

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л.М. ЛОМОНОС, Н.П. МУРАНОВА,
Т.Г. ПІЛЯВСЬКА

МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ
Навчально-методичний посібник

Київ 2007

УДК 517.3 (076.5)
ББК В 161 р
Л 753

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Н.О. Вірченко*
(Національний технічний університет
України "КПІ");
канд. фіз.-мат. наук, доц. *І.Ю. Каніовська*
(Національний авіаційний університет)

Затверджено методичною радою Інституту дову-
зівської підготовки НАУ 24 квітня 2004 року.

Л 753
Ломонос Л.М., Муранова Н.П., Пілявська Т.Г.
Математика. Елементи інтегрального числення.
Навчально-методичний посібник. - К.: НАУ, 2007. – 52 с.

У посібнику розглянуто первісні функції, найпростіші правила знаходження первісних, визначений інтеграл і його застосування для обчислення площ плоских фігур. Вміщено теоретичні відомості, приклади розв'язування задач і завдання для самостійної роботи.

Призначений для слухачів Інституту довузівської підготовки. Може бути використаний у школах з поглибленим вивченням математики, ліцеях, гімназіях природничо-математичного профілю та для самостійної підготовки до вступних іспитів у вищі навчальні заклади.

УДК 517.3 (076.5)
ББК В 161 р

© Л.М. Ломонос, Н.П. Муранова,
Т.П. Пілявська, 2007

ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладено елементи інтегрального числення – важливого розділу математики. Основний акцент зроблено на розвиток у читача практичних навиків на основі розв'язування задач на обчислення площ плоских фігур. Успішне засвоєння цього розділу буде сприяти подальшому більш глибокому проникненню в вузівський курс вищої математики.

Розгляд кожного питання проводиться в наступному порядку:

- 1) вводяться основні поняття та означення;
- 2) у стислій формі (без доведення) наводяться основні формули;
- 3) наводяться приклади розв'язування основних типових задач та деяких нетрадиційних;
- 4) подаються завдання (з відповідями) для практичних занять та самостійного розв'язування.

Посібник з успіхом може бути використаний в системі довузівської підготовки при підготовці до вступу як до НАУ, так і до інших вищих навчальних закладів.

1. ОЗНАЧЕННЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ

Відома операція диференціювання, тобто операція відшукування похідної $f'(x)$ від заданої функції $f(x)$. Існує і обернена по відношенню до диференціювання операція, її називають інтегруванням. Інтегрування функції $f(x)$ – це операція відшукування для даної функції $f(x)$ так званої первісної функції.

Означення 1. Первісною називають таку функцію $F(x)$, по відношенню до якої задана функція $f(x)$ являється похідною:

$$F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Наприклад, нехай задана функція $f(x) = x^3 + 3x$. В результаті диференціювання цієї функції ми отримуємо похідну $f'(x) = 3x^2 + 3$, а в результаті інтегрування – первісну:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2,$$

тобто $F'(x) = x^3 + 3x = f(x)$.

При цьому ми скористалися відомим правилом диференціювання, але в оберненому порядку: насправді ми здогадалися, який вигляд повинна мати функція $F(x)$, щоб при її диференціюванні отримати задану функцію $f(x)$.

Легко помітити, що за первісну можна взяти функцію

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + C,$$

де C – довільна стала величина, оскільки відомо, що $C' = 0$.

Таким чином, первісна визначається по заданій функції неоднозначно. Це твердження являється основною властивістю первісної.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то при довільній сталій C функція

$$F(x) + C \quad (2)$$

також буде первісною для функції $f(x)$.

Враховуючи відомі формули для похідних, означення і основну властивість первісної, складемо таблицю 1, в якій в першому стовпці записані різні функції $f(x)$, в другому стовпці –

відповідні цим функціям похідні $f'(x)$, а в третьому стовпці – відповідні функціям $f(x)$ первісні $F(x) + C$.

Таблиця 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)+C$
1	$a = const$	0	$ax + C$
2	$x^n, n \neq -1$	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3	e^x	e^x	$e^x + C$
4	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C, x \neq 0$
5	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
6	$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$tg x + C$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}$	$-ctg x + C$
10	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$arctg x + C$

Слід відзначити, що операція інтегрування в загальному випадку значно складніша, ніж операція диференціювання. При диференціюванні елементарних функцій завжди знову отримуються елементарні функції. Але не у кожній елементарній функції первісна являється елементарною функцією.

Наведемо три найпростіших правила знаходження первісних:

1⁰. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то первісною для суми функцій $f(x) + g(x)$ є функція $F(x) + G(x)$.

2⁰. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то первісною для функції $a \cdot f(x)$, де a – стала, являється функція $a \cdot F(x)$.

3°. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, a і b – сталі, то первісною для функції $f(ax + b)$ є функція $\frac{1}{a}F(ax + b)$.

Всі три правила легко доводяться, якщо скористатися відомими правилами диференціювання:

$$1) (F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x);$$

$$2) (a \cdot F(x))' = a \cdot F'(x) = a \cdot f(x);$$

$$3) \left(\frac{1}{a} \cdot F(ax + b) \right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(ax + b) \cdot (ax + b)' = \\ = \frac{1}{a} f(ax + b) \cdot a = f(ax + b).$$

Зрозуміло, що розглянуті три правила ні в якому разі не вичерпують всього багатого арсеналу правил інтегрування, яким користуються в математичному аналізі. Вищезгадані правила приведені з метою дати лише початкові відомості про первісну.

Приклад 1. Довести, що функція $F(x) = 4 - \cos x$ являється первісною для функції $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $F(x)$:

$$F'(x) = (4 - \cos x)' = 4' - (\cos x)' = 0 - (-\sin x) = \sin x = f(x).$$

Згідно з означенням (1) функція $F(x) = 4 - \cos x$ являється первісною для функції $f(x) = \sin x$.

Приклад 2. Знайти первісні функцій:

$$a) f(x) = x^5 + 3x^2 + 2, x \in R; \quad б) f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x}, x \in R;$$

$$в) f(x) = \frac{2}{x}, x \in R^+; \quad г) f(x) = \sin^2 x, x \in R.$$

Розв'язання. Скористаємося правилами інтегрування і таблицею 1.

а) Знайдемо первісні доданків, користуючись пунктом 2 таблиці 1, а потім застосуємо правило 1°. Функція

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^3}{3} + 2x + C = \frac{x^6}{6} + x^3 + 2x + C$$

являється, таким чином, первісною заданої функції. Дійсно,

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6} + x^3 + 2x + C \right)' = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 + 3x^2 + 2 = x^5 + 3x^2 + 2 = f(x).$$

б) Представимо задану функцію у вигляді $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$ і застосуємо таблицю 1, пункт 2. Отримаємо функцію

$$F(x) = 3 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{9}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^4} + C,$$

яка являється первісною для функції $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$. Дійсно,

$$F'(x) = \left(\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + C \right)' = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \sqrt[3]{x} = f(x).$$

в) Скориставшись правилом 2° і пунктом 4 таблиці 1, запишемо первісну у вигляді $F(x) = 2 \ln x + C$. Дійсно,

$$F'(x) = (2 \ln x + C)' = 2(\ln x)' + C' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} = f(x).$$

г) Перетворимо задану функцію:

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Застосувавши правила 1°, 2°, 3°, а також пункт 7 таблиці 1, отримаємо первісну $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

$$\text{Дійсно, } F'(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \right)' = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cos 2x + 0 = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x = f(x).$$

$$\text{Відповідь: а) } \frac{x^6}{6} + x^3 + 2x + C; \quad б) \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^4} + C;$$

$$в) 2 \ln x + C; \quad г) \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Приклад 3. Знайти для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

Розв'язання. Кожна первісна для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ записується у вигляді (пункт 8 таблиці 1)

$$F(x) = \operatorname{tg} x + C. \quad (3)$$

Для знаходження довільної сталої C підставимо координати точки M в (3) і отримаємо рівняння:

$$0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C,$$

звідки

$$C = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = -1.$$

Відповідь: $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$.

Приклад 4. Знайти функцію $f(x)$, якщо її похідна $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5-x}}$ і $f(1) = -1$.

Розв'язання. Знаходимо первісну для заданої функції $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5-x}} = 2(5-x)^{-\frac{1}{2}}$, користуючись правилами інтегрування 2^0 і 3^0 , а також пунктом 2 таблиці 1, отримуємо:

$$f(x) = \frac{2(5-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot (-1) + C = -4\sqrt{5-x} + C, \quad x \in (-\infty; 5).$$

Дійсно, $f'(x) = (-4\sqrt{5-x})' + C' = -4 \cdot \frac{1 \cdot (-1)}{2 \cdot \sqrt{5-x}} = \frac{2}{\sqrt{5-x}}$.

Для знаходження довільної сталої C скористасьмо умовою $f(1) = -1$:

$$-1 = -4(\sqrt{5-1}) + C \Leftrightarrow -1 = -4 \cdot 2 + C \Leftrightarrow C = 7.$$

Таким чином, шукана функція має вигляд

$$f(x) = -4\sqrt{5-x} + 7.$$

Відповідь: $7 - 4\sqrt{5-x}$.

Приклади для практичних занять і самостійної роботи

1. Довести, що функція $F(x)$ являється первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо:

1) $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in R^+$.

2) $F(x) = \operatorname{tg} x - 2$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) $F(x) = 14 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.

4) $F(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$, $f(x) = 9x^2 - x$, $x \in R$.

5) $F(x) = \sin 3x + 5$, $f(x) = 3 \cos 3x$, $x \in R$.

2. Знайти первісні функцій:

1) $f(x) = 2x + 3x^2$.

Відповідь: $x^2 + x^3 + C$.

2) $f(x) = x^{-5} + x^{-2}$.

Відповідь: $-\left(\frac{1}{4}x^{-4} + x^{-1} + C\right)$.

3) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

Вказівка. Поділити чисельник і

знаменник дробу на $x - 1$.

Відповідь: $\frac{1}{3}(x-1)^3 + C, x \neq 1$.

4) $f(x) = \sqrt{2x}$.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + C$.

$$5) f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C, x \neq 0.$$

$$6) f(x) = \frac{3}{x+5}$$

$$\text{Відповідь: } 3 \ln|x+5| + C, x \neq -5.$$

$$7) f(x) = x^{3+\sqrt{2}}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x^{4+\sqrt{2}}}{4+\sqrt{2}} + C.$$

$$8) f(x) = 2 \sin x + \cos 3x.$$

$$\text{Відповідь: } -2 \cos x + \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

$$9) f(x) = \frac{2}{3 \sin^2 2x}$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 2x + C.$$

$$10) f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2x + C.$$

3. Для заданої функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$.

$$1) f(x) = x^4; \quad M(-1; 2).$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x^5 + 11}{5}.$$

$$2) f(x) = \sin 2x; \quad M(0; 1).$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3 - \cos 2x}{2}.$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}; \quad M\left(\frac{\pi}{12}; -1\right).$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{3} (2 + \operatorname{ctg} 3x).$$

$$4) f(x) = x^{-4}; \quad M(2; -3).$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{71x^3 + 8}{24x^3}.$$

4. Знайти функцію $F(x)$, якщо відомо, що $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ і що $F(1) = 3$.

$$\text{Відповідь: } F(x) = x^4 - x^3 + 3.$$

5. Для функції $f(x) = \cos 4x$ знайти первісну $F(x)$, якщо відомо, що $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = -1$.

$$\text{Відповідь: } F(x) = \frac{1}{8} (2 \sin 4x - 9).$$

2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПЕРВІСНОЇ

Розглянемо деяку функцію $f(x)$. Нехай для визначеності будемо вважати, що функція $f(x)$ зростаюча. Ця умова необов'язкова, головне, щоб функція $f(x)$ була неперервна і визначена на заданому проміжку. На рис. 1 заштрихована геометрична фігура (так звана криволінійна трапеція), обмежена графіком функції $f(x)$, відрізком $[a; x]$ осі Ox і перпендикулярами, проведеними в точках a та x . Нехай точка a фіксована; точка x нефіксована, вона може приймати значення від a і більше (в границях області визначення функції). Очевидно, що площа заштрихованої криволінійної трапеції являється функцією від x , позначимо її $S(x)$.

Розглянемо далі приріст Δx незалежної змінної. Відрізки $[a; x + \Delta x]$ відповідає площа $S(x + \Delta x)$ (рис. 2). Позначимо $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$. Приріст $\Delta S(x)$ є, очевидно, площею криволінійної трапеції, яка заштрихована. Із рис. 2 видно, що площа $ADEF < \Delta S(x) < \text{площа } ABCF$, але площа $ADEF$ дорівнює $f(x) \cdot \Delta x$, а площа $ABCF$ дорівнює $f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$, тобто

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta S(x) < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x \Leftrightarrow f(x) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) < \Delta f(x).$$

Тут позначили $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу неперервності $f(x)$ робимо висновок, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$ і тому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right) = 0.$$

Оскільки $f(x)$ не залежить від Δx , то можемо записати:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x), \quad (4)$$

а за означенням похідної

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x). \quad (5)$$

Зрівнюючи вирази (4) і (5), отримуємо

$$f(x) = S'(x). \quad (6)$$

Рівність (6) і дає нам геометричний зміст первісної: первісна функції $f(x)$, яка розглядається в точці x , є площею криволінійної трапеції, визначеної графіком функції $f(x)$ на відрізку $[a; x]$ осі Ox .

Нехай тепер $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, розглядувана в точці x . Згідно (5) можна записати: $S(x) = F(x) + C$.

Знайдемо сталу C , враховуючи, що $S(a) = 0$:

$S(a) = F(a) + C = 0$, звідки $C = -F(a)$. Таким чином,

$$S(x) = F(x) - F(a), \quad (7)$$

тобто, якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, то площею $S(x)$ криволінійної трапеції, визначеної графіком функції $f(x)$ на відрізку $[a; x]$, є різниця $F(x) - F(a)$.

3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Як було показано в п. 2, різниця значень первісної в двох будь-яких точках (7) залежить тільки від вибору цих точок і від вигляду заданої функції $f(x)$. Візьмемо точки a і b і розглянемо приріст первісної $F(b) - F(a)$.

Цей приріст відіграє важливу роль в апараті математичного аналізу і називається **визначеним інтегралом**.

Означення 2. Інтегралом від a до b функції $f(x)$ називається приріст первісної $F(x)$ цієї функції:

$$F(b) - F(a).$$

Визначений інтеграл позначається так:

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

Формула (8) читається наступним чином: “інтеграл від a до b , еф від ікс де ікс”. Числа a і b називаються границями інтегрування, a – нижньою, b – верхньою. Знак \int називається **знаком інтеграла**.

Функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**, а змінна x – **змінною інтегрування**. Проміжок $[a; b]$ називається **проміжком інтегрування**. При цьому слід відмітити, що може бути $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Таким чином, якщо $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, то за означенням інтеграла, враховуючи (8), одержуємо:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (9)$$

Рівність (9) відома в математичному аналізі як **формула Ньютона-Лейбніца**.

У відповідності з геометричним представленням первісної робимо висновок, що інтегралом від a до b функції $f(x)$ є площа криволінійної трапеції, визначеної графіком функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

На основі правил знаходження первісних можна сформулювати основні правила інтегрування:

1⁰. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = F(x) \Big|_a^b + G(x) \Big|_a^b. \quad (10)$$

2⁰. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx = k \cdot F(x) \Big|_a^b, \quad (11)$$

де k – стала.

3⁰. Справедлива наступна формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(kx + p) dx = \frac{1}{k} \int_{ka+p}^{kb+p} f(t) dt = \frac{1}{k} F(t) \Big|_{t=ka+p}^{t=kb+p}, \quad (12)$$

або

$$\int_a^b f(kx + p) dx = \frac{1}{k} F(kx + p) \Big|_{x=a}^{x=b}, \quad (13)$$

де $t = kx + p$, k і p – сталі, причому нові границі інтегрування отримуються за формулою $t = kx + p$ заміною x на a і на b .

$$4^{\circ}. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (14)$$

$$5^{\circ}. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ якщо } c \in [a; b]. \quad (15)$$

$$6^{\circ}. \int_a^a f(x) dx = 0. \quad (16)$$

7^o. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[-a; a]$, $a > 0$, і являється парною функцією, тобто $f(-x) = f(x)$, $x \in [-a; a]$,

то
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (17)$$

8^o. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[-a; a]$, $a > 0$, і являється непарною функцією, тобто $f(-x) = -f(x)$,

$x \in [-a; a]$, то
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (18)$$

Наведемо тепер декілька прикладів обчислення інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 (x^2 + 2) dx.$$

Розв'язання. Використовуючи правила 1^o, 2^o, таблицю 1 для первісних та формулу (9), одержуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 2) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0) + 2 \cdot (1 - 0) = \\ &= \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $2\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x+1} \right) dx.$$

Розв'язання.
$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x+1} \right) dx &= \int_0^{0,5} 4x dx - \int_0^{0,5} \frac{dx}{2x+1} = \\ &= 2x^2 \Big|_0^{0,5} - \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^{0,5} = \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (\ln 2 - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{1}{2} (\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) dx.$$

Розв'язання. Обчислимо даний інтеграл, використовуючи заміну змінної за правилом 3^o. Нехай $t = \frac{\pi}{3} - 3x$, тоді нижня границя інтегрування по новій змінній буде $t_{\text{н}} = \frac{\pi}{3} - 3 \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$, а верхня $t_{\text{в}} = \frac{\pi}{3} - 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$. Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) dx &= -\frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{5\pi}{3}} \sin t dt = \frac{1}{3} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{5\pi}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: 0.

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt.$$

Розв'язання. Перед обчисленням заданого інтеграла необхідно спочатку перетворити підінтегральну функцію:

$$\begin{aligned} (\sin 2t - \cos 2t)^2 &= \sin^2 2t - 2 \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t = \\ &= 1 - 2 \sin 2t \cdot \cos 2t = 1 - \sin 4t. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 4t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt = \\ &= t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \cos 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) + \frac{1}{4} \left(\cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} (-1 - 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt$ може бути обчислений за допомогою заміни $x = 4t$, при цьому нижня границя буде дорівнювати 0, а верхня π , тобто

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{4} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

Розв'язання.

Оскільки $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{2} |\sin x|$, то

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} |\sin x| dx.$$

Скориставшись основним правилом інтегрування (15), маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx = \\ &= (-\cos x) \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos x) \Big|_{2\pi}^{3\pi} - (-\cos x) \Big|_{3\pi}^{4\pi} = \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8. \end{aligned}$$

Відповідь: 8.

Приклад 6. Обчислити інтеграл.

$$\int_0^2 |1 - 5x| dx.$$

Розв'язання. Оскільки $|1 - 5x| = \begin{cases} 1 - 5x, & x \leq \frac{1}{5} \\ 5x - 1, & x > \frac{1}{5} \end{cases}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1 - 5x| dx &= \int_0^{\frac{1}{5}} (1 - 5x) dx + \int_{\frac{1}{5}}^2 (5x - 1) dx = \left(x - 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{5}} + \\ &+ \left(5 \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^2 = \frac{1}{5} - \frac{5 \cdot 1}{25 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 2 - \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 25} + \frac{1}{5} = \frac{41}{5}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{41}{5}$.

Приклади для практичних занять
і самостійної роботи

Група А

1. $\int_{-1}^1 (x+2) dx.$

Відповідь: 4.

2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}.$

3. $\int_3^{-2} \left(x^2 - \frac{x}{2} \right) dx.$

Відповідь: $-\frac{125}{12}.$

4. $\int_{\frac{1}{4}}^4 \left(x^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx.$

Відповідь: $-27\frac{21}{32}.$

5. $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

Відповідь: 2.

6. $\int_0^1 e^{kx} dx.$

Відповідь: $\frac{1}{k}(e^k - 1).$

7. $\int_0^3 (1+2x)^9 dx.$

Відповідь: $\frac{7^{10} - 1}{20}.$

8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}.$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln 5.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2 x}.$

Відповідь: 2.

Група Б

1. $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx.$

Відповідь: 3.

2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{2x}{9} \right)}.$

Відповідь: $\frac{9\sqrt{3}}{2}.$

3. $\int_{-2}^2 \frac{x^3 + x + x^2 + 1}{1+x^2} dx.$

Відповідь: 4.

4. $\int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}} dx.$

Відповідь: -33,75.

5. $\int_0^{\pi} \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) dx.$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx.$

Відповідь: $\frac{3\pi}{4}.$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx.$

Відповідь: $\frac{1}{2}.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx.$

Відповідь: $\frac{1}{8}.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot \cos 3x dx.$

Відповідь: $-\frac{4}{5}.$

10. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}.$

Відповідь: $\frac{11}{96}.$

11. $\int_0^2 |1-x| dx.$

Відповідь: 1.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРІЇ

Як було показано в п. 3, визначений інтеграл являє собою, з точки зору геометрії, площу криволінійної трапеції. Крім того, відомо, що з точки зору фізики визначений інтеграл може бути тлумачений як робота, виконана силою $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Можливість використання визначеного інтеграла в прикладних задачах геометрії та фізики визначає те практично важливе місце, яке посідає інтеграл при вивченні курсу математичного аналізу.

Обчислення площ плоских фігур

1⁰. Площа плоскої фігури, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, яка приймає тільки невід'ємні значення, віссю Ox ($y = 0$) та двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), (рис. 1), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ або } S = \int_a^b y(x) dx. \quad (19)$$

2⁰. Площа плоскої фігури, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, яка приймає лише недодатні значення, віссю Ox ($y = 0$) та двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), (рис. 3), обчислюється за формулою:

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (20)$$

3⁰. Розглянемо фігуру, обмежену неперервною функцією $f(x)$, $x \in [a; b]$, що приймає як додатні, так і від'ємні значення, (рис. 4). Нехай, наприклад, $a < c < d < b$, $f(c) = f(d) = 0$; на множині $[a; c] \cup (d; b]$ функція $f(x)$ приймає тільки додатні значення, а на інтервалі $(c; d)$ – тільки від'ємні значення. Якщо позначити через S_1 величину площі між графіком функції $f(x)$, $x \in [a; c]$ (відповідно S_2 при $x \in [c; d]$, S_3 при $x \in [d; b]$) і віссю Ox , то

$$S_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad S_2 = - \int_c^d f(x) dx, \quad S_3 = \int_d^b f(x) dx.$$

Для відрізка $[a; b]$ маємо

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3. \quad (21)$$

Таким чином, якщо $f(x)$, $x \in [a; b]$, приймає як додатні так і від'ємні значення, то число, що дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x) dx$,

співпадає з величиною, що дорівнює сумі площ фігур між графіком функції $f(x)$, $x \in [a; b]$ та віссю Ox , що знаходяться вище осі Ox , мінус сума площ фігур між графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ та віссю Ox , що знаходяться нижче осі Ox . Таким чином, при обчисленні сумарних площ треба виконувати правило знаків: площі, що знаходяться над віссю Ox , беруться зі знаком плюс, а площі, що розташовані під віссю Ox , зі знаком мінус.

4⁰. Площа плоскої фігури, обмеженої двома неперервними кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, причому всюди на відрізку $[a; b]$ $f_2(x) > f_1(x)$, і двома прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 5), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (22)$$

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y_1 = e^x$, $y_2 = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 6). Згідно з формулою (17) одержуємо:

$$S = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = (e^3 - 1) \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $(e^3 - 1)$ кв.од.

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ і віссю Ox .

Розв'язання. Зобразимо графічно задану фігуру (рис. 7). Для обчислення площі цієї фігури необхідно спочатку знайти точки перетину параболы з віссю Ox :

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким чином, в нашому випадку відрізок інтегрування $[0; 4]$, тобто $a = 0, b = 4$. Тепер, згідно з формулою (17), одержуємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (4x - x^2) dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{4}{2}(16 - 0) - \frac{1}{3}(4^3 - 0) = \\ &= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$ кв. од.

Приклад 3. Знайти площу, обмежену синусоїдою $y = \sin x$ на відрізку $[0; 2\pi]$ і віссю Ox .

Розв'язання. Задана фігура графічно зображена на рис. 8. З рисунка видно, що частина шуканої площі розташована над віссю Ox (на відрізку $[0; \pi]$) і її беремо зі знаком плюс, а частина площі розташована під віссю Ox (на відрізку $[\pi; 2\pi]$) і її беремо, згідно з правилом знаків, зі знаком мінус, тобто

$$S = S_1 + S_2, \text{ де } S_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx; S_2 = - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx.$$

Таким чином,

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4 \text{ (кв. од.)}.$$

Якби ми застосували формулу (17) без урахування правила знаків, то отримали б абсурдний результат:

$$S = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0 \text{ (кв. од.)}.$$

Такий результат вийшов тому, що на відрізку $[0; 2\pi]$ функція $y = \sin x$ змінює знак. Тому слід розбивати цей відрізок на два: $[0; \pi]$ та $[\pi; 2\pi]$, на кожному з яких функція зберігає свій знак (на першому – плюс, на другому – мінус), що ми вище і виконали.

Відповідь: 4 кв. од.

Приклад 4. Обчислити площу, обмежену прямою $x = 4$, кривою $y = 3x^2 - 6x$ та віссю Ox на відрізку $[0; 4]$.

Розв'язання. Побудуємо графіки заданих ліній (рис. 9). Парабола $y = 3x^2 - 6x$ перетинає вісь Ox в точках $(0; 0)$ і $(2; 0)$, причому точка $(2; 0)$ належить відрізку інтегрування $[0; 4]$. Розіб'ємо його на два: $[0; 2]$ і $[2; 4]$. На кожному з цих відрізків функція $y = 3x^2 - 6x$ зберігає свій знак: на першому – від'ємний, на другому – додатний.

Користуючись формулою (17) і правилом знаків, одержуємо:

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x) dx = -(x^3 - 3x^2) \Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2) \Big|_2^4 = \\ &= -(8 - 3 \cdot 4) - (4^3 - 2^3 - 3(4^2 - 2^2)) = 24 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 24 кв. од.

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1(x) = 5^x, y_2(x) = 3^{-x}, x = 2$.

Розв'язання. Графічно задана фігура зображена на рис. 10. Задані криві перетинаються при $x = 0$, а тому проміжок інтегрування в даному випадку буде $[0; 2]$.

Використовуючи формулу (18), отримаємо:

$$S = \int_0^2 (5^x - 3^{-x}) dx = \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^2 + \frac{3^{-x}}{\ln 3} \Big|_0^2 = \frac{5^2 - 1}{\ln 5} + \frac{3^{-2} - 1}{\ln 3} =$$

$$= \left(\frac{24}{\ln 5} - \frac{8}{9 \ln 3} \right) \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\left(\frac{24}{\ln 5} - \frac{8}{9 \ln 3} \right)$ кв. од.

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1(x) = -2(x^2 - x - 2)$ і $y_2(x) = x + 1$ для $x \in [-1; 2]$.

Розв'язання. Задана фігура зображена на рис. 11. З рисунка видно, що на відрізку $[-1; x_0]$ графік кривої $y_1(x)$ знаходиться вище графіка кривої $y_2(x)$ ($y_1 \geq y_2$), а на відрізку $[x_0; 2]$ графік $y_2(x)$ знаходиться вище графіка кривої $y_1(x)$ ($y_1 \leq y_2$). Тут x_0 – абсциса точки перетину графіків заданих ліній, яка розташована всередині інтервала $(-1; 2)$. Неважко визначити, що $x_0 = \frac{3}{2}$. Отже, шукана

площа $S = S_1 + S_2$, де

$$S_1 = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (y_1(x) - y_2(x)) dx; \quad S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^2 (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Таким чином,

$$S = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + 2x + 4 - x - 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x + 1 + 2x^2 - 2x - 4) dx =$$

$$= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + x + 3) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x^2 - x - 3) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-1}^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 \right) +$$

$$+ \left(2 \cdot \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 6 - 2 \cdot \frac{27}{24} + \frac{9}{8} + 3 \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{71}{12} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\frac{71}{12}$ кв. од.

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y_1(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{і} \quad y_2(x) = \frac{2}{\pi} |x - \pi|.$$

Розв'язання. Графічно задані лінії зображені на рис. 12, з якого видно, що задані лінії можуть перетинатися в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Переконаємося в цьому перевіркою:

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{і} \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \left| \frac{\pi}{2} - \pi \right| = 1;$$

$$y_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{3\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{і} \quad y_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \left| \frac{3\pi}{2} - \pi \right| = 1.$$

Враховуючи, що $|x - \pi| = x - \pi$ для $x \geq \pi$ і $|x - \pi| = \pi - x$, якщо $x < \pi$, а також застосовуючи формулу (18), отримуємо:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} (\pi - x) \right) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} (x - \pi) \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \cos x - 2 + \frac{2}{\pi} x \right) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 - \cos x - \frac{2}{\pi} x + 2 \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} x - \cos x - 1 \right) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(3 - \cos x - \frac{2}{\pi} x \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^2}{\pi} - \sin x - x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left(3x - \sin x - \frac{x^2}{\pi} \right) \Big|_{\pi}^{3\pi} = \left(\pi - \sin \pi - \pi - \frac{\pi}{4} + \right. \\
&+ \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Big) + \left(3 \cdot \frac{3\pi}{2} - 3\pi - \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \pi - \frac{9\pi}{4} + \pi \right) = \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) + \\
&+ \left(\frac{9\pi}{2} - 3\pi + 1 + \pi - \frac{9\pi}{4} \right) = \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (кв. од.)}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $\left(2 + \frac{\pi}{2} \right)$ кв. од.

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = (2 + \cos x) \sin^2 x$, прямими $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ та віссю абсцис.

Розв'язання. В даному прикладі задану фігуру графічно зображати необов'язково, оскільки очевидно, що функція $y = (2 + \cos x) \sin^2 x$ невід'ємна для всіх $x \in D(f)$, тому шукана площа буде:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) \sin^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2x + \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x \cdot \cos 2x}{2} \right) dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2x + \frac{\cos x}{2} \right) dx - \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + \cos x) dx = \\
&= \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(-\pi) + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \\
&- \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = (\pi + 1) - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \\
&= \left(\pi + \frac{2}{3} \right) \text{ кв. од.}
\end{aligned}$$

Відповідь: $\left(\pi + \frac{2}{3} \right)$ кв. од.

Приклад 9. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1(x) = 1 + \sin x$ і $y_2(x) = 2 - \frac{1}{4}(|x - 7| + |x - 3|)$.

Розв'язання. На даному прикладі продемонструємо той випадок, коли побудова заданої фігури (рис. 13) обов'язкова, оскільки з рисунка видно, що по-перше, не треба аналітично шукати точки перетину двох заданих кривих, по-друге, шукана площа визначається обчисленням інтеграла (18) на проміжку інтегрування $[\pi; 2\pi]$, на якому задана функція $y_2(x)$ має найпростіший вигляд, а саме $y_2(x) = 1$, оскільки $[\pi; 2\pi] \in [3; 7]$. Отже маємо:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\pi}^{2\pi} (1 - (1 + \sin x)) dx = - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \\
&= \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2 \text{ (кв. од.)}
\end{aligned}$$

Відповідь: 2 кв. од.

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1 = x^2$; $y_2 = 4x^2$; $y_3 = 1$; $y_4 = 4$.

Розв'язування. Фігура, площа якої підлягає визначенню, симетрична відносно осі Oy (рис. 14), а тому достатньо визначити площу її половини, тобто площу криволінійної трапеції $ABCD$ ($x > 0$). Для обчислення площі криволінійної трапеції $ABCD$ зручно

ввести функції, обернені даним: $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$. Фігура,

обмежена графіками цих функцій та прямими $x=1, x=4$, конгруентна криволінійній трапеції $ABCD$, а тому можна обчислити площу S_T криволінійної трапеції $ABCD$ за формулою (20):

$$S_T = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_1^4 = \frac{1}{3} (4^{3/2} - 1) =$$

$$= \frac{1}{3} (2^{2 \cdot 3/2} - 1) = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Площа S заданої фігури буде: $S = 2S_T = \frac{14}{3}$ кв. од.

Відповідь: $\frac{14}{3}$ кв. од.

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 1$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з точки $(0; 2)$.

Розв'язання. Нехай $M_1(x_0; y_0)$ і $M_2(-x_0; y_0)$ – точки дотику дотичних до параболи $y = -x^2 + 1$ (рис. 15). Як відомо, рівняння дотичної до заданої параболи має вигляд

$$y - y_0 = -2x_0(x - x_0). \quad (23)$$

Знайдемо координати точки дотику з умов: по-перше, точка дотику належить параболі, по-друге, дотична проходить через точку $(0; 2)$, тобто отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = -x_0^2 + 1, \\ 2 - y_0 = -2x_0(0 - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^2 + 1, \\ y_0 = 2 - 2x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x_0^2 = -x_0^2 + 1, \\ y_0 = -x_0^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = 1, \\ y_0 = -x_0^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Таким чином, $M_1(-1; 0)$ і $M_2(1; 0)$ – шукані точки дотику. Рівняння дотичних, відповідно з (23), запишуться у вигляді: $y = 2(x+1)$ і $y = -2(x-1)$.

Тепер нам необхідно обчислити площу фігури M_1PM_2K , симетричної відносно осі Oy . Як вже відзначалось, достатньо обчислити площу її половини M_1PK , обмеженої дотичною $y = 2(x+1)$, параболою $y = -x^2 + 1$ і віссю Oy ($x = 0$) на проміжку інтегрування $[-1; 0]$. На підставі формули (20) маємо

$$S = 2 \int_{-1}^0 (2(x+1) - (-x^2 + 1)) dx = 2 \int_{-1}^0 (2x + x^2 + 1) dx =$$

$$= 2 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 = 2 \left(0 - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - (-1) \right) = 2 \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$ кв. од.

Приклад 12. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y = -3x^2 - 12x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Розв'язання. Дотична проходить через точку $(-1; 9)$ і має кутовий коефіцієнт $y'(-1) = (-6x - 12)|_{x=-1} = -6$. Її рівняння: $y = -6(x+1) + 9 = -6x + 3$.

Шукана площа фігури (рис. 16) дорівнює:

$$S = \int_{-1}^0 (-6x + 3) dx - \int_{-1}^0 (-3x^2 - 12x) dx = \int_{-1}^0 (3x^2 + 6x + 3) dx =$$

$$= 3 \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = (x+1)^3 \Big|_{-1}^0 = 1 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: 1 кв. од.

Приклад 13. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y_1 = 2\sqrt{x}$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y_2 = 1 + \ln x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y_2 = 1 + \ln x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ буде мати вигляд: $y - 1 = x - 1$ або $y = x$. Фігура, площу якої належить визначити, заштрихована на рис. 17. Абсцису точки A перетину графіків функцій $y_1 = 2\sqrt{x}$ і $y = x$ знаходимо з рівняння $x = 2\sqrt{x}$. Його розв'язки: $x = 0$ і $x = 4$. Отже, точка A має координати $(4; 4)$.

Шукана площа:

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \left(2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\frac{8}{3}$ кв. од.

Приклад 14. Обчислити площу S фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \frac{|4 - x^2|}{4}$ та $y_2 = 7 - |x|$.

Розв'язання. Будуємо графіки даних функцій (рис. 18), враховуючи, що функції парні і

$$\frac{|4 - x^2|}{4} = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{4}, & \text{якщо } x \geq 2, \\ \frac{4 - x^2}{4}, & \text{якщо } 0 \leq x < 2, \end{cases}$$

$$7 - |x| = 7 - x, \text{ якщо } x \geq 0.$$

Враховуючи симетричність фігури відносно осі Oy , досить обчислити площу частини, що лежить праворуч від цієї осі. Із

системи рівнянь
$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 4}{4}, \\ y = 7 - x \end{cases}$$

знаходимо координати точки B . Система має два розв'язки: $(4; 3)$ і $(-8; 15)$. Зрозуміло, що точка B має координати $(4; 3)$. Другий розв'язок системи – це друга точка перетину прямої $y = 7 - x$ з пара-

болою $y = \frac{x^2 - 4}{4}$.

Площу фігури $ABDE$ знаходимо як різницю площі трапеції $ABCO$ та суми площ двох криволінійних трикутників OED і DBC . Отримуємо:

$$S_{ABCO} = \frac{7+3}{2} \cdot 4 = 20;$$

$$S_{OED} = \int_0^2 \frac{4 - x^2}{4} dx = \left(x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$S_{DBC} = \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{4} dx = \left(\frac{x^3}{12} - x \right) \Big|_2^4 = \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3};$$

$$S_{ABDE} = S_{ABCO} - (S_{OED} + S_{DBC}) = 20 - \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right) = 16 \text{ (кв. од.)}$$

$$S = 2 \cdot S_{ABDE} = 2 \cdot 16 = 32 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: 32 кв. од.

Приклад 15. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = -x - 16$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат.

Розв'язання. Нехай $M_1(x_0; y_0)$ і $M_2(x_0; -y_0)$ – точки дотику дотичних до параболи $y^2 = -x - 16$, проведених з початку координат (рис. 19). Знайдемо рівняння цих дотичних. Рівняння дотичної до заданої параболи має вигляд: $x - x_0 = -2y_0(y - y_0)$.

Оскільки дотична проходить через початок координат і має спільну точку з параболою, то для координат точок дотику маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_0 = 2y_0^2, \\ x_0 = -y_0^2 - 16. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $x_0 = -32, y_0 = 4$ і $x_0 = -32, y_0 = -4$.
Отже, координати точок дотику є $M_1(-32; 4)$ і $M_2(-32; -4)$, а
рівняння дотичних: $x = 8y$ і $x = -8y$. Шукана площа дорівнює:
 $S = 2(S_{AM_1O} - S_{AM_1B})$. Площу трикутника AM_1O легко знайти, бо
 $|AO| = 32$, а $|AM_1| = 4$:

$$S_{AM_1O} = \frac{1}{2}|AO| \cdot |AM_1| = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 = 64 \text{ (кв. од.)}.$$

Площу криволінійного трикутника AM_1B знаходимо інтегруванням:

$$S_{AM_1B} = \int_{-32}^{-16} \sqrt{-x-16} dx = -\frac{2}{3}(-x-16)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-32}^{-16} = \frac{128}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Отже, шукана площа: $S = 2\left(64 - \frac{128}{3}\right) = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$ (кв. од.).

Відповідь: $42\frac{2}{3}$ кв. од.

Приклад 16. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком
функції $f(x) = 2\cos^2 x(1 + \sin^2 x)$, прямими $x = 0$ і $x = 2\pi$ та
віссю абсцис.

Розв'язання. Для обчислення шуканої площі можна не
будувати графік функції $f(x)$. Розглядувана функція невід'ємна,
тому шукана площа дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 2\cos^2 x(1 + \sin^2 x) dx = \int_0^{2\pi} (2\cos^2 x + 2\cos^2 x \sin^2 x) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) dx = \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2x + \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)\right) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x\right) dx = \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 4x\right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{5}{2}\pi \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{5}{2}\pi$ кв. од.

Приклад 17. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками
функцій $y_1 = 2\sqrt{x}$ і $y_2 = \frac{x}{5-x}$.

Розв'язання. Графіки даних функцій представлені на рис.20.

Абсцису точки A знаходимо з рівняння $2\sqrt{x} = \frac{x}{5-x}$. Маємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\left(2 - \frac{\sqrt{x}}{5-x}\right) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \frac{10 - 2x - \sqrt{x}}{5-x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 2)}{x-5} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Шукана площа } S &= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x}{5-x}\right) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} + 1 + \frac{5}{x-5}\right) dx = \\ &= \left(2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + 5\ln|x-5|\right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} + 4 - 5\ln 5 = \left(\frac{44}{3} - 5\ln 5\right) \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\left(\frac{44}{3} - 5\ln 5\right)$ кв. од.

Приклад 18. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами
 $y_1 = x^2 - 2x + 2$ і $y_2 = 2 + 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки заданих функцій (рис. 21) і
знайдемо абсциси точок їх перетину з рівняння $x^2 - 2x + 2 =$
 $= 2 + 4x - x^2$. Розв'язавши рівняння, маємо $x = 0$ і $x = 3$.

Шукана площа дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 ((2 + 4x - x^2) - (x^2 - 2x + 2)) dx = \int_0^3 (2 + 4x - x^2 - x^2 + 2x - \\ &- 2) dx = \int_0^3 (6x - 2x^2) dx = 6 \int_0^3 x dx - 2 \int_0^3 x^2 dx = 3x^2 \Big|_0^3 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^3 = \end{aligned}$$

$$= 27 - 18 = 9 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: 9 кв. од.

Приклад 19. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ та прямими $x = 0$ і $x = 2\pi$.

Розв'язання. Шукана площа (рис. 22) дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx = \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $4\sqrt{2}$ кв. од.

Приклад 20. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \ln(x+6)$, $y_2 = 3 \ln x$ та прямими $x = 0$ і $y = 0$.

Розв'язання. Рівняння $\ln(x+6) = 3 \ln x$, як легко перекона-тися, має єдиний корінь $x = 2$. Тому площа фігури, що показана на рис. 23, дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \ln(6+x) dx - \int_1^2 3 \ln x dx = \int_0^2 \ln(6+x) d(6+x) - 3 \int_1^2 \ln x dx = \\ &= \left((x+6) \ln(x+6) - (x+6) \right) \Big|_0^2 - 3(x \ln x - x) \Big|_1^2 = 8 \ln 8 - 8 - 6 \ln 6 + 6 - \\ &- 6 \ln 2 + 3 = (12 \ln 2 - 6 \ln 3 + 1) \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $(12 \ln 2 - 6 \ln 3 + 1)$ кв. од.

Приклад 21. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \operatorname{tg} x$, $y_2 = \frac{2}{3} \cos x$ та прямою $x = 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Розв'язання. Рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \cos x$, тобто рівняння

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \text{ рівносильне рівнянню } \sin x = \frac{1}{2}.$$
 Звідки,

враховуючи умову $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$, знаходимо, що $x = \frac{\pi}{6}$. Тому шукана площа (рис. 24) дорівнює

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2}{3} \cos x - \operatorname{tg} x \right) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x dx + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \\ &+ \frac{2}{3} (-\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \left(-\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \right) \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $\left(-\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \right)$ кв. од.

Приклад 22. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = 6x^2 - 5x + 1$, $y_2 = \cos \pi x$ та прямими $x = 0$ і $x = 1$.

Розв'язання. Рівняння $6x^2 - 5x + 1 = \cos \pi x$, як легко довести, використовуючи монотонність функцій, має два кореня: $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$. Тому шукана площа (рис. 25) дорівнює

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos \pi x - 6x^2 + 5x - 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x^2 - 5x + 1 - \cos \pi x) dx = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \sin \pi x - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} - x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(2x^3 - \frac{5x^2}{2} + x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2} + 1 - \frac{2}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}\right)$ кв.од.

Приклад 23. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = x^\alpha$, $y_2 = x^\alpha$ та прямими $x = 0$ і $x = 1$ ($\alpha > 1$).

Розв'язання. Шукана площа (рис. 26) дорівнює

$$S = \int_0^1 (x^\alpha - x^\alpha) dx = \int_0^1 x^\alpha dx - \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ кв. од.

Приклад 24. Визначити, при якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y_1 = 0$ і $y_2 = 3 - x^2 - 2x$, навпіл.

Розв'язання. Графік функції $y = 3 - x^2 - 2x = 4 - (x+1)^2$ отримується з графіка функції $y = 4 - x^2$ при паралельному перенесенні на одиницю вліво (рис. 27). Тому задача рівносильна такій: при якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$, $x = 0$ і $y = 4 - x^2$, навпіл? З рис. 27 видно, що

$$S_{\text{ом}} = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3};$$

$$S_{\text{ам}} = \int_0^{4-a} (4 - a - x^2) dx = \left((4-a)x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^{4-a} = \frac{2}{3}(4-a)^3.$$

Шукане значення a визначаємо з рівняння $2 \cdot \frac{2}{3}(4-a)^3 = \frac{16}{3}$.

Таким чином, пряма $y = a$ ділить навпіл площу вищевказаної фігури при $a = 4 - 2\sqrt[3]{2}$.

Відповідь: $4 - 2\sqrt[3]{2}$.

Приклад 25. Визначити, при якому $a > 0$ графіки функцій $y_1 = \frac{x+|x|}{2}$ і $y_2 = ax - x^2$ обмежують фігуру з площею $\frac{9}{2}$ кв.од.

Розв'язання. Графіки даних функцій представлені на рис. 28. Оскільки при $x \geq 0$ $\frac{x+|x|}{2} = x$, то абсцису точки A перетину графіків даних функцій знаходимо з рівняння $ax - x^2 = x$, розв'язки якого $x = 0$ і $x = a - 1$. Зрозуміло, що абсциса точки A дорівнює $a - 1$. Графіки даних функцій обмежують фігуру, площа якої:

$$S = \int_0^{a-1} (ax - x^2 - x) dx = \left(\frac{(a-1)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^{a-1} = \frac{(a-1)^3}{2} - \frac{(a-1)^3}{3} = \frac{(a-1)^3}{6}.$$

Ця площа буде дорівнювати $\frac{9}{2}$, коли $\frac{(a-1)^3}{6} = \frac{9}{2}$, тобто при $a = 4$.

Відповідь: $a = 4$.

Приклад 26. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$$

Розв'язання. Графік функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ являє собою півколо радіуса a (рис. 29). Оскільки визначений інтеграл являє собою площу півкола з тим же радіусом, то $S = \frac{\pi a^2}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Приклад 27. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити $\int_{-1}^2 ||x| - 1| dx$.

Розв'язання. Графік функції $y = ||x| - 1|$, $x \in [-1; 2]$ представлений на рис. 30. Отже, величина шуканого інтеграла дорівнює сумі площ двох трикутників. Таким чином,

$$\int_{-1}^2 ||x| - 1| dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{2}$.

Приклад 28. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

$$\int_{-1}^1 \arccos x dx.$$

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, показаній на рис. 31.

Якщо доповнити цю криволінійну трапецію до прямокутника, сторони якого визначені рівняннями $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \pi$ і площа якого дорівнює 2π , то із властивості симетрії графіка функції $y = \arccos x$ і прямокутника відносно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

впливає, що шуканий інтеграл представляє собою половину площі прямокутника, тому

$$\int_{-1}^1 \arccos x dx = \pi.$$

Відповідь: π .

Приклади для практичних занять і самостійної роботи

Група А

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$. | Відповідь: 9 кв.од. |
| 2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. | Відповідь: 0,5 кв.од. |
| 3) $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. | Відповідь: 1,5 кв.од. |
| 4) $y = 2x - x^2$, $y = 0$. | Відповідь: $\frac{4}{3}$ кв.од. |
| 5) $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = 0$. | Відповідь: $\frac{8}{3}$ кв.од. |
| 6) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 2$. | Відповідь: $\frac{11}{4}$ кв.од. |
| 7) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$. | Відповідь: $\frac{8}{3}$ кв.од. |
| 8) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. | Відповідь: $\frac{5}{12}$ кв.од. |
| 9) $y = 2x - x^2$, $y = -3$. | Відповідь: $10\frac{2}{3}$ кв.од. |
| 10) $y = 2 + \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. | Відповідь: $(2 + 2\pi)$ кв.од. |
| 11) $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$. | Відповідь: $\left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)$ кв.од. |
| 12) $y = 3^x$, $x = -1$, $x = 3$, $y = 0$. | Відповідь: $\frac{80}{\ln 27}$ кв.од. |
| 13) $y = \sin \frac{x}{3}$, $x = -\pi$, $x = 2\pi$, $y = 0$. | Відповідь: 3 кв.од. |
| 14) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. | Відповідь: 1 кв.од. |

- 15) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$. **Відповідь:**
 $\frac{2}{3}(6\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$ кв.од.
- 16) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$. **Відповідь:** $\frac{53}{15}$ кв.од.
- 17) $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$. **Відповідь:** $\frac{7}{6}$ кв.од.
- 18) $y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. **Відповідь:**
 $\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ кв.од.
- 19) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$. **Відповідь:** $\frac{8}{5}$ кв.од.
- 20) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$. **Відповідь:** $\frac{9}{2}$ кв.од.
- 21) $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$. **Відповідь:** $\frac{15 - 16 \ln 2}{4}$ кв.од.
- 22) $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $y = x^2$. **Відповідь:** $\frac{6 - \pi}{3\pi}$ кв.од.
- 23) $y = 4 - \frac{6}{|x+1|}$, $y = |-x+2|$. **Відповідь:** $(11 - 6 \ln 3)$ кв.од.
- 24) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$. **Відповідь:** $\frac{1}{3}$ кв.од.
- 25) $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$. **Відповідь:** $\frac{8}{3}$ кв.од.
- 26) $y = 4 \sin^2 x \cdot (1 + \cos^2 x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, $y = 0$. **Відповідь:**
 5π кв.од.

- 27) $y = \cos x$, $y = 1 + \frac{2x}{\pi}$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{4}\right]$. **Відповідь:** $\frac{3\pi - 4}{4}$ кв.од.
- 28) $y = 2 - |2 - x|$, $y = \frac{3}{|x|}$. **Відповідь:** $\frac{4 - \ln 27}{2}$ кв.од.

Група Б

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

- 1) $y = x^4$, $y = x$. **Відповідь:** $\frac{3}{10}$ кв.од.
- 2) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$. **Відповідь:** 18 кв.од.
- 3) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{3x - x^2}{2}$. **Відповідь:** 8 кв.од.
- 4) $y = 4 \cdot e^{-x}$, $y = 5 - e^x$. **Відповідь:** $(5 \ln 4 - 6)$ кв.од.
- 5) $y = \ln(x - 2)$, $y = \ln \frac{6}{9 - x}$. **Вказівка:** Фігура, обмежена графіками даних функцій, співпадає з фігурою, обмеженою графіками функцій, обернених до заданих (див. Приклад 10)
Відповідь: $(7 \ln 6 - 10)$ кв.од.
- 6) $y = \frac{1}{2} + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$. **Відповідь:** 4 кв.од.
- 7) $y = (1 + \sin x) \cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$. **Відповідь:**
 $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$ кв.од.
- 8) $y = 2 + \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{3\pi}{2}\right|$, $y = 2 + \sin x$. **Відповідь:** $\left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right)$ кв.од.
- 9) $y = 1 - \cos x$, $y = \frac{1}{4}(|x + 5| + |x - 1|)$. **Відповідь:** 2 кв.од.

10) $y = \operatorname{tg} x, y = \sin x, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{4}$. **Відповідь:**

$$\left(\frac{3}{2} \ln(2-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ кв. од.}$$

11) $y = \operatorname{ctg} x, y = \cos x, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{4}$. **Відповідь: 1**

$$\left(\frac{3}{2} (\ln 2 - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ кв. од.}$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, дотичною до графіка цієї функції в точці $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ і прямими $x = 0, y = 0$.

Відповідь: $\frac{4\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} - 16}{16}$ кв. од.

3. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 0,5x^2 - 2x + 2$ і дотичними до графіка цієї функції в точках $\left(1; \frac{1}{2} \right)$ і $(4; 2)$. **Відповідь:** $\frac{9}{8}$ кв. од.

4. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - x + 2$ і дотичною до графіка функції $y = \ln x + 3$ в точці $(1; 3)$. **Відповідь:** $\frac{4}{3}$ кв. од.

5. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = -16 - x^2$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат. **Відповідь:** $\frac{128}{3}$ кв. од.

6. До гіперболи $y = \frac{4}{x}$ проведено дві дотичні: одна – в точці

$M(2; 2)$, а друга – паралельно прямій $y = -4x$. Знайти площі трикутників, утворених кожною з цих дотичних і осями координат. **Відповідь:** $S_1 = S_2 = S_3 = 8$ кв. од.

7. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

1) $\int_0^{\sqrt{2}} \arcsin x dx$. **Відповідь:** $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) - 1$.

2) $\int_{-2}^4 ||x - 2| - 1| dx$. **Відповідь:** 4,5.

3) $\int_{-2}^0 \sqrt{4 - x^2} dx$. **Відповідь:** $-\frac{\pi}{2}$.

4) $\int_{-1}^0 (\sqrt{1 - x^2} - x - 1) dx$. **Відповідь:** $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$.

8. Знайти значення $a, a < 0$, при якому площа фігури, яка обмежена параболою $y = (1 + a^2)^2 x^2 + a$ і прямою $y = 0$, буде найбільшою. **Відповідь:** $a = -1$.

9. Знайти найменше значення площі фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 + 2x - 3$ і прямою $y = ax + 1$.

Відповідь: $S(2) = \frac{32}{3}$ кв. од.

10. В якій точці графіка функції $y = x^2 + 1$ треба провести дотичну, щоб вона відтиняла від фігури, утвореної графіком цієї функції і прямими $y = 0, x = 0, x = 1$, трапецію найбільшої площі?

Відповідь: $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4} \right)$.

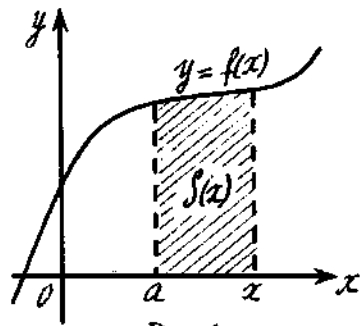


Рис. 1

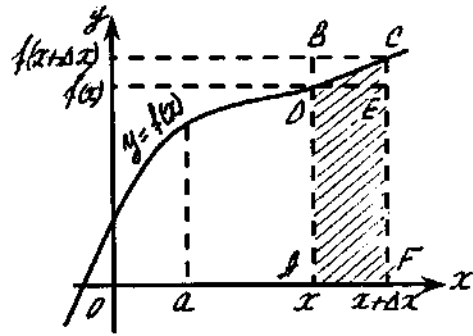


Рис. 2

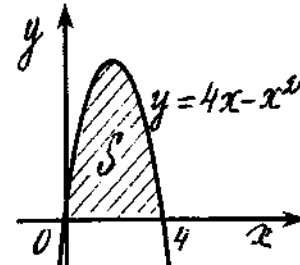


Рис. 7

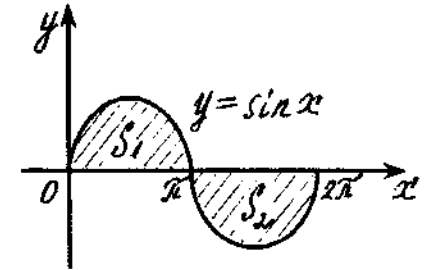


Рис. 8

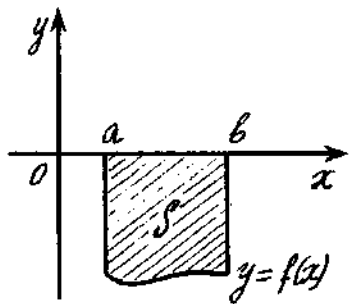


Рис. 3

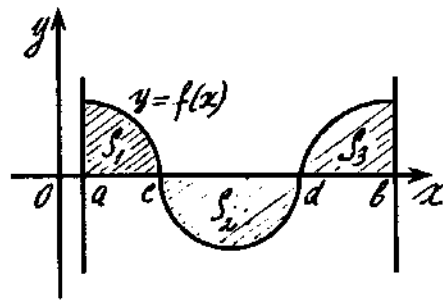


Рис. 4

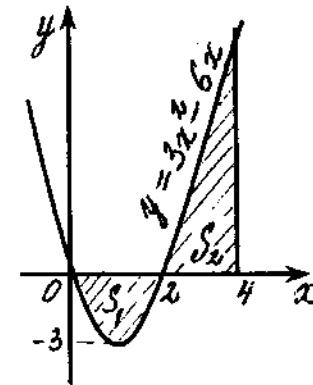


Рис. 9

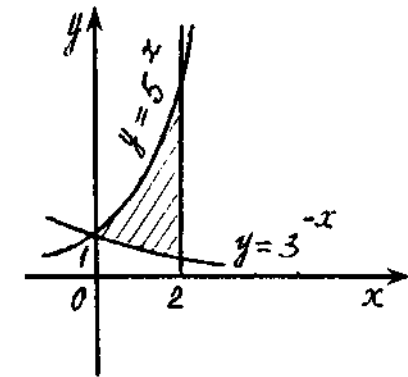


Рис. 10

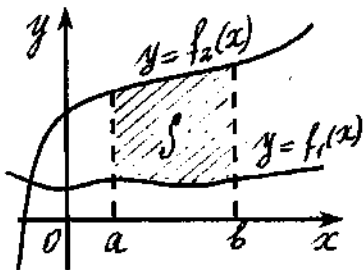


Рис. 5

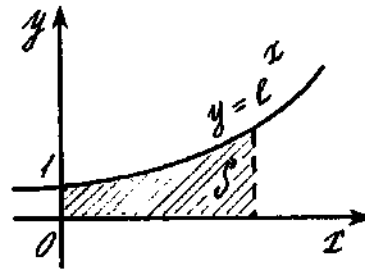


Рис. 6

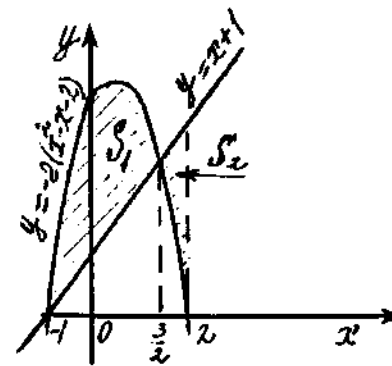


Рис. 11

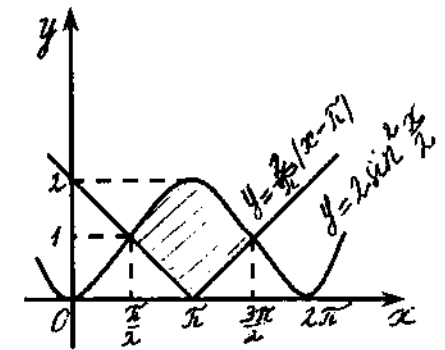


Рис. 12

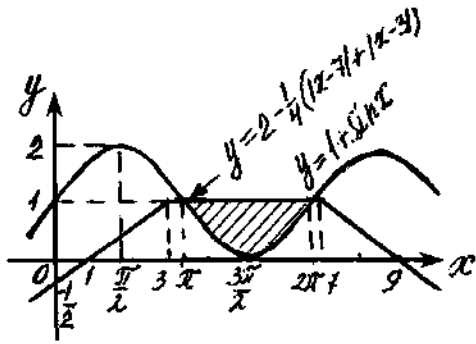


Рис. 13

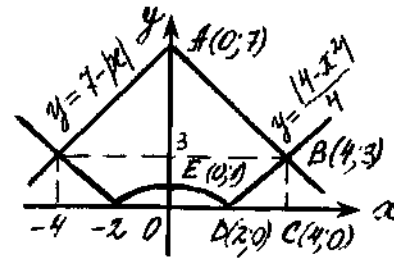


Рис. 18

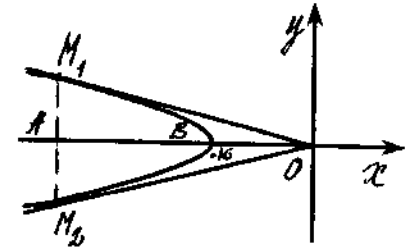


Рис. 19

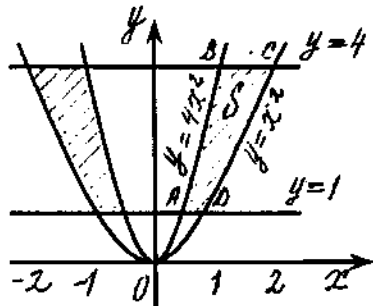


Рис. 14

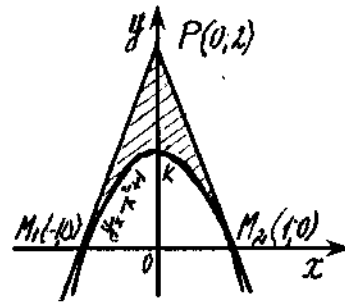


Рис. 15

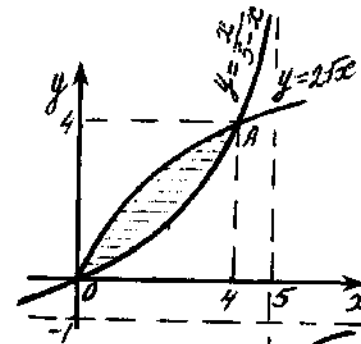


Рис. 20

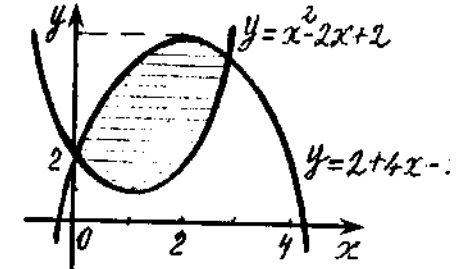


Рис. 21

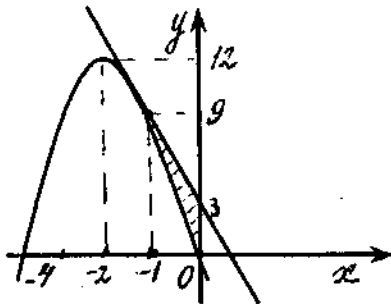


Рис. 16

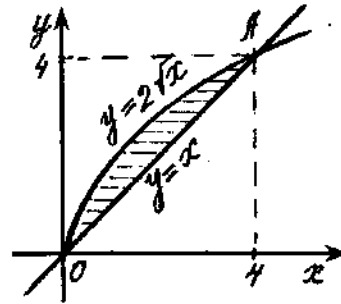


Рис. 17

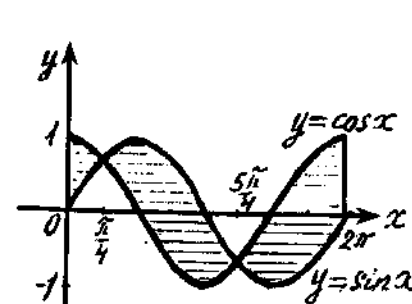


Рис. 22

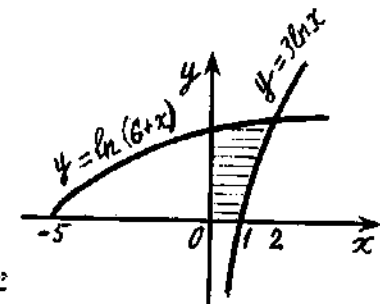


Рис. 23

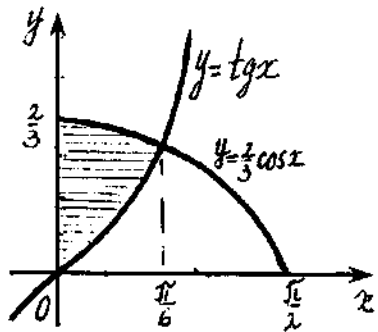


Рис. 24

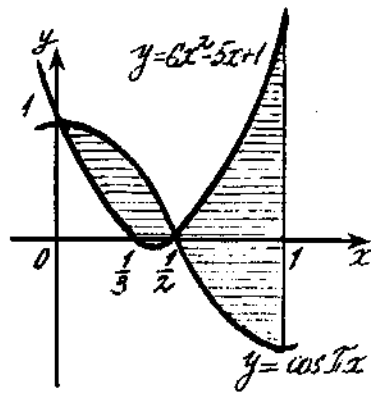


Рис. 25

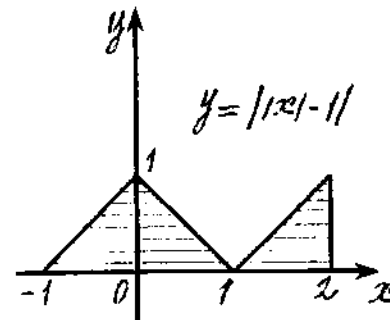


Рис. 30

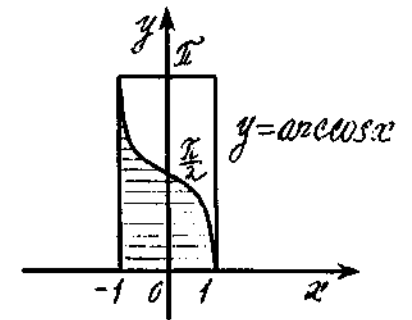


Рис. 31

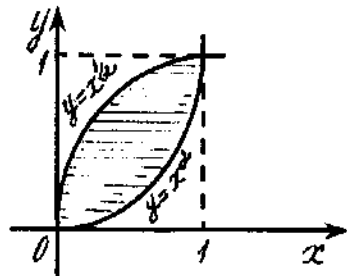


Рис. 26

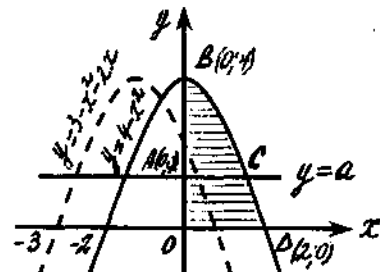


Рис. 27

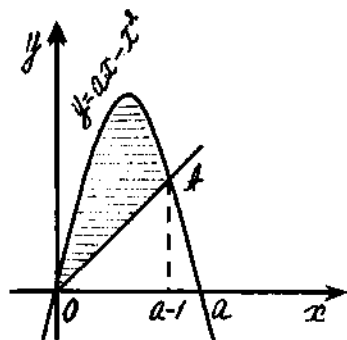


Рис. 28

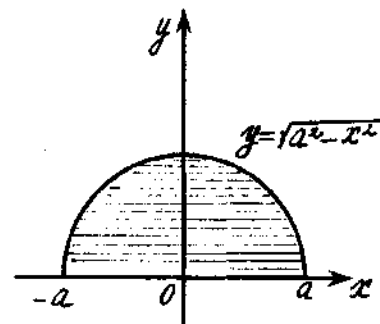


Рис. 29

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н.* Задачи по математике. Начала анализа. – М.: Наука, 1990.
2. *Вишенський В.А., Перестюк М.О.* Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища шк., 2001.
3. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Збірник задач з математики. Посібник для вступників до вузів. – К.: ТВІМС, 2000.
4. *Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗів.* / За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища шк., 1996.
5. *Фадеев Д.К., Никулин М.С., Соколовский И.Ф.* Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, 1987.

ЗМІСТ

1. Означення первісної функції	3
Приклади для практичних занять і самостійної роботи	8
2. Геометричний зміст первісної	10
3. Визначений інтеграл	11
Приклади для практичних занять і самостійної роботи	17
4. Застосування визначеного інтеграла в геометрії	19
Приклади для практичних занять і самостійної роботи	38
Список літератури	50

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна
МУРАНОВА Наталія Петрівна
ПЛЯВСЬКА Тетяна Григорівна

МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Технічний редактор *А.І. Лавринович*

Підп. до друку 07.06.07. Формат 60x84/16. Папір офс.

Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,02. Обл.- вид. арк. 3,25.

Дод. тираж 1000 прим. Замовлення № 130-1.

Видавництво НАУ

03680. Київ-680, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002