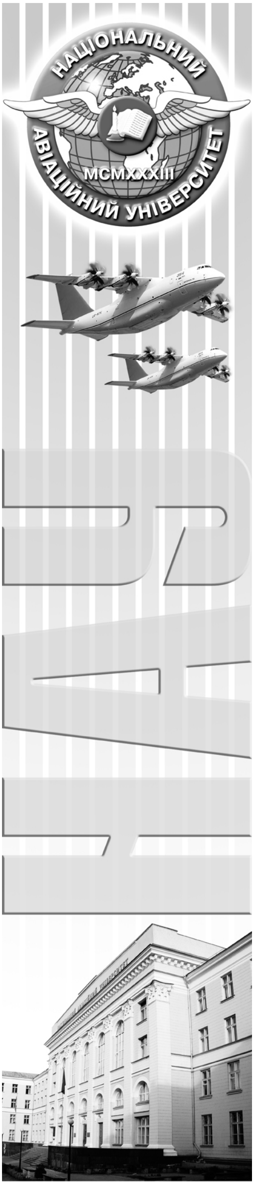


VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Н.П. Муранова, Л.А. Харченко,
Г.В. Шевченко

МАТЕМАТИКА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Н.П. Муранова, Л.А. Харченко,
Г.В. Шевченко

МАТЕМАТИКА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

2-ге видання, стереотипне

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 317.23: 378.147.88(076.5)
ББК В 10я7
М 91

Рецензенти: *В.В. Ясінський* – канд. фіз.-мат. наук, проф., (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»);
В.М. Буртняк – канд. техн. наук, (Товариство з обмеженою відповідальністю «Компанія «ЮТАС»);
К.І. Мазур – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний авіаційний університет)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 8 від 25.10.2007 р.).

Муранова Н.П.

М 91 Математика. Похідна та її застосування: навч.-метод. посіб. / Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко. – 2-ге вид., стер. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. – 128 с.

ISBN 978-966-598-505-1

У посібнику подано основні означення, теореми і формули розділів: «Похідна», «Геометричний та фізичний зміст похідної», «Рівняння дотичної до графіка функції», «Дослідження функцій та побудова їх графіків» та приклади і вправи з відповідями для самостійної роботи. Систематизовано всі типи завдань, що відповідають наведеним вище розділам шкільного курсу математичного аналізу.

Для учнів 11-х класів, слухачів підготовчих курсів і підготовчого відділення, абітурієнтів, викладачів математики.

УДК 317.23: 378.147.88(076.5)
ББК В 10я7

ISBN 978-966-598-505-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладено основні поняття, прийоми і методи диференціювання та застосування похідної до знаходження рівняння дотичної до графіка функції.

Зміст посібника відповідає програмі з математики середньої загальноосвітньої школи і програмі для вступників до вищих навчальних закладів.

Матеріал поданий за принципом від простого до складного відповідно до схеми:

1) основні означення та поняття, виведення (або доведення) основних формул і теорем;

2) приклади, які є опорними, базисними;

3) вправи для самостійного розв’язування та відповіді до них.

Мета посібника – допомогти вступникам до вищих навчальних закладів опанувати техніку диференціювання та використання похідної, навчити розв’язувати задачі за допомогою опорних задач, сприяти розвитку мислення та творчих здібностей учнів.

Засвоєння викладеного в посібнику матеріалу полегшить вивчення відповідного курсу у вищому навчальному закладі.

Розділ I. ПОХІДНА

§ 1. Задачі, що приводять до поняття похідної

Означення похідної

Поняття похідної – фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні і т.д.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної. Отже наша найближча мета – ознайомитись з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ.

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно в одному напрямі за законом $S = f(t)$, де $t-$ час, S – шлях, який точка проходить за час *t*. (рис. 1)

За деякий час t_0 точка проходить шлях $S_0 = f(t_0)$.

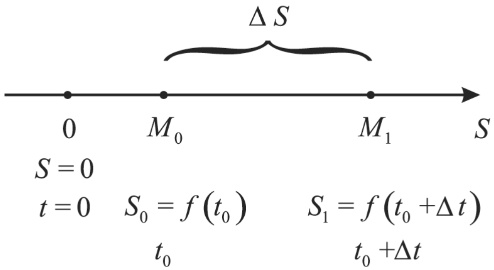


Рис. 1

Визначимо швидкість V_0 матеріальної точки в момент t_0. За час $t = t_0 + \Delta t$ ($\Delta t -$приріст часу) точка пройде шлях $S = f(t_0 + \Delta t)$. Отже за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ точка проходить шлях $\Delta S = S - S_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.

Нехай v – середня швидкість руху за час Δt. Очевидно $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точною, якщо Δt буде зменшуватись. Таким чином, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість наближається до швидкості в момент часу t_0.

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості при умові, що Δt наближається до нуля

$$V_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Δt називається приростом часу, а ΔS – приростом шляху. До знаходження границі такого виду зводяться численні задачі.

Наприклад:

Точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = 5t^2 + t + 3$ (S – шлях, t – час). Знайдіть швидкість точки: а) в довільний момент t_0; б) в момент часу $t = 7$ с.

Розв’язання:

а) 1. Нехай значення аргументу t_0 одержало приріст Δt, тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$.

2. Тоді приріст шляху:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - \left(5t_0^2 + t_0 + 3\right) =$$
$$= 5t_0^2 + 10t_0\,\Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t.$$

3. Знаходимо відношення приросту шляху до приросту часу: $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t.$

4. Знайдемо границю цього відношення при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t_0 + 1 + 5\Delta t) = 10t_0 + 1.$$

Отже, при заданому законі руху $S(t)$ миттєва швидкість $v(t)$ в довільний момент часу t обчислюється за формулою

$$v(t) = 10t + 1.$$

Якщо $t = 7\,\text{с}$, то $v(7) = 10 \cdot 7 + 1 = 71 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Відповідь: а) $10t_0 + 1$. б) $71\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

В курсі геометрії було введено означення дотичної до кола. Введемо означення дотичної до кривої.

Розглянемо функції $y = f(x)$ і її графік – криву лінію (рис. 2).

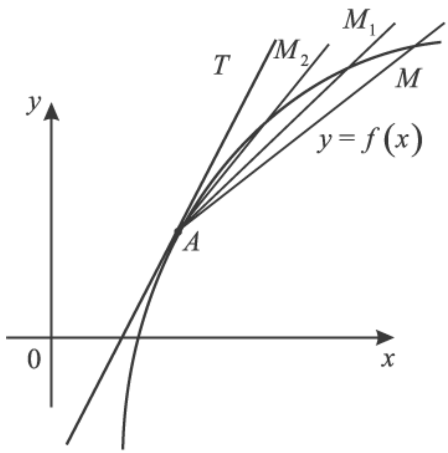


Рис. 2

Нехай точки A і M належать графіку функції $y = f(x)$, проведемо січну AM.

Зафіксуємо точку A. Нехай точка M, рухаючись вздовж кривої, наближається до точки A. При цьому січна буде повертатись навколо точки A, і в граничному положенні точка M співпаде з точкою A, а січна матиме положення прямої AT. Цю точку називають дотичною до даної кривої в точці A.

Розглянемо таку задачу:

Провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0;\, y_0)$.

Положення дотичної $y = kx + b$, що проходить через точку $A(x_0;\, y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі OX (рис. 3, 4).

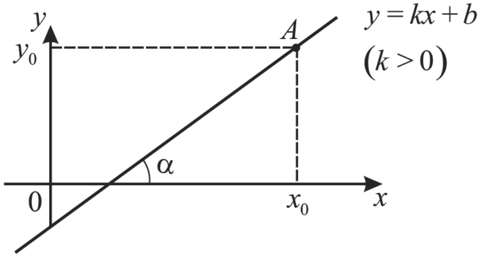


Рис. 3

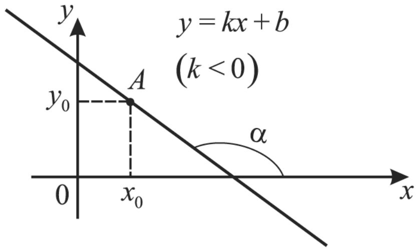


Рис. 4

Задача полягає в тому, щоб знайти кутовий коефіцієнт. Нехай в точці $A\left(x_0;\, y_0\right)$ (рис. 5) кривої $y = f\left(x\right)$ існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1. Надамо аргументу x_0 приросту Δx, одержимо нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.

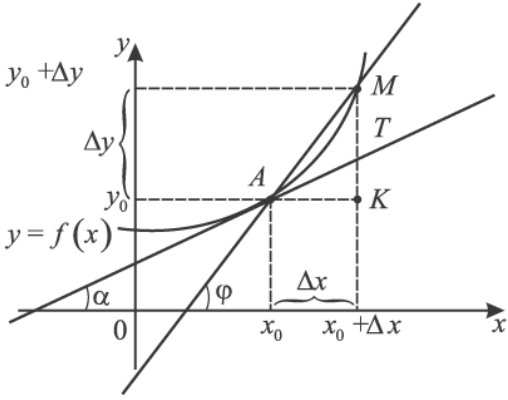


Рис. 5

2. Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right).$$

3. Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

З трикутника AMK маємо: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi;$

4. Якщо $\Delta x \to 0,$ то $\Delta y \to 0$ і M наближається до точки A, рухаючись вздовж кривої.

Граничним положенням січної AM при $\Delta x \to 0$ буде дотична AT, яка утворює з додатним напрямом осі OX деякий кут α. Тобто: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k.$

Розглянуті вище задачі знаходження миттєвої швидкості і знаходження кутового коефіцієнта дотичної розв'язуються одним і тим самим способом, що складається з кількох етапів:

1) надання приросту Δx аргументу x;

2) знаходження приросту функції Δy ;

3) знаходження відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) знаходження границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

До знаходження границі такого виду зводяться численні задачі (наприклад з природознавства).

Похідною функції $y = f\left(x\right)$ ***в точці*** x_0 ***називається границя***

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x},$$

якщо ця границя існує.

Похідна функції $y = f\left(x\right)$ в точці x_0 позначається так: $f'\left(x_0\right)$ або $y'\left(x_0\right)$.

Для функції $f\left(x\right)$ можна обчислювати похідну в різних точках x. Нехай L – множина всіх таких значень x. Правило, за яким кожному $x \in L$ відповідає похідна $f'(x)$ в цій точці, – це деяка функція, визначена на множині L. Називається вона похідною функції $f(x)$ і позначається $f'(x)$ або $y'(x)$ або $\frac{df}{dx}$.

Приклад 1. Знайти приріст функції

1) $f(x) = 2x - 1$, якщо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$\Delta f(1) = f(1 + 0{,}1) - f(1) = f(1{,}1) - f(1) = (2 \cdot 1{,}1 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) = \\ = 1{,}2 - 1 = 0{,}2.$$

Відповідь: 0,2.

2) $f(x) = x^2 + x$, якщо $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$.

Розв'язання. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$\Delta f(-1) = f(-1 + 0{,}2) - f(-1) = \left((-0{,}8)^2 - 0{,}8\right) - \left((-1)^2 - 1\right) =$$

$$= (0{,}64 - 0{,}8) - (1 - 1) = -0{,}16 - 0 = -0{,}16.$$

Відповідь: – 0,16.

3) $f(x) = -\frac{1}{x}$, якщо $x_0 = -1$, $\Delta x = -0{,}1$.

Розв'язання. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$\Delta f(-1) = f(-1 - 0{,}1) - f(-1) = f(-1{,}1) - f(-1) = -\frac{1}{-1{,}1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) =$$

$$= \frac{10}{11} - 1 = -\frac{1}{11}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{11}$.

Операцію обчислення похідної називають ***диференціюванням***.

Якщо похідна функції $f(x)$ у точці x_0 існує, то функція називається диференційованою в цій точці.

Якщо похідна функції $f(x)$ існує в кожній точці деякого проміжку, то функція називається диференційованою на цьому проміжку.

Наприклад, функція $y=8x+1$ диференційована на всій числовій прямій, функція $y=\sqrt{x}$ – на множині $[0;+\infty)$.

Приклад 2. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції $f(x)$ в точці x_0.

1) $f(x)=x-1,\ x_0=-1.$

Розв'язання. За означенням похідної $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Знайдемо $\Delta f(x_0)$: $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(-1+\Delta x)-f(-1)=$ $=(-1+\Delta x)-1-(-1-1)=-1+\Delta x-1+2=\Delta x.$ Звідси: $f'(-1)=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1.$

Відповідь: 1.

2) $f(x)=3x^2,\ x_0=2.$

Розв'язання. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$

Знайдемо $\Delta f(x_0)$: $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(2+\Delta x)-f(2)=$

$$=3(2+\Delta x)^2-3\cdot 2^2=3\left(4+4\Delta x+\Delta x^2\right)-12=12+12\Delta x+3\Delta x^2-12=$$

$$=12\Delta x+3\Delta x^2.$$

Звідси: $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{12\Delta x+3\Delta x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(12+3\Delta x)=12.$

Відповідь: 12.

3) $f(x)=\dfrac{3}{x}+1,\ x_0=-3.$

Розв'язання. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$

Знайдемо $\Delta f(x_0)$: $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(-3+\Delta x)-$ $-f(-3)=\dfrac{3}{-3+\Delta x}+1-\left(\dfrac{3}{-3}+1\right)=\dfrac{3}{-3+\Delta x}+1=\dfrac{3-3+\Delta x}{-3+\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x-3}$.

Звідси: $f'(-3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{\Delta x-3}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x-3}=-\dfrac{1}{3}.$

Відповідь: $-\dfrac{1}{3}.$

4) Знайти похідну функції $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання. Надаємо приріст аргументу Δx; $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-$ $-\sqrt{x}=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$, отже $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Відповідь: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Вправа 1

Знайти приріст функції:

1) $f(x)=x-2,$ якщо $x_0=-2,\ \Delta x=0{,}001;$

2) $f(x)=1-x^2,$ якщо $x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x},$ якщо $x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$

4) $f(x)=x^2+2,$ якщо $x_0=-2,\ \Delta x=0{,}01.$

Вправа 2

Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x)=3+x,\ x_0=2;$

2) $f(x)=2-x^2,\ x_0=0;$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x_0=-1;$

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-x,\ x_0=2;$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x}+1,\ x_0=-1.$

§ 2. Геометричний і фізичний зміст похідної

Як ми показали раніше, $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Це означає, що швидкість v прямолінійного руху матеріальної точки в момент часу t є похідна від шляху $S(t)$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t)$. В цьому полягає механічний зміст похідної.

З'ясуємо геометричний зміст похідної. Як було показано раніше $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha=y'(x_0)$.

Отже кутовий коефіцієнт невертикальної дотичної до графіка функції в точці $(x_0 y(x_0))$ дорівнює значенню похідної функції в точці x_0. Це і є геометричний зміст похідної.

І навпаки, можна довести, що коли функція має похідну в точці x_0, то в точці $A(x_0;\, y(x_0))$ до графіка функції можна провести невертикальну дотичну.

Наприклад:

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y=x^2+x$ в точці з абсцисою $x=x_0$.

1. Аргумент набуває приросту Δx;

2. Приріст функції буде:

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)-x_0^2-$$
$$-x_0=\cancel{x_0^2}+2x_0\Delta x+\Delta x^2+\cancel{x_0}+\Delta x-\cancel{x_0^2}-\cancel{x_0}=2x_0\Delta x+\Delta x^2+\Delta x.$$

3. Знаходимо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x+1)}{\Delta x}=2x_0+\Delta x+1.$$

4. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}(2x_0+\Delta x+1)=2x_0+1$ отже $k=2x_0+1$.

Розділ II. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

§ 1. Похідні елементарних функцій

1. Похідна сталої функції

$$\boxed{y=c}\ .$$

Тоді $\Delta y=0$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0,$ отже

$$\boxed{c'=0.}$$

2. $y=x,\quad \Delta y=\Delta x+x-x=\Delta x;\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1,$ отже

$$\boxed{x'=1.}$$

3. Похідна степеневої функції

$$y=x^n.$$

$$\Delta y=\left(x_0+\Delta x\right)^n-x_0^n,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(x_0+\Delta x\right)^n-x_0^n}{\Delta x}=\frac{\left(x_0+\Delta x\right)^n-x_0^n}{\left(x_0+\Delta x\right)-x_0}=\left(x_0+\right.$$

$$\left.+\Delta x\right)^{n-1}+\left(x_0+\Delta x\right)^{n-2}x_0+\left(x_0+\Delta x\right)^{n-3}x_0^2+\ldots+x_0^{n-1}.$$

Оскільки: $a^n-b^n=\left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}\right),$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(x_0+\Delta x\right)^{n-1}+\left(x_0+\Delta x\right)^{n-2}x_0+\left(x_0+\Delta x\right)^{n-3}x_0^2+\ldots+x_0^{n-1}\right)=$$

$$=\left(x+0\right)^{n-1}+\left(x+0\right)^{n-2}x+\left(x+0\right)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}=x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}=$$

$$=nx^{n-1}\ \text{тобто}$$

$$\boxed{\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.}$$

4. Похідні тригонометричних функцій.

Нехай $y=\sin x.$

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Було враховано, що $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Отже $\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$

Оскільки $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, то $(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x(-1) = -\sin x$. Тобто $\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$

Згідно з теоремою про похідну від частки двох функцій, маємо: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Аналогічно $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

5. Похідні обернених тригонометричних функцій, знаходяться таким чином:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ при $x \in (-1; 1)$.

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ при } x \in (-1; 1).$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}, \ x \in R.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \ x \in R.$$

6. Похідна логарифмічної функції $y = \ln x$.

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha},\ \alpha=\frac{\Delta x}{x}.$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,$ отже

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}\ \text{при}\ x>0.}$$

Нехай $y=\log_a x.$ Скористаємось тотожністю:

$\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a},$ тоді $(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln a}.$ Отже

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\ \text{при}\ x>0.}$$

7. Похідна показникової функції $y=e^x$.

Логарифмуємо обидві частини цієї рівності:

$\ln y=\ln e^x=x\ln e=x.$

Візьмемо похідну від обох частин цієї рівності $\dfrac{1}{y}\cdot y'=1$ тобто

$y'=y$ і

$$\boxed{(e^x)'=e^x.}$$

Якщо $y=a^x$, то $y=e^{x\ln a}$, $a>0,\ a\neq 1,\ x\in R.$

$y'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=a^x\ln a,\ x\in R.$

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a,\ x\in R.}$$

Логарифмічне диференціювання застосовується тоді, коли зручно спочатку прологарифмувати функцію, а потім знайти похідну складеної функції.

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ звідки } f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln f(x)\right)' \ (*)$$

Формула (*) називається формулою логарифмічного диференціювання.

Наприклад, $y = x^x$, тоді $\ln y = x\cdot\ln x$;

$(\ln y)' = (x\ln x)' = \ln x + 1$. За формулою (*):

$$\left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1).$$

Приклад 3. Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$,

отримаємо $f'(x) = \left(x^5\right)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Відповідь: $f'(x) = 5x^4$.

2) $f(x) = 5x^6$.

Розв'язання. Використовуючи формули $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ і $(cu)' = cu'$,

отримаємо $f'(x) = \left(5x^6\right)' = 5\cdot\left(x^6\right)' = 5\cdot 6x^5 = 30x^5$.

Відповідь: $f'(x) = 30x^5$.

3) $f(x) = x^{-9}$.

Розв'язання. $f'(x) = \left(x^{-9}\right)' = -9x^{-9-1} = -9x^{-10}$.

Відповідь: $f'(x) = -9x^{-10}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$.

Розв'язання. Перепишемо дану функцію у вигляді $f(x) = x^{-7}$,

тоді $f'(x) = \left(x^{-7}\right)' = -7x^{-8} = -\dfrac{7}{x^8}$.

Відповідь: $f'(x) = -\dfrac{7}{x^8}$.

5) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$.

Розв'язання. $f(x) = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Відповідь: $\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

6) $f(x) = \sqrt[9]{x^5}$.

Розв'язання. $f'(x) = \left(\sqrt[9]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{9}}\right)' = \dfrac{5}{9}x^{\frac{5}{9}-1} = \dfrac{5}{9}x^{-\frac{4}{9}} = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{4}{9}}} = \ = \dfrac{5}{9\sqrt[9]{x^4}}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{9\sqrt[9]{x^4}}$.

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Розв'язання. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)' = \left(x^{-\frac{4}{5}}\right)' = -\dfrac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1} = -\dfrac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = \ = -\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^9}}$.

Відповідь: $-\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^9}}$.

Вправа 3

Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$;

2) $f(x) = -\dfrac{x}{3}$;

3) $f(x) = 3x^2$;

4) $f(x) = -\sqrt{3}x^2$;

5) $f(x) = -\dfrac{x^2}{6}$;

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}x^2$;

7) $f\left(x\right)=2x^5$;

8) $f\left(x\right)=-4x^4$;

9) $y=\dfrac{2}{3}x^6$;

10) $y=-2x^{-10}$.

11) $y=\dfrac{1}{x^3}$;

12) $y=\dfrac{5}{x^6}$;

13) $y=\dfrac{1}{2x^4}$;

14) $y=4x^{\frac{1}{3}}$;

15) $y=5x^{-\frac{2}{5}}$;

16) $y=\sqrt[5]{x^3}$;

17) $y=\dfrac{1}{2x^{\frac{2}{9}}}$;

18) $y=\dfrac{5}{\sqrt[6]{x^5}}$.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

1) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Перепишемо дану функцію у вигляді $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot x^2}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=x^{-\frac{3}{2}}$. Тоді $y'=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2\cdot x^{\frac{5}{2}}}=-\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}=$

$=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

Відповідь: $y'=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

2) $y=\sqrt[5]{5x^2\sqrt{3x}}$.

$$y=\sqrt[5]{5x^2\sqrt{3x}}=\sqrt[5]{\sqrt{3x\cdot 25x^4}}=\sqrt[10]{75x^5}=\sqrt[10]{75}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{75}\cdot\sqrt{x}.\quad y'=$$

$$=\left(\sqrt[10]{75}\cdot\sqrt{x}\right)'=\sqrt[10]{75}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt[10]{75}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[10]{75}}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{\sqrt[10]{75}}{2\sqrt{x}}$.

3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[7]{x}}{5x^3\cdot\sqrt[7]{x^2}}.$

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[7]{x}}{5x^3\cdot\sqrt[7]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{5x^3\sqrt[7]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{5x^3\cdot x^{\frac{1}{7}}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{22}{7}}}=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{3}-\frac{22}{7}}=\frac{1}{5}x^{-\frac{59}{21}}.$$

$$y'=\left(\frac{1}{5}x^{-\frac{59}{21}}\right)'=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{59}{21}\right)x^{-\frac{80}{21}}=-\frac{59}{105\sqrt[21]{x^{80}}}=-\frac{59}{105\sqrt[21]{x^{63}\cdot x^{17}}}==-\frac{59}{105x^3\sqrt[21]{x^{17}}}.$$

Відповідь: $y'=-\dfrac{59}{105x^3\sqrt[21]{x^{17}}}.$

Вправа 4

Знайти похідні функцій:

1) $y=x\sqrt{x};$

2) $y=\dfrac{2x^3}{\sqrt[3]{x}};$

3) $y=\dfrac{1}{x^2\sqrt{2x}};$

4) $y=\sqrt{8\sqrt{x}};$

5) $y=-\dfrac{2x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}{x^4}.$

§ 2. Правила обчислення похідної

Похідні обчислюються за певними правилами:

1. Похідна суми (різниці)

Теорема 1. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні в точці *x*, то і функція $u(x)+v(x)$ має похідну в цій точці, причому $\boxed{(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x).}$

Доведення. Нехай $y=u(x)+v(x)$, тоді $\Delta y=u(x+\Delta x)-$ $-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)=\Delta u+\Delta v.$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x).$$

Теорема справедлива для будь-якого скінченого числа доданків.

Приклад 5. Знайти похідні функцій:

1) $f\left(x\right)=\frac{2}{5}x^5-5x^3+9x+18.$

Розв'язання. Використовуючи правило обчислення похідної суми (різниці) функцій, формули $\left(cu\right)'=cu'$ і $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, отримаємо:

$$f'(x)=\left(\frac{2}{5}x^5-5x^3+9x+18\right)'=\left(\frac{2}{5}x^5\right)'-\left(5x^3\right)+\left(9x\right)'+18'=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 5x^4-5\cdot 3x^2+9\cdot 1+0=2x^4-15x^2+9.$$

Відповідь: $f'\left(x\right)=2x^4-15x^2+9.$

2) $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\sin x+\operatorname{ctg} x.$

Розв'язання. Використовуючи правило обчислення похідної суми (різниці) функцій і формули

$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\left(\operatorname{ctg} x\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, маємо:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\sin x\right)'+\left(\operatorname{ctg} x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Відповідь: $f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}.$

3) $f\left(x\right)=\frac{x^6}{6}-\sqrt{5}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}-7x^4-\frac{3}{x}.$

$$f'(x)=\left(\frac{x^6}{6}\right)'-\left(\sqrt{5}\cos x\right)'+\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)'-\left(7x^4\right)'-\left(\frac{3}{x}\right)'=\frac{1}{6}\cdot 6x^5+$$

$$+\sqrt{5}\sin x+0-7\cdot 4x^3-3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=x^5+\sqrt{5}\sin x-28x^3+\frac{3}{x^2}.$$

Відповідь: $f'\left(x\right)=x^5+\sqrt{5}\sin x-28x^3+\frac{3}{x^2}.$

4) $f(x)=4\sqrt[4]{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{5}{x^4}-\frac{1}{7x^5}+40.$

$$f'(x)=\left(4x^{\frac{1}{4}}\right)'-\left(3x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(5x^{-4}\right)'-\left(\frac{1}{7}x^{-5}\right)'+40'=4\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-$$

$$-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}+5\cdot(-4)x^{-5}-\frac{1}{7}\cdot(-5)x^{-6}+0=\frac{1}{x^{-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}-20\cdot\frac{1}{x^5}+\frac{5}{7}\times$$

$$\times\frac{1}{x^6}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{20}{x^5}+\frac{5}{7x^6}.$$

Відповідь: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{20}{x^5}+\frac{5}{7x^6}.$

Вправа 5

Знайти похідні функцій:

1) $y=3x^7-6x^6-4x^3+5x^2+17;$

2) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x^2}+2x^5;$

3) $y=3\sin x+\cos x-x;$

4) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x;$

5) $y=\frac{5}{\sqrt{x}}-x\sqrt{x}+1;$

6) $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}.$

Приклад 6. Обчислити значення похідної даної функції $y=f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x)=-x^3+9x^2+x-1,\ x_0=-1.$

Розв'язання. Знайдемо загальний вигляд похідної даної функції: $f'(x)=-3x^2+18x+1.$ Тоді $f'(-1)=-3\cdot1+18\cdot(-1)+1=$ $=-3-18+1=-20.$

Відповідь: -20.

2) $f(x)=\operatorname{tg}x+2\cos x,\ x_0=0.$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2\sin x,\ f'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}-2\cdot 0=\frac{1}{1}=1.$$

Відповідь: 1.

3) $f(x)=\sqrt{x}-16x^2,\ x_0=\frac{1}{4}.$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-32x,\ f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}}-32\cdot\frac{1}{4}=1-8=-7.$$

Відповідь: -7.

Вправа 6

Обчислити значення похідної даної функції в даній точці x_0 :

1) $f(x)=4x^3-2x^2+x-5,\ x_0=-2;$

2) $f(x)=0,25x^4+\frac{1}{3}x^3+0,5x^2-1,\ x_0=2;$

3) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0=0;$

4) $f(x)=\cos x+3\operatorname{ctg}x,\ x_0=\frac{\pi}{2};$

5) $f(x)=5x^2\sqrt{x}-\frac{64}{x^{\frac{3}{2}}},\ x_0=4;$

6) $f(x)=\frac{3}{x^2}+5x-\frac{2}{x}+4,\ x_0=1;$

7) $f(x)=-\frac{2}{3}\sin x+\frac{x^3}{\pi^2}-3,\ x_0=\frac{\pi}{3};$

8) $f(x)=\operatorname{ctg}x+\frac{12x^3}{\pi^2},\ x_0=\frac{\pi}{6}.$

Приклад 7. Обчислити значення похідної даної функції в указаній точці:

1) $f(x)=e^x+5x,\ x_0=\ln 5.$

$$f'(x) = e^x + 5,\ \ f'(\ln 5) = e^{\ln 5} + 5 = 5 + 5 = 10.$$

Відповідь: 10.

2) $f(x) = \dfrac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} + 3x^4 + 7,\ \ x_0 = 1.$

$$f'(x) = \frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)' + \left(3x^4\right)' + 7' = \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x \cdot \ln 5 + 12x^3 + 0 =$$
$$= 3 \cdot 5^x + 12x^3,$$
$$f'(1) = 3 \cdot 5^1 + 12 \cdot 1 = 15 + 12 = 27.$$

Відповідь: 27.

3) $f(x) = 3\log_4 x + \log_3 x,\ \ x_0 = 9.$

$$f'(x) = \left(3\log_4 x\right)' + \left(\log_3 x\right)' = 3 \cdot \frac{1}{x \ln 4} + \frac{1}{x \ln 3},$$
$$f'(9) = \frac{3}{9\ln 4} + \frac{1}{9\ln 3} = \frac{3\ln 3 + \ln 4}{9\ln 4 \ln 3}.$$

Відповідь: $\dfrac{3\ln 3 + \ln 4}{9\ln 4 \ln 3}$.

Вправа 7

Знайти значення похідної даної функції в указаній точці.

1) $f(x) = 2e^x + 3x,\ \ x_0 = \ln 2;$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x} + 3\ln x,\ \ x_0 = 1;$

3) $f(x) = \ln x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2},\ \ x_0 = 3;$

4) $f(x) = 10^x \cdot \dfrac{1}{\ln 10} + \dfrac{4}{x^2} - 5x - \ln 10,\ \ x_0 = 2;$

5) $f(x) = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 e} + \dfrac{\log_6 x}{\log_6 e} + \dfrac{\lg x}{\lg e},\ \ x_0 = \dfrac{1}{3}.$

2. Похідна добутку

Теорема 2. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідну в точці x, то і функція $u(x) \cdot v(x)$ має похідну в цій точці і

$$\boxed{\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x).}$$

Доведення. Нехай $y = u(x)\cdot v(x)$. Надамо приріст Δx аргументу, тоді

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = \Delta u + u(x)$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) \Rightarrow v = (x+\Delta x) = \Delta v + v(x).$$

$$\Delta y = \left(\Delta u + u(x)\right)\left(\Delta v + v(x)\right) - u(x)\cdot v(x) = \Delta u\Delta v + \Delta u v(x) +$$

$$+u(x)\cdot\Delta v + u(x)v(x) - u(x)v(x) = \Delta u\cdot\Delta v + \Delta u v(x) + u(x)\Delta v.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v + v(x)\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'v + v'u + u'\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v.$$

Оскільки $v(x)$ має похідну в точці x, вона неперервна в цій точці і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$ Тобто $(u\cdot v)' = u'v + v'u.$

Наслідок: сталу можна винести за знак похідної.

$$\left(c\cdot u(x)\right)' = c\cdot u'(x).$$

Дійсно: $\left(c\cdot u(x)\right)' = c'\cdot u(x) + c\cdot u'(x) = 0 + c\cdot u'(x) = c\cdot u'(x).$

Приклад 8. Знайти похідні даних функцій:

1) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2\right)\left(2x^2 - 3x\right).$

Розв'язання. За формулою похідної добутку $(uv)' = u'v + v'u$ маємо:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)'\left(2x^2 - 3x\right) + \left(2x^2 - 3x\right)'\times$$

$$\times\left(\frac{x^3}{3} + 2\right) = x^2\left(2x^2 - 3x\right) + (4x-3)\left(\frac{x^3}{3} + 2\right) = 2x^4 - 3x^3 + \frac{4}{3}x^4 + 8x -$$

$$-x^3 - 6 = \frac{10}{3}x^4 - 4x^3 + 8x - 6.$$

Відповідь: $\dfrac{10}{3}x^4 - 4x^3 + 8x - 6.$

2) $f(x)=\sqrt{x}\left(3x^2+4\right).$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\left(3x^2+4\right)+\left(3x^2+4\right)'\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3x^2+4\right)+6x\sqrt{x}=$$

$$=\frac{3}{2}x\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+6x\sqrt{x}=\frac{15}{2}x\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{15x^2+4}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{15x^2+4}{2\sqrt{x}}.$

3) $f(x)=\cos x(5-3x).$

$$f'(x)=(\cos x)'(5-3x)+(5-3x)'\cos x=-\sin x(5-3x)-$$
$$-3\cos x=-5\sin x+3x\sin x-3\cos x.$$

Відповідь: $3x\sin x-5\sin x-3\cos x.$

Вправа 8

Знайти похідні функцій:

1) $y=\left(x^3-2\right)\left(x^2+1\right);$

2) $y=3\sqrt{x}(2x-1);$

3) $y=\dfrac{1}{x}\left(2x^2-3x+1\right);$

4) $y=\left(3x^2-5x\right)\left(\sqrt{x}-1\right);$

5) $y=\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^2-3x-8\right);$

6) $y=\left(1-3x+7x^2\right)\left(-5x^2-1\right);$

7) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2+x+1\right);$

8) $y=\left(\dfrac{1}{x}+3x^2-1\right)\left(1-\sqrt{x}\right);$

9) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2};$

10) $y=\left(x^3+5x-1\right)\left(x^2+2x+8\right);$

11) $y=x\sin x;$

12) $y=3x\operatorname{tg}x;$

13) $y=\sin x\left(x^2-2x+3\right);$

14) $y=\left(3x^2+5x-8\right)\operatorname{ctg}x;$

15) $y=3^x\ln x;$

16) $y=e^x\sin x;$

17) $y=x^2\sin x;$

18) $y=x^2\cos x.$

3. Похідна частки

Теорема 3. Якщо в точці x функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні і $v(x)\neq 0,$ то функція $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ має похідну в цій точці, причому:

$$\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}.}$$

Приклад 9. Знайти похідні функцій:

1) $f(x)=\dfrac{x-2x^2}{2-x}.$

Розв'язання. Використовуємо формулу похідної дробу $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2},$ маємо: $f'(x)=\dfrac{\left(x-2x^2\right)'(2-x)-(2-x)'\left(x-2x^2\right)}{(2-x)^2}=$

$$=\frac{(1-4x)(2-x)-(-1)\left(x-2x^2\right)}{(2-x)^2}=\frac{2-x-8x+4x^2+x-2x^2}{(2-x)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-8x+2}{(2-x)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{2x^2-8x+2}{(2-x)^2}$.

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{x}$.

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+2x\right)'x-x'\left(\sqrt{x}+2x\right)}{x^2}=\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2\right)x-\left(\sqrt{x}+2x\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2x}{x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$.

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'e^x-\left(e^x\right)'\ln x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}e^x-e^x\ln x}{e^{2x}}=\frac{\dfrac{e^x-xe^x\ln x}{x}}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{e^x(1-x\ln x)}{x\cdot e^{2x}}=\frac{1-x\ln x}{xe^x}.$$

Відповідь: $\dfrac{1-x\ln x}{xe^x}$.

4) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

$$f'(x)=\frac{(\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.$

Вправа 9

Знайти похідні функцій:

1) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+1};$

2) $y=\dfrac{x-3}{x+2};$

3) $y=\dfrac{3x^2-4}{x+5};$

4) $y=\dfrac{2\sqrt{x}-x}{5x^4};$

5) $y=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1};$

6) $y=\dfrac{7-3x+x^4}{x\sqrt{x}};$

7) $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}};$

8) $y=\dfrac{x^2}{x-\frac{1}{x}};$

9) $y=\dfrac{x^x-1}{x^3+4};$

10) $y=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1};$

11) $y=\dfrac{\sin x}{x};$

12) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+1}{\sin x};$

13) $y=\dfrac{3\cos x}{\sqrt{x}};$

14) $y=\dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x};$

15) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x};$

16) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x};$

17) $y=\dfrac{x^3+2^x}{e^x};$

18) $y=\dfrac{\ln x}{x};$

19) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}.$

4. Похідна складеної функції

Теорема 4. Нехай $y = f(g(x))$ – складена функція. Якщо функція $g(x)$ має похідну в точці *x*, а $f(g)$ має похідну у відповідній точці $g(x)$, то складена функція *y* має похідну в цій точці, причому

$$\boxed{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Наслідок. Нехай $f(x)$ та $r(x)$ взаємно обернені функції, причому функція f має похідну в точці $r(x)$, тоді функція r має похідну в точці *x*, причому $\boxed{r'(x) = \dfrac{1}{f'(r(x))}.}$

Приклад 10. Знайти похідні функцій:

1) $y = (2x+3)^{10}$.

Розв'язання. Дана функція є складеною функцією виду $y = f(g(x))$ де $g(x) = 2x+3$. Отже: $y' = \left((2x+3)^{10}\right)' =$
$= 10(2x+3)^9 \cdot (2x+3)' = 10(2x+3)^9 \cdot 2 = 20(2x+3)^9$.

Відповідь: $20(2x+3)^9$.

2) $y = \dfrac{1}{(x^5-1)^5}$.

Розв'язання. Перепишемо дану функцію у вигляді $y = (x^5-1)^{-5}$. тоді $y' = -5(x^5-1)^{-6} \cdot (x^5-1)' = -5(x^5-1)^{-6} \cdot 5x^4 = = -\dfrac{25x^4}{(x^5-1)^6}$.

Відповідь: $-\dfrac{25x^4}{(x^5-1)^6}$.

3) $y = (\sqrt{x}+1)^5$.

$$y' = 5\left(\sqrt{x}+1\right)^4 \cdot \left(\sqrt{x}+1\right)' = 5\left(\sqrt{x}+1\right)^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5\left(\sqrt{x}+1\right)^4}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{5\left(\sqrt{x}+1\right)^4}{2\sqrt{x}}$.

4) $y = \dfrac{4}{\ln x}$.

$$y = 4\left(\ln x\right)^{-1}, \text{ тоді } y' = 4(-1)\left(\ln x\right)^{-2} \cdot \left(\ln x\right)' = -4\left(\ln x\right)^{-2} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{4}{x\ln^2 x}.$$

Відповідь. $-\dfrac{4}{x\ln^2 x}$.

Вправа 10

Знайти похідні функцій:

1) $y = \left(1-5x\right)^7$;

2) $y = \left(4x^2 - x\right)^3$;

3) $y = \left(2x - 6x^5\right)^9$;

4) $y = 3\left(x-5\right)^5 + 2\left(1-x\right)^4$;

5) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 - 3x\right)^3}$;

6) $y = \left(\sqrt{x} + 5x\right)^8$;

7) $y = \left(x^2 + x\sqrt[5]{x}\right)^7$;

8) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

9) $y = x\left(x+2\right)^2$;

10) $y = \left(x+1\right)^2\left(x-4\right)^3$.

Приклад 11. Знайти похідні функцій:

1) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 2x}} \cdot \left(x^3 - 2x\right)' = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}$.

2) $y = (2x+1)^2 \cdot \sqrt{1-2x}$.

$$y' = \left((2x+1)^2\right)' \sqrt{1-2x} + (2x+1)^2 \left(1-2x\right)' = 2(2x+1)\times$$

$$\times(2x+1)' \sqrt{1-2x} + (2x+1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}(1-2x)' = 2(2x+1)\cdot 2\sqrt{1-2x} +$$

$$+ (2x+1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2) = \frac{4\cdot(2x+1)(1-2x) - (2x+1)^2}{\sqrt{1-2x}} =$$

$$= \frac{4\left(1-4x^2\right) - \left(4x^2 + 4x + 1\right)}{\sqrt{1-2x}} = \frac{-20x^2 - 4x + 3}{\sqrt{1-2x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{-20x^2 - 4x + 3}{\sqrt{1-2x}}$.

3) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$y' = \frac{(x-1)'\sqrt{x^2+1} - \left(\sqrt{x^2+1}\right)'(x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)'(x-1)}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\dfrac{\left(x^2+1\right) - x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Відповідь: $\dfrac{1+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)'\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{4\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)\cdot x}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$.

Вправа 11

Знайти похідні функцій:

1) $y=\sqrt{2x-1}$;
2) $y=\sqrt{x^5+1}$;
3) $y=7\sqrt{6x+10}$;
4) $y=\sqrt{9-x^2}$;
5) $y=\sqrt{5-\sqrt{x}}$;
6) $y=\sqrt{2-\sin x}$;
7) $y=\sqrt{5-x}\cdot(3-x)$;
8) $y=\sqrt{xe^x+x}$;
9) $y=\sqrt{\left(4x+2\right)^5}$;
10) $y=\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}$;

11) $y=\dfrac{5}{\sqrt{7-2x}}$;   12) $y=\sqrt{2x+1}\left(5x-2\right)$;

13) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$;   14) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}}$;

15) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$;   16) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{e^x-1}$;

17) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;   18) $y=\sqrt[3]{4x-\sqrt{x^2-2x}}$.

Приклад 12. Знайти похідні функцій:

1) $y=\cos\left(x^3-3\right)$.

$$y'=-\sin\left(x^3-3\right)\left(x^3-3\right)'=-\sin\left(x^3-3\right)\cdot 3x^2.$$

Відповідь: $-3x^2\sin\left(x^3-3\right)$.

2) $y=\sin^3 x$.

$$y'=3\sin^2 x\cdot\left(\sin x\right)'=3\sin^2 x\cos x.$$

Відповідь: $3\sin^2 x\cos x$.

3) $y=\sin\left(\cos x\right)$.

$$y'=\cos\left(\cos x\right)\cdot\left(\cos x\right)'=\cos\left(\cos x\right)\cdot\left(-\sin x\right).$$

Відповідь: $-\sin x\cos\left(\cos x\right)$.

4) $y=\dfrac{1}{\sin 3x}$, $y=\left(\sin 3x\right)^{-1}$.

$$y'=-1\cdot\left(\sin 3x\right)^{-2}\cdot\left(\sin 3x\right)'=-\left(\sin 3x\right)^{-2}\cos 3x\cdot\left(3x\right)'=-\frac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}.$$

Відповідь: $-\dfrac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}$.

5) $y=\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^3 2x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 3x$.

$$y'=3\operatorname{tg}^2 x\cdot\left(\operatorname{tg} x\right)'+\frac{1}{2}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\left(\operatorname{tg} 2x\right)'+\frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{tg}^2 3x\cdot\left(\operatorname{tg} 3x\right)'=$$

$$=3\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'+\operatorname{tg}^2 3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{2\cos^2 2x}\cdot 2+\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos^2 3x}\cdot 3=\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}+\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos^2 3x}.$$

Відповідь: $\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}+\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos^2 3x}.$

6) $y=\frac{\cos 3x}{x-1}.$

$$y'=\frac{(\cos 3x)'(x-1)-(x-1)'\cos 3x}{(x-1)^2}=\frac{-\sin 3x\cdot 3\cdot(x-1)-\cos 3x}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{-3(x-1)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}.$$

Відповідь: $\frac{-3(x-1)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}.$

7) $y=\sin 5x\sqrt{x+2}.$

$$y'=(\sin 5x)'\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)'\sin 5x=\cos 5x\cdot 5\sqrt{x+2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot\sin 5x=\frac{10(x+2)\cos 5x+\sin 5x}{2\sqrt{x+2}}.$$

Відповідь: $\frac{10(x+2)\cos 5x+\sin 5x}{2\sqrt{x+2}}.$

Вправа 12

Знайти похідні функцій:

1) $y=\cos 6x;$

2) $y=\sin(2x-3);$

3) $y=\operatorname{tg}\left(2x^2+1\right);$

4) $y=\operatorname{ctg} x^4;$

5) $y=\cos^2 x;$

6) $y=\sqrt[3]{\sin x};$

7) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}};$

8) $y=\sin^2 x+\cos^2 x;$

9) $y=\operatorname{tg}(\sin x)$;

10) $y=\sin(\sin(\sin x))$;

11) $y=2\sin^2 3x$;

12) $y=\dfrac{1}{\cos(x^3-1)}$;

13) $y=\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$;

14) $y=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$;

15) $y=\sin^3 5x^2$;

16) $y=2x+3{,}6\sin^5(\pi-x)$;

17) $y=\operatorname{tg} x\sin^2 x$;

18) $y=-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}$;

19) $y=x^2\cos\dfrac{1}{x}$;

20) $y=3x\sin 2x$;

21) $y=\sin^2 2x+\cos\dfrac{x}{2}$;

22) $y=\operatorname{tg} x\cos^2 x$;

23) $y=\sin^3 x-\cos^3 x$;

24) $y=(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)$;

25) $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

26) $y=\sqrt{\sin x+\cos 2x}$;

27) $y=\dfrac{\cos\frac{x}{3}}{\sqrt{x}}$;

28) $y=x\sin\ln x$;

29) $y=(\sin 5x+\cos 5x)^{10}$;

30) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

Вправа 13

Обчислити значення похідної функції $y=f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x)=\sin 4x\cos 4x,\ x_0=\dfrac{\pi}{3}$;

2) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} 3x},\ x_0=\dfrac{\pi}{12}$;

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{6}},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}},\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

5) $f(x)=\cos 3x-\mathrm{ctg}\left(6x+\frac{\pi}{6}\right),\ x_0=\frac{\pi}{18};$

6) $f(x)=\sin^4 3x-\sin 6x,\ x_0=\frac{\pi}{2};$

7) $f(x)=\cos^4 x-\frac{4x}{\pi}\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2};$

8) $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\frac{x}{2},\ x_0=\frac{\pi}{3};$

9) $f(x)=\frac{\sin 6x}{1+\cos 6x},\ x_0=\frac{\pi}{12};$

10) $f(x)=3\sin^2 x\cos x+\cos^3 x,\ x_0=0.$

Приклад 13. Знайти похідні функцій:

1) $y=e^{x^3-3x^2-6x}.$

$$y'=e^{x^3-3x^2-6x}\cdot\left(x^3-3x^2-6x\right)'=e^{x^3-3x^2-6x}\cdot\left(3x^2-6x-6\right).$$

Відповідь: $\left(3x^2-6x-6\right)e^{x^3-3x^2-6x}.$

2) $y=5\sqrt{x}e^{-x}.$

$$y'=5\left(\left(\sqrt{x}\right)'e^{-x}+\left(e^{-x}\right)'\sqrt{x}\right)=5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}-e^{-x}\sqrt{x}\right)=$$

$$=5\cdot\frac{e^{-x}-2xe^{-x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $\frac{5e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}.$

3) $y=2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}.$

$$y'=2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\left(\mathrm{tg}\frac{1}{x}\right)'=2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}$.

4) $y=\dfrac{\sin 3x}{e^{3x}}$.

$$y'=\frac{(\sin 3x)'e^{3x}-\left(e^{3x}\right)'\sin 3x}{\left(e^{3x}\right)^2}=\frac{\cos 3x\cdot 3\cdot e^{3x}-e^{3x}\cdot 3\sin 3x}{e^{6x}}=$$

$$=\frac{3e^{3x}\left(\cos 3x-\sin 3x\right)}{e^{6x}}=\frac{3(\cos 3x-\sin 3x)}{e^{3x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{3(\cos 3x-\sin 3x)}{e^{3x}}$.

Вправа 14

Знайти похідні функцій:

1) $y=2^{4x}$;

2) $y=e^{3-2x}$;

3) $y=7^{x^2-7x+10}$;

4) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

5) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$;

6) $y=e^{\cos 2x}$;

7) $y=e^{2x}-e^{-3x^2}$;

8) $y=x^2\cdot 10^{2x}$;

9) $y=\dfrac{\cos 2x}{e^{2x}}$;

10) $y=\left(x^3-1\right)e^{2x}+\sin^2 x$;

11) $y=\dfrac{3^{-x}}{e^{\sin x}}$;

12) $y=\sin e^{x^2+3x-2}$;

13) $y=2^{\sqrt{4x^2-\sqrt{x}}}$;

14) $y=5^{\sin 4x^3}$;

15) $y=e^{\sin^3 x-\cos x}$.

Приклад 14. Знайти похідні функцій:

1) $y=\log_6\left(6x-3x^2-x^3\right)$.

$$y'=\left(\log_6\left(6x-3x^2-x^3\right)\right)'=\frac{1}{\left(6x-3x^2-x^3\right)\ln 6}\cdot\left(6x-3x^2-x^3\right)'=$$

$$=\frac{6-6x-3x^2}{\left(6x-3x^2-x^3\right)\ln 6}.$$

Відповідь: $\dfrac{6-6x-3x^2}{\left(6x-3x^2-x^3\right)\ln 6}$.

2) $y=\lg\sin x$.

$$y'=(\lg\sin x)'=\frac{1}{\sin x\ln 10}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x\ln 10}=\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 10}.$$

Відповідь: $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln 10}$.

3) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

$$y'=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)\cdot(x+1-x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{x^2-1}$.

4) $y=\left(3x^3-2\right)\ln^3 x$.

$$y'=\left(3x^3-2\right)'\ln^3 x+\left(\ln^3 x\right)'\left(3x^2-2\right)=9x^2\ln^3 x+3\ln^2 x\times$$

$$\times(\ln x)'\left(3x^2-2\right)=9x^2\ln^3 x+3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(3x^2-2\right)=$$

$$=3\ln^2 x\left(3x^2\ln x+3x-\frac{2}{x}\right).$$

Відповідь: $3\ln^2 x\left(3x^2\ln x+3x-\dfrac{2}{x}\right)$.

5) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(4-x)}$.

$$y'=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'\ln(4-x)-\left(\ln(4-x)\right)'\sqrt{x-1}}{\left(\ln(4-x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-1)'\ln(4-x)-\frac{1}{4-x}\cdot(4-x)'\sqrt{x-1}}{\ln^2(4-x)}=$$

$$\frac{\dfrac{\ln(4-x)}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{4-x}}{\ln^2(4-x)}=\frac{(4-x)\ln(4-x)+2(x-1)}{2(4-x)\sqrt{x-1}\ln^2(4-x)}.$$

Відповідь: $\dfrac{(4-x)\ln(4-x)+2(x-1)}{2(4-x)\sqrt{x-1}\ln^2(4-x)}.$

Вправа 15. Знайти похідні функцій:

1) $y=\ln\left(x^2+2x\right)$;
2) $y=\ln\cos x$;
3) $y=\log_3\left(x^2-1\right)$;
4) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;
5) $y=e^{\ln\sin 5x}$;
6) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$;
7) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;
8) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x-1}}}$;
9) $y=\ln\left(3\sin 4x-\cos x^2\right)$;
10) $y=x\ln\left(x^2-1\right)$;
11) $y=\dfrac{x^3}{\ln^3 x}$;
12) $y=\left(2x^2-1\right)\ln^2 x$;
13) $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$;
14) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$;
15) $y=\ln\dfrac{\ln x}{e}\cdot\ln x$.

Приклад 15. Знайти похідні функцій:

1) $y=x^2\arcsin x$.

$$y'=\left(x^2\right)'\arcsin x+(\arcsin x)'x^2=2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x^2.$$

Відповідь: $2x\arcsin x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x^2.$

2) $y = \operatorname{arcctg}\left(x^2 - 1\right)$.

$$y' = -\frac{1}{1+\left(x^2-1\right)^2}\cdot\left(x^2-1\right)' = -\frac{2x}{1+x^4-2x^2+1} = -\frac{2x}{x^4-2x^2+2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

3) $y = \ln\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x + \arcsin\ln x$.

$$y' = \frac{1}{\arcsin x}\left(\arcsin x\right)' + \frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\left(\ln x\right)' + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\left(\ln x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Вправа 16

Знайти похідні функцій:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}\arccos x$;

2) $y = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$;

3) $y = \arcsin x + \arccos x$;

4) $y = \arcsin x^2$;

5) $y = \operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$;

6) $y = e^{\arcsin 2x}$;

7) $y = \arcsin\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

8) $y = \dfrac{1}{\arccos\ln x}$;

9) $y = \ln\arccos 2x$.

Розділ ІІІ. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Похідні порядку вище першого називаються похідними вищих порядків.

Нехай функція f має похідну f' на деякій множині *M*. Якщо функція $f'(x)$ має похідну на множині *M*, то ця похідна називається похідною другого порядку функції f на множині *M*, або другою похідною.

Позначається $f''(x)$ або $y''(x)$; $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

Похідна від похідної другого порядку називається похідною 3-го порядку, або третьою похідною. Вона позначається так:

$$f'''(x), \text{ або } y'''(x)\,;\ f'''(x)=\left(f''(x)\right)'.$$

Аналогічно можна розглядати похідні 4, 5, …, *n*-го порядку.

Наприклад: Знайти $y''(x)$, де $y=2\cos 4x$.

$y'(x)=-8\sin 4x,\ \ y''=-32\cos 4x.$

Розглянемо *механічний та геометричний зміст другої похідної.*

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S=S(t)$. Як було з'ясовано раніше $v(t)=s'(t)$. Розглянемо приріст швидкості v за час від моменту t до моменту $t+\Delta t$ і $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$. Величина $a_c=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ називається середнім прискоренням руху за проміжок часу Δt. Прискорення a в момент руху – це границя середнього прискорення при $\Delta t\to 0$

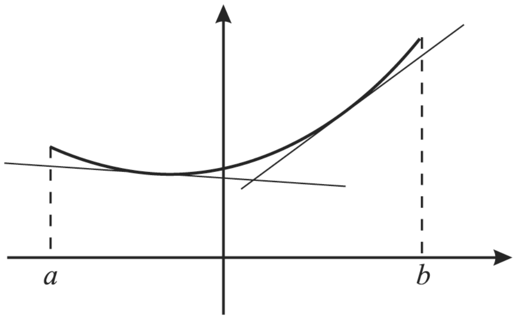
$$a=\lim_{\Delta t\to 0}a_c=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v(t).$$

Враховуючи, що $v=s'(t)$, маємо: $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

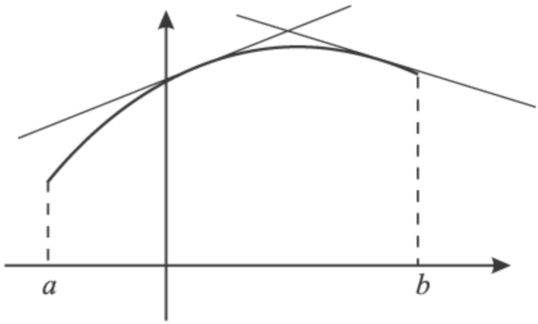
Таким чином прискорення прямолінійного руху точки – це друга похідна від шляху.

Означення: Функція f визначена і диференційована на проміжку $(a;\,b)$ називається опуклою донизу (догори) на цьому проміжку, якщо її графік розміщено не нижче (не вище) дотичної до графіка, проведеної в довільній його точці.

На рис. 6 *а*, 6 *б* відповідно показано графіки функцій опуклої донизу та догори.



а



б

Рис. 6

Якщо функція неперервна в точці x_0 і змінює характер опуклості при переході через цю точку, точка x_0 називається точкою перегину.

Теорема. Для того, щоб функція $y = f(x)$ задана і двічі диференційована на проміжку $(a;\, b)$, була опукла донизу (догори) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x \in (a;\, b)$ виконувалась нерівність: $f''(x) > 0 \left(f''(x) < 0\right)$.

Проміжок $(a;b)$ може бути і нескінченним. Наприклад $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y''=6x$, O – точка перегину.

Функція опукла догори при $x\in(-\infty;0)$, і опукла донизу при $x\in(0;+\infty)$.

Наприклад: Точка рухається за законом $S(t)=4t^3-3t^2+2t+1$. Знайти швидкість и прискорення руху.

$$v(t)=S'(t)=12t^2-6t+2\,.$$

$$a(t)=v'(t)=S''(t)=24t-4.$$

Відповідь: $12t^2-6t+2,\ 24t-4.$

Наприклад: Дослідити функцію на опуклість $y=2x^2-4x+1.$

$y'(x)=4x-4,\ y''(x)=4,\ f''(x)>0$ при $x\in R$, тоді функція опукла донизу при $x\in R$.

Розділ IV. ДОТИЧНА ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

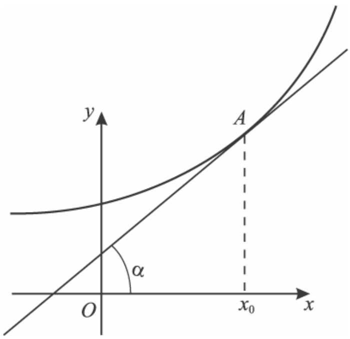


Рис. 7

На рис. 7 дотична до графіка функції $y=f(x)$ проведена у точці $A(x_0;\ f(x_0))$. Рівняння прямої має вигляд $y=kx+b$, де кутовий коефіцієнт прямої $k=\operatorname{tg}\alpha$ (α - кут нахилу прямої до додатного напрямку осі *OX*).

Як було доведено $k=f'(x_0)$. Отже, рівняння дотичної має вигляд: $y=f'(x_0)\cdot x+b$. Оскільки точка *A* лежить на дотичній, то її координати задовольняють рівняння дотичної:

$y(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b$, отже $b=y(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$ тоді $y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$, або

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).}$$

Приклад 1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^3 - 5x$ в точці $x_0 = 2$.

Розв'язання. $y' = 3x^2 - 5,\ k = y'(x_0) = y'(2) = 2 \cdot 4 - 5 = 3.$

Відповідь: 3.

Вправа 1

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2,\ x_0 = 2.$

2) $f(x) = \dfrac{3}{x^2},\ x_0 = 1.$

3) $f(x) = x\ln\left(x^2 + 2x - 7\right),\ x_0 = 2.$

4) $f(x) = 5^x,\ x_0 = 0.$

5) $f(x) = 3\ln x,\ x_0 = 1.$

6) $f(x) = \sqrt{15 - 6x^2},\ x_0 = 1.$

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x - 3 - x^2}$ в точці $x_0 = \dfrac{3}{2}.$

Розв'язання. $f(x_0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{4 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6 - 3 - \dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x - 3 - x^2}} \cdot \left(4x - 3 - x^2\right)' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - 3 - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - 3 - x^2}};$$

$f'(x_0) = f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2 - \dfrac{3}{2}}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}} = \dfrac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ Підставимо отримані числові значення в загальне рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, отримаємо $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right),$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$

Відповідь: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$

Вправа 2

Записати рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці x_0:

1) $f(x)=2-4x-3x^2,\ x_0=-2.$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x=2.$

3) $f(x)=2\cos\frac{x}{2},\ x_0=\frac{3\pi}{2}.$

4) $f(x)=x^2e^{-x},\ x_0=1.$

5) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ x_0=\frac{\pi}{2}.$

6) $f(x)=\frac{3x-4}{\sqrt[3]{x+4}},\ x_0=1.$

7) $f(x)=\cos^5 x,\ x_0=\pi.$

8) $f(x)=\sin^2 3x,\ x_0=\frac{\pi}{12}.$

9) $f(x)=(3x-7)^3,\ x_0=3.$

Приклад 3. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=2x^2-4x$ в точці його перетину з віссю абсцис.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної кривої з віссю абсцис.

Розв'яжемо для цього рівняння $2x^2-4x=0,$

$2x(x-2)=0,$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Запишемо рівняння дотичної в кожній зі знайдених точок.

1. $x=0.$

$f(0)=0,$

$f'(x)=4x-4,\ f'(0)=-4.$ Тоді рівняння дотичної має вигляд $y=0+(-4)(x-0),$ тобто $y=-4x.$

2. $x=2.$

$f(2)=8-8=0,$

$f'(2)=8-4=4.$ Тоді рівняння дотичної: $y=0+4(x-2),$ тобто $y=4x-8.$

Відповідь: $y=-4x$ і $y=4x-8.$

Приклад 4. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x-1}$ в точці перетину з віссю ординат.

Розв'язання. Крива перетинає вісь ординат в точці з абсцисою $x_0=0.$

Тоді $y(0)=\dfrac{2}{-1}=-2,\ y'(x)=\dfrac{6x(x-1)-\left(3x^2+2\right)}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{6x^2-6x-3x^2-2}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2},\ y'(0)=\dfrac{-2}{(-1)^2}=-2.$ Підставимо отримані значення в загальне рівняння дотичної: $y=-2+(-2)(x-0),$ тобто $y=-2x-2.$

Відповідь: $y=-2x-2.$

Вправа 3

Записати рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точці перетину з віссю абсцис.

2) $f(x)=x^2-4$ в точці перетину з віссю ординат.

3) $f(x)=2x^3-3x+2$ в точці перетину з віссю ординат.

4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ в точці перетину з віссю абсцис.

5) $f(x)=\ln x$ в точці перетину з віссю абсцис.

6) $f(x)=1-\ln(x+1)$ в точці перетину з віссю ординат.

7) $f(x)=e^{1-x^2}$ в точці перетину з прямою $y=1$.

Приклад 5. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^3-3x+1$, яка паралельна прямій $y=9x-5$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт даної прямої $k=9$, кутовий коефіцієнт шуканої дотичної дорівнює $f'(x_0)$, де x_0 – абсциса точки дотику. Так як шукана дотична і дана пряма паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні: $f'(x_0)=9$.

$f'(x)=3x^2-3$. Тоді $3x^2-3=9,\ 3x^2=12,\ x^2=4,\ x=\pm 2$. Таким чином на графіку існують дві точки, дотичні в яких паралельні даній прямій.

Якщо $x=2$, то $f(x_0)=f(2)=8-6+1=3$.

Рівняння дотичної: $y=3+9(x-2),\ y=3+9x-18,\ y=9x-15$.

Якщо $x=-2$, то $f(x_0)=f(-2)=-8+6+1=-1$.

Рівняння дотичної: $y=-1+9(x+2),\ y=-1+9x+18,\ y=9x+17$.

Відповідь: $y=9x-15;\ y=9x+17$.

Приклад 6. На параболі $y=x^2$ взято дві точки з абсцисами $x_1=1$ і $x_2=3$. Через ці точки проведена січна. В якій точці параболи дотична до неї буде паралельна січній? Записати рівняння цієї дотичної.

Розв'язання. Нехай $A_1(1;\ y_1)$ і $A_2(3;\ y_2)$ – точки перетину січної з параболою $y=x^2$. Тоді $y_1=1,\ y_2=9$.

Нехай $y=kx+b$ – рівняння січної A_1A_2. Точки $A_1(1;1)$ і $A_2(3;9)$ належать цій прямій, то маємо систему: $\begin{cases}1=k+b,\\ 9=3k+b;\end{cases}$ звідки $k=4$.

Так як шукана дотична паралельна прямій A_1A_2, то її кутовий коефіцієнт $y'(x_0)=k=4$, де x_0 – абсциса точки дотику. Тоді $y'(x_0)=2x_0,\ 2x_0=4,\ x_0=2,\ y(x_0)=y(2)=4$. Отже дотична до параболи буде паралельна січній в точці $(2;\ 4)$.

Рівняння дотичної: $y=4+4(x-2)$, $y=4+4x-8$, $y=4x-4$.
Відповідь: $(2;\ 4)$, $y=4x-4$.

Вправа 4

1). Записати рівняння дотичної до графіка функції $y=-x^2-2$, паралельної прямій $y=4x+1$.

2). Записати рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2-x+3$, паралельної прямій $y+x+3=0$.

3). Знайти рівняння дотичної до кривої $y=e^{2x}$, паралельної прямій $y=22x+4$.

4). На параболі $y=4-x^2$ взято дві точки з абсцисами $x_1=-1$ і $x_2=3$. Через ці точки проведена січна. Знайти рівняння дотичної до даної параболи, паралельної цій січній.

5). Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y=\dfrac{x+4}{x-4}$, паралельної прямій, що проходить через точки $A(0;\ 4)$ і $B(2;\ 0)$.

Приклад 7. Під якими кутами парабола $y=x^2+x$ перетинає вісь абсцис?

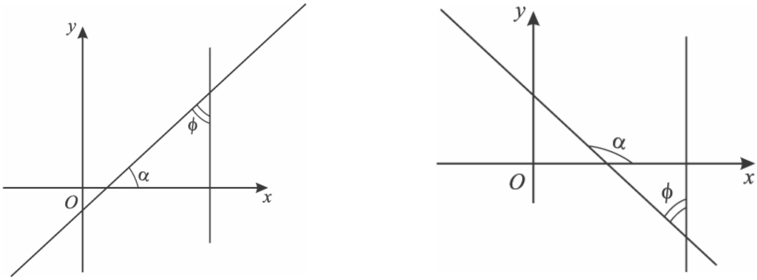
Розв'язання. Кутом між графіком функції $y=f(x)$ і віссю абсцис в деякій точці x_0 називається кут між дотичною до графіка функції в точці x_0 і додатним напрямом осі абсцис.

Знайдемо точки перетину даної параболи з віссю $OX: x^2+x=0, \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи в точці $x_1=0$: $y'=2x+1, k_1=y'(x_1)=y'(0)=1$.

Кут нахилу дотичної α_1 такий, що $\mathrm{tg}\,\alpha_1=1,\ 0\le\alpha_1<\pi$. Отже $\alpha_1=\mathrm{arctg}\,1=45^\circ$. Для точки $x_2=-1: k_2=y'(x_2)=-1, \mathrm{tg}\,\alpha_2=-1$. Враховуючи, що $0\le\alpha_2<\pi$, маємо $\alpha_2=\mathrm{arctg}(-1)=135^\circ$.
Відповідь: $45^\circ, 135^\circ$.

Приклад 8. Знайти кут між прямою $x=3$ і параболою $y=x^2$.
Розв'язання. Шуканий кут $\varphi=90°-\alpha$, де α – кут нахилу дотичної до осі абсцис, якщо $0°\le\alpha\le 90°$. (рис. 8, а).
Або $\varphi=\alpha-90°$, якщо $90°<\alpha<180°$. (рис. 8, б).



а *б*

Рис. 8

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y=x^2$ в точці $x=3$: $y'=2x$, $k=y'(3)=6$. Отже $\operatorname{tg}\alpha=6$, $\alpha=\operatorname{arctg}6$, $\varphi=90°-\operatorname{arctg}6=\operatorname{arcctg}6$.
Відповідь: $\operatorname{arcctg}6$.

Вправа 5

1). Під яким кутом до осі x нахилена дотична, проведена до кривої $y=(x-2)\sin^{-2}x$ в точці з абсцисою $x_0=\dfrac{\pi}{2}$?

2). Який кут утворює з віссю абсцис дотична до параболи $f(x)=x^2+4x-17$, що проходить через точку $M(2,5;-0,75)$? Записати рівняння дотичної.

3). Під яким кутом перетинає вісь x крива:

а) $y=x^4-x^2$; б) $y=1-\sqrt[3]{x}$;

в) $y=x^2+x$; г) $y=\dfrac{1-x}{x}$;

д) $y=\dfrac{5-3x}{2x-3}$.

4). Знайти кут між параболою $y=x^2-4x$ і прямою $x=4$.

5). Під яким кутом крива $y=e^{0,5x}$ перетинає пряму $x=2$?

Приклад 9. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^2-4x+1,$ що проходить через точку $M(0;\,0).$

Розв'язання. Так як $f(0)\neq 0,$ то точка *M* не належить графіку даної функції. Нехай $(x_0;\,y_0)$ – точка дотику.

$y_0=f(x_0)=x_0^2-4x_0+1,$ $f'(x_0)=2x_0-4.$ Тоді рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ приймає вигляд $y=x_0^2-4x_0+1+$ $+(2x_0-4)(x-x_0).$ Так як шукана дотична проходить через точку $M(0;\,0),$ то координати цієї точки задовольнить це рівняння:

$0=x_0^2-4x_0+1+(2x_0-4)(0-x_0).$

Розв'яжемо отримане рівняння: $0=x_0^2-4x_0+1-2x_0^2+4x_0,$

$x_0^2-1=0$

$x_0=\pm 1.$

Отже через точку *M* можна провести дві дотичні до даної параболи.

При $x_0=1$ маємо: $f(x_0)=f(1)=1-4+1=-2,$ $f'(x_0)=$ $=f'(1)=2-4=-2,$ рівняння дотичної: $y=-2-2(x-1),$ $y=-2-2x+2,$ $y=-2x.$ При $x_0=-1$ маємо: $f(-1)=1+4+1=6,$ $f'(-1)=-2-4=-6,$ рівняння дотичної: $y=6-6(x+1),$ $y=6-6x-6,$ $y=-6x.$

Відповідь: $y=-2x,$ $y=-6x.$

Вправа 6

Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x),$ що проходить через задану точку *M*:

1) $f(x)=-x^2+1,$ $M(1;\,1).$

2) $f(x)=x^3,$ $M(2;\,4).$

3) $f(x)=2x^2+2,$ $M(0;\,1).$

4) $f(x)=\dfrac{x+9}{x+5},$ $M(0;\,0).$

5) $f(x)=x^2-4x+1,$ $M(1;\,1).$

Приклад 10. Знайти рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x)=x^2+4x+8$ і $g(x)=x^2+8x+4$.

Розв'язання. Нехай $y=kx+b$ – шукана спільна дотична, x_1 і x_2 – відповідно абсциси її точок дотику з параболами f і g.

$$f'(x)=2x+4,\ g'(x)=2x+8.$$

Рівняння дотичної до параболи f в точці x_1:

$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$ або $y=f'(x_1)\cdot x+f(x_1)-x_1\cdot f'(x_1)$.

Рівняння дотичної до параболи g в точці x_2

$y=g(x_2)+g'(x_2)(x-x_2)$ або $y=g'(x_2)\cdot x+g(x_2)-x_2\cdot g'(x_2)$.

Кутовий коефіцієнт дотичної $k=f'(x_1)=g'(x_2)$, коефіцієнт $b=f(x_1)-x_1\cdot f'(x_1)=g(x_2)-x_2\cdot g'(x_2)$.

Розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2), \\ f(x_1)-x_1\cdot f'(x_1)=g(x_2)-x_2\cdot g'(x_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+4=2x_2+8, \\ x_1^2+4x_1+8-x_1(2x_1+4)=x_2^2+8x_2+4-x_2(2x_2+8); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1^2-x_2^2=4; \end{cases} \begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1+x_2=2; \end{cases} \begin{cases} x_1-x_2=2, \\ 2x_1=4; \end{cases} \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=0. \end{cases}$$ Тоді $k=f'(x_1)=8$,

$b=f(x_1)-x_1\cdot f'(x_1)=20-16=4$.

Отже шукане рівняння спільної дотичної: $y=8x+4$.

Відповідь: $y=8x+4$.

Вправа 7

Знайти рівняння спільної дотичної до графіків функції:

1) $f(x)=x^2-2x+5$ і $g(x)=x^2+2x-11$.

2) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ і $g(x)=-x^2+3x-2$.

3) $f(x)=x^2+2x+5$ і $g(x)=x^2+6x+2$.

Приклад 11. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $(x)=x^2+2x,$ перпендикулярної прямій $y-x+7=0.$

Розв'язання. Нехай k_1 – кутовий коефіцієнт даної прямої $y=x-7,$ k_2 – кутовий коефіцієнт шуканої дотичної. $k_1=1.$ Враховуючи умову перпендикулярності даної прямої і шуканої дотичної, $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-1.$

З іншого боку, $k_2=f'(x_0)=2x_0+2,$ де x_0 – абсциса точки дотику. Тоді маємо $2x_0+2=-1,$ $x_0=-1{,}5;$ $f(x_0)=f(-1{,}5)=$ $=2{,}25-3=-0{,}75.$ Підставимо отримані числові значення в рівняння дотичної, отримаємо:

$y=-0{,}75-(x+1{,}5),$ $y=-0{,}75-x-1{,}5,$ $y=-x-2{,}25.$

Відповідь: $y=-x-2{,}25.$

Вправа 8

Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x),$ перпендикулярної даній прямій:

1) $f(x)=-x^2-3,$ $y-x-3=0.$

2) $f(x)=\operatorname{tg}x,$ $y+x=0.$

3) $f(x)=\ln x,$ $2y+x+1=0.$

4) $f(x)=e^{-x},$ $y=\dfrac{1}{2}x+3.$

Приклад 12. Знайти координати точки перетину двох дотичних, проведених до графіка функції $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x-1},$ проведених в точках з абсцисами $x_1=-1$ і $x_2=3.$

Розв'язання. $f'(x)=\dfrac{3(2x-1)-2(3x+1)}{(2x-1)^2}=\dfrac{6x-3-6x-2}{(2x-1)^2}=$

$$=-\frac{5}{(2x-1)^2}.$$

Знайдемо рівняння дотичної в точці x_1:

$$f(x_1)=f(-1)=\frac{-3+1}{-2-1}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}, \quad f'(x_1)=f'(-1)=-\frac{5}{(-2-1)^2}=-\frac{5}{9}.$$

Підставимо знайдені значення в рівняння дотичної, отримаємо:

$$y=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}(x+1),\ y=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}x-\frac{5}{9},\ y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}.$$

Знайдемо рівняння дотичної в точці x_2:

$$f(x_2)=f(3)=\frac{9+1}{6-1}=\frac{10}{5}=2,\ f'(x_2)=f'(3)=-\frac{5}{(6-1)^2}=-\frac{1}{5},$$

$$y=2-\frac{1}{5}(x-3),\ y=2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5},\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}.$$

Щоб знайти точки перетину дотичних розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}, \\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}; \end{cases} \begin{cases} y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}, \\ -\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}; \end{cases} \begin{cases} y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}, \\ \frac{16}{45}x=-\frac{112}{45}; \end{cases} \begin{cases} y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}, \\ x=-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7, \\ y=4. \end{cases}$$

Відповідь: $(-7;\ 4)$.

Приклад 13. Знайти кут між дотичними до графіка функції $f(x)=3x^3-7x^2+3x+5$ в точках з абсцисами $x_1=0$ і $x_2=1$.

Розв'язання. Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних:

$$f'(x)=9x^2-14x+3;\ k_1=f'(x_1)=f'(0)=3;\ k_2=f'(x_2)=f'(1)=$$
$$=9-14+3=-2.$$

Нехай φ – шуканий кут між дотичними, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-2-3}{1-6}\right|=\left|\frac{-5}{-5}\right|=1,\ \varphi=45^\circ.$$

Відповідь: $\varphi=45^\circ$.

Вправа 9

1). Знайти координати точки перетину двох дотичних, проведених до графіка функції $y=\frac{x^2+1}{x-3}$ в точках з абсцисами $x_1=4$ і $x_2=-2$.

2). Знайти координати точки перетину дотичних до графіка функції $y=\cos x$ в точках з абсцисами $x_1=-\frac{\pi}{3}$ і $x_2=\frac{\pi}{3}$.

3). Знайти кут між дотичними до графіка функції $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ в точках з абсцисами $x_1=1$ і $x_2=\frac{1}{2}$.

4). Довести, що дотичні, проведені до кривої $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках її перетину з осями координат, паралельні між собою.

5). Знайти косинус кута між дотичними, проведеними до параболи $y=x^2$, що перетинаються в точці $(0;\,-2)$.

6). Знайти кут між дотичними до параболи $y=x^2-3x+1$, проведеними з точки $M(4;\,1)$.

Приклад 14. Знайти кут, під яким перетинаються графіки функцій $y=\frac{x^3}{9}$ і $y=x$.

Розв'язання. Кутом між графіками функцій в точці їх перетину називається кут між дотичними до цих графіків, проведеними в точці перетину.

Знайдемо точки перетину графіків даних функцій $f(x)=\frac{x^3}{9}$ і $g(x)=x$, $\frac{x^3}{9}=x$, $x^3-9x=0$, $x\left(x^2-9\right)=0$, $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=3. \end{array}\right.$

$f(0)=0$, $f(-3)=-3$, $f(3)=3$. Отже дані графіки мають три спільні точки: $A(0;\,0)$, $B(-3;\,-3)$, $C(3;\,3)$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до даних графіків в точці $A(0;\,0)$: $f'(x)=\dfrac{3x^2}{9}=\dfrac{x^2}{3}$, $k_1=f'(0)=0$; $g'(x)=1$, $k_2=g'(0)=1$.

Нехай φ – кут між дотичними, проведеними в точці A, $0\le\varphi\le 90°$. Тоді $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\dfrac{1-0}{1+1\cdot 0}\right|=1$, $\varphi=\operatorname{arctg}1$, $\varphi=45°$.

Аналогічно для точки $B(-3;\,-3)$: $k_3=f'(-3)=3$, $k_4=g'(-3)=1$, $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{k_4-k_3}{1+k_3k_4}\right|=\left|\dfrac{1-3}{1+1\cdot 3}\right|=\left|\dfrac{-2}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Аналогічно для точки $C(3;\,3)$: $k_5=f'(3)=3$, $k_6=g'(3)=1$. Оскільки $k_5=k_3$, $k_6=k_4$, то кут між дотичними в точці C також дорівнює $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $45°$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Вправа 10

Знайти кути, під якими перетинаються графіки функцій:

1) $y=(x-2)^2$ і $y=-4+6x-x^2$.

2) $y=\cos x$ і $y=\dfrac{1}{2}$.

3) $y=-x+4$ і $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4$.

4) $y=\sin x$ і $y=\cos x$.

5) $y=e^x$ і $y=e^{3x}$.

6) $y=\sqrt{1-x^2}$ і $y=\sqrt{x}$.

7) $y=x^3-x$ і $y=\dfrac{12}{x}$.

Приклад 15. Знайти найменшу відстань від точки $B(6;\,0)$ до графіка функції $f(x)=\sqrt{2x+5}$.

Розв'язання. Нехай $A(x_0;\ y_0)$ – точка графіка даної функції, дотична в якій до цього графіка перпендикулярна прямій *AB*. Тоді довжина відрізка *AB* і буде найменшою відстанню від точки *B* до графіка функції.

Кутовий коефіцієнт дотичної в точці *A* $k_1 = f'(x_0)$. Пряма *AB* перпендикулярна дотичній, то її кутовий коефіцієнт $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot (2x+5)' = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$, $k_2 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} =$ $= -\sqrt{2x_0+5}$, рівняння прямої $AB:\ y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ або $y = \sqrt{2x_0+5} - \sqrt{2x_0+5}\,(x - x_0)$.

Точка $B(6;\ 0)$ належить прямій *AB*, то її координати задовольняють отримане рівняння:

$0 = \sqrt{2x_0+5} - \sqrt{2x_0+5}\,(6 - x_0)$.

Розв'яжемо це рівняння:

$\sqrt{2x_0+5}\,(1 - 6 + x_0) = 0,\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x_0+5} = 0, \\ -5 + x_0 = 0. \end{array}\right.$

Але при $\sqrt{2x_0+5} = 0$ $f'(x_0)$ не існує, отже $x_0 = 5$. Тоді $y_0 = \sqrt{2 \cdot 5 + 5} = \sqrt{15}$. Знайдемо відстань між точками $A\left(5;\ \sqrt{15}\right)$ і $B(6;\ 0)$: $AB = \sqrt{(6-5)^2 + \left(0 - \sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{1+15} = \sqrt{16} = 4$.

Відповідь: 4.

Вправа 11

Знайти найменшу відстань від даної точки *B* до графіка функції $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2 - 1,\ B(6;\ 2)$.
2) $f(x) = 3 - 2x - x^2,\ B(2;\ 4)$.
3) $f(x) = -\sqrt{2-x},\ B(-5;\ 0)$.
4) $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\ B\left(4;\ 2\sqrt{5}\right)$.

Вправа 12

Знайти координати точки *M*, що належать графіку даної функції $y = f(x)$ і найменше віддалена від даної прямої:

1) $f(x) = \cos^2 x$ при $0 \le x \le \pi$, $x\sqrt{3} - 2y - 7 = 0$.

2) $f(x) = 2 + \cos x$ при $0 \le x \le \pi$, $x + 2y + 3 = 0$.

3) $f(x) = 1 - \sin x$ при $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$, $x - y\sqrt{2} - 5 = 0$.

Приклад 16. Знайти рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається параболи $y = x^2 + 1$ і прямої $y - x + 1 = 0$.

Розв'язання. З усіх кіл, що дотикаються прямої і параболи, найменший радіус має те коло, яке дотикається параболи в тій точці, дотична в якій паралельна даній прямій.

Перевіримо, чи перетинається графік функції $y = x^2 + 1$ і пряма $y = x - 1$:

$$x^2 + 1 = x - 1$$
$$x^2 - x + 2 = 0$$

$D = 1 - 8 = -7$, $D < 0$, рівняння коренів не має, отже дані парабола і пряма не перетинаються.

Знайдемо точку $A(x_A;\, y_A)$ на параболі, в якій дотична паралельна прямій $y = x - 1$ з кутовим коефіцієнтом $k = 1$:

$$f'(x) = 2x,$$

$$2x_A = 1,\ x_A = \frac{1}{2},\ y_A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Знайдемо пряму, що проходить через точку $A\left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{5}{4}\right)$ перпендикулярну прямій $y = x - 1$. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -1$. Тоді рівняння цієї прямої $y = -x + b$. Щоб знайти коефіцієнт b скористаємося тим, що точка $A\left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{5}{4}\right)$

належить шуканій прямій: $\frac{5}{4}=-\frac{1}{2}+b,\ b=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}.$ Отже $y=-x+\frac{7}{4}.$

Знайдемо точку $B(x_B,\ y_B)$ перетину прямих $y=x-1$ і $y=-x+\frac{7}{4}$: $\begin{cases} y=x-1, \\ y=-x+\frac{7}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-1, \\ x-1=-x+\frac{7}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-1, \\ 2x=\frac{11}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-1, \\ x=\frac{11}{8}; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{11}{8}, \\ y=\frac{3}{8}. \end{cases}$ Отже $B\left(\frac{11}{8};\ \frac{3}{8}\right).$

AB – найменша відстань між точками даних параболи і прямої.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2-\left(-\frac{7}{8}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{49}{64}+\frac{49}{64}}=\sqrt{\frac{49\cdot 2}{64}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

З іншого боку AB – діаметр шуканого кола, отже радіус шуканого кола $R=\frac{1}{2}AB=\frac{7\sqrt{2}}{16}$. Нехай $C(x_C,\ y_C)$ – центр цього кола.

Тоді $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{11}{8}}{2}=\frac{15}{8\cdot 2}=\frac{15}{16},$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{8}}{2}=\frac{13}{8\cdot 2}=\frac{13}{16}.$$

Отже рівняння шуканого кола $\left(x-\frac{15}{16}\right)^2+\left(y-\frac{13}{16}\right)^2=\left(\frac{7\sqrt{2}}{16}\right)^2.$

Відповідь: $\left(x-\frac{15}{16}\right)^2+\left(y-\frac{13}{16}\right)^2=\frac{49}{128}.$

Вправа 13

Знайти рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається даної параболи і прямої AB:

1) $y = x^2 + 2x + 2,\ y = 2x - 3;$

2) $y = x^2 - 2x + 2,\ A(3;\,-9),\ B(-4;\,5).$

3) $y = -x^2 - 2x - 2,\ A(4;\,-5),\ B(-2;\,7).$

Приклад 17. На гіперболі $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0,$ задана точка $M(x_0,\, y_0)$ така, що $y_0 = \dfrac{3}{7}x_0$. Знайти площу трикутника, утвореного дотичною до гіперболи в точці M і осями координат.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M, розв'язавши систему $\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{x_0}, \\ y_0 = \dfrac{3}{7}x_0, \\ x_0 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{x_0} \\ \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{3}{7}x_0, \\ x_0 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{x_0}, \\ x_0 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \\ y_0 = -\sqrt{\dfrac{3}{7}}. \end{cases}$ Отже $M\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}};\, -\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right).$

Знайдемо рівняння дотичної до гіперболи в точці M: $y' = -\dfrac{1}{x^2},\ y'(x_0) = y'\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) = -\dfrac{1}{\frac{7}{3}} = -\dfrac{3}{7}.$ Тоді рівняння дотичної $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$: $y = -\sqrt{\dfrac{3}{7}} - \dfrac{3}{7}\left(x + \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right).$

Вісь ординат пряма перетинає в точці $A\left(0;\, -2\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right),$ вісь абсцис –в точці $B\left(-2\sqrt{\dfrac{7}{3}};\, 0\right)$ (рис. 9).

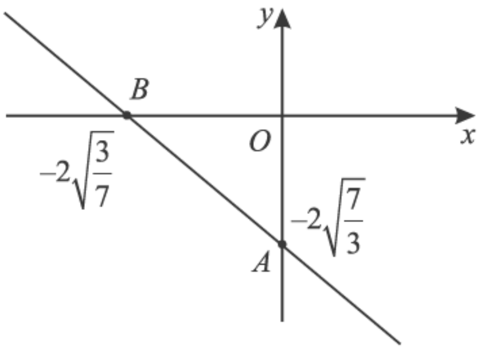


Рис. 9

Тоді $OA = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$, $OB = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, шукана площа $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2.$

Відповідь: 2.

Приклад 18. До графіка функції $f(x) = 3x - x^2$ проведено дві дотичні. Перша дотична проведена в точці з абсцисою $x_1 = 2$, друга – в точці максимуму даної функції. Знайти площу трикутника, утвореного віссю ординат і цими дотичними.

Розв'язання. $f'(x) = 3 - 2x$. Знайдемо рівняння дотичної до даної параболи в точці $x_1: f(x_1) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 4 = 2;$ $f'(x_1) = f'(2) = 3 - 4 = -1;$ $y = 2 - 1(x - 2)$, $y = 2 - x + 2$, $y = -x + 4.$

Знайдемо x_2 – точку максимуму даної функції. $x_2 = x_{\text{вершини}} = \frac{3}{2}.$ Запишемо рівняння дотичної в точці

$$x_2 : f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4},\ f'(x_2) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0;$$

$$y = \frac{9}{4} + 0\left(x - \frac{3}{2}\right),\ y = \frac{9}{4}.$$

Пряма $y=-x+4$ перетинає вісь ординат в точці $B(0;\,4)$, пряма $y=\dfrac{9}{4}$ – в точці $C\left(0;\,\dfrac{9}{4}\right)$.

Знайдемо абсцису точки A перетину дотичних: $-x+4=\dfrac{9}{4}, x=\dfrac{7}{4}$ (рис. 10).

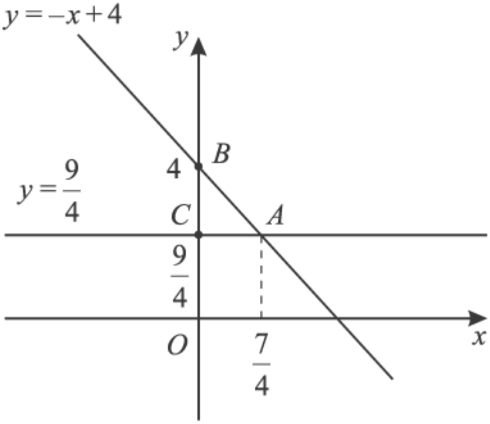


Рис. 10

У ΔABC, площу якого треба знайти, $BC=4-\dfrac{9}{4}=\dfrac{7}{4}$, $CA=\dfrac{7}{4}$.

Тоді $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CA=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{49}{32}$.

Відповідь: $\dfrac{49}{32}$.

Вправа 14

1) Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y=x^3+x^2-6x+1$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

2) Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $f(x)=\sqrt{2x^2-4}$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

3) Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y=\frac{3x+1}{2(x-1)}$ в точці з абсцисою $x_0=2.$

4) На гіперболі $y=\frac{1}{x},\ x>0,$ задана точка $M(x_0,\ y_0).$ Знайти площу трикутника, утвореного дотичною до гіперболи, проведеною через точку M, і осями координат, якщо $y_0=\frac{4}{5}x_0.$

5) Знайти площу трикутника, обмеженого віссю x, прямою $x=4$ і дотичною до графіка функції $f(x)=x^2-2x+4$ в точці з абсцисою $x_0=4.$

6) До графіка функції $f(x)=-8x-x^2$ проведені дві дотичні. Перша дотична проведена в точці з абсцисою $x_1=-6,$ друга – в точці з абсцисою $x_2=1.$ Знайти площу трикутника, утвореного віссю ординат і цими дотичними.

7) Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною до кривої $y=\sqrt{x^2-5}$ в точці $M(3;\,2).$

Розділ V. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ І ЕКСТРЕМУМИ

§ 1. Зростання, спадання функції

Функція називається ***зростаючою*** на проміжку $J=[a,b],$ якщо для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)>f(x_1).$ Якщо виконується нерівність $f(x_2)\geq f(x_1),$ то функція називається ***неспадною*** на проміжку J.

Функція називається ***спадною*** на проміжку J, якщо для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$. Якщо виконується нерівність $f(x_2) \le f(x_1)$, то функція називається ***незростаючою***.

Функції тільки зростаючі або тільки спадні називаються ***строго монотонними*** функціями.

Функції тільки незростаючі або неспадні називаються ***монотонними*** функціями.

Знаходження проміжків зростання і спадання функції – це одна з основних задач дослідження функції. Таке дослідження легко провести за допомогою похідної.

Сформулюємо відповідні твердження.

Достатня ознака зростання функції.

Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці інтервалу *J,* то функція f зростає на *J*. ($f(x) \nearrow$ на *J*).

Достатня ознака спадання функції.

Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці інтервалу *J,* то функція f спадає на *J*. ($f(x) \searrow$ на *J*).

Доведення цих ознак здійснюється на підставі формули Лагранжа. Візьмемо два будь-яких числа x_1 і x_2 з інтервалу J. Нехай $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа існує число $c \in (x_1, x_2)$ таке, що

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \tag{1}$$

Число *c* належить інтервалу *J,* оскільки точки x_1 і x_2 належать J. Якщо $f'(x) > 0$ для $x \in J$, то $f'(c) > 0$, і як випливає з формули (1), де $x_2 - x_1 > 0$ $f(x_1) < f(x_2)$. Цим доведено зростання функції f на J. Якщо ж $f'(x) < 0$ для $x \in J$, то $f'(c) < 0$, і оскільки $x_2 - x_1 > 0$ то з формули (1) випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$. Доведено спадання функції f на J.

Зауваження 1. *Якщо функція неперервна в якому-небудь з кінців проміжку зростання (спадання), то цю точку приєднують до проміжку.*

Зауваження 2. *Для розв'язування нерівностей* $f'(x)>0$ *і* $f'(x)<0$ *зручно користуватись методами інтервалів: точки в яких похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції* f *на проміжки знакосталості похідної* $f'(x)$ *(в кожному з яких* $f'(x)$ *зберігає постійний знак). Знак можна визначити, обчисливши* $f'(x)$ *в будь-якій точці проміжку.*

Зауваження 3. *Якщо при дослідженні функції на монотонність ми отримали не один, а декілька інтервалів, де похідна, наприклад, менше нуля, то функція спадає не на об'єднанні цих інтервалів, а на кожному з них.*

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

1. Знайти область визначення даної функції $(D(f))$.
2. Знайти її похідну $(f'(x))$.
3. Знайти точки, в яких $f'(x)=0$, або не існує.
4. Розбити область визначення знайденими точками на проміжки.
5. Визначити знак похідної на кожному проміжку.
6. Зробити висновок про монотонність функції
$$\left(f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow;\ f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\searrow\right).$$

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання функції:
1) $f(x)=x^3+6x^2-15x+2$.

Дана функція визначена і диференційовна на множині дійсних чисел $\left(D(f)=(-\infty;\infty)\right)$. Маємо

$$f'(x)=3x^2+12x-15=3\left(x^2+4x-5\right)=3(x+5)(x-1).$$

Враховуючи неперервність функції $f'(x)$ на множині $(-\infty;\infty)$, дослідимо знак похідної методом інтервалів (рис.11).

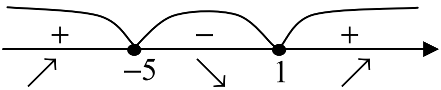


Рис 11

Можна зробити висновок, (з урахуванням неперервності функції $f(x)$ в точках -5 і 1), що ця функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-5]$ і $[1;\infty)$, спадає на $[-5;1]$.

Відповідь: дана функція зростає на $(-\infty;-5]$ і $[1;\infty)$, спадає на $[-5;1]$.

2) $y(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$.

Дана функція неперервна і диференційовна на $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

$$y'(x)=\left(\frac{x^2-3x}{x+1}\right)'=\frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-x-3-x^2+3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Враховуючи неперервність функції $y'(x)$ на множині $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$, дослідимо її знак (рис.12).

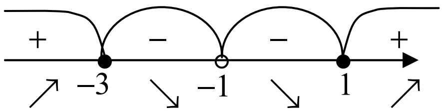


Рис. 12

Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-3]$ і $[1;\infty)$, спадає на проміжках $[-3;-1)$ і $(-1;1]$.

Відповідь: зростає на $(-\infty; -3]$ і $[1; \infty)$, спадає на $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Дана функція визначена на множині $D(f) = (-\infty;\, 0] \cup [2;\, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Функція $f'(x)$ визначена на множині $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Якщо $x < 0$, то $f'(x) < 0$, а якщо $x > 2$, то $f'(x) > 0$.

Відповідь: зростає на $[2; \infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$.

4) $g(x) = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{x}$. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; \infty)$.

Маємо $g'(x) = 6 \cdot 3^{3x} \ln 3 - 8 \cdot 3^{2x} \ln 3 + 2 \cdot 3^{x} \ln 3 =$

$= 2\ln 3 \cdot 3^{x}\left(3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} + 1\right) = 6\ln 3 \cdot 3^{x}\left(3^{x} - 1\right)\left(3^{x} - \frac{1}{3}\right).$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x} - 1 = 0, \\ 3^{x} - \frac{1}{3} = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Знайдемо проміжки знакосталості $g'(x)$ (рис.13).

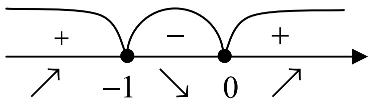


Рис. 13

Відповідь: зростає на $(-\infty; -1]$ і $[0; \infty)$, спадає на $[-1; 0]$.

5) $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

Дана функція визначена і диференційовна на $D(f) = (0; \infty)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Визначимо знак $f'(x)$ на множині $D(f) = (0; \infty)$ (рис.14).

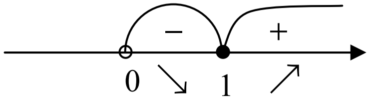


Рис. 14

Відповідь: зростає на $[1; \infty)$, спадає на $(0; 1]$.

6. $y(x) = \sin x - \frac{1}{2}x.$

Область визначення функції $D(f) = (-\infty; \infty)$.

$y'(x) = \cos x - \frac{1}{2}.$

Знайдемо проміжки, на яких $y' > 0$ і $y' < 0$ (рис.15, 16).

$\cos x - \frac{1}{2} < 0$

$\cos x < \frac{1}{2}.$

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in Z.$$

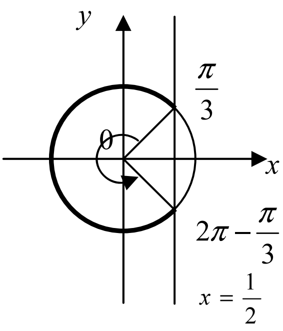


Рис. 15

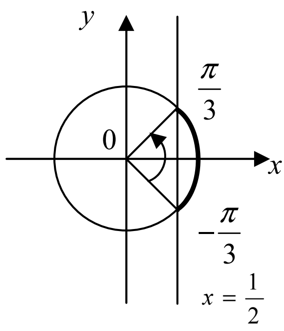


Рис. 16

$$\cos x - \frac{1}{2} > 0, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in Z.$$

$$\cos x > \frac{1}{2}$$

Відповідь: спадає на кожному з проміжків $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in Z;$

зростає на кожному з проміжків $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in Z.$

Вправа 1

Знайти проміжки зростання і спадання даних функції.

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2.$

2) $g(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x - 6.$

3) $y(x) = x^2 - 5 - 2x - 8x^3.$

4) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 21x^2 + 72x - 3.$

5) $y(x) = \frac{x^2 - x - 6}{3 - x}.$

6) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$

7) $f(x) = \sqrt{x - x^2}.$

8) $y(x) = x + \ln(1 - 2x).$

9) $g(x) = \frac{x}{\ln x}.$

10) $f(x) = \ln^2 x - \ln x.$

11) $y(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + x \ln 16 - 1.$

12) $f(x) = 3\ln(x+1) + 7\ln(x+2) - 6\ln(x-1) + 2.$

13) $g\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\cos x.$

14) $f\left(x\right)=\sin^2 x-x.$

15) $f\left(x\right)=4x^2e^{2x}+16xe^{2x}+e^{2x}.$

Приклад 2.1). Довести, що функція $f\left(x\right)=12x^5-15x^4-10x^3+30x-4$ зростає на R.

Розв'язання.

$$f'\left(x\right)=60x^4-60x^3-30x^2+30=30\left(2x^4-2x^3-x^2+1\right)=$$

$$=30\left(2x^3\left(x-1\right)-\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right)=30\left(x-1\right)\left(2x^3-x-1\right)=$$

$$=30\left(x+1\right)\left(x^3-x+x^3-1\right)=30\left(x-1\right)\left(x\left(x^2-1\right)+\left(x^3-1\right)\right)=$$

$$=30\left(x-1\right)\left(x\left(x-1\right)\left(x+1\right)+\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\right)=$$

$$=30\left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+x^2+x+1\right)=30\left(x-1\right)^2\left(2x^2+2x+1\right).$$

Легко помітити, що $\left(x-1\right)^2\geq 0$ при всіх $x\in R$, $2x^2+2x+1>0$ при всіх $x\in R$. Таким чином $f'\left(x\right)\geq 0$ при всіх $x\in R$, причому $f'\left(x\right)=0$ в одній точці $x=1.$ Отже дана функція зростає на R, що і потрібно було довести.

2). Довести, що функція $f\left(x\right)=1-15x+10x^2-x^5$ спадає на проміжку $\left[0;\infty\right)$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'\left(x\right)=-15+20x-5x^4=-5\left(x^4-4x+3\right)=-5\left(x^4-x-3x+3\right)=$$

$$=-5\left(x\left(x^3-1\right)-3\left(x-1\right)\right)=-5\left(x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)-3\left(x-1\right)\right)=$$

$$=-5\left(x-1\right)\left(x^3+x^2+x-3\right)=-5\left(x-1\right)\left(x^3-1+x^2-1+x-1\right)=$$

$$=-5\left(x-1\right)\left(\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)+\left(x-1\right)\right)=$$

$$=-5\left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1+x+1+1\right)=-5\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+3\right).$$

Очевидно $x^2+2x+3>0$ при $x\in[0;\infty)$, $(x-1)^2\geq 0$ при будь-яких значеннях x. Таким чином $f'(x)\leq 0$ на проміжку $[0;\infty)$. Отже, дана функція спадає на проміжку $[0;\infty)$, що і потрібно було довести.

Вправа 2

Довести, що дана функція є монотонною на множині R. Вказати характер монотонності:

1) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^9-x^6+2x^3-3x^2+6x-1.$

2) $y(x)=6-6x-2x^3+3x^2.$

3) $f(x)=\sqrt{2}x-\cos x.$

4) $g(x)=\sin x-\dfrac{\pi}{2}x.$

5) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}-e^x.$

6) $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}.$

7) Довести, що функція

$$f(x)=-x^6+15x^2-24x+1$$

спадає на проміжку $[1;\infty)$.

8) Довести, що функція

$$y=\frac{2}{3}x^6-x^5+x-2$$

зростає на проміжку $[1;\infty)$.

§ 2. Критичні точки функції, максимуми і мінімуми

Внутрішні точки області визначення функції, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* цієї функції. Зокрема, якщо $f'(x)=0,$ то точку x_0 називають стаціонарною точкою функції $y=f(x).$

Ці точки відіграють важливу роль при побудові графіка функції, оскільки тільки вони можуть бути точками локального екстремуму функції.

Приклад 3. Знайти критичні точки функції:

1) $y=x^3-6x^2+9x+5.$

Знайдемо $y'.$ $y'=3x^2-12x+9.$ y' існує при $x\in R,$ то розв'яжемо рівняння $y'=0.$

$$3x^2-12x+9=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=1. \end{array}\right.$$

Маємо: $y'=0$ при $x=1$ і $x=3,$ отже $x=1$ і $x=3$ – критичні точки.

Відповідь: 1; 3.

2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}.$

Область визначення даної функції: $x\in[0;\infty).$

$$y'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'(x+1)-\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Похідна y' не визначена при $x\le 0,$ але враховуючи $D(y),$ y' не існує тільки в точці $x=0,$ яка не є внутрішньою точкою області визначення, отже не є критичною. $y'=0$ при $x=1.$ Отже дана функція має критичну точку $x=1.$

Відповідь: 1.

Вправа 3

Знайти критичні точки функції:

1) $f(x)=\sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x-x+2.$

2) $f(x)=(x-1)^2(x-6)^3.$

3) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2.$

4) $f(x)=x^4-2x^2+3.$

Точку $x_0\in D(f)$ називають точкою ***максимуму (мінімуму)*** функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, у якому для всіх x виконується нерівність:

$$f(x)<f(x_0),\ \left(f(x)>f(x_0)\right).$$

Значення функції у точці x_0, $f(x_0)$ називають максимумом (мінімумом) функції.

Точки максимуму і мінімуму називають точками локального екстремуму функції.

Точки, в яких похідна $f'(x)=0$, або не існує називають критичними точками функції $y=f(x)$.

Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма).

Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції f і в цій точці існує похідна $f'(x)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x)=0$.

Достатні умови існування екстремуму в точці.

Ознака максимуму функції.

Якщо функція f неперервна в точці x_0, а $f'(x)>0$ на проміжку $(a;x_0)$ і $f'(x)<0$ на проміжку $(x_0;b)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції.

Зручно користуватись спрощеним формулюванням: *якщо в точці x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 є точкою максимуму.*

Доведення. Похідна $f'(x)>0$ на інтервалі $(a;x_0)$, а функція f неперервна в точці x_0, то функція f зростає на проміжку $(a;x_0]$, і тому $f(x)<f(x_0)$ для всіх x з проміжку $(a;x_0)$.

На проміжку $[x_0; b)$ функція f спадає (доведення аналогічне), а тому $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з проміжку $(x_0; b)$.

Отже, $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ з проміжку $(a; b)$, тобто x_0 є точкою максимуму функції f.

Ознака мінімуму функції

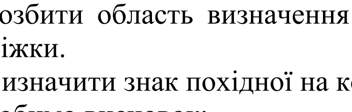
Якщо функція f неперервна в точці x_0, $f'(x_0) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x_0) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції.

Зручно користуватись спрощеним формулюванням: *якщо в точці x_0 похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 є точкою мінімуму.*

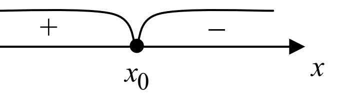
Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, то в точці x_0 функція екстремуму не має.

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ЕКСТРЕМУМ

1. Знайти область визначення даної функції $(D(f))$.
2. Знайти її похідну $(f'(x))$.
3. Знайти точки, в яких $f'(x) = 0$, або не існує.
4. Розбити область визначення знайденими точками на проміжки.
5. Визначити знак похідної на кожному проміжку.
6. Робимо висновок:

$f'(x)$ 

x_0 – точка максимуму

$f'(x)$ 

x_0 – точка мінімуму

7. Знаходимо екстремуми $(f(x_0))$.

Приклад 4. Знайти точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^4-5.$

Маємо: $f'(x)=x^4-4x^3=x^3(x-4).$

$f'(x)=0$ при $x=0$ і $x=4$. Отже функція має дві критичні точки: $0; 4$. Дослідимо знак похідної (рис. 17).

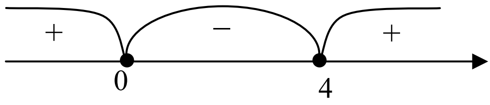


Рис. 17

Враховуючи характер зміни знака похідної, робимо висновок, що $x=0$ – точка максимуму, а $x=4$ – точка мінімуму.

Відповідь: $x=0$ – точка максимуму, а $x=4$ – точка мінімуму.

2) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}.$

Дана функція визначена при $x\neq 10$.

Маємо: $f'(x)=\dfrac{(2x-7)(x-10)-\left(x^2-7x+6\right)\cdot 1}{(x-10)^2}=$

$$=\frac{2x^2-27x+70-x^2+7x-6}{(x-10)^2}=\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}=\frac{(x-16)(x-4)}{(x-10)^2}.$$

Функція $f'(x)$ не визначена при $x=10$, але ця точка не є точкою області визначення, отже не є критичною. $f'(x)=0$ при $x=16$ або $x=4$. Таким чином функція $f(x)$ має дві критичні точки $x=4$ і $x=16$. Дослідимо знак похідної на $D(f)$ (рис. 18).

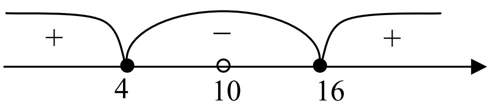


Рис. 18

Приходимо до висновку, що $x=4$ – точка максимуму, а $x=16$ – точка мінімуму.

Відповідь: $x=4$ – точка максимуму, $x=16$ – точка мінімуму.

Вправа 4

Знайти точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+3.$

2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}.$

4) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+3}.$

5) $f(x)=2\sin x+\sin 2x.$

6) $f(x)=(x-1)^3(x-2)^2.$

Приклад 5. Знайти проміжки монотонності і екстремуми функції:

1) $f(x)=\frac{x}{\ln x}.$

Дана функція визначена і диференційована на множині $D(f)=(0;1)\cup(1;\infty).$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

$f'(x)=0$ при $\ln x=1, x=e.$

Дослідимо знак $f'(x)$ на множині $D(f)$ (рис. 19).

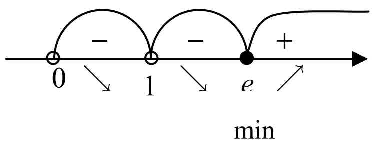


Рис.19

$$f_{\min} = f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e.$$

Відповідь: зростає на $[e; \infty)$, спадає на $(0; 1)$ і $(1; e]$, $f_{\min} = f(e) = e.$

2) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$

Дана функція визначена і диференційовна на всій числовій прямій.

$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x).$ $f'(x) = 0$ при $x = 2.$ (рис. 20)

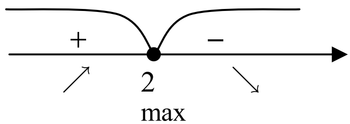


Рис.20

$$f_{\max} = f(2) = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Відповідь: зростає на $(-\infty; 2]$, спадає на $[2; \infty)$, $f_{\max} = f(2) = \frac{2}{e}.$

3) $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}.$

Дана функція визначена і диференційовна на $D(f) = \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right].$

$$f'(x) = \left(\sqrt{8x^2 - x^4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \cdot \left(8x^2 - x^4\right)' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} =$$

$$= \frac{4x\left(4 - x^2\right)}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \frac{2x(2 - x)(2 + x)}{\sqrt{8x^2 - x^4}}$$

Дослідимо знак $f'(x)$ на $D(f)$ (рис. 21).

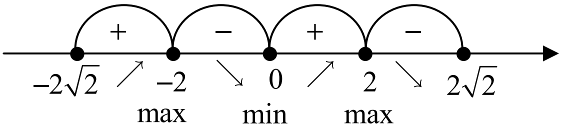


Рис. 21

Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $\left[-2\sqrt{2}; -2\right]$ і $[0; 2]$, спадає на кожному з проміжків $[-2; 0]$ і $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$; $x=-2$ і $x=2$ – точки максимуму, $x=0$ – точка мінімуму; максимуми даної функції $y_{\max}=y(-2)=4$ і $y_{\max}=y(2)=4$; мінімум $y_{\min}=y(0)=0$.

Відповідь: зростає на $\left[-2\sqrt{2}; -2\right]$ і $[0; 2]$, спадає на $[-2; 0]$ і $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$; $y_{\max}=y(-2)=y(2)=4$, $y_{\min}=y(0)=0$.

4) $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos 3x.$

Дана функція визначена і диференційовна на множині *R*, періодична з періодом 2π.

Тому достатньо дослідити її на монотонність у проміжку довжини 2π, наприклад у проміжку $[0; 2\pi)$.

$$f'(x)=-\sin x-\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x-\sin x)-\sin 2x=$$
$$=2\sin x\cos 2x-\sin 2x=2\sin x\cos 2x-2\sin x\cos x=$$
$$=2\sin x(\cos 2x-\cos x)=2\sin x\cdot(-2)\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=-4\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}.$$

З рівняння $-4\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=0$ знаходимо критичні точки. Звідки $x=\pi k, k\in Z$ або $x=\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$

Проміжку $[0; 2\pi)$ належать точки: $x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = \dfrac{2\pi}{3},$ $x_4 = \dfrac{4\pi}{3},$ які розбивають його на чотири інтервали (рис. 22).

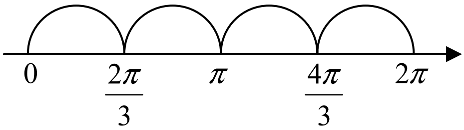


Рис. 22

У кожному з отриманих проміжків похідна $f'(x)$ зберігає знак, як неперервна функція. Визначимо знак похідної в кожному проміжку:

1) розглянемо $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \dfrac{\pi}{2} \in \left(0; \dfrac{2\pi}{3}\right).$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}.$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ 1 > 0;\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} > 0;\ \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Отже $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0.$

2) розглянемо $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right), \dfrac{3\pi}{4} \in \left(\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right).$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{9\pi}{8}.$$

$\sin\dfrac{3\pi}{4} > 0,\ \sin\dfrac{3\pi}{8} > 0,\ \sin\dfrac{9\pi}{8} < 0.$ Отже $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0.$

3) розглянемо $f'\left(\dfrac{5\pi}{4}\right), \dfrac{5\pi}{4} \in \left(\pi; \dfrac{4\pi}{3}\right).$

$$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{15\pi}{8}.$$

$$\sin\frac{5\pi}{4}<0,\ \sin\frac{5\pi}{8}>0,\ \sin\frac{15\pi}{8}<0.\ \text{Отже}\ f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)<0.$$

4) розглянемо $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right), \frac{3\pi}{2}\in\left(\frac{4\pi}{3};2\pi\right)$.

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-4\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{9\pi}{4}.$$

$$\sin\frac{3\pi}{2}<0,\ \sin\frac{3\pi}{4}>0,\ \sin\frac{9\pi}{4}>0.\ \text{Отже}\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)>0.$$

Зобразимо отримані результати на рис. 23.

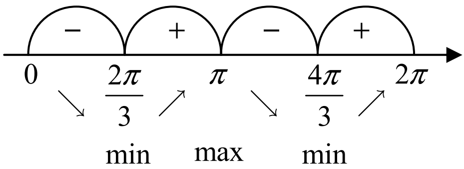


Рис. 23

Отже, функція $f(x)$ зростає на $\left(\frac{2\pi}{3};\pi\right)$ і $\left(\frac{4\pi}{3};2\pi\right)$; спадає на $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(\pi;\frac{4\pi}{3}\right)$; точки $x=\frac{2\pi}{3}$ і $x=\frac{4\pi}{3}$ – точки мінімуму, а точка $x=\pi$ – точка максимуму, причому

$$f_{\min}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{3}\cos 2\pi=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot 1=$$
$$=-\frac{13}{12};$$

$$f_{\min}=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{3}-\frac{1}{3}\cos 4\pi=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot 1=$$
$$=-\frac{13}{12};$$

$$f_{\max}=f(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 2\pi-\frac{1}{3}\cos 3\pi=-1+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot(-1)=-\frac{1}{6}.$$

Оскільки дана функція періодична і неперервна, то маємо
Відповідь:

зростає на $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]$ і $\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$;

спадає на $\left[2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$ і $\left[\pi+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$;

$f_{\min}=f\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{13}{12}$, $f_{\min}=f\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{13}{12}$,

$f_{\max}=f\left(\pi+2\pi k\right)=-\frac{1}{6}$, $k\in Z$

Вправа 5

Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції:

1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8.$

2) $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x-3.$

3) $f(x)=x^5-20x^2.$

4) $f(x)=(x+2)^2(x-1)^2.$

5) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}.$

6) $f(x)=\frac{10}{8x^2-24x+23}.$

7) $f(x)=\frac{3x-1}{1-4x}.$

8) $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}.$

9) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$

15) $f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}.$

16) $f(x)=e^{-x^2}.$

17) $f(x)=x\ln x.$

18) $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}.$

19) $f(x)=\frac{x}{\ln^2 x}.$

20) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}.$

21) $f(x)=x\cdot e^{-5x}.$

22) $f(x)=\frac{e^x}{x}.$

23) $f(x)=(x+1)\cdot e^{-5x}$

10) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$.

11) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$.

12) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{5-x}$.

13) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+2}$.

14) $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

24) $f(x)=x\ln^2 x+x\ln x+x+10$.

25) $f(x)=\lg^3 x-3\lg x+5$.

26) $f(x)=2x+\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

27) $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

§ 3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Розв’язування багатьох практичних задач часто зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції. В курсі математичного аналізу доводиться теорема Вейерштрасса, яка стверджує, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f приймає на цьому відрізку найбільше і найменше значення.

Функція може приймати свої найбільше і найменше значення як на кінцях проміжку, так і у внутрішніх його точках.

СХЕМА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

1. Знайти область визначення функції.
2. Перевірити чи належить даний відрізок області визначення.
3. Знайти похідну функції.
4. Знайти критичні точки і вибрати ті з них, які належать даному проміжку.
5. Знайти значення функції у вибраних критичних точках і на кінцях проміжку.
6. Зробити висновок і записати відповідь.

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

1) $f(x)=4x^3-27x^2+24x-6;\ [0;2].$

Область визначення $D(f)=R;$ даний проміжок $[0;2]\in D(f).$

Знайдемо похідну даної функції $f'(x)=12x^2-54x+24.$

Знайдемо критичні точки:

$$12x^2-54x+24=0\Rightarrow 2x^2-9x+4=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=\dfrac{1}{2}\in[0;2]. \end{array}\right.$$

Знайдемо значення функції в точці $x=\dfrac{1}{2}$ і на кінцях даного проміжку:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{8}-27\cdot\frac{1}{4}+24\cdot\frac{1}{2}-6=\frac{1}{2}-\frac{27}{4}+12-6=-\frac{1}{4},$$

$$f(0)=-6,$$

$$f(2)=4\cdot 8-27\cdot 4+24\cdot 2-6=32-108+48-6=-34.$$

Зробимо висновок:

$$\min_{[0;2]} f(x)=f(2)=-34,\ \max_{[0;2]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{4};-34.$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1},\ [0;2].$

Область визначення $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty).$

Проміжок $[0;2]\in D(f).$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-\left(x^2-3x\right)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-3x-3-x^2+3x}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)=0,\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0,\ x=-3$ і $x=1$ – критичні точки, але даному проміжку $[0;\,2]$ належить тільки точка $x=1$.

$$f(1)=\frac{1-3}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1,\ f(0)=\frac{0}{1}=0,\ f(2)=\frac{4-6}{2+1}=-\frac{2}{3}.$$

$$\max_{[0;\,2]} f(x)=0,\ \min_{[0;\,2]} f(x)=-1.$$

Відповідь: $0;-1$.

3) $f(x)=\sin 2x-x,\ \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$D(f)=R.$$

$$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\in D(f).$$

$$f'(x)=2\cos 2x-1.$$

$$f'(x)=0,\ 2\cos 2x-1=0\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$ – критичні точки.

Даному проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ належать дві критичні точки: $-\dfrac{\pi}{6}$ і $\dfrac{\pi}{6}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6},$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(-\pi)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi)-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{\pi}{2},\ \min_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=-\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}.$

4) $f(x)=-x^3+3x|x-3|,\ [0;4].$

Розглянемо дану функцію окремо на кожному з проміжків $[0;3)$ і $(3;4]$.

При $x\in[0;3): f(x)=-x^3-3x(x-3)=-x^3-3x^2+9x,$

$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0$ при $x=1.$

При $x\in(3;4]: f(x)=-x^3+3x(x-3)=-x^3+3x^2-9x,$

$f'(x)=-3x^2+6x-9,\ f'(x)\neq 0$ при будь-яких x.

Отже дана функція на відрізку $[0;4]$ має дві критичні точки: $x=1$ і $x=3.$ Порівняємо значення $f(0), f(1), f(3), f(4).$

$f(0)=0,$

$f(1)=-1+3\cdot 2=5,\ f(3)=-27,\ f(4)=-64+12=-52.$

Маємо, що $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(1)=5,\ \min\limits_{[0;4]} f(x)=f(4)=-52.$

Відповідь: $5;-52.$

Вправа 6

Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку:

1) $f(x)=3x^2-x^3,[-1;3].$

2) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1},[-2;4].$

3) $f(x)=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x,[e^{\frac{3}{4}};e^3].$

4) $f(x)=2\sin x+\sin 2x,\ \left[0;\frac{3\pi}{2}\right].$

5) $f(x) = tg\,x + 2ctg\,x - \sqrt{3}$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

6) $f(x) = x^3 - 2x|x-2|$, $[0; 3]$.

7) $f(x) = \left|x^2 + x - 2\right| - \ln\frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Розділ VI. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Для побудови графіка функції необхідно спочатку провести дослідження за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції $(D(f))$.

2. Визначити чи функція парна або непарна:

якщо $f(-x) = f(x)$, функція парна;

якщо $f(-x) = -f(x)$, функція непарна;

в інших випадках функція не є парною і не є непарною (загального виду).

Визначити чи є функція періодичною. Якщо так – знайти її головний період ($f(x+T) = f(x)$, функція періодична).

Зауваження. З'ясування питань 2 і 3 полегшує побудову графіка, оскільки його можна будувати не на всій області визначення функції. Так, якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом $T > 0$, то графік функції достатньо побудувати на відрізку числової осі, довжина якого T, а потім цю частину графіка повторити на кожному з відрізків довжиною T.

Якщо функція парна, то графік її симетричний відносно осі 0y, якщо непарна – то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік такої функції тільки при $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити його для $x < 0$.

3. Знайти асимптоти графіка функції. Пряма $x = a$ – вертикальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Пряма $y = b$ – горизонтальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Пряма $y = ax + b$ є похилою асимптотою, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = b.$

4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат

з віссю 0х: $\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0; \end{cases}$

з віссю 0у: $\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$

5. Знайти проміжки знакосталості функції $f(x) > 0 \Rightarrow x - ?,$ $f(x) < 0 \Rightarrow x - ?$

6. Знайти проміжки монотонності функції.

7. Знайти точки екстремуму та екстремальні значення функції і відмітити їх на площині.

8. Якщо для деяких значень аргументу вигляд графіка викликає сумнів, то доцільно обчислити значення функції в кількох додаткових точках.

9. На підставі цього дослідження побудувати графік даної функції.

Зауваження. Для більшої наглядності спочатку можна заповнити таблицю: в першому рядку вказати в порядку зростання критичні точки функції і обмежені ними проміжки; в другому рядку – знаки похідної на цих проміжках; в третьому – записати висновки про монотонність даної функції ("$\nearrow$" – зростає, "$\searrow$"–спадає); в четвертому – висновки про вигляд критичних точок.

Приклад 1. Дослідити дану функцію і побудувати її графік:

1) $y = x^3 - 2x^2 + x.$

Дана функція визначена і диференційовна на $D(f) = R,$ не є парною і не є непарною, неперіодична, асимптот не має.

Якщо $x = 0,$ то $y = 0;$

якщо $y = 0,$ то $x^3 - 2x^2 + x = 0, \Rightarrow x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0, \Rightarrow$

$x(x-1)^2 = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$ Отже, $(0;0)$ і $(1;0)$ – точки перетину графіка з осями координат.

Нулі функції $x=0$ і $x=1$. Знайдемо проміжки знакосталості, використовуючи метод інтервалів (рис. 24).

Маємо: $y>0$ при $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$; $y<0$ при $x \in (-\infty;0)$.

$y' = 3x^2 - 4x + 1$. Дослідимо знак похідної (рис. 25).

$3x^2 - 4x + 1 \vee 0$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$ Таким чином: $y'>0$ при $x<\frac{1}{3}$ і $x>1$, тоді

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = 1. \end{array}\right.$

функція зростає на проміжках $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$ і $[1;\infty)$; $y'<0$ при $\frac{1}{3}<x<1$, тоді функція спадає на проміжку $\left[\frac{1}{3};1\right]$ (рис. 26).

$$x_{\max} = \frac{1}{3};\ y_{\max} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27};\ x_{\min} = 1;\ y_{\min} = y(1) = 0.$$

Будуємо графік даної функції (рис. 27).

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

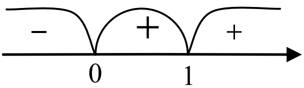


Рис. 24

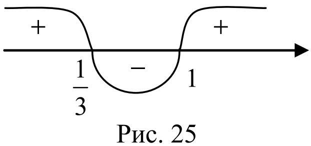


Рис. 25

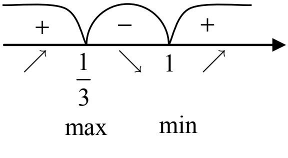


Рис. 26

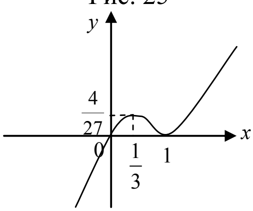


Рис. 27

Дана функція визначена і диференційовна на $D(y)=R.$ (Отже її графік симетричний відносно початку координат).

$y(-x)=-\frac{1}{3}x^3+4x=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-y(x),$ функція непарна; неперіодична; асимптот не має.

Якщо $x=0,\ y=0;$

якщо $y=0,\ \frac{1}{3}x^3-4x=0,\Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0,$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \frac{1}{3}x^2-4=0, \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2\sqrt{3}, \\ x=-2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Отже $(0;0),\left(2\sqrt{3};0\right),\left(-2\sqrt{3};0\right)$ – точки перетину графіка з осями координат.

$$y=\frac{1}{3}x^3-4x=\frac{1}{3}x\left(x^2-12\right)=\frac{1}{3}x\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right).$$

Нулі функції $x=0,\ x=-2\sqrt{3},\ x=2\sqrt{3}.$ Застосовуючи метод інтервалів, знайдемо проміжки знакосталості функції (рис. 28).

Отже, $y>0$ при $x\in\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right);$

$y<0$ при $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right).$

$y'=x^2-4=(x-2)(x+2).$

Дослідивши знак y' (рис.29), приходимо до висновку, що функція зростає на $(-\infty;-2]$ і $[2;\infty);$ спадає на $[-2;2]$; $x_{\max}=-2;$ $y_{\max}=y(-2)=\frac{16}{3};$ $x_{\min}=2;$ $y_{\min}=y(2)=-\frac{16}{3}.$

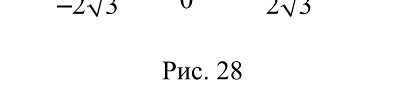


Рис. 28

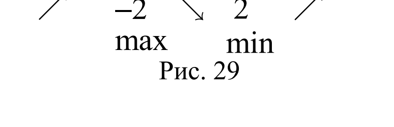


Рис. 29

Будуємо графік функції (рис. 30).

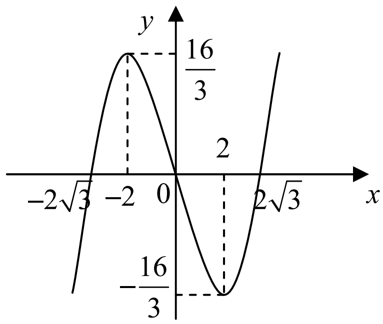


Рис.30

3) $y=(x+4)^2(x-2)^2$.

Дана функція визначена і диференційовна на $D(f)=R$, не є парною і не є непарною, неперіодична, асимптот не має.

Знайдемо точки перетину з осями координат:

$x=0$ $y=64$;

$y=0$, $\left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=2. \end{array}\right.$ Отже, осі координат графік перетинає в точках $(0;64),(-4;0),(2;0)$.

$y>0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(-4;2)\cup(2;\infty)$.

$$y'=\left((x+4)^2(x-2)^2\right)'=\left((x+4)^2\right)'(x-2)^2+(x+4)^2\left((x-2)^2\right)'=$$

$$=2(x+4)(x-2)^2+2(x+4)^2(x-2)=2(x+4)(x-2)(x-2+x+4)=$$

$$=2(x+4)(x-2)(2x+2)=4(x+4)(x-2)(x+1).$$

Дослідимо знак y' методом інтервалів (рис. 31).

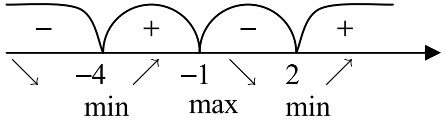


Рис. 31

Отже, дана функція зростає на $[-4;-1]$ і $[2;\infty)$; спадає на $(-\infty;-4]$ і $[-1;2]$; $x_{\max}=-1, y_{\max}=y(-1)=81; x_{\min}=-4, x_{\min}=2;$ $y_{\min}=y(-4)=y(2)=0.$

Графік функції зображено на рис. 32.

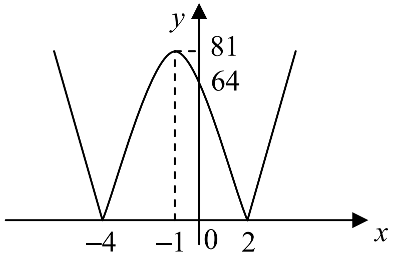


Рис.32

4) $y=\dfrac{x+3}{x-1}.$

Дана функція визначена і диференційовна на множині $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, неперіодична, не є парна і не є непарна. $x=1$ – вертикальна асимптота; $y=1$ – горизонтальна асимптота; похилої асимптоти немає.

Перетинає вісь $0y$ в точці $(0;-3)$; вісь $0x$ в точці $(-3;0)$.

Методом інтервалів (рис.33) знаходимо, що $y>0$ при $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$; $y<0$ при $x\in(-3;-1)$.

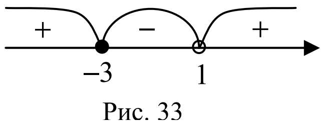


Рис. 33

$$y'=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)'=\frac{(x+3)'(x-1)-(x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}.$$

$y'<0$ при всіх $x\in D(y)$; отже, функція спадає на проміжках $(-\infty;1)$ і $(1;\infty)$.

Побудуємо графік (рис. 34).

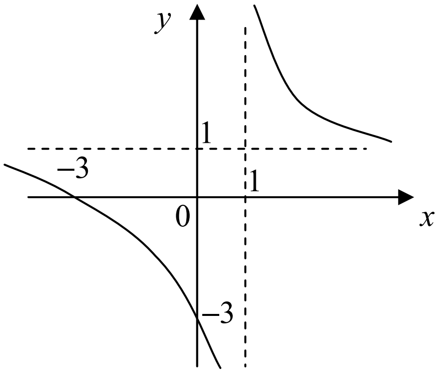


Рис. 34

5) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$.

Функція не є парною і не є непарною, неперіодична, $x=1$ і $x=3$ – вертикальні асимптоти; $y=0$ – горизонтальна асимптота. Вісь $0y$ перетинає в точці $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$; вісь $0x$ не перетинає.

Проміжки знакосталості функції (рис. 35).

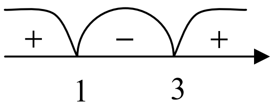


Рис. 35

$y>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(3;\infty)$; $y<0$ при $x\in(1;3)$.

$$y'=\left(\frac{1}{x^2-4x+3}\right)'=\left(\left(x^2-4x+3\right)^{-1}\right)'=-\left(x^2-4x+3\right)^{-2}\times$$

$$\times\left(x^2-4x+3\right)'=-\frac{2x-4}{\left(x^2-4x+3\right)^2}=-\frac{2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$

Дослідимо знак y' (рис. 36).

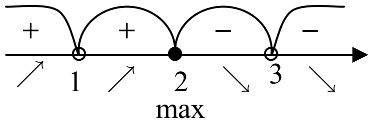


Рис. 36

Зробимо висновок: функція зростає на $(-\infty; 1)$ і $(1; 2]$; спадає на $[2; 3)$ і $(3; \infty)$; $x = 2$ – точка максимуму; $y_{\max} = y(2) = -1$.

Будуємо графік функції (рис. 37).

6) $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Функція загального вигляду, неперіодична.

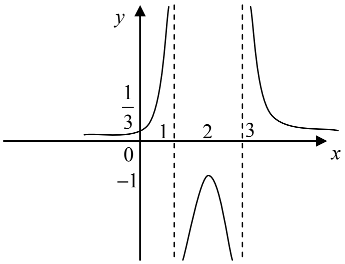


Рис. 37

$x = 0$ – вертикальна асимптота;
$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Вісь 0*y* не перетинає; вісь 0*x* перетинає в точці $(1; 0)$.

Проміжки знакосталості функції (рис. 38).

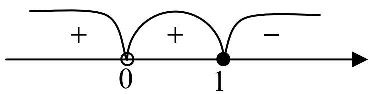


Рис. 38

$y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$; $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$.

$$y' = \frac{-x^2-(1-x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x+2x^2}{x^4} = \frac{x^2-2x}{x^4} = \frac{x(x-2)}{x^4}.$$

Знаки y' і проміжки монотонності даної функції зображено на рис. 39.

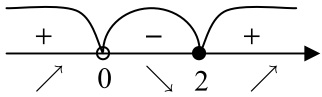


Рис. 39

Отже, функція зростає на $(-\infty; 0)$ і на $[2; \infty)$; спадає на $(0; 2]$; $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = y(2) = -\frac{1}{4}$.

Графік функції зображено на рис. 40.

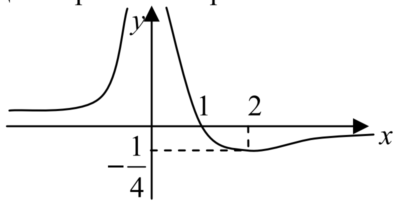


Рис. 40

7) $x^2 - \frac{2}{x}$.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Функція загального виду, неперіодична.

$x = 0$ – вертикальна асимптота, горизонтальної асимптоти немає. Вісь $0y$ графік не перетинає.

$y = x^2 - \frac{2}{x} = \frac{x^3-2}{x}$, $y = 0$ при $x^3 - 2 = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$. Отже вісь $0x$ графік перетинає в точці $\left(\sqrt[3]{2}; 0\right)$.

Знайдемо проміжки знакосталості функції. Для цього порівняємо з нулем вираз $\frac{x^3-2}{x}$.

$$\frac{x^3-2}{x} \vee 0,\ \left(x^3-2\right)x \vee 0.$$

Отже, $y>0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\sqrt[3]{2}; \infty\right)$, $y<0$ при $x \in \left(0; \sqrt[3]{2}\right)$ (рис. 41).

$$y' = \left(\frac{x^3-2}{x}\right)' = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3-2\right)}{x^2} = \frac{2x^3+2}{x^2}.$$

$$\frac{2x^3+2}{x^2} \vee 0,\ \left(2x^3+2\right)x^2 \vee 0,\ 2\left(x^3+1\right)x^2 \vee 0.$$

На рис. 42 зображено проміжки монотонності даної функції: спадає на $(-\infty; -1]$, зростає на $[-1; 0)$ і на $(0; \infty)$. $x_{\min} = -1$, $y_{\min} = y(-1) = 3$.

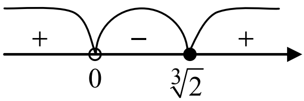


Рис. 41

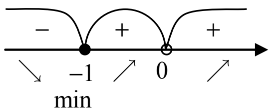


Рис. 42

Будуємо графік (рис. 43).

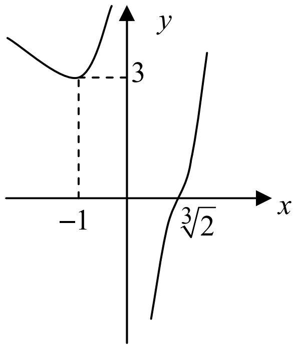


Рис. 43

8) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

$y(-x) = -\dfrac{x}{x^2-1} = -y(x)$, то функція непарна, неперіодична, $x=-1$ і $x=1$ – вертикальні асимптоти.

$\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$, то $y=0$ – горизонтальна асимптота

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^3-x} = 0$, то похилої асимптоти немає.

Якщо $x=0$, то $y=0$.

Якщо $y=0$, то $x=0$, отже $(0;0)$ – точка перетину графіка з осями координат.

$$\frac{x}{x^2-1} \vee 0,\ x\left(x^2-1\right) \vee 0,\ x(x-1)(x+1) \vee 0.$$

З рис. 44 маємо: $y>0$ при $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$, $y<0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

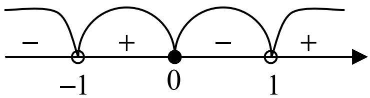


Рис. 44

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

$y'(x) < 0$ при всіх $x \in D(y)$, то функція спадає на області визначення. Екстремумів немає.

Графік зображуємо на рис. 45.

9) $y = x^2\sqrt{x+1}$.

а) область визначення

$x+1 \ge 0$, $x \ge -1$. $D(y) = [-1;\infty)$;

б) $y(-x) = (-x)^2\sqrt{-x+1} = x^2\sqrt{-x+1}$.

$y(-x) \ne y(x)$ і $y(-x) \ne -y(x)$, отже функція не є парною і не є непарною. Неперіодична.

в) асимптот немає

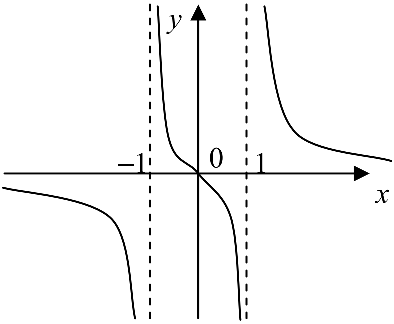


Рис. 45

г) точки перетину з осями координат

з $0y$: $x=0,\ y=0;$ з $0x$: $y=0,\ x^2\sqrt{x+1}=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ \sqrt{x+1}=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Отже графік перетинає осі координат в точках $(0;0)$ і $(-1;0)$.

д) проміжки знакосталості

$x^2\sqrt{x+1}\ge 0$ при всіх $x\in D(y)$, $y>0$ при $x\in(-1;0)\cup(0;\infty)$.

е) проміжки монотонності

$$y'=\left(x^2\sqrt{x+1}\right)'=2x\sqrt{x+1}+x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}.\ \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}\vee 0,\ \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}\vee 0,\ x(5x+4)2\sqrt{x+1}\vee 0.$$

З рис. 46 видно, що функція спадає на $\left[-\frac{4}{5};0\right]$, зростає на $\left[-1;-\frac{4}{5}\right]$ і на $[0;\infty)$.

є) екстремуми

$$x_{\max}=-\frac{4}{5},\ y_{\max}=y\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)^2\sqrt{-\frac{4}{5}+1}=\frac{16}{25}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{16\sqrt{5}}{125};$$

$$x_{\min}=0,\ y_{\min}=y(0)=0.$$

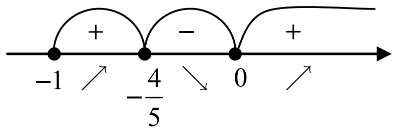


Рис. 46

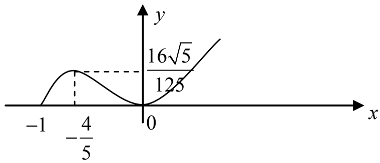


Рис. 47

ж) графік даної функції зображено на рис. 47.

10) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x.$

а) область визначення $D(y) = (-\infty; \infty)$.

б) $y(-x) = 3 \cdot \sqrt[3]{-x} - (-x) = -3 \cdot \sqrt[3]{x} + x = -\left(3 \cdot \sqrt[3]{x} - x\right) = \; = -y(x),$

то функція непарна. Неперіодична.

в) асимптот немає.

г) точки перетину з осями координат

з $0y$: $x = 0,\ y = 0;$

з $0x$: $y = 0,\ 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x = 0,\ \sqrt[3]{x}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x} = 0, \\ 3 - \sqrt[3]{x^2} = 0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \sqrt[3]{x^2} = 3, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 3\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

д) проміжки знакосталості

$$3 \cdot \sqrt[3]{x} - x \vee 0,\ \sqrt[3]{x}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right) \vee 0,\ \sqrt[3]{x}\left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{x}\right) \vee 0$$

З рис. 48 маємо: $y > 0$ при $x \in \left(-\infty; -3\sqrt{3}\right) \cup \left(0; 3\sqrt{3}\right)$, $y < 0$ при $x \in \left(-3\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(3\sqrt{3}; \infty\right)$.

е) проміжки монотонності

$$y' = \left(3 \cdot \sqrt[3]{x} - x\right)' = \left(3x^{\frac{1}{3}} - x\right)' = x^{-\frac{2}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \vee 0,\ \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) \cdot \sqrt[3]{x^2} \vee 0,\ \left(1 - \sqrt[3]{x}\right)\left(1 + \sqrt[3]{x}\right) \cdot \sqrt[3]{x^2} \vee 0$$

Як видно з рис. 49 функція зростає на $[-1;1]$, спадає на $(-\infty;-1]$ і $[1;\infty)$.

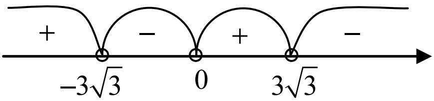


Рис. 48

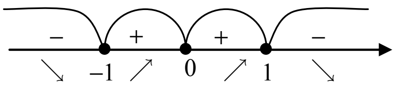


Рис. 49

є) екстремуми

$$x_{\max}=1,\ y_{\max}=y(1)=2,\ x_{\min}=-1,\ y_{\min}=y(-1)=-2.$$

ж) графік даної функції зображено на рис. 50.

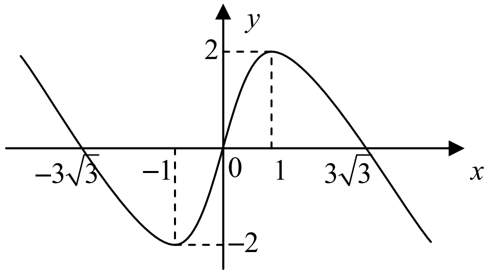


Рис. 50

11) $y=xe^{x}$.

а) область визначення $D(y)=R$.

б) $y(-x)=-xe^{-x}$.

Функція не є парною і не є непарною. Неперіодична.

в) асимптоти $y\to 0$ при $x\to-\infty$.

г) точки перетину з осями координат

з $0y$: $x=0,\ y=0$; з $0x$: $y=0,\ xe^{x}=0,\quad x=0.$

Графік проходить через початок координат.

д) проміжки знакосталості

$xe^{x}\vee 0,\ x\vee 0,$

$y>0$, якщо $x>0$; $y<0$, якщо $x<0$.

е) проміжки зростання і спадання.

$$y'=\left(xe^{x}\right)'=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x).$$

$e^x(1+x)\vee 0 \Rightarrow 1+x\vee 0.$

З рис. 51 видно, що функція спадає на $(-\infty;-1]$, зростає на $[-1;\infty)$.

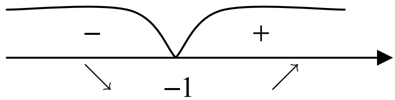


Рис. 51

є) екстремуми

$x_{\min}=-1,\ y_{\min}=y(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}.$

ж) графік зображуємо на рис. 52.

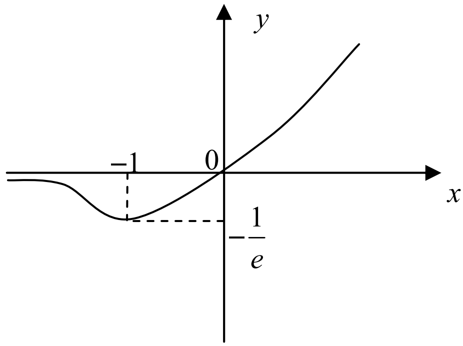


Рис. 52

12) $y=\dfrac{e^x}{x}.$

а) область визначення $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

б) функція не є парною і не є непарною. неперіодична.

в) асимптоти

$x=0$ – вертикальна асимптота. $y\to 0$ при $x\to-\infty$.

г) точок перетину з осями координат немає.

д) проміжки знакосталості.

$\dfrac{e^x}{x}\vee 0 \Rightarrow x\vee 0.$ Отже $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$.

е) проміжки зростання і спадання

$$y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

$$\frac{e^x(x-1)}{x^2} \vee 0,\ e^x(x-1)x^2 \vee 0.$$

Аналізуючи рис. 53, маємо: функція зростає на $[1;\infty)$, спадає на $(-\infty;0)$ і на $(0;\infty)$.

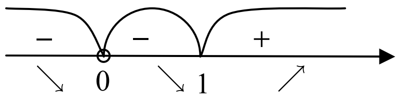


Рис. 53

є) екстремуми

$x_{\min} = 1,\ y_{\min} = y(1) = e.$

ж) будуємо графік (рис. 54).

13) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

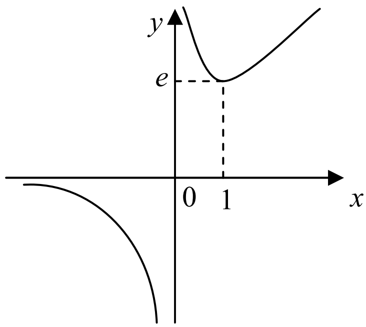


Рис. 54

а) область визначення $D(y) = (0;\infty)$.

б) функція не є парною і не є непарною. Неперіодична.

в) асимптоти
$x = 0$ – вертикальна асимптота;
$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

г) точки перетину з осями координат
з $0x$: $y = 0,\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1.$

Вісь $0y$ графік не перетинає.

д) проміжки знакосталості

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \vee 0,\ \ln x \vee 0.$$

З рис. 55 $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$.

е) проміжки зростання і спадання

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x}\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}\left(2 - \ln x\right)}{2\sqrt{x} \cdot x} =$$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x}. \quad \frac{2 - \ln x}{2x} \vee 0,\ 2x\left(2 - \ln x\right) \vee 0.$$

З рис. 56 функція зростає на $\left(0; e^2\right]$, спадає $\left[e^2; \infty\right)$.

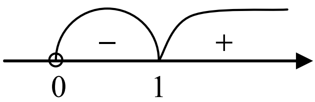


Рис. 55

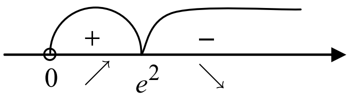


Рис. 56

є) екстремуми

$$x_{\max} = e^2,\ y_{\max} = y\left(e^2\right) = \frac{2}{e}.$$

ж) будуємо графік даної функції (рис. 57).

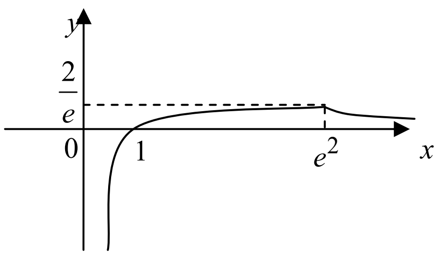


Рис. 57

14) $y=3x^4-4x^3+1$.

а) область визначення $D(y)=R$.

б) $y(-x)=3x^4+4x^3+1$, $y(-x)\neq -y(x)$ і $y(-x)\neq y(x)$, то функція не є парною і не є непарною.

в) асимптот немає.

г) точки перетину з осями координат

з 0y: $x=0$, $y=1$,

з 0x: $y=0$, $3x^4-4x^3+1=0$, $(x-1)(x-1)\left(3x^2+2x+1\right)=0$, $x=1$. Отже $(0;1)$ і $(1;0)$ – точки перетину графіка функції з осями координат.

д) проміжки знакосталості (рис. 58).

$3x^4-4x^3+1\vee 0$, $(x-1)^2\left(3x^2+2x+1\right)\vee 0$.

$y>0$ при $x\in R$.

е) Проміжки зростання і спадання (рис. 59).

$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$. $y'\vee 0$, $12x^2(x-1)\vee 0$

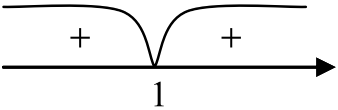


Рис. 58

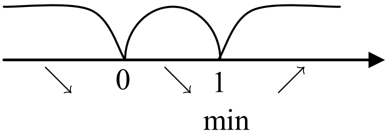


Рис. 59

Отже $y'>0$ при $x>1$, $y'<0$ при $x<1$, тобто функція зростає на $[1;\infty)$, спадає на $(-\infty;1]$.

є) $x_{\min}=1$, $y_{\min}=y(1)=3-4+1=0$, отже $(1;0)$ – точка мінімуму.

ж) будуємо графік даної функції (рис. 60).

15) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

а) область визначення $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

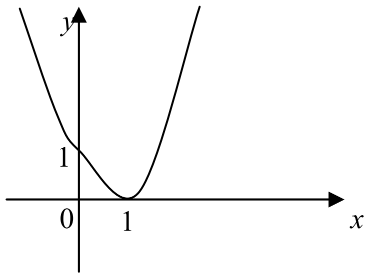


Рис. 60

б) $y(-x)=\dfrac{-x^3+1}{x^2}$, то функція загального вигляду.

в) асимптоти

$x=0$ – вертикальна асимптота.

$\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2}=\infty$, то горизонтальної асимптоти немає.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=1,\ (k=1),$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, то $y=x$ – похила асимптота.

г) точки перетину з осями координат

$x\neq 0$, то вісь $0y$ графік не перетинає.

з $0x$: $y=0,\ \dfrac{x^3+1}{x^2}=0,\ x^3+1=0,\ x=-1.$

д) проміжки знакосталості (рис. 61).

$$\frac{x^3+1}{x^2}\vee 0$$

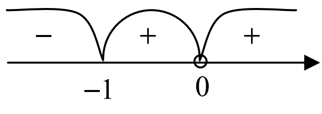


Рис. 61

З рис. 61 видно, що $y>0$ при $x\in(-1;0)\cup(0;\infty)$, $y<0$ при $x\in(-\infty;-1)$.

е, є) проміжки монотонності, точки екстремуму

$$y'=\frac{3x^2\cdot x^2-\left(x^3+1\right)2x}{x^4}=\frac{3x^4-2x^4-2x}{x^4}=\frac{x^4-2x}{x^4}=$$

$$=\frac{x\left(x^3-2\right)}{x^4},\quad y'\vee 0,\ \frac{x\left(x^3-2\right)}{x^4}\vee 0.$$

З рис. 62 випливає, що функція зростає на проміжках $(-\infty;0)$ і $\left[\sqrt[3]{2};\infty\right)$, спадає на $\left(0;\sqrt[3]{2}\right]$;

$$y_{\min}=y\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{2+1}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

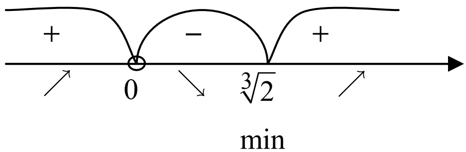


Рис. 62

ж) графік даної функції зображено на рис. 63.

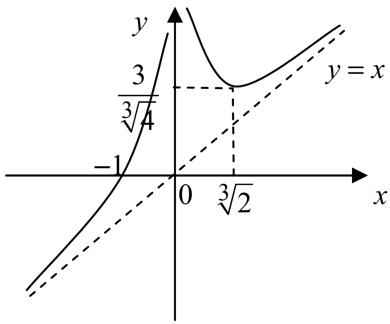


Рис. 63

16) $y=\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.

а) область визначення $D(y)=(-\infty;3)\bigcup(3;\infty)$.

б) функція загального виду.

в) асимптоти

$x=3$ – вертикальна асимптота;

$\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}=\infty$, тобто горизонтальної асимптоти немає.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-x)^3}{\left(x^2-6x+9\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8-12x+6x^2-x^3}{x^3-6x^2+9x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=-1,\quad k=-1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8-12x+6x^2-x^3+x^3-6x^2+9x}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+8}{x^2-6x+9}=$$

$y=-x$ – похила асимптота.

г) точки перетину з осями координат

з $0y$: $x=0,\ y=\frac{8}{9}$;

з $0x$: $y=0,\ x=2$.

д) проміжки знакосталості

$\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}\vee 0,\ (2-x)^3(x-3)^2\vee 0.$

З рис. 64 $y>0$ при $x\in(-\infty;2)$, $y<0$ при $x\in(2;3)\bigcup(3;\infty)$.

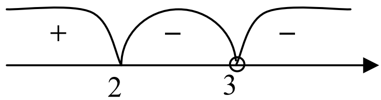


Рис. 64

е, є) проміжки монотонності та екстремуми

$$y' = \frac{3(2-x)^2(-1)\cdot(x-3)^2-(2-x)^3\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2-x)^2(x-3)-(-3(x-3)-(2-x)\cdot 2)}{(x-3)^4} = \frac{(2-x)^2(x-3)(5-x)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2-x)^2(5-x)}{(x-3)^3}.$$

$$y' \vee 0,\ \frac{(2-x)^2(5-x)}{(x-3)^3} \vee 0.$$

З рис. 65 видно: функція спадає на поміжках $(-\infty;3)$ і на $[5;\infty)$, зростає на $(3;5]$, $y_{\max} = y(5) = -\frac{27}{4}.$

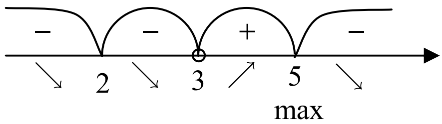


Рис. 65

ж) графік зображуємо на рис. 66.

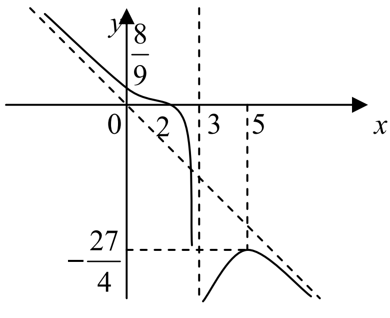


Рис. 66

Вправа 1

Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y=3x^2-x^3.$

2) $y=2x^3-3x^2+5.$

3) $y=3x-x^3-2.$

4) $y=x^4-2x^2-3.$

5) $y=x^4-2x^2+1.$

6) $y=-x^4+6x^2-5.$

7) $y=(x-1)^2(x+2)^2.$

8) $y=\dfrac{2x-3}{5-x}.$

9) $y=\dfrac{1}{1-x^2}.$

10) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}.$

11) $y=4x^2+\dfrac{1}{x}.$

12) $y=\dfrac{3x+1}{(3x+1)^2+1}.$

13) $y=\dfrac{1}{x^2+1}.$

14) $y=\dfrac{x}{4-x^2}.$

15) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}.$

16) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}.$

17) $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}.$

18) $y=(1-x)\sqrt{x}.$

19) $y=x\sqrt{4-x^2}.$

20) $y=x^2\cdot\sqrt{2-x}.$

21) $y=\sqrt[3]{x^2-x}.$

22) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}.$

23) $y=x^2\cdot e^{-x}.$

24) $y=e^{-x^2}.$

25) $y=x\cdot e^{-x^2/2}.$

31) $y=x+\sin x.$

32) $y=3x^5-3x^3+2.$

33) $y=\ln\cos x.$

34) $y=\cos x-\cos^2 x.$

35) $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}.$

26) $y = x - \ln x.$

27) $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}.$

28) $y = \sqrt{x} \ln x.$

29) $y = \log_2 \left(4x - x^2\right).$

30) $y = x\sqrt{3} - \cos 2x.$

36) $y = x + \dfrac{1}{x}.$

37) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}.$

38) $y = \dfrac{x^3 - 4}{(x-1)^3}.$

39) $y = \dfrac{x^4 - 8}{(x+1)^4}.$

40) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}.$

ВІДПОВІДІ

Розділ I, II

1. 1. 0,001; 2. –0,21; 3. $-\dfrac{2}{11}$; 4. –0,0399. **2.** 1. 1; 2. 0; 3. 2; 4. 0; 5. –2. **3.** 1. $\dfrac{1}{2}$; 2. $-\dfrac{1}{3}$; 3. $6x$; 4. $-2\sqrt{3}x$; 5. $-\dfrac{x}{3}$; 6. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}x$; 7. $10x^4$; 8. $-16x^3$; 9. $4x^5$; 10. $20x^{-11}$; 11. $-\dfrac{3}{x^4}$; 12. $-\dfrac{30}{x^7}$; 13. $-\dfrac{2}{x^5}$; 14. $\dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 15. $-2x^{-\frac{7}{5}}$; 16. $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$; 17. $-\dfrac{1}{9x^{\frac{11}{9}}}$; 18. $-\dfrac{25}{6\sqrt[6]{x^{11}}}$.

4. 1. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; 2. $\dfrac{16}{3}x\sqrt[3]{x^2}$; 3. $-\dfrac{5}{2x^3\sqrt{2x}}$; 4. $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; 5. $\dfrac{26}{3x^5\sqrt[3]{x}}$.

5. 1. $21x^6-36x^5-12x^2+10x$; 2. $x+\dfrac{6}{x^3}+10x^4$; 3. $3\cos x-\sin x-1$; 4. $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$; 5. $-\dfrac{5}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; 6. $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}-\ -\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$. **6.** 1. 57; 2. 14; 3. 1; 4. –4; 5. 103; 6. 1; 7. 0; 8. –3. **7.** 1. 7; 2. 4,5; 3. $\dfrac{16}{27}$; 4. 94; 5. 9. **8.** 1. $5x^4+3x^2-4x$; 2. $\dfrac{18x-3}{2\sqrt{x}}$; 3. $2-\dfrac{1}{x^2}$; 4. $7{,}5x\sqrt{x}-6x-7{,}5\sqrt{x}+5$; 5. $3x^2-6x-8+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-$ $-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}}$; 6. $-140x^3+45x^2-24x+3$; 7. $3x^2+2x+2-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$; 8. $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}+6x-\dfrac{15}{2}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 9. $\dfrac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}}$; 10. $5x^4+8x^3+$ $+39x^2+18x+38$; 11. $\sin x+x\cos x$; 12. $3\operatorname{tg}x+\dfrac{3x}{\cos^2 x}$; 13. $\cos x\left(x^2-2x+3\right)+\sin x\left(2x-2\right)$; 14. $\left(6x+5\right)\operatorname{ctg}x-\dfrac{3x^2+5x-8}{\sin^2 x}$; 15. $3^x\left(\ln 3\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$; 16. $e^x\left(\sin x+\cos x\right)$; 17. $2x\sin x+x^2\cos x$; 18.

$2x\cos x - x^2\sin x$. **9.** 1. $\dfrac{-3x^2+2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$; 2. $\dfrac{5}{(x+2)^2}$; 3. $\dfrac{3x^2+30x+4}{(x+5)^2}$; 4. $\dfrac{3x-7\sqrt{x}}{5x^5}$; 5. $\dfrac{2x^3-6x^2+6x-1}{(x-1)^2}$; 6. $\dfrac{5x^4+3x-21}{2x^2\sqrt{x}}$; 7. $-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$. *Вказівка.* Спочатку скоротіть даний дріб; 8. $\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$; 9. $\dfrac{-x^4+3x^2+8x}{\left(x^3+4\right)^2}$; 10. $\dfrac{4x^5-4x}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$; 11. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 12. $\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 13. $\dfrac{-6x\sin x-3\cos x}{2x\sqrt{x}}$; 14. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$. *Вказівка.* Розбити даний дріб на суму двох дробів; 15. $\dfrac{1}{1-\sin 2x}$; 16. $\dfrac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$; 17. $\dfrac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$; 18. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; 19. $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. **10.** 1. $-35(1-5x)^6$; 2. $3\left(4x^2-x\right)^2(8x-1)$; 3. $9\left(2x-6x^5\right)^8\left(2-30x^4\right)$; 4. $15(x-5)^4+8(x-1)^3$; 5. $\dfrac{3(3-2x)}{\left(x^2-3x\right)^4}$; 6. $8\left(\sqrt{x}+5x\right)^7\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+5\right)$; 7. $7\left(x^2+x\sqrt[5]{x}\right)^6\left(2x+\dfrac{6}{5}\sqrt[5]{x}\right)$; 8. $-\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 9. $3x^2+8x+4$; 10. $5\left(x^2-1\right)(x-4)^2$. **11.** 1. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$; 2. $\dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$; 3. $\dfrac{21}{\sqrt{6x+10}}$; 4. $-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; 5. $-\dfrac{1}{4\sqrt{x\left(5-\sqrt{x}\right)}}$; 6. $-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{2-\sin x}}$; 7. $\dfrac{3x-13}{2\sqrt{5-x}}$; 8. $\dfrac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$; 9. $10\sqrt{(4x+2)^3}$; 10. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}$; 11. $\dfrac{5}{(7-2x)\sqrt{7-2x}}$; 12.

$\frac{15x+3}{\sqrt{2x+1}}$; 13. $\frac{5x-1}{2(x+1)^2\sqrt{2x^2-x}}$; 14. $\frac{x^2+8x-14}{2(x+4)^2}\sqrt{\frac{x+4}{x^2-3x+2}}$; 15. $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$; 16. $\frac{2xe^x-3e^x+1}{2(e^x-1)^2\sqrt{1-x}}$; 17. $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$; 18. $\frac{4\sqrt{x^2-2x}-x+1}{3\sqrt[3]{\left(4x-\sqrt{x^2-2x}\right)^2}\sqrt{x^2-2x}}$. **12.** 1. $-6\sin 6x$; 2. $2\cos(2x-3)$; 3. $\frac{4x}{\cos^2\left(2x^2+1\right)}$; 4. $-\frac{4x^3}{\sin^2 x^4}$; 5. $-\sin 2x$; 6. $\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 7. $\frac{4}{3\sin 2x\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}}$; 8. 0; 9. $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$; 10. $\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$; 11. $6\sin 6x$; 12. $\frac{3x^2\sin\left(x^3-1\right)}{\cos^2\left(x^3-1\right)}$; 13. $\frac{1}{\sin^2 2x\sqrt{\mathrm{ctg}\, 2x}}$; 14. $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$; 15. $30x\sin^2 5x^2\cos 5x^2$; 16. $2+18\sin^4 x\cos x$; 17. $\mathrm{tg}^2 x+2\sin^2 x$; 18. $\frac{1}{2\sin^4\frac{x}{2}}$; 19. $2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$; 20. $3\sin 2x+6x\cos 2x$; 21. $2\sin 4x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; 22. $\cos 2x$. *Вказівка.* Попередньо перетворити дану функцію; 23. $\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x+\cos x)$; 24. $\frac{1}{2}\sin 4x$; 25. $\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin^3 2x}}$; 26. $\frac{\cos x-2\sin 2x}{2\sqrt{\sin x+\cos 2x}}$; 27. $-\frac{2x\sin\frac{x}{3}+3\cos\frac{x}{3}}{6x\sqrt{x}}$; 28. $\sqrt{2}\sin\left(\ln x+\frac{\pi}{4}\right)$; 29.

$50\cos 10x(\sin 5x+\cos 5x)^8$; 30. $-\dfrac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2\cos^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)}$. **13.** 1. –2; 2. 3; 3. $\dfrac{1}{6}$; 4. 5; 5. 4,5; 6. 6; 7. 2; 8. $-\dfrac{4}{3}$; 9. 6; 10. 0. **14.** 1. $4\ln 2\cdot 2^{4x}$; 2. $-2e^{3-2x}$; 3. $(2x-7)\ln 7\cdot 7^{x^2-7x+10}$; 4. $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\dfrac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}$; 5. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$; 6. $-2\sin 2x\cdot e^{\cos 2x}$; 7. $2e^{2x}+6xe^{-3x^2}$; 8. $2x\cdot 10^{2x}(1+x\ln 10)$; 9. $-\dfrac{2(\sin 2x+\cos 2x)}{e^{2x}}$; 10. $e^{2x}\left(2x^3+3x^2-2\right)+\ +\sin 2x$; 11. $-\dfrac{\ln 3+\cos x}{3^x e^{\sin x}}$; 12. $\cos e^{x^2+3x-2}\cdot e^{x^2+3x-2}\cdot(2x+3)$; 13. $\dfrac{\ln 2\cdot 2^{\sqrt{4x^2-\sqrt{x}}}\left(16x\sqrt{x}-1\right)}{4\sqrt{x\left(4x^2-\sqrt{x}\right)}}$; 14. $12x^2\cos 4x^3\cdot 5^{\sin 4x^3}\cdot\ln 5$; 15. $e^{\sin^3 x-\cos x}\left(3\sin^2 x\cos x+\sin x\right)$. **15.** 1. $\dfrac{2(x+1)}{x(x+2)}$; 2. $-\operatorname{tg} x$; 3. $\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$; 4. $\dfrac{1}{\sin x}$; 5. $5\cos 5x$. *Вказівка.* $a^{\log_a b}=b$; 6. $\dfrac{2}{x\left(1-x^2\right)}$. *Вказівка.* $\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}=\ln x^2-\ln\left(1-x^2\right)$; 7. $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$; 8. $\dfrac{2e^{2x}}{1-e^{4x}}$. *Вказівка.* $\ln\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln\left(e^{2x}-1\right)$; 9. $\dfrac{12\cos 4x+2x\sin x^2}{3\sin 4x-\cos x^2}$; 10. $\ln\left(x^2-1\right)+\dfrac{2x^2}{x^2-1}$; 11. $\dfrac{3x^2(\ln x-1)}{\ln^4 x}$; 12. $2\ln x\left(2x\ln x+2x-\dfrac{1}{x}\right)$; 13. $\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{1}{x\ln x}$; 14. $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+$ $+\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$; 15. $\dfrac{\ln\ln x}{x}$. **16.** 1. $-\dfrac{2}{x^3}\arccos x-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; 2. $\operatorname{arctg} x$;

3. 0; 4. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 5. $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$; 6. $\dfrac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$; 7. –1; 8. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}\cdot\arccos^2\ln x}$; 9. $-\dfrac{2}{\arccos 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}$.

Розділ IV

1. 1. 17; 2. –6; 3. 12; 4. $\ln 5$; 5. 3; 6. –2. **2.** 1. $y=8x+14$; 2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}$; 3. $\sqrt{2}y+x+2-\frac{3\pi}{2}=0$; 4. $y=\frac{x}{e}$; 5. $y=2x+1-\pi$; 6. $y=\frac{46}{75}x-\frac{61}{75}$; 7. $y=-1$; 8. $y=3x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 9. $y=36x-100$. **3.** 1. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 2. $y=-4$; 3. $y=-3x+2$; 4. $y=2x-2,\ y=2x+2$; 5. $y=x-1$; 6. $y=-x$; 7. $y=-2x+3,\ y=2x+3$. **4.** 1. $y=4x+2$; 2. $y=-x+4$; 3. $y=22x$; 4. $y=-2x+5$; 5. $y=-2x+1,\ y=-2x+17$. **5.** 1. 45°; 2. $\operatorname{arctg}9,\ y=9x-23{,}25$; 3. а) $0°,\ \operatorname{arctg}2,\ 180°-\operatorname{arctg}2$; б) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; в) $45°, 135°$; г) $135°$; д) $\pi-\operatorname{arctg}9$; 4. $\operatorname{arcctg}4$; 5. $\operatorname{arctg}\frac{2}{e}$. **6.** 1. $y=1,\ y=-4x+5$; 2. $y=3x-2,\ y=3\left(4+2\sqrt{3}\right)x-$ $-12\sqrt{3}-20$; 3. $y=2\sqrt{2}x+1,\ y=-2\sqrt{2}x+1$; 4. $x+25y=0,\ x+y=0$; 5. Таку дотичну провести неможна. **7.** 1. $y=8x-20$; 2. $\frac{1}{5}x-\frac{1}{25},\ y=x-1$; 3. $y=\frac{11}{2}x+\frac{31}{16}$. **8.** 1. $y=-x-2{,}75$; 2. $y=x-\pi k,\ k\in Z$; 3. $y=2x-1-\ln 2$; 4. $y=-2x+2-2\ln 2$. **9.** 1. $(5{,}5;\ 3{,}5)$; 2. $\left(0;\ \dfrac{3+\pi\sqrt{3}}{6}\right)$; 3. $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}-\sqrt{15}}{11}$; 5. $\frac{7}{9}$; 6. $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$. **10.** 1. $\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$; 2. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. $45°,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 4. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$; 5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 6.

$\text{arctg}\sqrt{5}$; 7. $\text{arctg}\dfrac{7}{16}$. **11.** 1. $\sqrt{17}$; 2. $\sqrt{5}$; 3. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; 4. 3. **12.** 1. $\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3}{4}\right)$; 2. $\left(\dfrac{\pi}{6};2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{2};2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3. $\left(\dfrac{3\pi}{4};1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{4};1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **13.** 1. $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$; 2. $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$; 3. $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$. **14.** 1. 2; 2. 1; 3. $\dfrac{195}{16}$; 4. 2; 5. 12; 6. 43,75; 7. 5. *Вказівка.* Утворений трикутник є прямокутним з вершиною прямого кута в початку координат.

Розділ V

1. 1. Зростає на $(-\infty;0]$ і $[1;\infty)$; спадає на $[0;1]$. 2. зростає на $(-\infty;3]$ і $[4;\infty)$; спадає на $[3;4]$. 3. спадає на R. 4. зростає на $[-4;2]$ і $[3;\infty)$; спадає на $(-\infty;-4]$ і $[2;3]$. 5. зростає на $[2;3)$ і $(3;4]$; спадає на $(-\infty;2]$ і $[4;\infty)$. 6. зростає на $(-\infty;-1]$ і $[1;\infty)$; спадає на $[-1;0)$ і $(0;1]$. 7. зростає на $[0;0,5]$; спадає $[0,5;1]$. 8. зростає на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$; спадає на $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. 9. зростає на $[e;\infty)$; спадає на $(0;1)$ і $(1;e]$. 10. зростає на $\left[e^{1/2};\infty\right)$; спадає на $\left(0;e^{1/2}\right]$. 11. зростає на $(-\infty;0]$ і $[1;\infty)$; спадає на $[0;1]$. 12. зростає на $[5;\infty)$; спадає на $(1;5]$. 13. зростає на кожному з проміжків виду $\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z$; спадає на кожному з проміжків виду

$\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z$. 14. спадає на R.. 15. зростає на $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right]$ і $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$; спадає на $\left[-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.

2. 1. зростає на R. 2. спадає на R. 3. зростає на R. 4. спадає на R. 5. спадає на R. 6. зростає на R.

3. 1. $-\frac{1}{3}arctg\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$. 2. $1; 3; 6$. 3. $-\frac{1}{27}; 0$.
4. $-1; 0; 1$.

4. 1. $x=-2$ – точка максимуму; $x=-1$ – точка мінімуму.
2. $x=0$ – точка максимуму. 3. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимуму; $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка мінімуму. 4. $x=\frac{1}{4}$ – точка мінімуму.
5. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ – точки максимуму; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ – точки мінімуму. 6. $x=\frac{8}{5}$ – точка максимуму; $x=2$ – точка мінімуму.

5. 1. зростає на $(-\infty; 1]$ і $[2; \infty)$; спадає на $[1; 2]$; $f_{\max}=f(1)=-3$; $f_{\min}=f(2)=-4$. 2. зростає на $[-1; 2]$; спадає на $(-\infty; -1]$ і $[2; \infty)$; $f_{\max}=f(2)=\frac{1}{3}$; $f_{\min}=f(-1)=-\frac{25}{6}$. 3. зростає на $(-\infty; 0]$ і $[2; \infty)$; спадає на $[0; 2]$; $f_{\max}=f(0)=0$; $f_{\min}=f(2)=-48$. 4. зростає на $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ і $[1; \infty)$; спадає на $(-\infty; -2]$ і $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; $f_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$; $f_{\min}=f(-2)=f(1)=0$. 5. зростає на $(-\infty; -2]$ і $[2; \infty)$; спадає на $[-2; 0)$ і $(0; 2]$; $f_{\max}=f(-2)=-4$; $f_{\min}=f(2)=4$. 6. зростає на $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$; спадає на $\left[\frac{3}{2}; \infty\right)$; $f_{\max}=$

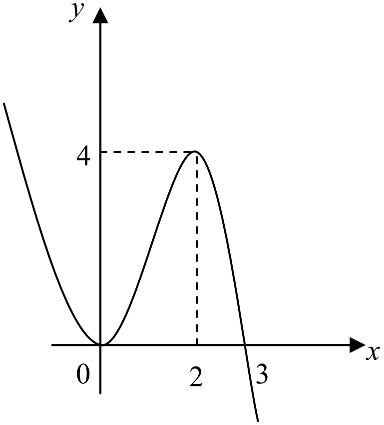
$= f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$. 7. спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ і $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$; екстремумів немає. 8. зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; \infty)$; спадає на $[1; 2)$ і $(2; 3]$; $f_{\max} = f(1) = 2$; $f_{\min} = f(3) = 6$. 9. зростає на $(-\infty; -1)$ і $(-1; 0]$; спадає на $[0; 1)$ і $(1; \infty)$; $f_{\max} = f(0) = -1$. 10. зростає на $(-\infty; 0]$; спадає на $[0; \infty)$; $f_{\max} = f(0) = 2$. 11. зростає на $\left[-1; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ і $\left[0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$; спадає на $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right]$ і $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right]$; $f_{\max} = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$; $f_{\min} = f(0) = 0$. 12. зростає на $[-1; 2]$; спадає на $[2; 5]$; $f_{\max} = f(2) = 2 + \sqrt{3}$. 13. зростає на $\left[\frac{1}{4}; \infty\right)$; спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; $f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{30}}{4}$. 14. зростає на $[-1; 0]$ і $[1; \infty)$; спадає на $(-\infty; 1]$ і $[0; 1]$; $f_{\max} = f(0) = 1$; $f_{\min} = f(-1) = f(1) = 0$. 15. зростає на $\left(-\infty; \frac{9}{11}\right]$ і $[1; \infty)$; спадає на $\left[\frac{9}{11}; 1\right]$; $f_{\max} = f\left(\frac{9}{11}\right) = \frac{729\sqrt[3]{4}}{1331\sqrt[3]{121}}$; $f_{\min} = f(1) = 0$. 16. зростає на $(-\infty; 0]$; спадає на $[0; \infty)$; $f_{\max} = f(0) = 1$. 17. зростає на $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$; спадає на $\left[0; \frac{1}{e}\right]$; $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. 18. зростає на $\left[\sqrt{e}; \infty\right)$; спадає на $(0; 1)$ і $\left(1; \sqrt{e}\right]$; $f_{\min} = f\left(\sqrt{e}\right) = 2e$. 19. зростає на $(0; 1)$ і $\left[e^2; \infty\right)$; спадає на $\left(1; e^2\right]$; $f_{\min} = f\left(e^2\right) = \frac{e^2}{4}$. 20. зростає на $(0; 1]$; спадає на $[1; \infty)$; $f_{\max} = f(1) = 1$. 21. зростає на $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$; спадає $\left[\frac{1}{5}; \infty\right)$;

$f_{\max} = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5e}$. 22. зростає на $[1; \infty)$; спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$; $f_{\min} = f(1) = e$. 23. зростає на $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$; спадає на $\left[-\frac{4}{5}; \infty\right)$; $f_{\max} = f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{e^4}{5}$. 24. зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$; спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; \frac{1}{e}\right]$; $f_{\max} = f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{3}{e^2} + 10$; $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + 10$ 25. зростає на $(0; 0{,}1]$ і $[10; \infty)$; спадає на $[0{,}1; 10]$; $f_{\max} = f(0{,}1) = 7$; $f_{\min} = f(10) = 3$. 26. зростає на R. 27. зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$; спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ – точки максимуму; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ – точки мінімуму.

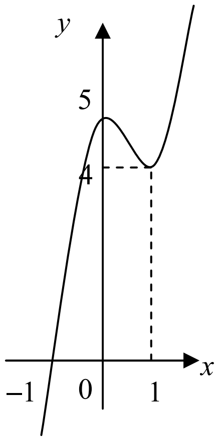
6. 1. $4; 0$. 2. $2; -2$. 3. $9; 4$. 4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2$. 5. $\frac{4\sqrt{3}}{3}; 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$. 6. $21; -\frac{40}{27}$. 7. $4 + \ln 2; 0$.

Розділ VI

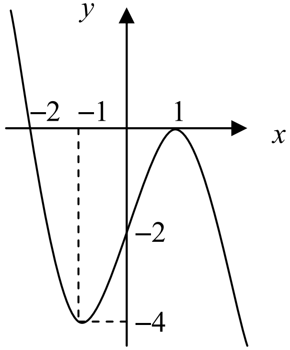
1



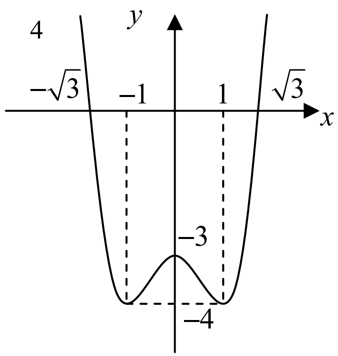
2



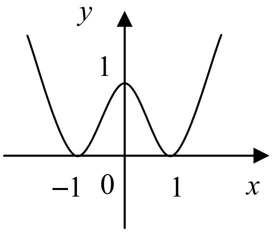
3



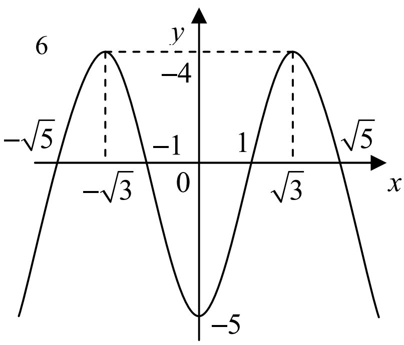
4



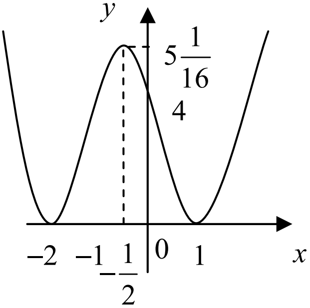
5



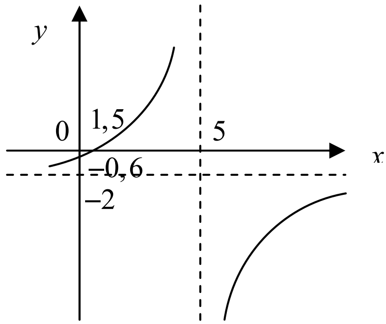
6



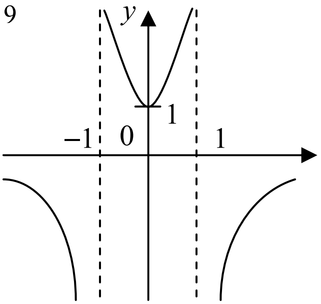
7



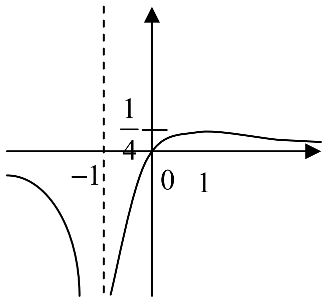
8



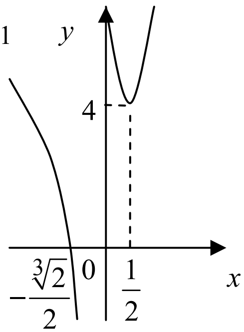
9



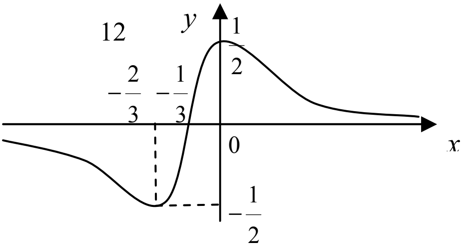
10



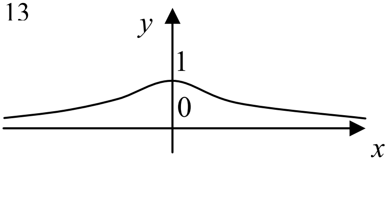
11



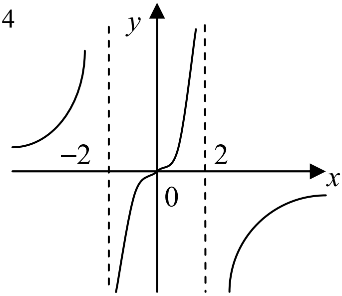
12



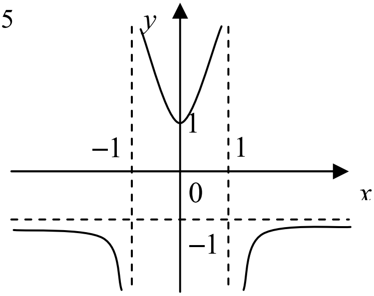
13



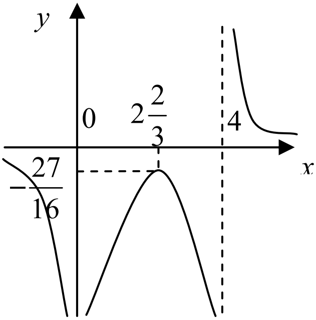
14



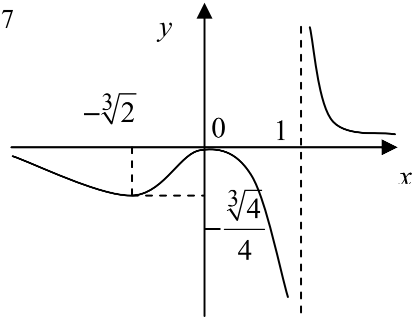
15



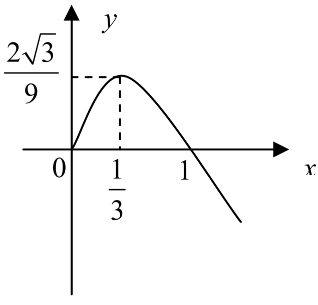
16



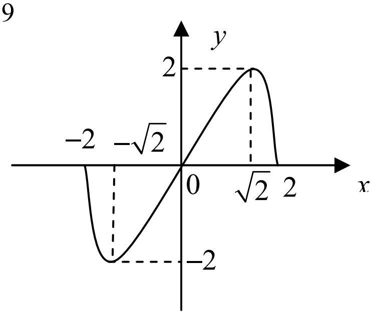
17



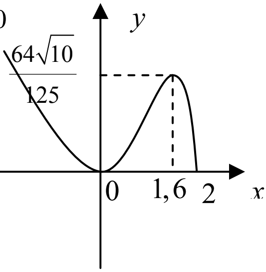
18



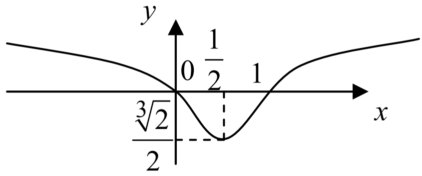
19



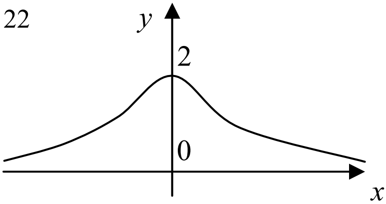
20



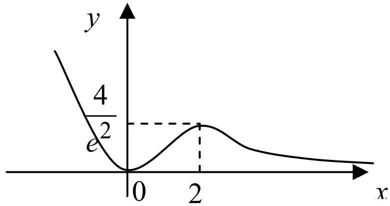
21



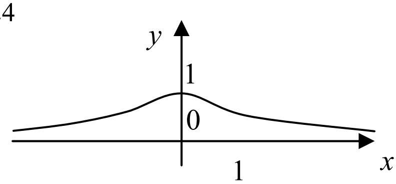
22



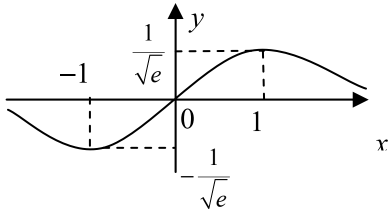
23



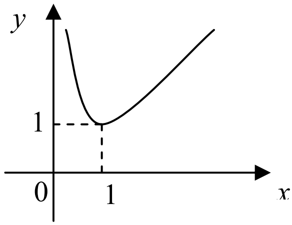
24



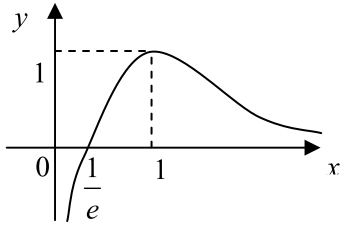
25



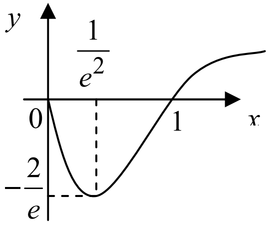
26



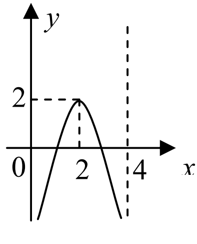
27



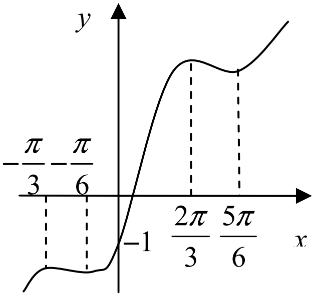
28



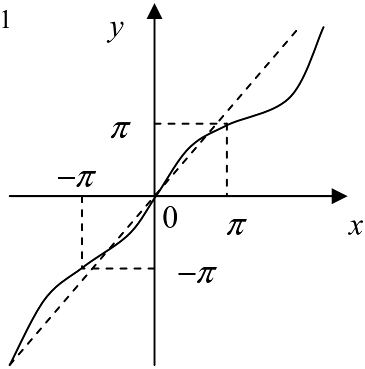
29



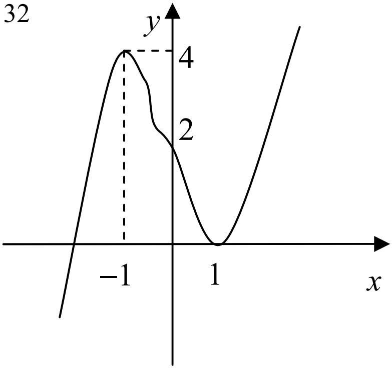
30


y
x
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{6}$
-1
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$

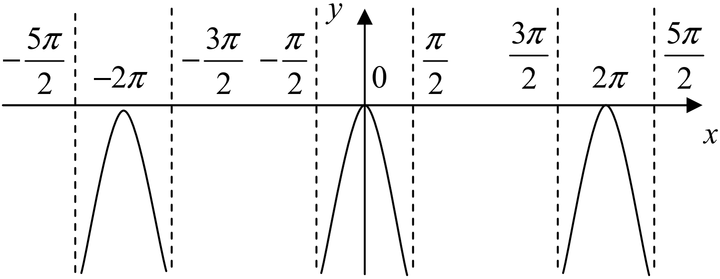
31


y
x
π
$-\pi$
0
π
$-\pi$

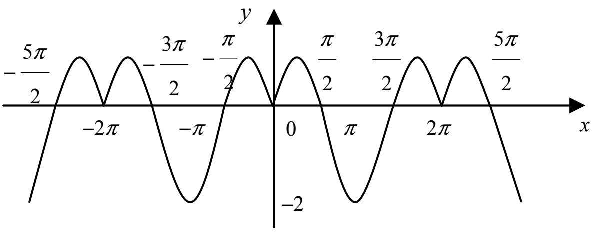
32


y
4
2
-1
1
x

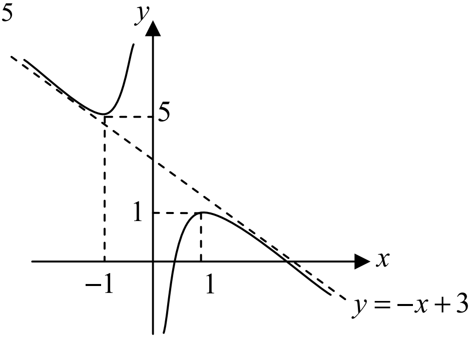
33


y
$-\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
x

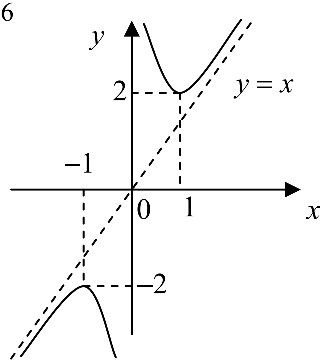
34


y
$-\frac{5\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
x
-2

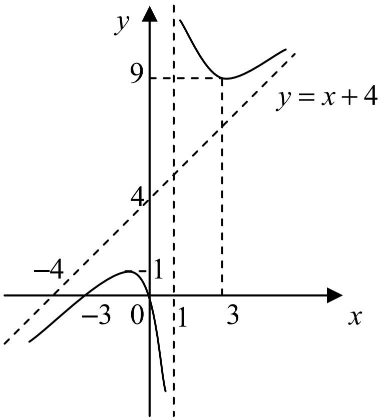
35



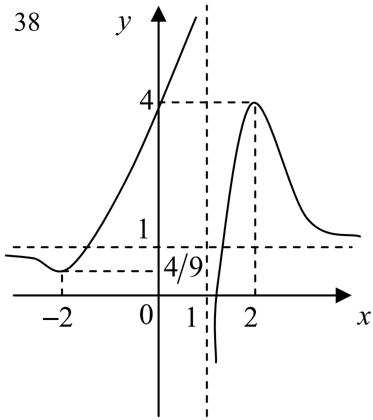
36



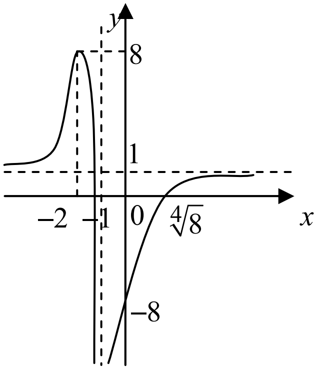
37



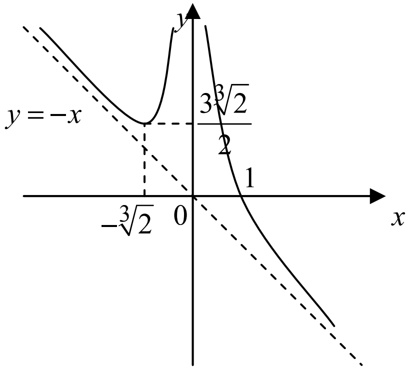
38



39



40



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Роганін О.М.* Алгебра і початки аналізу. 11 клас: плани-конспекти уроків / *О.М. Роганін.* – Х.: Світ дитинства, 2004.

2. *Алєксєєв В.М.,* Математика: довідковий повторювальний курс / В.М. Алєксєєв, Р.П. Ушаков. – К.: Вища шк., 1992.

3. *Ясінський В.В.* Математика: навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ "КПІ"/ В.В. Ясінський. – К.: 2005.

4. *Литвиненко Г.Н.* Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту / Г.Н. Литвиненко, Л.Я.Федченко, В.О.Швець.- Х.: ББН, 1999.

5. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. 11 клас /за ред. З.І. Слєпкань. – Х.: Гімназія, 2002.

6. *Алгебра* и начала анализа: учебник для 10-11 классов средней школы / под ред. А.Н.Колмогорова. – М: Просвещение, 1990.

7. *Лященко М.Я.* Похідна та її застосування / М.Я. Лященко. – К.: Рад. шк., 1985.

Навчальне видання

МУРАНОВА Наталія Петрівна
ХАРЧЕНКО Лариса Анатоліївна
ШЕВЧЕНКО Галина Володимирівна

МАТЕМАТИКА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

В авторській редакції
Комп’ютерна верстка *Н.С. Ахроменко*

Підп. до друку 07.06.10. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 8,0.
Тираж 500 прим. Замовлення № 132-1.

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002

Інститут доуніверситетської підготовки (ІДП) проводить освітню діяльність, пов'язану з підготовкою до вступу у ВНЗ та зовнішнього незалежного оцінювання для учнів 9–11 класів на підготовчих курсах *за напрямами*: технічним, економічним**,** гуманітарним, правовим, соціологічним, психологічним, міжнародні відносини, дизайн та архітектура ***з навчальних дисциплін:*** українська мова та література, математика, історія України, англійська мова, географія, фізика, хімія, біологія, основи журналістики, рисунок, композиція.

До послуг учнів 9–11 класів існують різноманітні **форми навчання:** *вечірні, щосуботи та заочні підготовчі курси*, а також організовано роботу підготовчих курсів в регіонах України, а саме: м .Андрушівка, м. Бердянськ, смт. Володимирець, м. Бориспіль, м. Глухів, м. Лубни, м. Дрогобич, м. Дубровиця, м. Канів, м.Енергодар, м. Козятин, м. Конотоп, м. Кузнецовськ, м. Луцьк, м. Миколаїв, м.Нікополь, м.Нововолинськ, м. Пирятин, м. Рівне, м.Свалява, м. Сімферополь, м. Старокостянтинів, м. Чернігів.

Основні напрями діяльності Інституту: якісна підготовка до ЗНО та вступу у ВНЗ; підвищення рівня підготовки абітурієнтів на основі використання кадрового і матеріального потенціалу Університету; вивчення і розроблення проблеми наступності та організації ранньої професійної орієнтації серед слухачів ІДП за участю провідних фахівців НАУ; поглиблене вивчення цілого ряду навчальних дисциплін та спецкурсів.

Термін навчання: 8-ми місячні підготовчі курси.

Заняття проводяться відповідно до чинних нормативних документів, робочих навчальних програм, адаптованих відповідно до вимог Державного стандарту базової і повної середньої освіти, Українського центру оцінювання якості освіти та затверджених кафедрою базових і спеціальних дисциплін Інституту доуніверситетської підготовки НАУ.

Навчальний процес на підготовчих курсах забезпечується педагогічними та науково-педагогічними працівниками кафедри базових і спеціальних дисциплін, а також висококваліфікованими фахівцями провідних кафедр Університету. Слухачі Інституту забезпечуються навчально-методичною літературою.

Протягом навчального року пропонуються: екскурсії до Державного музею авіації, навчального ангару, музею Університету, кафедр та лабораторій НАУ, участь у міжнародній конференції студентів та молодих учених «Політ» та презентації Університету на базі ЗНЗ.

Слухачі ІДП зараховуються на навчання до Національного авіаційного університету та інших ВНЗ відповідно до Умов прийому до вищих навчальних закладів України у поточному навчальному році.

Якщо є бажання отримати якісну підготовку до зовнішнього незалежного оцінювання і підготуватися до вступу в обраний вищий навчальний заклад, звертайтеся за адресою:

03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1, корпус 8, кім. 610.

Тел.: 406-74-04, 406-72-09, 406-73-11, 406-74-15, тел./факс: 497-52-84

E-mail: idp.nau@ua.fm. Web-сторінка: **www.nau.edu.ua**

Навчання платне

Ліцензія МОН України серія АВ №482350 від 08.09. 2009р.