Аналогічно, осереднюючи співвідношення

$$\frac{du}{udt} = \frac{dw}{wdt} + \frac{dL}{Ldt} - \frac{dY}{Ydt},$$

знаходимо

$$\left\langle \frac{dY}{Ydt} \right\rangle = m + n .$$

Нарешті з рівняння (1) легко знайти, що

$$\left\langle \frac{dK}{Kdt} \right\rangle = m + n .$$

Оскільки

$$\left\langle \frac{dg}{gdt} \right\rangle = T^{-1} \ln \frac{g(T+t)}{g(t)},$$

то справедливі наступні співвідношення

$$Y(T+t) = Y(t)e^{(m+n)T}, \qquad K(T+t) = K(t)e^{(m+n)T}$$

$$L(T+t) = L(t)e^{nT}, \qquad w(T+t) = w(t)e^{mT} .$$

Зазначимо, що отримані співвідношення справедливі для нелінійних коливань $u(t)$, $v(t)$

і в них входить лише один параметр коливань - період T .

Можна виділити чотири фази циклу Гудвіна: експансію, рецесію, депресію та піднесення [2-3], які тривають відповідно часи $\tau_e, \tau_r,\ \tau_d, \tau_h$ (рис.4)

$$\tau_e = T_{WN},\ \ \tau_r = T_{NE},\ \ \tau_d = T_{ES},\ \ \tau_h = T_{SW}\ .$$

При $E_0 << 1$ всі ці часи однакові і складають чверть періоду $T\left(E_0 = 0\right)$. При зростанні E_0 час рецесії зменшується, а решта часів збільшується. Часи експансії і депресії зростають дуже слабко, а час піднесення зростає майже лінійно. Аналітичні формули для цих часів можна знайти в роботі [7].

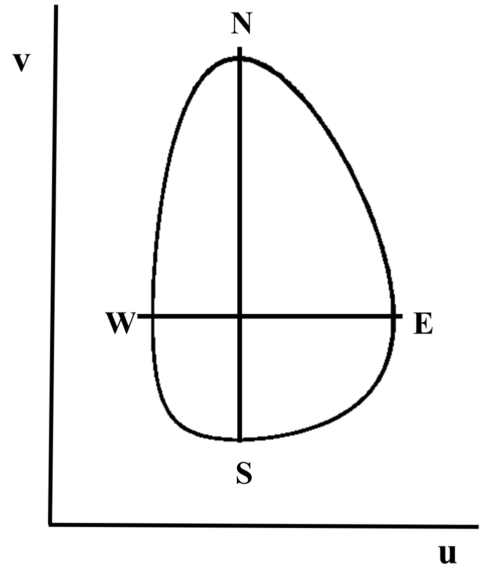

Рис.4

Література

1. *Goodwin R.M.* A growth cycle. In: Socialism, Capitalism and Economic Growth, ed. C.H. Feinstein, Cambridge University Press. – 1967, pp. 54–58.
2. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. –М.,2002. – 399с.
3. *Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И.* Макроэкономика. – М., 2006. – 654 с.
4. *Weber L. A* Contribution to Goodwin's Growth Cycle Model From a System Dynamics Perspective: www.systemdynamics.org/conferences/ 2005/proceed/papers/weber196.pdf
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М., Наука, 1976. – 288 с.
6. *Grozdanovski T., Shepherd J.*, ANZIAM Journal. 49, 243-257(2007).
7. *Antonova A.O.* Approximate Analytic Solutions of the Lotka-Volterra System. In: Proceedings of the 34th Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '08). AIP Conf. Proc., V. 1067, pp. 333-340 (2008).