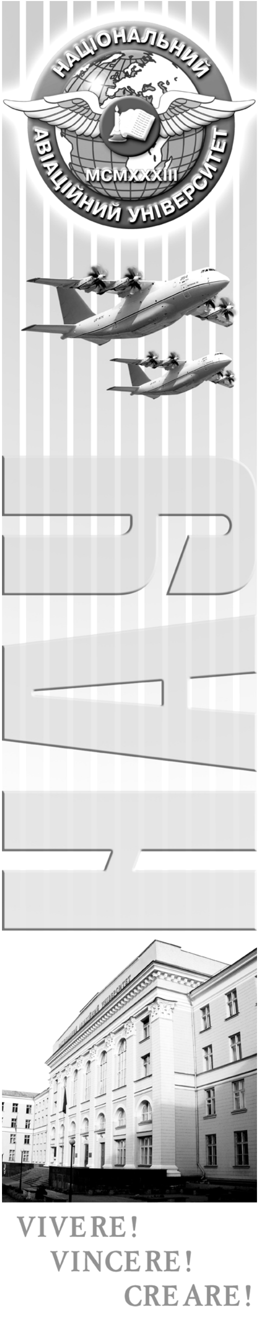
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет



VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

Л. М. Ломонос, В. І. Мамчук
Н. П. Муранова

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Київ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

**Л. М. Ломонос, В. І. Мамчук
Н. П. Муранова**

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

2-ге видання, стереотипне

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 514.11(075.4)
ББК В181.121.1я73-1
К 674

Рецензенти:

В. Ю. Слюсарчук, д-р. фіз.-мат. наук,
академік АН вищої школи України, проф.
(Національний університет водного господарства і природокористування)

М. М. Хлапук, д-р. техн. наук, проф.
(Національний університет водного господарства і природокористування)

К. І. Мазур, канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний авіаційний університет)

Рекомендовано до друку методично-редакційною радою
Національного авіаційного університету
(протокол № 9 від 13.12.2007)

Ломонос Л. М.
К 674 Вибрані питання математики. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. / Л. М. Ломонос, В. І. Мамчук, Н. П. Муранова. — К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. — 2-ге вид., стер. — 128 с.

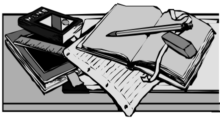
ISBN 978-966-598-481-8

Розглянуто основні теоретичні відомості векторної алгебри та аналітичної геометрії, наведено приклади розв'язання типових задач та задач, розв'язання яких традиційними методами приводить до громіздких математичних викладок, показано застосування векторної алгебри та методу координат до розв'язання змістовних геометричних задач. Подано вправи для самостійної роботи і наведено відповіді до них.

Посібник можна використовувати у системі доуніверситетської підготовки, ліцеях, гімназіях природничо-математичного профілю та для самостійної підготовки до вступних іспитів у вищі навчальні заклади.

УДК 514.11(075.4)
ББК В181.121.1я73-1

ISBN 978-966-598-481-8



ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладено елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії — важливого розділу математики. Успішне засвоєння цього розділу дає можливість просто і ефективно розв'язувати багато задач елементарної математики та підготуватися до більш глибокого вивчення згаданого розділу і багатьох інших розділів вищої математики.

Розглянуті в посібнику питання відповідають відповідним програмам з математики середньої та вищої шкіл.

Розгляд кожного питання проводиться в наступному порядку:

1) вводяться основні поняття та означення;
2) у стислій формі (без доведення) наводяться основні формули;
3) наводяться приклади розв'язування основних типових задач та деяких нетрадиційних;
4) подаються завдання для практичних занять і самостійного розв'язання, які поділяються на дві групи: А та Б.

До групи А включаються тести, які містять завдання обов'язкового рівня. До групи Б включаються завдання підвищеного рівня, які забезпечені відповідями.

Посібник з успіхом може використовуватися вчителями; учнями старших класів шкіл, гімназій, ліцеїв; абітурієнтами при підготовці до вступу у вузи; студентами — як довідковий матеріал.

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Паралельне перенесення

Перетворення фігури F на площині, при якому її довільна точка з координатами $(x;y)$ переходить у точку з координатами $(x+a;y+b)$, де a і b — деякі сталі, називається паралельним перенесенням. Паралельне перенесення задається формулами :

$$x' = x + a, \ \ y' = y + b, \tag{1.1}$$

де $(x';y')$ — координати точки, у яку переходить точка $(x;y)$ при паралельному перенесенні.

У просторі паралельне перенесення задається формулами:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c, \tag{1.2}$$

де $(x';y';z')$ — координати точки, у яку переходить точка $(x;y;z)$ при паралельному перенесенні.

1.2. Напрямлений відрізок

Відрізок прямої визначається двома точками — його кінцями. Відрізок з кінцями A і B позначають $[AB]$ або $[BA]$; $|AB|$ — довжина відрізка $[AB]$ або відстань між точками A і B. Відрізок називається напрямленим, якщо вказано, яка з його точок (A чи B) є його початком, а яка — кінцем.

1.3. Поняття вектора

Розрізняють два види величин: скалярні і векторні. Якщо деяка величина цілком визначається її числовим значенням, то її називають скалярною (наприклад: робота, температура середовища, маса тіла тощо). Величини, значення яких визначаються як розмірами, так і напрямами, називаються векторними (наприклад: швидкість, прискорення, сила тощо) і їх можна зображати векторами.

Вектор — це відрізок, що має певну довжину і напрям, тобто напрямлений відрізок. Позначається вектор двома великими латинськими літерами: $\overrightarrow{AB}$ (A — початок, B — кінець) або однією малою латинською літерою зі стрілкою зверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і т. д.

Довжина вектора $\vec{a}$ (модуль або абсолютна величина) позначається $|\vec{a}|$. Якщо $|\vec{a}|=1$, вектор $\vec{a}$ називається одиничним. Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^{\,0}$.

Вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\,0}. \tag{1.3}$$

Вектор $\overrightarrow{AA}$, кінці якого співпадають, називається нульовим вектором. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрям невизначений.

1.4. Колінеарні і компланарні вектори

Колінеарні вектори — вектори, які паралельні одній прямій або належать одній прямій. Нульовий вектор вважається колінеарним довільному вектору.

Якщо два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то вони можуть бути напрямлені або однаково, або протилежно. У першому випадку вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються співнапрямленими ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), у другому — протилежно напрямленими ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Компланарні вектори — вектори, паралельні одній і тій же площині (або такі, що лежать в одній площині).

Три вектори, серед яких є хоча б один нульовий вектор, вважаються компланарними.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то довільний вектор $\vec{c}$, компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, можна однозначно подати у вигляді:

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}, \tag{1.4}$$

де x, y — деякі дійсні числа.

Вираз (1.4) називається розкладом вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ або розкладом вектора $\vec{c}$ за базисом. При цьому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають базисними.

Довільний вектор $\vec{d}$ простору однозначно розкладається за трьома заданими некомпланарними ненульовими векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (1.5)$$

де x, y, z — деякі дійсні числа.

1.5. Рівність векторів

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються рівними, якщо рівні їх модулі і збігаються їх напрями, тобто $\vec{a} = \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ і $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Тому вектор не зміниться, якщо його перенести паралельно самому собі так, що його початок потрапить у будь-яку точку простору.

Взаємно протилежні вектори — це вектори, які рівні за довжиною і протилежні за напрямом, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ і $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Вектор, протилежний вектору $\overrightarrow{AB}$, позначається $\overrightarrow{BA}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Приклад 1. Паралельне перенесення переводить точку (2; 3) у точку (–3; 2).

В яку точку воно переведе точку (5; –2)?

Розв'язання. Використовуючи формули (1.1), знайдемо значення a і b, що відповідають паралельному перенесенню точки (2; 3) у точку (–3; 2):

$$-3 = 2 + a,\ 2 = 3 + b, \text{ тобто } a = -5,\ b = -1.$$

Далі, за формулами (1.1) дістаємо: $x' = 5-5 = 0$, $y' = -2 - 1 = -3$, тобто точка (5; –2) переходить у точку (0; –3).

Відповідь. (0; –3).

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. При паралельному перенесенні точка $A(5;-7)$ переходить у точку $B(2;7)$. В яку точку переходить середина відрізка AB?

а) $\left(\frac{7}{2};0\right)$; б) $\left(\frac{1}{2};14\right)$; в) $\left(\frac{3}{2};-7\right)$; г) інша відповідь.

2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $A(5;-7)$ переходить у точку $B(8;0)$, а точка $C(3;2)$ — у точку $D(6;9)$?

а) Ні; б) так; в) визначити неможливо.

3. Записати формули перетворення координат, якщо початок координат (без зміни напряму осей) перенесено в точку $C(-3;5)$.

а) $x=x'+3,\ y=y'-5;$ б) $x=x'-3,\ y=y'+5;$

в) $x=x'-3,\ y=y'-5;$ г) інша відповідь.

Група Б

1. Паралельне перенесення переводить точку (–4; 1) у точку (2; –3). У яку точку воно переведе точку (5; 5)?

Відповідь. (11; 1).

2. Паралельне перенесення переводить початок координат у точку (–3; –5). У яку фігуру воно переведе трикутник ABC з вершинами A(–2; 6), B(4; 8), C(5; 3)?

Відповідь. У трикутник з вершинами (–5; 1), (1; 3), (2; –2).

3. Дано паралелограм. Виконайте паралельне перенесення, яке переведе точку перетину його діагоналей в одну з його вершин.

Розділ 2

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1. Додавання векторів

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладений до кінця вектора $\vec{a}$ (правило трикутника). Побудову суми $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ зображено на рис. 2.1.

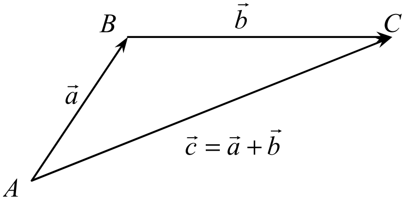


Рис. 2.1

Правило трикутника можна подати і в такій формі: якщо A, B і C — довільні точки площини або простору, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (ця рівність називається правилом трьох точок).

Крім правила трикутника при додаванні векторів часто використовують правило паралелограма: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведено до спільного початку і на них побудовано паралелограм, то сумою $\vec{a} + \vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, який виходить зі спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і співпадає з діагоналлю цього паралелограма (рис. 2.2).

Сумою декількох векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ є вектор $\vec{e}$, що є замикаючою ламаної, яка складена з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 2.3).

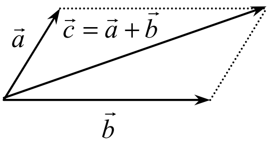


Рис. 2.2

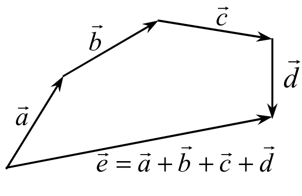


Рис. 2.3

Властивості операції додавання векторів:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (властивість нульового вектора — закон поглинання нульового вектора);

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставний або комутативний закон);

3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сполучний або асоціативний закон);

4) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

2.2. Віднімання векторів

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума векторів $\vec{a}$ і $-\vec{b}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Якщо початки двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співпадають, то різницею $\vec{a} - \vec{b}$ є вектор, початок якого співпадає з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.4), тобто вектор $\vec{c}$ напрямлений з кінця вектора $\vec{b}$ в кінець вектора $\vec{a}$.

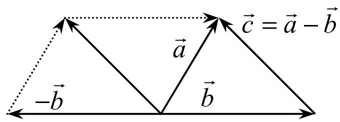


Рис. 2.4

Властивості операції віднімання векторів:

1) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$;

2) $|\vec{a} - \vec{b}| \ge |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

2.3. Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на скаляр λ називається вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$, а напрям співпадає з напрямом $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний йому при $\lambda < 0$.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda\vec{a}$. У випадку, коли $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$, відповідно вважають $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для довільного λ і $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для довільного $\vec{a}$.

Властивості операції множення ненульового вектора на число:

1) $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$ (комутативний закон);

2) $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$ (асоціативний закон);

3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (розподільний або дистрибутивний закон відносно додавання векторів);

4) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ (дистрибутивний закон відносно додавання чисел).

2.4. Кут між двома векторами

Кутом між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між напрямами цих векторів: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \varphi$, де $\varphi \in [0^\circ;180^\circ]$.

Окремі випадки:

1) якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0^\circ$;

2) якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 180^\circ$;

3) якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90^\circ$.

2.5. Правило паралелепіпеда

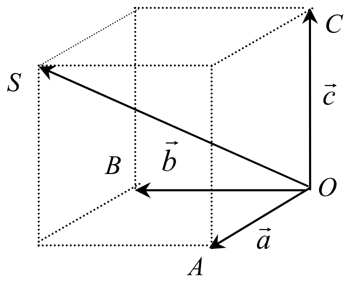


Рис. 2.5

Для знаходження вектора, що є сумою трьох некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, часто використовують правило, яке називається правилом паралелепіпеда (рис. 2.5). Від довільної точки простору O відкладають вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Будують паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB, OC були його ребрами. Вектор $\overrightarrow{OS}$ (діагональ паралелепіпеда) і є сумою цих векторів:

$$\overrightarrow{OS} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

2.6. Умова колінеарності двох векторів

Необхідною і достатньою умовою колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є умова існування числа λ, що задовольняє рівність:

$$\vec{a} = \lambda\,\vec{b}. \tag{2.1}$$

Якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям; якщо $\lambda < 0$, то напрями цих векторів протилежні.

2.7. Умова компланарності трьох векторів

Умова компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має вигляд:

$$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}, \tag{2.2}$$

де α, β, γ — деякі дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, тобто

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0. \qquad (2.3)$$

Приклад 1. Дано: $\vec{a}, \vec{b}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$. Знайти модуль вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Розв'язання. Побудуємо вектор $\vec{c}$ за правилом трикутника. Тоді за теоремою косинусів для трикутника зі сторонами *a*, *b*, *c* матимемо співвідношення:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C},$$

де $\hat{C}$ — кут, протилежний стороні *c*.

Оскільки

$$\cos\hat{C} = \cos(180^{\circ}-(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=-\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\cos\varphi,$$

то $c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}$.

Відповідь. $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}$.

Приклад 2. Точки *M* і *K* — середини сторін [*BC*] і [*CD*] паралелограма *ABCD*. Знайти вектор $\overrightarrow{AC}$, якщо $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AK}=\vec{b}$.

Розв'язання. Маємо $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Додаючи останні дві рівності, дістаємо

$$\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \text{ звідки } \overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Відповідь. $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$.

Приклад 3. Довести, що вектори, які співпадають з медіанами довільного трикутника, можуть бути сторонами іншого трикутника.

Розв'язання. Нехай дано ΔABC. За правилом трьох точок маємо: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

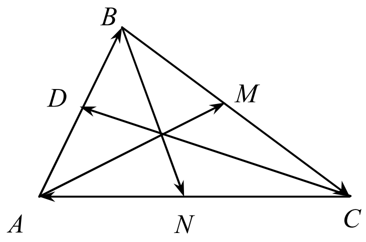


Рис. 2.6

Проведемо медіани ΔABC: *AM, BN, CD*. Для доведення потрібного твердження необхідно переконатися, що виконується рівність

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CD}=\bar{0} \text{ (рис. 2.6).}$$

Виразимо вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Додаючи здобуті рівності, маємо:

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0},$$

що й потрібно було довести.

Приклад 4. Дано три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, кожні два з яких неколінеарні. Знайти їх суму, якщо вектор $\vec{a}+\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$.

Розв'язання. Використовуючи умову колінеарності двох векторів (2.1), можна записати:

$$\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}, \ \vec{b}+\vec{c}=\mu\vec{a},$$

де λ і μ — деякі числа, відмінні від нуля.

Виключивши з цих рівностей $\vec{b}$, дістаємо рівність: $(\mu+1)\cdot\vec{a}=(\lambda+1)\cdot\vec{c}$, яка можлива лише при $\mu=-1$ і $\lambda=-1$, оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ неколінеарні.

Отже, $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c} \iff \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Відповідь. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Приклад 5. Дано три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Довести, що вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарні.

Розв'язання. Для доведення достатньо знайти три числа α, β, γ, які задовольняють таким умовам:

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})+\beta(\vec{b}+\vec{c})+\gamma(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}, \tag{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0 . \qquad (2)$$

З виразу (1) дістаємо:

$$\vec{a}(\alpha - \gamma) + \vec{b}(\alpha + \beta) + \vec{c}(\beta + \gamma) = \vec{0} . \qquad (3)$$

Оскільки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарні, то з рівності (3) випливає, що числа α, β, γ повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0, \\ \alpha + \beta = 0, \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Один з розв'язків отриманої системи: $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, отже, вектори $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарні.

Приклад 6. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові неколінеарні вектори. Довести, що вектор $\vec{c} = \vec{a}/|\vec{a}| + \vec{b}/|\vec{b}|$ утворює рівні кути з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ і $\vec{b}_1 = \vec{b}/|\vec{b}|$ одиничні:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| = 1 .$$

Відкладемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{b}_1$ від однієї точки: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}_1$ та добудуємо паралелограм $OBCA$ (рис. 2.7).

Тоді

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{a}/|\vec{a}| + \vec{b}/|\vec{b}| = \vec{c} .$$

Оскільки $OBCA$ — ромб, то OC — діагональ, а тому $\vec{c}$ утворює рівні кути з векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{b}_1$, а отже, і з колінеарними їм векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

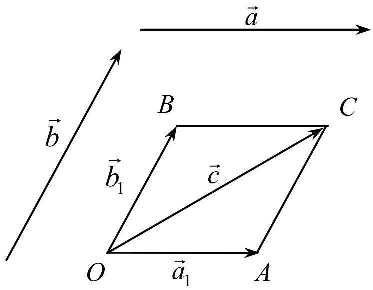


Рис. 2.7

Приклад 7. На стороні BC ΔOBC розміщено точку N так, що $|BN| : |BC| = n$ (рис. 2.8). Розкласти вектор $\overrightarrow{ON}$ за векторами $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$.

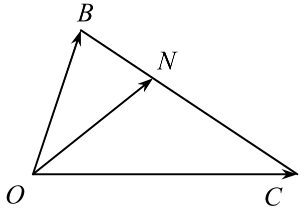


Рис. 2.8

Розв'язання. $\overrightarrow{BN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ (колінеарні і співнапрямлені), тому $\overrightarrow{BN} = x \cdot \overrightarrow{BC}$ і $x > 0$.

Оскільки $\left|BN\right| = n \cdot \left|BC\right|$, то $x = n$ і $\overrightarrow{BN} = n \cdot \overrightarrow{BC}$. Таким чином $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}$ і дістаємо

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + n\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = n\overrightarrow{OC} + (1-n)\overrightarrow{OB}.$$

Зауважимо, що при $n = \dfrac{1}{2}$ точка N — середина сторони BC, а ON — медіана трикутника. У цьому випадку $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Відповідь. $\vec{ON} = n\vec{OC} + (1-n)\vec{OB}$.

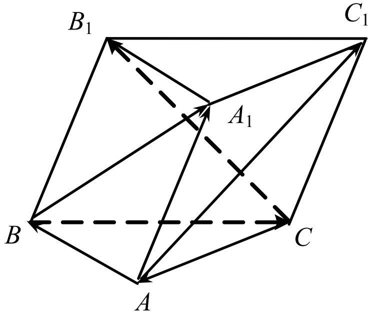


Рис. 2.9

Приклад 8. Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 2.9). Розкласти вектор $\overrightarrow{AA_1}$ за векторами $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ і $\overrightarrow{CB_1}$.

Розв'язання.
За правилом трикутника маємо

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1};$$
$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1};$$
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}.$$

Додаючи ліві і праві частини останніх векторних рівностей, дістаємо

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}.$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$ і $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, то $3\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}$, тому $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}\right)$.

Відповідь. $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}\right)$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Точка O — середина медіани AM трикутника ABC. Виразити вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

а) $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$; б) $\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; в) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$;

г) інша відповідь.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $\left|\vec{a}\right|=5$ і $\left|\vec{b}\right|=12$. Визначити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

а) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=7, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=9$; б) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=13$;

в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=11, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5$; г) інша відповідь.

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^\circ$, причому $\left|\vec{a}\right|=5$ і $\left|\vec{b}\right|=8$. Визначити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

а) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$; б) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=13, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=10$;

в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}, \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$; г) інша відповідь.

Група Б

1. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб виконувалися співвідношення:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

б) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$;

в) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$?

Відповідь. а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинні бути взаємно перпендикулярними;

б) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинний бути гострим;

в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинний бути тупим.

2. Точки A, B, C — вершини трикутника, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{AO}$, де O — точка перетину медіан даного трикутника, за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь. $(\vec{a}+\vec{b})/3$.

3. Нехай O — точка перетину медіан ΔABC. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

4. Дано: $|\vec{a}\ |=13$, $|\vec{b}\,|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}\,|=24$. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}\,|$.

Відповідь. 22.

5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=120°$, причому $|\vec{a}\,|=3$ і $|\vec{b}\,|=5$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}\,|$ і $|\vec{a}-\vec{b}\,|$.

Відповідь. $|\vec{a}+\vec{b}\,|=\sqrt{19}$, $|\vec{a}-\vec{b}\,|=7$.

6. Дано трапецію $ABCD$. Через точку перетину M її діагоналей проведено пряму ℓ паралельно основам AB і CD, яка перетинає бічні сторони BC і DA відповідно в точках P і Q . Знайти розклад вектора $\overrightarrow{PQ}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $|\overrightarrow{AB}|=p$, $|\overrightarrow{CD}|=q$.

Відповідь. $\overrightarrow{PQ}=(p\overrightarrow{CD}$ — $q\overrightarrow{AB}\,)/(p+q)$.

7. A, B, C, D — вершини трикутної піраміди. O_1 — середина відрізка $[AD]$, K — середина відрізка $[DC]$, O_2 — середина відрізка $[BK]$. Виразити вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Відповідь. $\overrightarrow{O_1O_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ — $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

8. A, B, C, D — вершини трикутної піраміди, O_1 — середина відрізка $[AD]$, O_2 — середина відрізка $[BC]$. Виразити вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Відповідь. $\overrightarrow{O_1O_2}=\dfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\,)$.

Розділ 3

ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

3.1. Координатна вісь. Кут між вектором і віссю

Координатною віссю називається пряма, на якій зафіксовано дві різні точки: точка O — початок координат і точка E , яку називають одиничною точкою. Будемо розташовувати точку E праворуч від точки O.

Додатним напрямом осі координат вважається напрям променя, що виходить із точки O і містить точку E. Протилежний напрям вважається від'ємним напрямом осі координат. Відрізок OE називається масштабним або одиничним відрізком. Координатну вісь будемо позначати Ox.

Вектор $\overrightarrow{OE}$ називають одиничним вектором (або ортом) і позначають буквою $\vec{e}$.

Координатою точки M_0, що лежить на координатній осі, називається число x_0, яке визначається рівністю

$$x_0 = \pm \frac{\left|\overrightarrow{OM_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OE}\right|},$$

причому перед дробом береться знак «плюс», коли точки E і M_0 лежать по одну сторону від точки O, і знак «мінус», коли точки E і M_0 розташовані по різні сторони відносно точки O; якщо ж точка M_0 співпадає з точкою O, то $x_0 = 0$.

Символ $M(x)$ означає, що точка M має координату x.

Відстань d між точками M_1 і M_2 з координатами x_1 і x_2 обчислюється за формулою:

$$d = |x_1 - x_2|. \tag{3.1}$$

Кутом між ненульовим вектором $\vec{a}$ і віссю ℓ називається кут між напрямами осі і вектора: $(\widehat{\vec{a}, \ell}) = \varphi$, де $\varphi \in \left[0^\circ;\ 180^\circ\right]$.

3.2. Проекції вектора на координатну вісь

Проекцією вектора на координатну вісь є число, яке дорівнює різниці між координатами проекцій кінця і початку цього вектора на вісь. Очевидно, що проекція вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на вісь ℓ дорівнює довжині цього вектора, помноженій на косинус кута φ між віссю ℓ і вектором $\vec{a}$:

$$\text{пр}_{\ell}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \qquad (3.2)$$

Властивості проекцій:

1) $\text{пр}_{\ell}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\ell}\vec{a} + \text{пр}_{\ell}\vec{b}$;

2) $\text{пр}_{\ell}(m\vec{a}) = m\ \text{пр}_{\ell}\vec{a}$, де m — деяке дійсне число.

3.3. Прямокутна декартова система координат

Прямокутною декартовою системою координат на площині називається упорядкована пара двох взаємно перпендикулярних координатних осей *Ox* і *Oy*, причому початком координат кожної з осей є їх спільна точка *O* (початок прямокутної декартової системи координат). Вісь *Ox* називається віссю абсцис, а вісь *Oy* — віссю ординат.

Вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ називаються базисними векторами прямокутної декартової системи координат (або ортами) і позначаються символами $\vec{i}$ і $\vec{j}$: $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}$. Таким чином, прямокутна декартова система координат на площині задається деякою точкою *O* (початком координат) і упорядкованою парою взаємно перпендикулярних одиничних векторів $(\vec{i}; \vec{j})$ — прямокутним базисом.

Площина з побудованою системою координат називається координатною площиною.

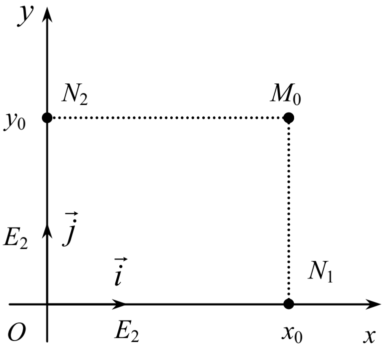


Рис. 3.1

Нехай *Oxy* — прямокутна декартова система координат на площині з початком *O*, M_0 — деяка точка на площині (рис. 3.1). Опустимо з точки M_0 перпендикуляри на осі *Ox* і *Oy*. Вони перетнуть зазначені координатні осі відповідно в точках N_1 і N_2. Позначимо координату точки N_1, що лежить на осі *Ox*, через x_0, а координату точки N_2, що лежить на осі *Oy*, через y_0.

Координатами точки M_0 у прямокутній декартовій системі координат Oxy називається упорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$. Число x_0 називають абсцисою, а число y_0 — ординатою точки M_0 і позначають $M_0(x_0; y_0)$.

3.4. Координати вектора

Вектор, спрямований з початку координат у довільну точку M площини Oxy, називається радіусом-вектором точки M і позначається $\vec{r}$, тобто $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

Нехай Oxy — прямокутна декартова система координат з базисними векторами ($\vec{i}; \vec{j}$). Проекції вектора $\vec{r}$ на координатні осі, а саме $\text{пр}_x \vec{r} = x$ і $\text{пр}_y \vec{r} = y$, називаються координатами вектора. Координати вектора $\vec{r}$ коротко записуються так: $\vec{r} = (x; y)$. Очевидно, що $(x; y)$ є координатами точки M.

Будь-який вектор $\vec{a}$, що належить площині, може бути розкладений за векторами базису $\vec{i}, \vec{j}$. Це означає, що існує єдина упорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$ така, що

$$\vec{a} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}. \quad (3.3)$$

Числа x_0, y_0 називають координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}$ і записують: $\vec{a} = (x_0; y_0)$.

Якщо в прямокутній системі координат точки A і B мають координати $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, то координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ буде упорядкована пара чисел $\left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\right)$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1). \quad (3.4)$$

3.5. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Нехай у базисі $(\vec{i}; \vec{j})$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$.

Координати лінійної комбінації декількох векторів дорівнюють таким же лінійним комбінаціям координат цих же векторів, а саме:

1) координати суми двох (або більше) векторів дорівнюють сумі відповідних координат доданків:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2); \quad (3.5)$$

2) координати різниці двох векторів дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2); \tag{3.6}$$

3) координати добутку вектора на число p дорівнює добутку відповідних координат даного вектора на це число:

$$p\vec{a}=(px_1;py_1). \tag{3.7}$$

Довжина радіуса-вектора $\vec{a}=(x;y)$ знаходиться за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3.8}$$

Довжина вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;\ y_B-y_A\right)$ знаходиться за формулою:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}. \tag{3.9}$$

За допомогою формули (3.9) обчислюється відстань між двома точками на площині.

Косинуси кутів між вектором $\vec{a}=(x_1,y_1)$ і векторами базису $\vec{i},\vec{j}$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ і обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\vec{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}};\quad \cos\beta=\frac{y_1}{|\vec{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}. \tag{3.10}$$

Напрямні косинуси будь-якого вектора $\vec{a}$ задовольняють рівність:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1. \tag{3.11}$$

3.6. Умова колінеарності двох векторів

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}=(x_1;y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2)$ має вигляд (2.1), звідки дістаємо рівності: $x_1=\lambda x_2, y_1=\lambda y_2$.

Після виключення λ, матимемо

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2},$$

тобто у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині, заданих своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат *Oxy*, є рівність нулю визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.12)$$

Приклад 1. Дано: $\text{пр}_\ell \vec{a} = -2$; $\text{пр}_\ell \vec{b} = 1$.

Обчислити $\text{пр}_\ell (3\vec{a} - 2\vec{b})$.

Розв'язання. Використовуючи властивості проекцій, дістаємо:

$$\text{пр}_\ell (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\text{пр}_\ell \vec{a} - 2\text{пр}_\ell \vec{b} = 3(-2) - 2 \cdot 1 = -8.$$

Відповідь. –8.

Приклад 2. Довести, що вектори $\vec{a} = (5; -1), \vec{b} = (-4; 3)$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{c} = (6; 1)$ за цим базисом.

Розв'язання. Перевіримо, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\frac{5}{-4} \neq \frac{-1}{3}$. Їхні координати непропорційні, звідси випливає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, тобто утворюють базис. Таким чином вектор $\vec{c}$ можна записати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де x, y — деякі дійсні числа. Дістаємо систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 4y = 6, \\ -x + 3y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Маємо розклад: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Відповідь. $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Приклад 3. Вершинами ΔABC є точки A(1; 1), B(0; 3), C(–1; 1). Довести, що $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (3.4), знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $x = 0 - 1 = -1$, $y = 3 - 1 = 2$, тобто $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2)$. Аналогічно знаходимо: $\overrightarrow{BC} = (-1; -2)$, $\overrightarrow{CA} = (2;\ 0)$.

Тоді $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-1 - 1 + 2;\ 2 - 2 + 0) = (0; 0)$.

Приклад 4. Дано три вектори: $\vec{a} = (5;3)$, $\vec{b} = (2;0)$, $\vec{c} = (4;2)$. Знайти такі відмінні від нуля числа α, β, γ, щоб $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Розв'язання. Використовуючи співвідношення (3.5) і (3.7), записуємо рівність

$$(5\alpha;\ 3\alpha) + (2\beta;\ 0) + (4\gamma;\ 2\gamma) = (0;\ 0),$$

тобто $(5\alpha + 2\beta + 4\gamma;\ \ 3\alpha + 2\gamma) = (0;\ 0)$.

Враховуючи однозначність розкладання вектора за базисними векторами, дістаємо систему рівнянь відносно невідомих α, β, γ:

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0, \\ 3\alpha + 2\gamma = 0, \end{cases}$$

з якої можна знайти вирази для α і γ через β: $\alpha = 2\beta$, $\gamma = -3\beta$. Оскільки $\beta \neq 0$, то, прийнявши, наприклад, $\beta = 1$, дістанемо $\alpha = 2$, $\beta = 1, \gamma = -3$.

Відповідь. $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = -3$.

Приклад 5. Дано три вектори: $\vec{a} = (3; -1), \vec{b} = (1; -2), \vec{c} = (-1; 7)$. Визначити розклад вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{p}, \vec{a}$ і $\vec{b}$ компланарні, то $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

Останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\vec{p} = (3;4) = \lambda(3;-1) + \mu(1;-2).$$

Звідси дістаємо систему рівнянь відносно λ і μ:

$$\begin{cases} 3 = 3\lambda + \mu, \\ 4 = -\lambda - 2\mu, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо:

$$\lambda = 2,\ \mu = -3\text{; отже, } \vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Відповідь. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3.7 Перехід від декартової системи координат до полярної і навпаки

Полярна система координат задається:

1) точкою O — полюсом;
2) променем $O\rho$ — полярною віссю;
3) одиницею масштабу для вимірювання довжини.

Координати довільної точки M у полярній системі координат задаються двома числами: ρ — довжиною відрізка OM і φ — кутом, який утворює відрізок OM із полярною віссю (рис. 3.2). Кут φ при цьому розуміють так, як це прийнято в тригонометрії.

Узагальнена полярна система координат: ρ — надається від'ємного значення (на рис. 3.3 — точка M').

Перехід від декартової системи до полярної здійснюється за формулами (рис. 3.4):

$$M\left(x;\ y\right)=M\left(\rho;\ \varphi\right)\quad x=\rho\cdot\cos\varphi;\ \ y=\rho\cdot\sin\varphi\ ;$$

а від полярної до декартової — за формулами: $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \mathrm{tg}\varphi=\dfrac{x}{y}\end{cases}$

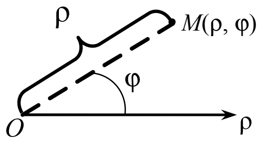


Рис. 3.2

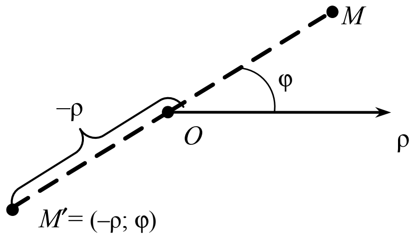


Рис. 3.3

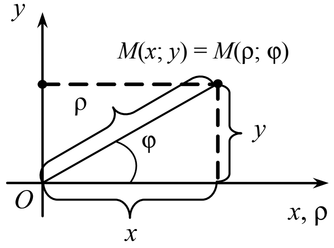


Рис. 3.4

Приклад 1. Дано координати точок $M_1\left(3;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(2;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$. Знайти довжину відрізка M_1M_2.

Розв'язання. За теоремою косинусів (рис. 3.5) дістаємо:

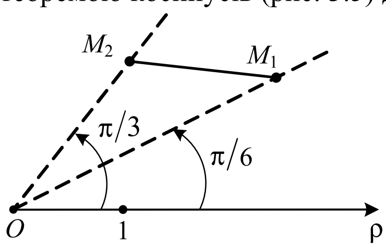


Рис. 3.5

$$|M_1M_2|^2 = |OM_1|^2 + |OM_2|^2 - 2|OM_1|\cdot|OM_2|\cdot\cos\angle M_1OM_2 =$$

$$= 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 13 - 12\cos\frac{\pi}{6} = 13 - 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 13 - 6\sqrt{3}\,.$$

Тому $|M_1M_2| = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$.

Відповідь. $|M_1M_2| = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$.

Приклад 2. Дано координати вершин трикутника: $M_1\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(4;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(-1;\ \sqrt{3}\right)$. Знайти площу $\Delta M_1M_2M_3$.

Розв'язання. Знайдемо площу трикутника в полярній системі координат. Для цього запишемо координати точки M_3 таким чином ($\sqrt{3}$ виразимо через π):

$$\rho_{M_3} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\,,\ \varphi_{M_3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi\,.$$

Тоді (рис. 3.6):

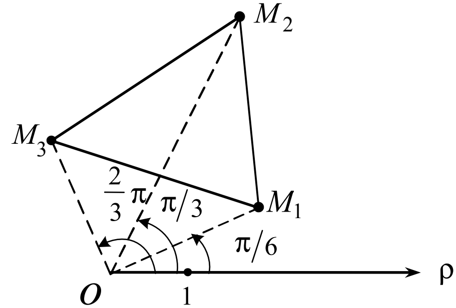


Рис. 3.6

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = S_{\Delta OM_1M_2} + S_{\Delta OM_2M_3} - S_{\Delta OM_1M_3} =$$

$$= \frac{1}{2} OM_1 \; OM_2 \; \sin\angle M_1OM_2 + \frac{1}{2} OM_2 \; OM_3 \; \sin\angle M_2OM_3 -$$

$$- \frac{1}{2} OM_1 \; OM_3 \; \sin\angle M_1OM_3 = \frac{1}{2}\left(2 \cdot 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) +\right.$$

$$\left. +4 \cdot 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cdot 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(8\sin\frac{\pi}{6} + 8\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 2\sqrt{3} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь. $2\sqrt{3}$ кв. од.

Приклад 3. Записати рівняння ліній в полярній системі координат (представити: $\rho = \rho(\varphi)$):

а) загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$;

б) рівняння гіперболи: $y = \frac{k}{x}$;

в) рівняння кола: $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. а) Оскільки $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$, то

$$A\rho\cos\varphi + B\rho\sin\varphi + C = 0, \quad \rho\,(A\cos\varphi + B\sin\varphi) = -C,$$

$$\rho = -\frac{C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi};$$

б) $\rho\sin\varphi = \dfrac{k}{\rho\cos\varphi}$ або $\rho = \sqrt{\dfrac{2k}{\sin 2\varphi}}$;

в) $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2$; $\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2$;

$\rho^2 = R^2$; $\rho = R$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Дано вектори $\vec{a}=(5;-7)$ і $\vec{b}=(-1;4)$. Знайти $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|$.

а) 12; б) $13\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{3}$; г) інша відповідь.

2. Знайти одиничний вектор, співнапрямлений з вектором $\vec{p}=(3;-4)$.

а) $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$; б) $\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; г) інша відповідь.

3. Дано точки $A(1;3)$, $B(2;4)$, $C(5;14)$. Знайти $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ і $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

а) 12; 5; б) 13; $\sqrt{109}$; в) 11; $\sqrt{103}$; г) інша відповідь.

Група Б

1. Дано проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на осі координат: $x = 5$, $y = -4$.

Знаючи, що його початок у точці $M_1(-2;3)$, визначити координати його кінця.

Відповідь. (3; –1).

2. Довжина вектора $\overrightarrow{MN}$ дорівнює 17, його кінець знаходиться у точці $N(-7,3)$, проекція на вісь ординат дорівнює 15. Знайти координати початку вектора за умови, що він утворює з віссю абсцис гострий кут.

Відповідь. (–15; –12).

3. Виразити вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$$\vec{a}=(4;-2),\ \vec{b}=(3;5),\ \vec{c}=(1;-7)\ .$$

Відповідь. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

4. Побудувати вектори: $\vec{a}=(2;4)$; $\vec{b}=(3;2)$; $\overrightarrow{CD}$, якщо $C(0;\ 2)$, $D(4;\ 0)$.

5. У кожному з наведених далі випадків визначити, при якому значенні k вектор $\vec{a}+k\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$:

а) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 5)$, $\vec{c}=(-1;\ 3)$;

б) $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(1;\ 1)$, $\vec{c}=(0;\ 5)$.

Відповідь. $a)$ $k=-9/14$; $b)$ $k=-3$.

6. Обчислити координати вектора $\vec{p}$, колінеарного вектору $\vec{q}=(3;-4)$, якщо відомо, що вектор $\vec{p}$ утворює тупий кут з вектором $\vec{i}$ і $|\vec{p}|=10$.

Відповідь. (–6, 8).

7. Три точки $A(2;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(-4;\ 0)$ — вершини рівнобедреної трапеції *ABDC*. Обчислити координати точки *D*, якщо $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

Відповідь. *D*(–1,4; –5,2).

8. При яких значеннях x і y точки *A*(2; 0), *B*(0; 2), *C*(0; 7), *D*(*x*; *y*) є послідовними вершинами рівнобедреної трапеції *ABCD*?

Відповідь. $\{(2;\ 9);\ (7;\ 0)\}$.

9. На площині задано точки *A*(–6; –1), *B*(–4; –4), *C*(–1; –6), *D*(–3; –3). Довести, що чотирикутник *ABCD* — ромб і обчислити його площу.

Відповідь. 5 кв. од.

10. Довести, що точки *A*(3; –5), *B*(–2; –7), *C*(18; 1) лежать на одній прямій.

11. Дано чотири точки: *A*(0; 2), *B*(3; 1), *C*(–5; 3), *D*(2; 4). Знайти координати такої точки *P*, що $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$.

Відповідь. (0; 5/2).

12. Початки векторів $\vec{i}=(1;0), \vec{j}=(0;1), \vec{a}=(x;\ y)$ знаходяться в початку прямокутної декартової системи координат. Знайти множину кінців векторів $\vec{a}$, які задовольняють умови:

а) $|\vec{a}+\vec{j}\,|=|\vec{a}+2\vec{i}\,|$, б) $2\le|\vec{a}+\vec{j}\,|\le 4$;

в) $|\vec{a}-3\vec{i}\,|=6$, г) $|\vec{a}-\vec{i}-2\vec{j}\,|>1$;

д) $|\vec{a}\,|=x+1$, е) $|\vec{a}\,|=y+2$.

Відповідь. а) пряма $y = 2x + 3/2$; б) кільце, обмежене концентричними колами з центром у точці (0, –1) та з радіусами 2 і 4; в) коло з центром в точці (3; 0) і радіусом 6; г) точки, які знаходяться поза колом радіуса 1 і центром у точці (1; 2); д) парабола $y^2=2x+1$;

е) парабола $y=\frac{1}{4}x^2-1$.

13. Побудувати точки, задані полярними координатами: $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(2;\ \pi)$, $M_3\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4(4;\ 2)$, $M_5(1;-1)$.

14. Визначити полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам $M_1\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2;-\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4(1;\ 2)$ і $M_5(5;\ -1)$, заданим у полярній системі координат.

Відповідь. $\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$, $(1;-2)$, $(5;\ 1)$.

15. Встановити полярні координати точок, симетричних відносно полюса точкам $M_1\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(4;\frac{5}{6}\pi\right)$, $M_5(3;\ -2)$, які задано в полярній системі координат.

Відповідь. $\left(1;-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\left(5;-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(4;-\frac{1}{6}\pi\right)$, $(3;\pi-2)$.

16. У полярній системі координат задано дві вершини $M_1\left(3;-\frac{4}{9}\pi\right)$, $M_2\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$ паралелограма $M_1M_2M_3M_4$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити: а) дві інші вершини паралелограма; б) площу паралелограма.

Відповідь. а) $M_2\left(3;\ \frac{5}{9}\pi\right)$, $M_3\left(5;-\frac{11}{14}\pi\right)$; б) $20\cos\frac{10\pi}{63}$ кв. од.

17. У полярній системі координат задано точки $M_1\left(8;-\frac{2}{3}\pi\right)$ і $M_2\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Знайти полярні координати середини відрізка, що з'єднує точки M_1 і M_2.

Відповідь. $\left(1;-\frac{2}{3}\pi\right)$.

18. У полярній системі координат задано дві суміжні вершини квадрата $M_1\left(12;-\dfrac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\ \dfrac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

Відповідь. $9\left(17-4\sqrt{3}\right)$ кв. од.

19. У полярній системі координат задано дві протилежні вершини квадрата $M_1\left(6;\ -\dfrac{7}{12}\pi\right)$ і $M_3\left(4;\ \dfrac{1}{6}\pi\right)$. Визначити його площу.

Відповідь. $2\left(13+6\sqrt{3}\right)$ кв. од.

20. У полярній системі координат задано дві вершини правильного трикутника $M_1\left(4;-\dfrac{\pi}{12}\right)$ і $M_2\left(8;\ \dfrac{7\pi}{12}\right)$. Визначити його площу.

Відповідь. $28\sqrt{3}$ кв. од.

21. Обчислити площу трикутника, вершини якого $M_1\left(3;\ \dfrac{1}{8}\pi\right)$, $M_2\left(3;\ \dfrac{7}{24}\pi\right)$, $M_3\left(6;\ \dfrac{5}{8}\pi\right)$ задано в полярних координатах.

Відповідь. $3\left(4\sqrt{3}-1\right)$ кв. од.

22. У полярній системі координат задано точки $M_1\left(6;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10;-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(12;-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

Відповідь. $M_1(0;6)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $M_4\left(5;-5\sqrt{3}\right)$, $M_5\left(-4;4\sqrt{3}\right)$, $M_6\left(6\sqrt{3};-6\right)$.

23. У декартовій прямокутній системі координат задано точки $M_1(0;5)$, $M_2(-3;0)$, $M_3\left(\sqrt{3};\ 1\right)$, $M_4\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $M_5\left(1;\ -\sqrt{3}\right)$. Визначити полярні координати цих точок.

Відповідь. $M_1\left(5;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\ \pi)$, $M_3\left(2;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(2;\ -\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $M_5\left(2;\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

24. Встановити вид та записати рівняння ліній у полярній системі координат:

а) $x = a$; б) $y = b$; в) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$.

Відповідь. а) пряма паралельна осі Oy і відтинає на осі Ox a одиниць; $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$;

б) пряма паралельна осі Ox і відтинає від осі Oy b одиниць; $\rho = \dfrac{b}{\sin\varphi}$;

в) рівняння кола з центром у точці $(1;-2)$ і $R = 2$;

$$\rho = \cos\varphi - 2\sin\varphi \pm \sqrt{\sin\varphi(3\sin\varphi - 4\cos\varphi)}.$$

Розділ 4

ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

4.1. Прямокутна декартова система координат

Прямокутною декартовою системою координат у просторі називається упорядкована трійка взаємно перпендикулярних координатних осей Ox, Oy, Oz (рис. 4.1).

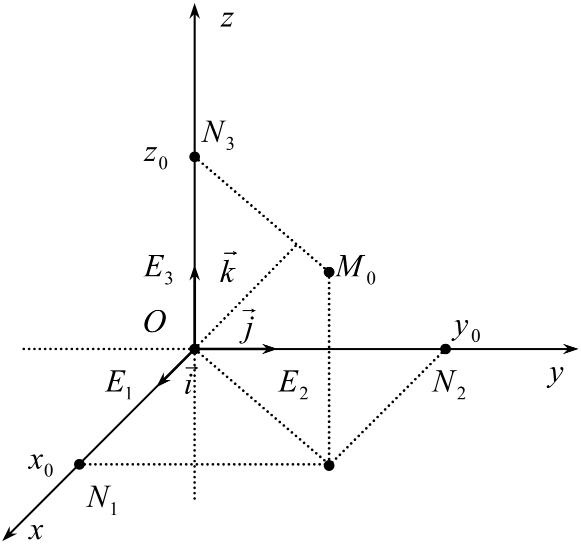


Рис. 4.1

Вісь Ox називається віссю абсцис, вісь Oy — віссю ординат, вісь Oz — віссю аплікат.

Площини, що проходять через кожні дві координатні осі, називаються координатними площинами; простір, у якому обрано систему координат, називається координатним простором.

Вектори $\overrightarrow{OE}_1, \overrightarrow{OE}_2, \overrightarrow{OE}_3$ називаються базисними векторами прямокутної декартової системи координат (або ортами) і позначаються відповідно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Координатні площини ділять усі точки простору, які їм не належать, на вісім областей — октантів.

Точки, що лежать на координатних площинах, мають одну з координат, яка дорівнює нулю. Точки, що лежать на осях координат, мають дві координати, які дорівнюють нулю. Початок координат має всі три координати, які дорівнюють нулю.

Нехай M_0 — деяка точка простору, а $Oxyz$ — просторова прямокутна декартова система координат із початком у точці O. Побудуємо площину, що містить точку M_0, паралельну координатній площині Oyz. Побудована площина перетне координатну вісь Ox у деякій точці N_1. Координату точки N_1. позначимо через x_0. Побудувавши площини, паралельні координатним площинам Oxz і Oxy, яким належить точка M_0, дістанемо точки N_2 і N_3 — точки перетину побудованих площин відповідно з осями Oy і Oz. Координати точок N_2 і N_3 позначимо через y_0 і z_0.

Координатами точки M_0 у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ називається упорядкована трійка чисел $(x_0;y_0;z_0)$; позначають $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Число x_0 називають абсцисою точки M_0, y_0 — ординатою, z_0 — аплікатою.

4.2. Координати вектора

Нехай $Oxyz$ — прямокутна декартова система координат із трійкою базисних векторів $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Довільний просторовий вектор $\vec{a}$ можна розкласти за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує, і притому тільки одна, упорядкована трійка чисел $(x_0;y_0;z_0)$ така, що

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}\,. \tag{4.1}$$

Числа x_0, y_0, z_0 називають координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ і позначають $\vec{a} = (x_0;y_0;z_0)$.

Якщо в прямокутній системі координат точки A і B мають координати $(x_1;y_1;z_1)$ і $(x_2;y_2;z_2)$, то координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ буде упорядкована трійка чисел $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\,. \tag{4.2}$$

Якщо всі координати вектора $\vec{a}$ відмінні від нуля, то цей вектор можна зобразити як діагональ прямокутного паралелепіпеда, числові значення довжин ребер якого дорівнюють $|x|$, $|y|$, $|z|$.

4.3. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Нехай у базисі $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Тоді справедливі такі правила:

1) координати суми двох (або більше) векторів дорівнюють сумі відповідних координат доданків:

$$\vec{a} + \vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2); \tag{4.3}$$

2) координати різниці двох векторів дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a} - \vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2); \tag{4.4}$$

3) координати добутку вектора на число p дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число:

$$p\vec{a}=(px_1;\ py_1;\ pz_1)\ . \tag{4.5}$$

Довжина радіуса-вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ знаходиться за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \tag{4.6}$$

Довжина вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;\ y_B-y_A; z_B-z_A\right)$ подається у вигляді:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2\left(z_B-z_A\right)^2}\ . \tag{4.7}$$

За допомогою цієї формули обчислюється також відстань між двома точками у просторі.

Косинуси кутів між вектором $\vec{a}=\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ і векторами базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ і обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{y_1}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{z_1}{|\vec{a}|}. \tag{4.8}$$

Напрямні косинуси будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ пов'язані рівністю:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{4.9}$$

4.4. Умова колінеарності двох векторів

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ має вигляд (2.1), звідки дістаємо рівності: $x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, $z_1=\lambda z_2$ або, після виключення λ, маємо:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},$$

тобто у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у просторі, заданих координатами в прямокутній декартовій системі координат *Oxyz*, є рівність нулю всіх таких визначників другого порядку:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\ .$$

4.5. Умова компланарності трьох векторів

Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих координатами в прямокутній декартовій системі координат *Oxyz*:

$$\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1),\ \vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2),\ \vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3),$$

є рівність нулю визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.10)$$

Приклад 1. Побудувати точки за їхніми координатами: $A(0;-2;\ 0)$; $B(2;\ 3;\ 0)$; $C(2;\ 3;\ 4)$.

Розв'язання. Побудову точок можна здійснити таким чином.

Оскільки $A(0;\ -2;\ 0)\in Oy$; $B(2;\ 3;\ 0)\in Oxy$; $C(2;\ 3;\ 4)\in$ I-му октанту, то точку B будуємо так:

1) через вісь Ox проводимо пряму паралельно Oy, яка відтинає на Ox 2 одиниці;

2) через вісь Oy проводимо пряму паралельно Ox, яка відтинає на Oy 3 одиниці;

3) точка перетину проведених прямих і є точка B (рис. 4.2).

Точку C будуємо так:

1) будуємо точку $C_1(2;\ 3;\ 0)=B$, яка є проекцією точки C на площину Oxy;

2) через точку C_1 проводимо пряму паралельно Oz і на ній відкладаємо 4 одиниці (вгору) — це і буде точка C_1 або: сполучаємо точку C_1 з точкою O; через Oz проводимо пряму, яка паралельна OC_1 і відтинає від осі Oz 4 одиниці; точка перетину проведеної прямої і прямої, яка проходить через точку C_1 паралельно Oz, і дасть точку C. Точки A, B і C зображено на рис. 4.2.

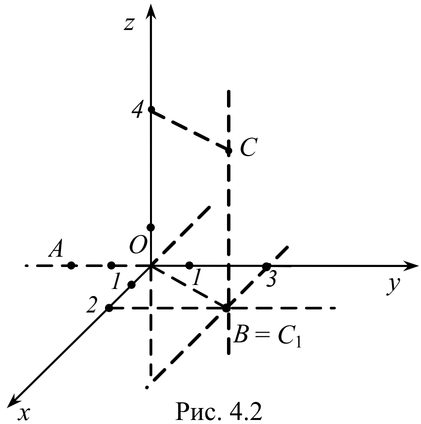


Рис. 4.2

Приклад 2.

Дано вектори $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Знайти координати вектора $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

Розв'язання. За умовою задачі $\vec{a}=(2;3;0)$, $\vec{b}=(0;-3;-2)$, $\vec{c}=(1;1;-1)$. Використовуючи правила (4.3) — (4.5), маємо

$$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}=\left(2-0+1;\ 3+\frac{3}{2}+1;\ 0+1-1\right)=\left(3;\ \frac{11}{2};\ 0\right).$$

Відповідь. $\left(3;\ \frac{11}{2};\ 0\right)$.

Приклад 3. Для прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо: $|\overrightarrow{AA_1}|=12$, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AD}|=4$. Знайти розклад орта $\vec{e}$, співнапрямленого з вектором $\overrightarrow{AC_1}$, за прямокутним базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ співнапрямлені відповідно з векторами $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

Розв'язання. Маємо $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=4\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}$, отже, $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$ і $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{4}{13}\vec{i}+\dfrac{3}{13}\vec{j}+\dfrac{12}{13}\vec{k}$.

Відповідь. $\dfrac{4}{13}\vec{i}+\dfrac{3}{13}\vec{j}+\dfrac{12}{13}\vec{k}$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{OA}$, де O — початок координат і $A(1;2;2)$.

а) 3; б) 2; в) 4; г) інша відповідь.

2. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1;1;-1)$ і $B(-1;-1;-1)$.

а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) 2; г) інша відповідь.

3. Від точки A відкладено вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Знайти координати точки B, якщо $A(-2;7;0)$, $\vec{a}=(-2;-5;0)$.

а) $(0;2;0)$; б) $(0;-2;0)$; в) $(-4;-12;0)$; г) інша відповідь.

4. Дано вектори $\vec{a}=(4;-2;-4)$ та $\vec{b}=(6;-3;2)$. Обчислити $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$.

а) $\sqrt{89}$; б) $\sqrt{105}$; в) $\sqrt{41}$; г) інша відповідь.

5. Дано вектори $\vec{a}=(-2;2;-3)$ та $\vec{b}=(3;1;2)$. Знайти $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

а) $\vec{c}=(5;7;0)$; б) $\vec{c}=(4;5;-1)$; в) $\vec{c}=(5;5;0)$; г) інша відповідь.

6. Дано точки $A(1;0;2), B(3;n;5), C(2;2;0), D(5;4;m)$. При яких значеннях m і n вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні?

а) $m=\dfrac{2}{3}; n=\dfrac{1}{3}$; б) $m=\dfrac{9}{2}; n=\dfrac{4}{3}$; в) $m=0,5; n=0,2$; г) інша відповідь.

7. Дано вектор $\vec{a}=(1;2;3)$. Знайти на площині xy колінеарний до нього вектор з початком у точці $A(-1;-1;-1)$ і кінцем у точці B.

а) $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};1\right)$; б) $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$; в) $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$;

г) інша відповідь.

8. Чи знаходяться точки $A(3;-7;8), B(-5;4;1), C(27;-40;29)$ на одній прямій?

а) Так; б) ні; в) визначити неможливо.

9. Дано точки $A(8;-2;5), B(2;3;7), C(-3;9;4), D(3;4;2)$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$?

а) Так; б) ні; в) визначити неможливо.

Група Б

1. Побудувати точки за їх декартовими координатами: $A(3;4;6)$, $B(-5;3;1)$, $C(1;-3;-2)$, $D(0;-2;4)$, $E(-2;-3;0)$, $F(-2;-3;-4)$.

2. Знайти координати проекцій точок $A(3;4;5)$, $B(-2;\ 3;\ 1)$, $C(1;-3;0)$ і $D(0;0;-2)$: 1) на площину Oxy; 2) на площину Oxz; 3) на площину Oyz; 4) на вісь Ox; 5) на вісь ординат; 6) на вісь аплікат.

Відповідь.

1) $A_1(3;\ 4;\ 0)$, $B_1(-2;3;0)$, $C_1(1;-3;0)$, $D_1(0;0;0)=O$;

2) $A_2(3;0;5)$, $B_2(-2;0;1)$, $C_2(1;0;0)$, $D_2(0;0;-2)=D$;

3) $A_3(0;4;5)$, $B_3(0;3;1)$, $C_3(0;-3;0)$, $D_3(0;0;-2)=D$;

4) $A_4(3;0;0)$, $B_4(-2;0;0)$, $C_4(1;0;0)$, $D_4(0;0;0)=O$;

5) $A_5(0;4;0)$, $B_5(0;3;0)$, $C_5(0;-3;0)$, $D_5(0;0;0)=O$;

6) $A_6(0;0;5)$, $B_6(0;0;1)$, $C_6(0;0;0)=O$, $D_6(0;0;-2)=D$.

3. Знайти координати точок , симетричних точкам $A(3;2;1)$, $B(2;-3;1)$, $C(-1;3;-2)$ і $D(a;b;c)$ відносно: 1) площини Oxy; 2) площини Oxz; 3) площини Oyz; 4) осі Ox; 5) осі Oy; 6) осі Oz; 7) початку координат.

Відповідь.

1) $(3;2;-1)$, $(2;-3;-1)$, $(-1;\ 3;2)$, $(a;\ b;\ -c)$;

2) $(3;-2;1)$, $(2;3;1)$, $(-1;-3;-2)$, $(a;-b;\ c)$;

3) $(-3;2;1)$, $(-2;\ -3;\ 1)$, $(-1;3;-2)$, $(-a;\ b;\ c)$;

4) $(3;-2;-1)$, $(2;3;-1)$, $(-1;-3;2)$, $(a;-b;-c)$;

5) $(-3;2;-1)$, $(-2;-3;-1)$, $(1;\ 3;2)$, $(-a;\ b;-c)$;

6) $(-3;\ -2;1)$, $(-2;\ 3;1)$, $(1;\ -3;-2)$, $(-a;\ -b;\ c)$;

7) $(-3;\ \ -2;\ -1)$, $(-2;\ 3;-1)$, $(1;\ -3;2)$, $(-a;-b;-c)$.

4. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.

5. Довжина вектора дорівнює 3. Обчислити його координати, якщо відомо, що усі вони рівні.

Відповідь. ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) або ($-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$).

6. Обчислити довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(3;0;-2)$.

Відповідь. $\sqrt{29}$.

7. Дано вектори $\vec{a}=(-3;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}=(5;\ -2;\ 7)$. Знайти координати вектора $-\vec{a}+3\vec{b}$.

Відповідь. (18; –5; 19).

8. Скориставшись умовою колінеарності двох векторів, з'ясувати, чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a}=\left(\frac{3}{7};\ \frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}\right)$ і $\vec{b}=\left(\frac{2}{7};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$;

б) $\vec{c}=\left(-\frac{3}{2};\ 6;\ \frac{4}{3}\right)$ і $\vec{d}=\left(\frac{9}{8};\ -\frac{9}{2};\ -1\right)$.

Відповідь. а) Так, $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}$; б) так, $\vec{c}=-\frac{4}{3}\vec{d}$.

9. При яких значеннях x і y вектори $\vec{a}=(x;\ -2;\ 5)$ і $\vec{b}=(1;\ y;\ -3)$ колінеарні?

Відповідь. $x=-5/3$, $y=6/5$.

10. Дано чотири точки: $A=(-2;\ -3;\ 8)$, $B(2;\ 1;\ 7)$, $C(1;\ 4;\ 5)$, $D(-7; -4; 7)$. Довести, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні.

11. При якому значенні k довжина вектора $\vec{a}=(-2;\ 2;\ 4k)$ вдвічі менша довжини вектора $\vec{b}=(3;\ 3k;\ 0)$?

Відповідь. $k\in\varnothing$.

12. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a}=\left(\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right)$.

Відповідь. $\cos\alpha = \dfrac{3}{13}$; $\cos\beta = \dfrac{4}{13}$; $\cos\gamma = \dfrac{12}{13}$

13. Вектор утворює з осями Ox і Oz кути $\alpha = 120°$ і $\gamma = 45°$. Який кут він утворює з віссю Oy ?

Відповідь. 60° або 120°.

14. Задано вектори: $\vec{a} = (1;\ 5;\ 3)$, $\vec{b} = (6;\ -4;\ -2)$, $\vec{c} = (0;\ -5;\ 7)$, $\vec{c} = (0;\ -5;\ 7)$ $\vec{d} = (-20;27;-35)$. Знайти такі числа α, β і γ, щоб $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Відповідь. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

15. Дано вектори: $\vec{a} = (1;\ 1;\ -1)$, $\vec{b} = (5;\ -3;\ -3)$, $\vec{c} = (3; -1;\ 2)$. Знайти вектори, колінеарні вектору $\vec{c}$, довжини яких дорівнюють довжині вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Відповідь. (6; –2; 4) і (–6; 2; –4).

16. Вектори $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 4\vec{k}$ і $\overrightarrow{BC} = (-1;\ 0; -2)$ є сторонами ΔABC. Знайти довжину медіани AM.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{85}}{2}$.

17. Вектор $\vec{x}$ задовольняє таким умовам:

1) $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$;

2) $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю Oz;

3) $|\vec{x}| = 50$.

Знайти координати вектора $\vec{x}$.

Відповідь. (–24; 32; 30).

18. Дано три вектори: $\vec{a} = (3; -2;\ 1)$, $\vec{b} = (-1;\ 1; -2)$, $\vec{c} = (2;\ 1;\ -3)$.

Знайти розклад вектора $\vec{d} = (11; -6; 5)$ за векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Відповідь. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

19. Перевірити, що чотири точки A(3; –1; 2), B(1; 2; –1), C(–1; 1; –3), D(3; –5; 3) є вершинами трапеції.

20. Трикутна піраміда задана координатами своїх вершин: A(3; 0; 1), B(–1; 4; 1), C(5; 2; 3), D(0; –5; 4). Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AE}$, якщо E — точка перетину медіан грані BCD.

Відповідь. $|\overrightarrow{AE}| = \dfrac{\sqrt{51}}{3}$.

Розділ 5

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким чином, за означенням:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\ , \tag{5.1}$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного з них та проекції іншого на напрям першого:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}\,. \tag{5.2}$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переставний або комутативний закон); (5.3)

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (5.4)

(розподільний або дистрибутивний закон);

3) $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$ (5.5)

(сполучний або асоціативний закон);

4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})\neq(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ (5.5*)

(у цьому випадку сполучний закон не має місця).

Скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ називається скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2=a^2. \tag{5.6}$$

З формули (5.1) випливає, що $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо φ — гострий кут; $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо φ — тупий кут; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ в тому і тільки в тому випадку, коли ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. Отже, необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку:

$$(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \tag{5.7}$$

Необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ полягає у виконанні співвідношення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}| \tag{5.8}$$

(при цьому знак «плюс» відповідає випадку $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а знак «мінус» — випадку $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано на площині. Тоді скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ можна подати через їх координати за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{5.9}$$

Кут між двома векторами $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \tag{5.10}$$

З формули (5.10) випливає умова перпендикулярності векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \tag{5.11}$$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано в просторі. Тоді скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ через їх координати виражається формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{5.12}$$

Кут між двома векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{5.13}$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ має вигляд:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \tag{5.14}$$

З означення декартової прямокутної системи координат випливає, що

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0\,,\ \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1\,. \tag{5.15}$$

Приклад 1. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Позначимо $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$. Тоді з умови (5.7) дістаємо

$$0=\vec{c}\cdot\vec{d}=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-4\vec{b})=5a^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8b^2=$$
$$=5+10\cos\varphi-4\cos\varphi-8=6\cos\varphi-3,$$

звідки $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ і $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Відповідь. $\pi/3$.

Приклад 2. Відомо, що вектори $3\vec{a}-5\vec{b}$ і $2\vec{a}+\vec{b}$ взаємно перпендикулярні і вектори $\vec{a}+4\vec{b}$ та $-\vec{a}+\vec{b}$ також взаємно перпендикулярні. Знайти кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. З умови задачі, згідно (5.7) дістаємо:

$$(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0\,,\ (\vec{a}+4\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0\,.$$

Звідси випливає, що

$$6a^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}-5b^2=0\,; \tag{1}$$

$$-a^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+4b^2=0\,, \tag{2}$$

тобто дістали два рівняння відносно трьох невідомих a^2, b^2 і $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Згідно (5.1), косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\,. \tag{3}$$

З рівнянь (1), (2) знаходимо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{19}{43}\cdot a^2\,,\ |\,b\,|=\pm\frac{5\sqrt{43}}{43}\,|\,a\,|\,. \tag{4}$$

Підставляючи значення (4) у рівність (3), дістаємо $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pm\dfrac{19\sqrt{43}}{215}$.

Відповідь. $\arccos\dfrac{19\sqrt{43}}{215}$ або $\arccos\left(-\dfrac{19\sqrt{43}}{215}\right)$.

Приклад 3. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Оскільки вектори, що співпадають з діагоналями паралелограма, відповідно дорівнюють $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, то маємо:

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}, \ \vec{a} - \vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}.$$

Тоді, використовуючи рівність (5.6), дістаємо

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3\vec{m} - \vec{n}) \cdot (3\vec{m} - \vec{n})} = \sqrt{9m^2 - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + n^2} = \sqrt{7},$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Відповідь. $\sqrt{7}; \sqrt{13}$.

Приклад 4. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні вектори. Обчислити $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b})$, якщо $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Згідно з (5.6) маємо

$3 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. Звідси $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}$. Отже,

$$(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6a^2 - 20b^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{21}{2}.$$

Відповідь. $-\dfrac{21}{2}$.

Приклад 5. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 120°$. Знайти довжини векторів $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, їх скалярний добуток і кут φ між ними.

Розв'язання. Використовуючи формулу (5.1), дістаємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2\cos 120^{\circ} = -3.$$

За формулою (5.6) $|\vec{p}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} = (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = 13$, тобто $|\vec{p}| = \sqrt{13}$; $|\vec{q}|^2 = \vec{q}\cdot\vec{q} = (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 52$, звідки $|\vec{q}| = 2\sqrt{13}$.

Далі за (5.1) знаходимо

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = (\vec{a}+2\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b}) = 1,\ \cos\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{1}{26},\ \varphi = \arccos\frac{1}{26}.$$

Відповідь. $|\vec{p}| = \sqrt{13}$, $|\vec{q}| = 2\sqrt{13}$, $\vec{p}\cdot\vec{q} = 1$; $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \arccos\dfrac{1}{26}$.

Приклад 6. Дано два вектори: $\vec{a} = (5;2)$, $\vec{b} = (7;-3)$. Знайти вектор $\vec{c}$, що задовольняє умови $\vec{a}\cdot\vec{c} = 38$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 30$.

Розв'язання. Нехай $\vec{c} = (x;y)$, тоді за допомогою формули (5.9) дістаємо систему:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 38, \\ 7x - 3y = 30. \end{cases}$$

Звідси $x = 6$, $y = 4$.

Відповідь. $\vec{c} = (6;\ 4)$.

Приклад 7. Обчислити координати одиничного вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{b} = (1;\ 1;\ 0)$ і $\vec{c} = (0;\ 1;\ 1)$.

Розв'язання. Нехай $\vec{a} = (x;y;z)$. Тоді з умови задачі, використовуючи формули (4.6), (5.12), дістаємо систему рівнянь:
$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо два розв'язки:

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ і } \vec{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Відповідь. $\vec{a}_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{a}_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Приклад 8. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;\ 1;\ 0)$ і $\vec{b}=(0;-2;\ 1)$.

Розв'язання. Знаходимо вектори-діагоналі:
$\vec{a}+\vec{b}=(2;-1;\ 1)$; $\vec{a}-\vec{b}=(2;\ 3;-1)$.
Далі за формулою (5.13) знайдемо косинус кута φ:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{4-3-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=0\text{, тому } \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 9. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мають рівні довжини і утворюють попарно рівні кути. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо

$$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k}\ .$$

Розв'язання. Нехай $\vec{c}=(x;y;z)$, тоді

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \tag{1}$$

За умовою задачі кути φ між векторами однакові, тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2},\quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{y+z}{2}=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Розв'язавши систему рівнянь (1)—(3), дістанемо:

$$\vec{c}=(1;\ 0;\ 1)\text{ або } \vec{c}=\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Відповідь. $\vec{c}=(1;\ 0;\ 1)$ або $\vec{c}=\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Приклад 10. Дано вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, які співпадають зі сторонами ΔABC. Знайти розклад за базисом $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора, який має початок у вершині *B* цього трикутника і співпадає з його висотою *BM*.

Розв'язання.

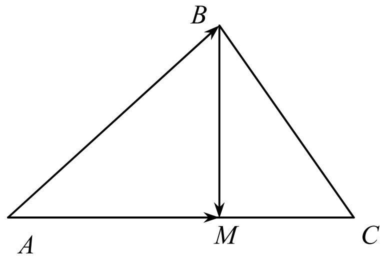


Рис. 5.1

Маємо (рис. 5.1)

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \vec{b} \qquad (1)$$

де $\overrightarrow{AM} = \gamma\vec{c}$ (γ — деяке дійсне число). Оскільки $\overrightarrow{BM} \perp \vec{c}$, то $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{c} = 0$.

Отже, $\gamma|\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, тобто $\gamma = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2}$. Підставляючи знайдене γ в рівняння (1), дістаємо: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} - \vec{b}$.

Відповідь. $\dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} - \vec{b}$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{a} = (2; 3; 6)$ і $\vec{b} = (3; 2; 1)$?

а) Так; б) ні; в) визначити неможливо.

2. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (6; 0; 12)$ і $\vec{b} = (-8; 13; m)$ взаємно перпендикулярні?

а) 4; б) -4; в) 5; г) інша відповідь.

3. У трикутнику ABC $A(2; 1; 3), B(1; 1; 4), C(0; 1; 3)$. Чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CM}$, де M — середина відрізка AB?

а) Так; б) ні; в) визначити неможливо.

4. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1;\ 4)$ і $\vec{b} = (5;\ 3;\ m)$. При якому значенні m $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$?

а) 0; б) 3; в) $\dfrac{7}{4}$; г) інша відповідь.

5. Дано вектори $\vec{a} = (3; -1; 2)$ і $\vec{b} = (-1; -5; 7)$. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

а) 16; б) 6; в) 22; г) інша відповідь.

6. Дано вектор $\vec{a} = (5; 6; 3)$. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

а) 70; б) -2; в) 10; г) інша відповідь.

7. Дано вектори $\vec{a}=(4;-3;7)$ і $\vec{c}=(-1;-3;2)$. З'ясувати, який кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

а) Прямий; б) гострий; в) тупий; г) визначити неможливо.

8. У трикутнику ABC $A(4;-2), B(5;-1), C(0;2)$. Визначити який ΔABC.

а) Гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) визначити неможливо.

9. Знайти вектор, довжина якого дорівнює $\sqrt{5}$. Він утворює з віссю Ox тупий кут і перпендикулярний до вектора $\vec{a}=(1;2)$.

а) $(2;-1)$; б) $(-2;1)$; в) $(2;1)$; г) інша відповідь.

10. Відомі чотири вершини трапеції $ABCD: A(1;1), B(6;6), C(5;4), D(2;1)$. Знайти косинус кута між його діагоналями.

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{31}{5\sqrt{41}}$; в) $\frac{10}{11}$; г) інша відповідь.

Група Б

1. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює a. Обчислити суму: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Відповідь. a^2.

2. Дано : $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=60°$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$, якщо

$$\vec{a}=(1;\ 2;\ 1) \text{ і } \vec{b}=(2;-1;\ 0).$$

Відповідь. $\frac{1}{11}$.

4. Дано вектори: $\vec{a}=(4;-2;-4)$ і $\vec{b}=(6;-3;\ 2)$. Обчислити $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

Відповідь. –200.

5. При якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 17\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 5$ і $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{2\pi}{3}$?

Відповідь. $\alpha = 40$.

6. При якому значенні α вектори $\vec{a} = (2;\ 3; -4)$ і $\vec{b} = (\alpha; -6;\ 8)$ паралельні?

Відповідь. $\alpha = -4$.

7. У декартовій прямокутній системі координат Oxy на кривій $y = x^2 - 2x + 3$, що лежить у першій чверті, задано точку $A(x_1; y_1)$ з абсцисою $x_1 = 1$ і точку $B(x_2; y_2)$ з ординатою $y_2 = 11$. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$.

Відповідь. 26.

8. Довести, що вектори $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ і $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — довільні вектори).

9. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = (2;\ 1; -1)$, якщо виконується умова $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

Відповідь. $\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

10. Дано вектори $\vec{a} = (3;\ -1; 5)$ і $\vec{b} = (1; 2;\ -3)$. Знайти вектор $\vec{c}$ за умови, що він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умовам $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = -4$.

Відповідь. (2; –3; 0).

11. У декартовій прямокутній системі координат Oxy на кривій $y = \frac{6}{x}$ задано дві точки A і B такі, що $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = -2$ і $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = 3$.

Знайти довжину вектора $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

Відповідь. 5.

12. При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a} = x\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 2x\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$ гострий, а кут між вектором $\vec{b}$ і віссю ординат тупий?

Відповідь. $x \in (-\infty\ ; 0)$.

13. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4}$.

14. З однієї точки проведено вектори $\vec{a} = (-12;16)$ і $\vec{b} = (12;5)$. Знайти координати вектора, початок якого знаходиться в тій самій точці і який ділить пополам кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь. $\vec{x} = \left(\dfrac{21}{65}; \dfrac{77}{65}\right)$.

Вказівка. $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

15. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Відповідь: –13.

16. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ та визначити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах.

Відповідь. 90°; $\sqrt{10}$.

17. Вектори $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 2)$ і $\overrightarrow{BC} = (-1; 0; -2)$ є суміжними сторонами паралелограма. Визначити величину кута між його діагоналями.

Відповідь. $\dfrac{3\pi}{4}$.

18. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;3;-1)$ і $\vec{b} = (1;-2;3)$ та задовольняє умову $\vec{c} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$. Знайти координати вектора $\vec{c}$.

Відповідь. $\vec{c} = (-3; 3; 3)$.

19. Обчислити координати вектора $\vec{c}$, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ і який утворює тупий кут з ортом $\vec{j}$, якщо $|\vec{c}| = \sqrt{7}$.

Відповідь. $\vec{c}=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

20. Знайти косинус кута між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, які задовольняють систему рівнянь

$\begin{cases} 2\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}, \\ \vec{p}+2\vec{q}=\vec{b}, \end{cases}$ якщо відомо, що в прямокутній системі координат вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають вигляд: $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -1)$.

Відповідь. 4/5.

21. Знайти вектор $\vec{a}=(x,y,z)$, що утворює рівні кути з векторами $\vec{b}=(y;\ -2z;3x)$ і $\vec{c}=(2z;\ 3x;-y)$ за умови, що він перпендикулярний до вектора $\vec{d}=(1;-1;2)$, $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, а кут між вектором $\vec{a}$ і віссю Oy тупий.

Відповідь. (2; –2; –2).

22. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$. Знайти вектор $\overrightarrow{BM}$, де точка M — основа висоти, опущеної з вершини B.

Відповідь. $\left(-\frac{20}{7};\ -\frac{30}{7};\ \frac{10}{7}\right)$.

23. У декартовій прямокутній системі координат Oxy до кривої $y=x^2+x+10$ проведено дотичну в точці $A(x_0;y_0)$, де $x_0=1$, і ця дотична перетинає вісь Ox у точці B. Знайти $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Відповідь. –148.

24. У декартовій прямокутній системі координат Oxy до кривої $y=2\sqrt{x}$ проведено дотичну в точці $A(x_0;y_0)$, де $x_0=1$, яка перетинає вісь Ox в точці B. Знайти $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}$.

Відповідь. –6.

25. Нехай A,B,C,D — будь-які точки простору. Довести, що $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$.

26. Дано вектори $\overrightarrow{AB}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$. Обчислити площу ΔABC.

Відповідь. $S=\dfrac{1}{2}|\,x_1y_2-x_2y_1\,|$.

27. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо відомо, що

$$|\,\vec{p}\,|=2\sqrt{2}\,,\ |\,\vec{q}\,|=3\ \text{ і }\ (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{4}\,.$$

Відповідь. 15; $\sqrt{593}$.

28. Дано два вектори: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$ — бісектриси кута AOB.

Відповідь. $\vec{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\dfrac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}+\dfrac{\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|}}{\sqrt{1+\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|}}}$.

29. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\,\vec{a}\,|=4$, $|\,\vec{b}\,|=2$, $|\,\vec{c}\,|=6$, визначити модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Відповідь. 10.

30. Дано три вектори: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умови

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=-5\,,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=-11\,,\ \vec{x}\cdot\vec{c}=20\,.$$

Відповідь. $\vec{x}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.

31. Дано три сили $\vec{F}_1=(3;-4;\ 2)$, $\vec{F}_2=(2;\ 3;-5)$ і $\vec{F}_3=(-3;-2;\ 4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, якщо її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A=(5;\ 3;-7)$ у положення $B=(4;-1;-4)$.

Відповідь. 13.

Розділ 6
ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, що задовольняє умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}); \qquad (6.1)$$

2) вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до площини, що визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так (рис. 6.1), що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки (тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву упорядковану трійку векторів).

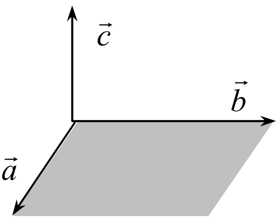


Рис. 6.1

Векторний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}$ позначається символом $\vec{a} \times \vec{b}$. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма S (рис. 6.1), побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Векторний добуток можна виразити формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = S\vec{e}, \qquad (6.2)$$

де $\vec{e}$ — орт напряму вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Основні властивості векторного добутку:

1. Векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює нулю, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні або один із них — нульовий.

2. При переставленні місцями векторів-співмножників векторний добуток змінює знак на протилежний:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

(для векторного добутку не діє переставний закон).

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (розподільний закон).

4. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$ (сполучний закон).

Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку.

Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, заданих своїми координатами, обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}= \tag{6.3}$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.$$

Векторний добуток має такий фізичний зміст: якщо $\vec{F}$ — сила, а $\vec{r}$ — радіус-вектор точки її прикладання, який має початок в точці O, то момент сили $\vec{F}$ відносно точки O є вектор, який дорівнює векторному добутку $\vec{r}$ та $\vec{F}$, тобто

$$\vec{m}_0(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}\ .$$

Приклад 1. Знайти векторні добутки:

1) $\vec{i}\times\vec{j}$; 2) $\vec{j}\times\vec{k}$; 3) $\vec{k}\times\vec{i}$; 4) $\vec{j}\times\vec{i}$; 5) $\vec{k}\times\vec{j}$; 6) $\vec{i}\times\vec{k}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти осей декартової прямокутної системи координат.

Розв'язання. Вектор $\vec{i}\times\vec{j}$, колінеарний $\vec{k}$, є одиничним, оскільки площа паралелограма (квадрата), побудованого на векторах $\vec{i}$ і $\vec{j}$, дорівнює одиниці. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють праву упорядковану трійку, тому $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. Аналогічно знаходимо:

2) $\vec{j}\times k=\vec{i}$; 3) $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$; 4) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$; 5) $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$;

6) $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Відповідь. 1) $\vec{k}$; 2) $\vec{i}$; 3) $\vec{j}$; 4) $-\vec{k}$; 5) $-\vec{i}$; 6) $-\vec{j}$.

Приклад 2. Дано $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=30°$. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$.

Розв'язання. За формулою (6.1) знаходимо модуль векторного добутку:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin 30^0=4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=10\ .$$

Застосовуючи формулу (6.2), дістаємо $\vec{a}\times\vec{b}=10\vec{e}$, де $\vec{e}$ — орт напряму $\vec{a}\times\vec{b}$.

Відповідь. $10\vec{e}$.

Приклад 3. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв'язання. За формулою (6.3) дістаємо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} .$$

Відповідь. $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Приклад 4. Знайти площу паралелограма S, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} .$$

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах. За формулою (6.3) знаходимо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} .$$

Оскільки $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, то $S = 3$ кв. од.

Відповідь. 3 кв. од.

Приклад 5. Дано силу $\vec{F} = (2;\ 3; -1)$ і точку її прикладання $A = (-1;\ -1; 3)$. Знайти момент сили відносно початку координат.

Розв'язання. Знаходимо векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r} = (-1;\ -1; 3)$ точки прикладання сили та вектора сили $\vec{F} = (2;\ 3; -1)$.

$$m_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -8\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}.$$

Відповідь. $-8\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Дано $\left|\vec{a}\right| = 10, \left|\vec{b}\right| = 2$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Обчислити $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

а) 10; б) 16; в) 5; г) інша відповідь.

2. Дано $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 26$ і $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 72.$ Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}.$

а) 25; б) ± 30; в) 6; г) інша відповідь.

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 1.$ Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|.$

а) 20; б) 60; в) 3; г) інша відповідь.

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 2\pi/3$. Знайти $\left(\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right)^2$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2.$

а) 15; б) 27; в) 5; г) інша відповідь.

5. Дано вектори $\vec{a} = \left(3; -1; -2\right)$ і $\vec{b} = \left(1; 2; -1\right)$. Знайти координати векторного добутку $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right).$

а) $\left(5; 32; 4\right)$; б) $\left(20; 4; 28\right)$; в) $\left(10; 1; 3\right)$; г) інша відповідь.

Група Б

1. Дано: $|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 6, \quad (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \varphi$. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = 90^{\circ}$; 3) $\varphi = 150^{\circ}$.

Відповідь. І) 0; 2) $24\vec{e}$; 3) $12\vec{e}$, де $\vec{e}$ — орт напряму $\vec{a}\times\vec{b}$.

2. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Відповідь. $5\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}$.

3. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Відповідь. $\sqrt{26}$ кв. од.

4. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(2;-3;4)$, $B(1;2;-1)$ і $C(3;-2;1)$.

Відповідь. $5\sqrt{2}$ кв. од.

5. Дано силу $\vec{F} = (-2;-3;2)$ і точку її прикладання $A(-1;3;-1)$. Знайти момент сили відносно початку координат.

Відповідь. $m_0(\vec{F}) = (3;4;9)$.

6. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1;0;1)$, $\vec{b} = (2;1;3)$.

Відповідь. (–1; 5; –1).

Розділ 7

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

У цьому розділі розглядаються деякі геометричні задачі, що розв'язуються методами векторної алгебри.

При розв'язанні деяких задач на площині використовуються такі властивості неколінеарних векторів:

1) якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то з рівності

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \tag{7.1}$$

випливають рівності $\alpha=\beta=0$;

2) якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то з рівностей

$$\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b} \tag{7.2}$$

випливають рівності $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$ (властивість однозначності розкладання вектора на площині за двома неколінеарними векторами).

Розв'язання деяких задач передбачає використання вектора $\vec{c}$, колінеарного бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Зручним представленням вектора $\vec{c}$ є наступна рівність :

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{7.3}$$

При розв'язанні деяких задач у просторі зручно використовувати такі властивості некомпланарних векторів:

1) якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то з рівності

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \tag{7.4}$$

випливають рівності $\alpha=\beta=\gamma=0$;

2) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то з рівностей

$$\vec{d}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\gamma_2\vec{c} \tag{7.5}$$

випливають рівності $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$ (властивість однозначності розкладання вектора у просторі за трьома некомпланарними векторами).

Приклад 1. Довести, що якщо точка A — точка перетину діагоналей чотирикутника $MNPQ$ і точки B, C — відповідно точки середин його протилежних сторін MN і PQ лежать на одній прямій, то $MNPQ$ — трапеція або паралелограм (рис. 7.1).

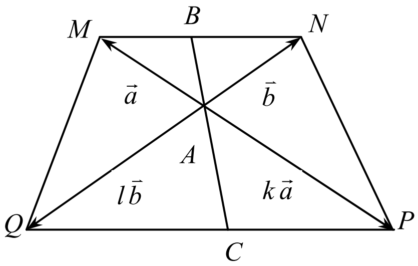


Рис. 7.1

Розв'язання. Позначимо $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{AP}=k\vec{a}$ і $\overrightarrow{AQ}=l\vec{b}$. Оскільки B — середина відрізка MN , то

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Аналогічно

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(k\vec{a}+l\vec{b}).$$

За умовою точки A, B, C лежать на одній прямій, тому існує таке число m , що $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$, тобто

$$\frac{m}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(k\vec{a}+l\vec{b})\text{, або }\frac{m-k}{2}\vec{a}+\frac{m-l}{2}\vec{b}=\vec{0}.$$

Звідси випливає, що $m=k=l$. Тоді $\overrightarrow{MN}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{PQ}=l\vec{b}-k\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$, тобто $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{MN}$. Отже, $PQ\parallel MN$, тобто $MNPQ$ — трапеція або паралелограм.

Приклад 2. Довести, що для довільного трикутника ABC виконується нерівність $\cos 2\mathrm{A}+\cos 2\mathrm{B}+\cos 2\mathrm{C}\geq -\frac{3}{2}$.

Розв'язання. Нехай точка O — центр описаного навколо трикутника кола радіуса R. Очевидно, що $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \geq 0$. Розкриваючи дужки, дістаємо

$$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}^2 \geq 0 .$$

Оскільки центральний кут, утворений радіусами OA і OB, вдвічі більший від вписаного кута C, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2\mathrm{C}$.

Аналогічно, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2\cos 2\mathrm{B}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2\mathrm{A}$.

Оскільки $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=R^2$, то остання нерівність набуває вигляд

$$2R^2\left(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\right)+3R^2 \geq 0$$

або $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$, що й потрібно було довести.

Приклад 3. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язання. На сторонах паралелограма (рис. 7.2) вибираємо напрями: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{d}_1$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}_2$. У такому випадку $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$ або $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}_2=\vec{b}-\vec{a}$.

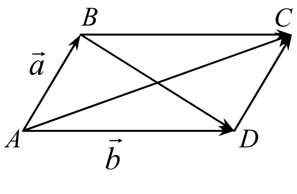


Рис. 7.2

Підносячи ці рівності до скалярного квадрата, маємо

$$d_1^2=a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} ,$$

$$d_2^2=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} .$$

Додавши останні рівності, дістанемо $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$, що й потрібно було довести.

Приклад 4. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника.

Розв'язання. Нехай ABC — довільний трикутник, AA_1 і BB_1 — дві його медіани, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Позначимо через P точку перетину медіан AA_1 і BB_1. Маємо

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AA_1} = \lambda\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{\lambda}{2}\vec{b} + \frac{\lambda}{2}\vec{c}\,.$$

З іншого боку,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \mu\overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \mu\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) =$$

$$= \vec{b} + \mu\frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} - \vec{b}) = (1-\mu)\vec{b} + \frac{\mu}{2}\vec{c}.$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{AP}$ розкладається за базисом $\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$ однозначно, то $\frac{\lambda}{2} = 1 - \mu$ і $\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}$. Звідси $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. Це означає, що точка P кожну з медіан AA_1 і BB_1 ділить у відношенні 2:1. Оскільки ми взяли дві довільні медіани, то звідси випливає, що третя медіана також проходить через точку P і ділиться нею в такому самому відношенні.

Приклад 5. Використовуючи тільки властивості скалярного добутку векторів, довести теорему Піфагора.

Розв'язання. Нехай ABC — прямокутний трикутник, BC і AC — його катети.

Позначимо $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$. Тоді

$$|\,\vec{b} - \vec{a}\,|^2 = (\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = |\,\vec{b}\,|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a} + |\,\vec{a}\,|^2 = |\,\vec{b}\,|^2 + |\,\vec{a}\,|^2,$$

оскільки $\vec{b}\cdot\vec{a} = 0$. Враховуючи, що $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c}$, дістаємо $\left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

Приклад 6. Обчислити гострий кут між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, проведеними з вершин гострих кутів.

Розв'язання. Нехай ABC — даний трикутник, AA_1 і BB_1 — його медіани. Позначимо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тоді:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\,, \quad \overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\,,$$

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B} = (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2}|\,\vec{a}\,|^2 + \frac{1}{2}|\,\vec{b}\,|^2 = t^2,$$

де $t = |\,\vec{a}\,| = |\,\vec{b}\,|$; $|\,\overrightarrow{AA_1}\,|^2 = (\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})^2 = |\,\vec{a}\,|^2 + \frac{1}{4}|\,\vec{b}\,|^2 = \frac{5}{4}t^2$.

Враховуючи те, що $|\overrightarrow{B_1B}| = |\overrightarrow{AA_1}|$, дістаємо:

$$\cos(\overrightarrow{AA_1}\,\hat{,}\,\overrightarrow{B_1B}) = \frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{B_1B}|} = \frac{t^2}{\frac{5}{4}t^2} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь. $\arccos\frac{4}{5}$.

Приклад 7. За умови, що точка M — центр ваги трикутника ABC (точка перетину його медіан) і точка O — довільна точка простору, довести рівність: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

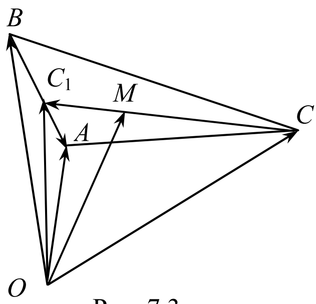


Рис. 7.3

Розв'язання. Нехай CC_1 — медіана трикутника ABC (рис. 7.3). За властивістю медіан трикутника $\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

Застосовуючи до векторів $\overrightarrow{MC_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$ формулу віднімання векторів, дістаємо:

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}).$$

Звідси $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$ і, враховуючи рівність $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, маємо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Приклад 8. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти кут між бічними сторонами цього трикутника.

Розв'язання.

Нехай у ΔABC $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ (рис. 7.4). За умовою $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{CC_1}$, тому $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1} = 0$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$ за векторами $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$.

Маємо $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p}$ і $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}$.

Із рівності $\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0$ випливає:

$$\left(\frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{4}\vec{q} \cdot \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \vec{p} \cdot \vec{q} = 0,$$

$$\frac{5}{4}\vec{p} \cdot \vec{q} - \frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} = 0.$$

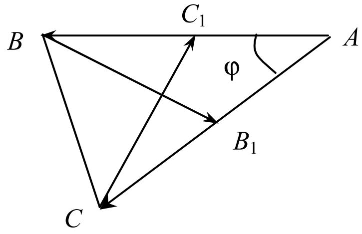


Рис. 7.4

Позначивши $|\vec{p}| = |\vec{q}| = m$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \varphi$ та скориставшись означенням скалярного добутку векторів, з останньої рівності дістанемо: $\frac{5}{4}m^2 \cos\varphi - m^2 = 0$.

Звідси $\cos\varphi = 0{,}8$; $\varphi = \arccos\ 0{,}8$.

Відповідь. $\varphi = \arccos\ 0{,}8$.

Приклад 9. Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній ΔABC, довжина сторони основи якого дорівнює $4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC перпендикулярне до площини основи і має довжину 2. Обчислити величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра BC, а інша — через точку C і середину ребра AB (рис. 7.5).

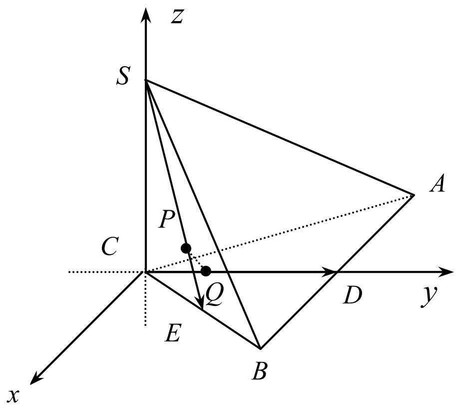


Рис. 7.5

Розв'язання. Введемо прямокутну систему координат, прийнявши за початок координат точку C, за вісь ординат — пряму CD (D — середина AB), за вісь аплікат — пряму CS, за вісь абсцис — пряму, що належить площині ΔABC і перпендикулярна до прямої CD, а за одиницю масштабу — відрізок, довжина якого дорівнює 1. У цій системі координат вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{SE}$ (E — середина сторони CB) мають наступні координати:

$$\overrightarrow{CD}=\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|;0\right)=\left(0;2\sqrt{6};0\right),\ \overrightarrow{SE}=\left(\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{4};\ \frac{\left|\overrightarrow{CD}\right|}{2};\ -\left|\overrightarrow{CS}\right|\right)=$$

$$=(\sqrt{2};\sqrt{6};-2).$$

Тому

$$\cos(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SE})^{\wedge}=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{SE}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{SE}|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

тобто шуканий кут дорівнює 45°.

Нехай PQ — спільний перпендикуляр до прямих SE і CD $(P\in SE, Q\in CD)$. Тоді $\overrightarrow{SP}=\alpha\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{CQ}=\beta\overrightarrow{CD}$. Зрозуміло, що $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}=-\alpha\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{CS}+\beta\overrightarrow{CD}$, або у координатному вигляді:

$$\overrightarrow{PQ}=(-\alpha\sqrt{2};-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot2\sqrt{6};-2\alpha-2).$$

Оскільки $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{SE}$, то $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ і $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{SE}=0$. Останні два векторні рівняння в координатній формі мають вигляд:

$$(-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot2\sqrt{6})\cdot2\sqrt{6}=0,$$

$$-\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot2\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}+(2\alpha-2)(-2)=0.$$

Звідси $\alpha=2\beta$ і $-3\alpha+3\beta+1=0$, тому $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$.

Таким чином, $\overrightarrow{PQ}=(-\frac{2\sqrt{2}}{3};0;-\frac{2}{3}), |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. Величина кута дорівнює $\frac{\pi}{4}$, а відстань — $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

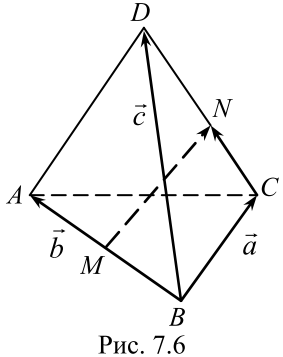


Рис. 7.6

Приклад 10. У правильному тетраедрі точки M і N — середини ребер AB і CD (рис. 7.6), $\left|AB\right|=a$. Знайти:

1) довжину відрізка MN;
2) кут між прямими MN і BC;
3) довести, що пряма MN перпендикулярна до ребер AB і CD.

Розв'язання.

Нехай $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{BD}=\vec{c}$.

Маємо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2.$$

Розкладемо вектор $\overrightarrow{MN}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Оскільки $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, а $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{a}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$.

1. $\left(\overrightarrow{MN}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = \frac{1}{2}a^2,$$

тому $\left|MN\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

2. Обчислимо $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \frac{a^2}{2}$ і, ураховуючи, що $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a$, дістаємо

$$\cos\left(MN\,\widehat{,}\,BC\right) = \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тобто $\left(MN\,\widehat{,}\,BC\right) = \frac{\pi}{4}$.

3. Послідовно знаходимо:

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2}\right) = 0,$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{c} + \vec{a}\right)\left(\vec{c} - \vec{a}\right) - \vec{b}\left(\vec{c} - \vec{a}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{c}^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = 0.$$

Звідси випливає, що $MN \perp AB$, $MN \perp CD$.

Відповідь. 1) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\widehat{MN, BC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 11. Знайти відстань між прямими, на яких знаходяться перехресні діагоналі двох суміжних граней куба, довжина сторони якого a.

Розв'язання.

Розглянемо, наприклад, діагоналі AC і A_1B граней куба (рис. 7.7).

Нехай $M \in AC$, $N \in BA_1$.

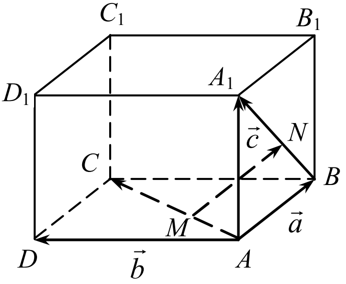


Рис. 7.7

Умова $MN \perp AC$ і $MN \perp BA_1$ рівносильна тому, що

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$ (1)

Розкладемо вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA_1}$ і $\overrightarrow{MN}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$:

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BA_1} = \vec{c} - \vec{a}$. Далі, оскільки $M \in AC$ і $N \in BA_1$, то $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{BN} = y \cdot \overrightarrow{BA_1}$.

Врахувавши останнє, знаходимо

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -x \cdot \overrightarrow{AC} + \vec{a} + y \cdot \overrightarrow{BA_1} =$$
$$= (1 - x - y) \cdot \vec{a} - x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}.$$

Підставляємо розклади векторів у рівняння (1) і перетворюємо рівняння:

$$\begin{cases} \left((1 - x - y) \cdot \vec{a} - x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0, \\ \left((1 - x - y) \cdot \vec{a} - x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - x - y) \cdot a^2 - x \cdot a^2 = 0, \\ ya^2 - (1 - x - y) \cdot a^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ -1 + x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}..$$

Це означає, що точки M і N знаходяться на відрізках AC і A_1B.

Маємо $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, тому $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(a^2 + a^2 + a^2\right)} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Відповідь. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Використовуючи тільки властивості скалярного добутку векторів, довести теорему косинусів.

2. Довести, що в трикутнику висоти перетинаються в одній точці.

3. Точка перетину середніх ліній чотирикутника співпадає з точкою перетину його діагоналей. Довести, що такий чотирикутник — паралелограм.

4. Довести, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень її бічних сторін належать одній прямій.

5. Дано трикутник ABC. Довести, що рівність $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ має місце в тому і тільки тому випадку, коли O — центр ваги трикутника ABC.

6. Точка M — центр ваги трикутника ABC. Довести, що $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CM}$.

7. У трикутнику ABC знайти $\overrightarrow{AA_1}$, де $\overrightarrow{AA_1}$ — вектор, напрямлений по бісектрисі внутрішнього кута A трикутника.

Відповідь. $\overrightarrow{AA_1} = \frac{c\vec{b} + b\vec{c}}{b + c}$, де $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = b, \left|\overrightarrow{AB}\right| = c.$

8. $ABCD$ — паралелограм, O — його центр, Q — довільна точка простору. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{QO}$ за векторами $\overrightarrow{QA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Відповідь. $\overrightarrow{QO} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

9. Довести, що для кутів довільного трикутника ABC виконується нерівність $\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} \le \frac{3}{2}$.

10. Знайти довжини сторін і величини кутів трикутника з вершинами

$$A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0)\ \text{ і }\ C(3; -2; 1).$$

Відповідь. $AC = AB = 5$; $DC = 5\sqrt{2}$; $\hat{A} = 90°$; $\hat{B} = \hat{C} = 45°$

11. Дано координати вершин трикутника: $A(1;\ 1;\ 1)$, $A(2;\ 4;\ 2)$, і $C(8;3;3)$. Встановити вид трикутника: прямокутний, тупокутний чи гострокутний.

Відповідь. Тупокутний.

12. У трикутнику відомо координати вершин: $A(1;1;2)$, $B(3;4;2)$ і $C(5;6;4)$. Знайти величину зовнішнього кута трикутника при вершині B.

Відповідь. $\arccos\dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

13. Довести, що точки $A(2;4;-4)$, $B(1;1;-3)$, $C(-2;\ 0;\ 5)$, $D(-1;3;4)$ є вершинами паралелограма і обчислити величину кута між його діагоналями.

Відповідь. $\arccos\dfrac{63\sqrt{6441}}{6441}$.

14. Трикутник задано координатами своїх вершин: $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$. Обчислити довжини медіан AA_1 і BB_1, відстань від початку координат до центра ваги (точка G) трикутника ABC.

Відповідь. $|\overrightarrow{AA_1}| = \dfrac{\sqrt{62}}{2}$; $|\overrightarrow{BB_1}| = \dfrac{\sqrt{53}}{2}$; $|\overrightarrow{OG}| = \dfrac{\sqrt{182}}{3}$.

15. Обчислити координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 1)$.

Відповідь. $(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3})$ або $(2-\sqrt{3};2-\sqrt{3})$.

16. Обчислити координати вершин C і D квадрата $ABCD$, якщо $A(2;1)$, $B(0;\ 4)$.

Відповідь. $C(3;\ 6)$, $D(5;\ 3)$ або $C(-3;\ 2)$, $D(-1;\ -1)$.

17. Дано вершини трикутника: $A(1;-1;-3)$, $B(2;1;-2)$ і $C(-5;2;-6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Відповідь. $\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

18. Дано точки $B(1;\ -3)$, $D(0;\ 4)$, що є вершинами ромба $ABCD$. Обчислити координати вершин A і C, якщо $B\hat{A}D = 60^\circ$.

Відповідь. $A\left(\dfrac{1+7\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{1-7\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

19. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, що виходять з однієї вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

20. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений прямокутний ΔABC, довжина гіпотенузи AB якого дорівнює $4\sqrt{2}$. Бічне ребро піраміди SC перпендикулярне до площини основи і його довжина дорівнює 2. Знайти величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC, а інша — через точку C і середину ребра AB.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

21. Довжина ребра куба дорівнює a. Знайти відстань між діагоналлю куба та перехресним ребром.

Відповідь. $\sqrt{2}a/2$.

22. До вершини куба прикладено три сили, які дорівнюють за величиною 1, 2, 3 і напрямлені по діагоналях граней куба, що перетинаються в цій вершині. Знайти величину рівнодійної цих трьох сил.

Відповідь. 5.

23. У правильній трикутній піраміді $ABCS$ плоский кут при вершині — прямий. Точки D і E — середини ребер AC і SB відповідно. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{SD}$ і $\overrightarrow{EC}$.

Відповідь. $\arccos\sqrt{2/5}$.

24. За допомогою векторів доведіть, що середня лінія трикутника паралельна третій стороні і її довжина дорівнює половині довжини третьої сторони.

Розділ 8

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

8.1. Відстань між двома точками

Відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині визначається за формулою:

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\,. \qquad (8.1)$$

Відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ у просторі визначається за формулою:

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}\,. \qquad (8.2)$$

8.2. Поділ відрізка в даному відношенні

Координати точки C, що ділить на площині відрізок AB, обмежений точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, у відношенні $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|}$, визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (8.3)$$

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, дістаємо координати середини даного відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (8.4)$$

Координати точки C, яка ділить у просторі відрізок AB, обмежений точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, у відношенні $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|}$, визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (8.5)$$

Якщо точка C є серединою відрізка AB, то її координати визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (8.6)$$

8.3. Площа трикутника

Площа трикутника, заданого координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \qquad (8.7)$$

або

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (8.8)$$

Знайдене за допомогою формули (8.7) або (8.8) число необхідно взяти за абсолютною величиною.

Очевидно, що три точки лежать на одній прямій, якщо $S = 0$.

Приклад 1. Знайти координати точки C, що лежить на осі Ox і однаково віддалена від точок $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(2;\ 3;\ 4)$.

Розв'язання. Оскільки точка C лежить на осі Ox, то її друга і третя координати дорівнюють нулю, тобто координати точки C такі:

$$x = \alpha,\ y = 0,\ z = 0.$$

Згідно з формулою (8.2) маємо:

$$|AC| = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 14},$$

$$|BC| = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 29}.$$

Оскільки $|AC| = |BC|$, дістанемо

$$\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 14} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 29}. \qquad (8.9)$$

Обидві частини рівняння (8.9) визначені при всіх значеннях α і невід'ємні. Отже, це рівняння рівносильне рівнянню

$$\alpha^2 - 2\alpha + 14 = \alpha^2 - 4\alpha + 29,$$

яке має єдиний корінь $\alpha = \dfrac{15}{2}$.

Відповідь. $\left(\frac{15}{2};\quad 0;\quad 0\right).$

Приклад 2. Знайти координати точки, рівновіддаленої від осей координат і точки $A(-3,-6)$.

Розв'язання. Позначимо шукану точку через $B(x,y)$. Оскільки ця точка рівновіддалена від осей координат, то $|BB_x|=|BB_y|$, де B_x, B_y – проекції точки B відповідно на осі Ox і Oy, тобто ці проекції мають координати $B_x(x,0)$, $B_y(0,y)$. Обчислюємо $|BB_x|$ і $|BB_y|$, дістаємо $\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2}$, тобто $|y|=|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=-x. \end{array}\right.$

Розглянемо спочатку випадок $y=x$. Маємо

$$|BA|=|x| \Leftrightarrow \sqrt{(-3-x)^2+(-6-x)^2}=|x| \Leftrightarrow (3+x)^2+(6+x)^2=x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+18x+45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=-15. \end{array}\right.$$

Таким чином, точки $(-3,-3)$ і $(-15,-15)$ рівновіддалені від осей координат і точки A.

Розглянемо випадок $y=-x$. Маємо

$$\sqrt{(-3-x)^2+(-6+x)^2}=|x| \Leftrightarrow (3+x)^2+(x-6)^2=x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+45=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Відповідь. $(-3,-3)$ і $(-15;\ -15)$.

Приклад 3. Знайти найменшу з відстаней від точки M з координатами (0; –2) до точок (x; y), таких, що $y=\frac{16}{\sqrt{3}x^3}-2$, $x>0$.

Розв'язання. Згідно з формулою (8.1) квадрат відстані від точки $M(0;-2)$ до точки $A(x;\ y)$ обчислюється так

$$|MA|^2=(x-0)^2+(y+2)^2.$$

За умовою координати точки $A(x;\ y)$ пов'язані рівністю $y = \dfrac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2$. Тому $\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = x^2 + \left(\dfrac{16}{\sqrt{3}x^3}\right)^2 = x^2 + \dfrac{256}{3x^6}$.

Зрозуміло, що квадрат шуканої величини дорівнює найменшому значенню функції:

$$f(x) = x^2 + \frac{256}{3x^6}$$

на інтервалі $x \in (0;\infty)$. Функція $f(x)$ у кожній точці цього інтервалу має похідну:

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{256}{3x^6}\right)' = \frac{2\left(x^8 - 2^8\right)}{x^7}.$$

Звідси випливає, що на інтервалі $x \in (0;2)$ $f'(x) < 0$, а на інтервалі $x \in (2;\infty)$ $f'(x) > 0$. Тому функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(0;2)$ і зростає на інтервалі $(2;\infty)$; крім того, функція $f(x)$ неперервна в точці $x = 2$. Отже, найменше значення $f(x)$ на інтервалі $(0;\infty)$ дорівнює $f(2)$, тобто $5\frac{1}{3}$. Тому шукана відстань дорівнює $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Приклад 4. Відрізок, кінці якого точки $A(-11;\ 1)$ і $B(9;\ 11)$, поділено у відношенні 2:3:5 (від A до B). Знайти координати точок поділу.

Розв'язання. Позначимо шукані точки поділу через C і D.

За умовою $|AC|:|CD|:|DB| = 2:3:5$. Точка C ділить AB у відношенні $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{2}{3+5} = \dfrac{1}{4}$.

Використовуючи формулу (8.3), заходимо координати точки C:

$$x=\frac{-11+\frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}}=-7; \qquad y=\frac{1+\frac{1}{4}\cdot 11}{1+\frac{1}{4}}=3.$$

Точка D є серединою відрізка AB, і тому за формулою (8.4) визначаємо координати точки D:

$$x=\frac{-11+9}{2}=-1; \qquad y=\frac{1+11}{2}=6.$$

Відповідь. (–7; 3), (–1; 6).

Приклад 5. Дано вершини трикутника: $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$, $C(x_3;\, y_3)$. Знайти координати точки перетину медіан цього трикутника.

Розв'язання. Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з медіан у відношенні 2:1, рахуючи від відповідної вершини трикутника.

Знайдемо координати точки D — середини сторони BC:

$$x_D=\frac{x_2+x_3}{2}; \quad y_D=\frac{y_2+y_3}{2}.$$

Знаходимо координати точки M, в якій перетинаються медіани, для цього поділимо медіану AD у відношенні $\lambda = 2:1 = 2$ (від A до D):

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x_1+2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};$$

$$y_M=\frac{y_1+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y_1+2\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Таким чином, координати точки перетину медіан трикутника дорівнюють середньому арифметичному одноіменних координат його вершин.

Відповідь. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Приклад 6. Точки $A(2;\ 4)$, $B(-3;\ 7)$ і $C(-6;\ 6)$ — три вершини паралелограма, причому A і C — протилежні вершини. Знайти координати четвертої вершини D.

Розв'язання. Відомо, що діагоналі паралелограма в точці перетину діляться навпіл. Тому координати точки E (перетину діагоналей) знайдемо як координати середини відрізка AC. Позначивши їх через x_E і y_E, дістанемо:

$$x_E = \frac{2+(-6)}{2} = -2\,; \quad y_E = \frac{4+6}{2} = 5\ ; \quad E(-2;\ 5)\,.$$

Знаючи координати точки E — середини діагоналі BD і координати одного з її кінців $B(-3,\ 7)$, за формулами (8.4) визначаємо координати вершини D:

$$-2 = \frac{-3+x_D}{2}\,,\ x_D = -1\,,\ 5 = \frac{7+y_D}{2}\,,\quad y_D = 3\,.$$

Відповідь. (–1; 3).

Приклад 7. Вершинами трикутника є точки $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ і $C(2;\ -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини C.

Розв'язання. Використовуючи формулу (8.8) або (8.7), знаходимо площу трикутника за відомими координатами його вершин:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12{,}5\ \text{(кв. од).}$$

Позначимо основу висоти, опущеної з вершини C, точкою D. Тоді площу даного трикутника можна обчислити за такою формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left|CD\right| \cdot \left|AB\right|\,.$$

Тому $\left|CD\right| = \dfrac{2S}{\left|AB\right|} = \dfrac{25}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5\,.$

Відповідь. 5.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(5;-3)$, $B(-7;6)$, $C(0;4)$. Знайти координати середин відрізків AB і AC.

а) $\left(6;-\frac{9}{2}\right),\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$; б) $\left(-1;\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$; в) $(-1;2),\left(3;-\frac{1}{2}\right)$;

г) інша відповідь.

2. Один з кінців відрізка знаходиться в точці $(1;3)$, а його середина – в точці $(2;2)$. Знайти, в якій точці знаходиться другий кінець відрізка.

а) $(4;3)$; б) $(3;1)$; в) $(5;2)$; г) інша відповідь.

3. Відомі дві вершини правильного трикутника ABC: $A(-2;2)$, $B(-2;-4)$. Знайти координати третьої вершини C.

а) $C(2;1)$; б) $C\left(-2+3\sqrt{3};-1\right)$ або $C\left(-2-3\sqrt{3};-1\right)$;

в) $C\left(-1;2-3\sqrt{3}\right)$ або $C\left(-1;2+3\sqrt{3}\right)$; г) інша відповідь.

4. Знайти координати кінців A і B відрізка, який точками $P(2;\ 2)$ і $Q(1;5)$ поділений на три рівні частини.

а) $A(-3;1)$, $B(1;-8)$; б) $A(3;-1)$, $B(0;8)$;

в) $A(2;1)$, $B(-2;-2)$; г) інша відповідь.

5. Точки $M(2;-1), N(-1;4)$ і $P(-2;2)$ є серединами сторін трикутника. Знайти його вершини.

а) $(-1;3),(2;-2),(3;7)$; б) $(1;-3),(3;1),(-5;7)$;

в) $(2;-3),(-1;-1),(4;3)$; г) інша відповідь.

6. Знайти відстань між точками $A(-1;1;-1)$ і $B(-1;0;-2)$.

а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) $2\sqrt{2}$; г) інша відповідь.

7. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;2;2)$ і $B(-2;1;4)$.

а) $(-1;0;0)$; б) $(-2;0;0)$; в) $(2;0;0)$; г) інша відповідь.

8. На осі *Oy* знайти точку *A*, відстань від якої до точки $B(4;3;0)$ дорівнює 5.

а) $(0;-6;0)$; б) $(0;6;0)$ та $(0;0;0)$; в) $(0;6;0)$;

г) інша відповідь.

9. Яка з точок A є серединою відрізка BD, якщо $B(1;-1;-1)$, $D(1;-1;1)$?

а) $A(1;-1;0)$; б) $A(2;-2;0)$; в) $A(-1;1;1)$; г) інша відповідь.

10. Точка M ділить відрізок AB, обмежений точками $A(5;-1)$ і $B(2;4)$, у відношенні $|AM|:|MB| = 2:5$.

Знайти координати точки M.

а) $M(-2;3)$; б) $M\left(\frac{29}{7};\frac{3}{7}\right)$; в) $M(3;5)$; г) інша відповідь.

Група Б

1. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(3;\ -7)$, $B(-1;\ 4)$. Обчислити його площу.

Відповідь. 137 кв. од.

2. На осі абсцис знайти таку точку, відстань від якої до точки $N(2;\ -3)$ дорівнює 5.

Відповідь. $M_1(6;\ 0)$ і $M_2(-2;\ 0)$.

3. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-3;\ 5)$, $B(1;\ 7)$ і точка перетину його діагоналей $M(1;\ 1)$. Визначити дві інші вершини.

Відповідь. (5; –3), (1; –5).

4. Обчислити координати точки, яка належить координатній осі Oy і однаково віддалена від точок $A(2;\ -1;\ 1)$ і $B(0;\ 1;\ 3)$.

Відповідь. (0; 1; 0).

5. Трикутник задано координатами вершин: $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 5)$ і $C(4;\ 0;\ 3)$. Обчислити:

1) довжину медіани AA_1; 2) відстань від початку координат до точки перетину медіан трикутника ABC.

Відповідь. 1) $|AA_1| = \sqrt{15{,}5}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{182}$.

6. Дано точки $A(-1;\ 2;\ -2)$, $B(3;\ 1;\ 2)$. Знайти відстань від початку координат до середини відрізка AB.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Обчислити довжину діагоналі BD паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати точок:

$$A(1;\,-3;\,0),\quad B(-2;\,4;\,1)\quad \text{і}\quad C(-3;\,1;\,1).$$

Відповідь. $\sqrt{105}$.

8. Знайти найменшу з відстаней від точки $M(2;\ 0)$ до точок графіка функції $y(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27(x-2)}}$.

Відповідь. $\dfrac{1}{3}$.

9. Обчислити периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(4;\,0)$, $B(7;\,4)$ і $C(-4;\,6)$.

Відповідь. $15+5\sqrt{5}$.

10. Кінцями відрізка є точки $A(-8;\,5)$ і $B(10;\,4)$. Знайти точки C і D, які ділять цей відрізок на три рівні частини.

Відповідь. $C(-2;\,-2)$, $D(4;\,1)$.

11. Довести, що три точки $A(1;\,8)$, $B(-2;\,-7)$, $C(-4;\,-17)$ лежать на одній прямій.

12. Найти дві точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, якщо відомо, що точка $C(-5;\,4)$ ділить AB у відношенні 3:4, а точка $D(6;\,-5)$ — у відношенні 2:3.

Відповідь. $A(160;\,-131)$, $B(-225;\,184)$.

13. Дано дві протилежні вершини квадрата $P(3;\ 5)$ і $Q(1;\ -3)$. Обчислити його площу.

Відповідь. 34 кв. од.

14. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини $P(3;\,-4)$ і $Q(1;\,2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

Відповідь. $4\sqrt{2}$.

15. Довести, що трикутник з вершинами $A_1(1;\ 1)$, $A_2(\ 2;\ 3)$ і $A_3\ (5;\,-1)$ — прямокутний.

16. Вершинами трикутника є точки: $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ і $C(3;\ 3)$. Обчислити його внутрішні кути.

Відповідь. $B\hat{A}C = 45^{\circ}$, $A\hat{B}C = 45^{\circ}$, $A\hat{C}B = 90^{\circ}$.

17. Дано дві точки $M(2;\ 2)$ і $N(5;\ –2)$. На осі абсцис знайти таку точку P, щоб кут MPN був прямим.

Відповідь. $P_1(1;\ 0)$ і $P_2\ (6;\ 0)$.

18. Знайти координати центра ваги трикутника ABC, якщо: $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 6)$, $C(–2;\ 5)$.

Відповідь. $\left(\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$.

19. Обчислити координати вершини C правильного трикутника ABC, якщо $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 1)$.

Відповідь. $C(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3})$ або $C(2-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3})$.

20. Дано точки $B(1;\ –3)$, $D(0;\ 4)$, які є вершинами ромба $ABCD$. Обчислити координати вершин A і C, якщо $B\hat{A}D = 60^\circ$.

Відповідь. $A\left(\frac{1+7\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{1-7\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

21. Точки $A(–2;\ –1)$, $B(–1;\ 3)$, $C(2;\ –1)$ — вершини паралелограма $ABCD$. Обчислити його площу.

Відповідь. 16 кв. од.

22. Відрізок задано точками $A(–9;\ –3)$ і $B(1;\ 2)$. До якої точки C потрібно продовжити відрізок AB, щоб $|AB|:|BC| = 5 : 3$?

Відповідь. $C(7;\ 5)$.

23. Відрізок, кінцями якого є точки $A(–5;\ –2)$ і $B(4;\ 2,5)$, поділено у відношенні 3:4:2 (від A до B). Знайти координати точок поділу.

Відповідь. (–2; –0,5), (2; 1,5).

24. Знайти площу трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2;\ –3)$, $B(1;\ 1)$, $C(–6;\ 5)$.

Відповідь. 12 кв. од.

Розділ 9
ПРЯМА ЛІНІЯ

9.1. Пряма лінія на площині

У декартовій прямокутній системі координат кожна пряма визначається рівнянням першого степеня і, навпаки, кожне рівняння першого степеня визначає пряму.

Загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax + By + C = 0. \tag{9.1}$$

Окремі випадки загального рівняння прямої:

а) $A = 0$, пряма паралельна осі Ox;

б) $B = 0$, пряма паралельна осі Oy;

в) $C = 0$, пряма проходить через початок координат;

г) $A = C = 0$, то $y = 0$, пряма співпадає з віссю Ox;

д) $B = C = 0$, то $x = 0$, пряма співпадає з віссю Oy.

Якщо дві прямі задано рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \tag{9.2}$$

то можливі три випадки їх взаємного розташування:

а) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ — прямі мають одну спільну точку (перетинаються);

б) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ — прямі паралельні;

в) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ — прямі співпадають, тобто обидва рівняння визначають одну й ту саму пряму.

Координати точки перетину двох прямих можна дістати розв'язавши систему рівнянь, які їх описують. Якщо дві прямі задано рівняннями (9.2), то координати (x_0; y_0) точки перетину цих прямих визначаються за формулами, що називаються формулами Крамера:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{9.3}$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A;B)$, що являє собою нормальний вектор прямої, має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{9.4}$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}=(m;n)$, що являє собою напрямний вектор прямої, має наступний вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{9.5}$$

Рівняння (9.5) називається канонічним рівнянням прямої.

Швидкість, з якою точка рухається по прямій, визначається формулою

$$V=|\vec{a}|=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Якщо пряма відтинає на координатних осях *Ox* і *Oy* відповідно відрізки a і b (які не дорівнюють нулю), то її можна подати рівнянням:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{9.6}$$

яке називається рівнянням прямої у «відрізках».

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом κ:

$$y=\kappa x+b, \tag{9.7}$$

де $\kappa=\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$; κ — кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який пряма утворює з дотатним напрямом осі *Ox*, причому цей кут відраховується від осі *Ox* до прямої проти годинникової стрілки; b — величина відрізка, що відтинається прямою на осі *Oy*, рахуючи від початку координат.

Якщо пряма задана загальним рівнянням (9.1), то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою:

$$\kappa = -\frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ з відомим кутовим коефіцієнтом κ:

$$y - y_0 = \kappa(x - x_0), \tag{9.8}$$

де $\kappa = \mathrm{tg}\alpha$.

Зауважимо, що пряма, перпендикулярна до осі Ox, не є рівнянням виду (9.8). Її рівняння має вигляд:

$$x = a, \ (a = \mathrm{const}).$$

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{9.9}$$

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої, заданої загальним рівнянням (9.1), знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9.10}$$

Кутом між прямими називається найменший із двох суміжних кутів, утворених цими прямими. Кут φ між прямими визначається за такими формулами:

1) якщо рівняння прямих дано в загальному вигляді (9.2), то

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \tag{9.11}$$

2) якщо відомо кутові коефіцієнти прямих, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1\kappa_2}\right|, \quad 1 + \kappa_1\kappa_2 \neq 0. \tag{9.12}$$

Кут φ між двома прямими, заданими канонічними рівняннями $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$ і $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$, обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \tag{9.13}$$

Ознакою паралельності двох прямих є такі співвідношення:

1) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ — для прямих, заданих загальними рівняннями; (9.14)

2) $\kappa_1 = \kappa_2$, тобто кутові коефіцієнти рівні — для прямих з кутовими коефіцієнтами; (9.15)

3) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ — для випадку канонічного задання прямих. (9.16)

Аналогічно, ознакою перпендикулярності двох прямих (залежно від того, в якому вигляді задано прямі) є такі співвідношення:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0; \tag{9.17}$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\kappa_2}, \tag{9.18 }$$

тобто кутові коефіцієнти взаємно перпендикулярних прямих обернені за абсолютним значенням і протилежні за знаком;

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0\,. \tag{9.19 }$$

9.2. Пряма лінія у просторі

Пряма у просторі визначається як лінія перетину двох площин і задається аналітично системою двох лінійних рівнянь.

Загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{9.20}$$

Площини передбачаються непаралельними, тобто співвідношення $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ не виконуються.

Кожний ненульовий вектор, що лежить на заданій прямій або паралельний їй, називається напрямним вектором цієї прямої.

Якщо відома одна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку проходить пряма, і напрямний вектор $\vec{a} = (m; n; l)$, то пряма визначається рівняннями вигляду:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}\,. \tag{9.21}$$

Рівняння (9.21) називаються канонічними рівняннями прямої.

Швидкість, з якою точка рухається по прямій, визначається формулою

$$V = |\vec{a}| = \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}\ .$$

Канонічні рівняння прямої (9.21) дістаємо з (9.20) за допомогою формул:

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\ n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\ l = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\ ; \qquad (9.22)$$

числа x_0, y_0, z_0 підбираються так, щоб вони задовольняли рівняння (9.20). Параметричне рівняння прямої лінії у просторі має вигляд:

$$x = x_0 + mt\ ,\ y = y_0 + nt\ ,\ z = z_0 + lt\ , \qquad (9.23)$$

де t — параметр.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, записуються так :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\ . \qquad (9.24\ )$$

Якщо дві прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1}, \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}\ , \qquad (9.25)$$

то кут між цими прямими обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}\ . \qquad (9.26)$$

Ознакою паралельності двох прямих (9.25) є співвідношення:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}\ , \qquad (9.27)$$

а ознака перпендикулярності цих самих прямих має такий вигляд:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0\ . \qquad (9.28)$$

Приклад 1. Пряма ℓ проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$. Записати рівняння прямої ℓ , якщо: $M_0(-1;\ 2)$, $\vec{n} = (2; 2)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (9.4), маємо $2(x + 1) + 2(y - 2) = 0$. Розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, дістаємо рівняння $x + y - 1 = 0$.

Відповідь. $x + y - 1 = 0$.

Приклад 2. Загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0, \end{cases}$$

звести до канонічного вигляду (9.21).

Розв'язання. За формулами (9.22) визначаємо координати напрямного вектора:

$$m = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad n = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9; \quad l = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 .$$

Визначимо одну з точок, через яку проходить дана пряма. Нехай $z_0 = 0$ (оскільки $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$), тоді для визначення x_0 і y_0 дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_0 + 3y_0 + 5 = 0, \\ 2x_0 - y_0 - 4 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_0 = 1$ і $y_0 = -2$.

Рівняння прямої у канонічному вигляді з урахуванням того, що пряма проходить через точку (1; –2; 0), матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-0}{-7} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z-0}{7} .$$

Відповідь. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z-0}{7}$.

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; -1)$ і відтинає від одного з координатних кутів трикутник площею 6,25 кв. од.

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд $a(x - 3) + b(y + 1) = 0$, причому $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Визначенню підлягає число $\frac{a}{b}$.

Пряма $a(x - 3) + b(y + 1) = 0$ перетинає координатні осі в точках $\left(\frac{3a-b}{a};0\right)$ і $\left(0;\frac{3a-b}{b}\right)$. Тому площа трикутника, обмеженого цією прямою і координатними осями, дорівнює

$$\frac{1}{2}\left|\frac{3a-b}{a}\right| \cdot \left|\frac{3a-b}{b}\right| = \frac{(3a-b)^2}{2|a| \cdot |b|} .$$

Таким чином, для визначення відношення $\frac{a}{b}$ маємо рівняння

$$\frac{(3a-b)^2}{|ab|}=\frac{25}{2},$$

яке рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}18a^2-37ab+2b^2=0,\\ 18a^2+13ab+2b^2=0.\end{array}\right.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо чотири значення для $\frac{a}{b}$: 2; $\frac{1}{18}$; $-\frac{2}{9}$; $-\frac{1}{2}$. Цим значенням відповідають прямі: $2x + y - 5=$ $= 0$, $x + 18y + 15 = 0$, $2x - 9y - 15 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$.

Відповідь. $2x + y - 5 = 0$, $x + 18y + 15 = 0$, $2x - 9y - 15 = 0$,
$x - 2y - 5 = 0$.

Приклад 4. Довести, що рівняння $ax + by + c = 0$ є рівнянням прямої, перпендикулярної до вектора $\vec{n}=(a;b)$, за умови, що хоча б одне з чисел a і b не дорівнює нулю.

Доведення.

Якщо одне з чисел a і b не дорівнює нулю, то рівняння $ax + by + c = 0$ при будь-якому c має розв'язок відносно x, y. Дійсно, нехай, наприклад, $a\neq 0$. Візьмемо довільне число y_0. Тоді рівняння

$$ax + by_0 + c = 0$$

має відносно x розв'язок: $x_0=-\frac{by_0+c}{a}$. Отже, точка $(x_0;\ y_0)$ — розв'язок рівняння $ax + by + c = 0$. Знайшовши різницю між останнім рівнянням та правильною числовою рівністю $ax_0 + by_0 + c = 0$, дістанемо

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Це і є рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n}=(a;b)$.

Приклад 5. Якщо $\vec{n}_1\neq\vec{n}_2$, $\vec{n}_1=(a_1;b_1)$, $\vec{n}_2=(a_2;b_2)$ і $|\vec{n}_1|=|\vec{n}_2|$, то, додаючи і віднімаючи почленно рівняння прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, дістанемо рівняння бісектрис кутів, на які ці прямі розбивають площину. Довести це.

Доведення.

Оскільки $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2|$, то кожний з векторів $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ і $\vec{n}_1 - \vec{n}_2$ колінеарний одній із бісектрис і тому перпендикулярний до іншої. Пряма $(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2) = 0$ перпендикулярна до вектора $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ (див. приклад 4). Отже, вона паралельна одній із бісектрис. Крім того, ця пряма проходить через точку перетину даних прямих, оскільки її рівняння є наслідком системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2) = 0$ — бісектриса двох вертикальних кутів, утворених при перетині даних прямих. Аналогічно, $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$ — рівняння бісектриси іншої пари вертикальних кутів.

Приклад 6. Знайти точку, симетричну точці $M(8; -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(-1; -2)$.

Розв'язання. Нехай $M_1(a; b)$ — шукана точка. Тоді $\overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{AB}$, звідси $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Дістаємо перше рівняння відносно a і b: $2a - b = 25$.

Використовуючи формулу (9.9), записуємо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+4}{-2+4} \Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0 .$$

Оскільки середина відрізка MM_1 знаходиться на прямій, то координати середини $\left(\frac{a+8}{2}; \frac{b-9}{2}\right)$ задовольняють рівняння прямої. Дістаємо друге рівняння відносно a і b: $a + 2b = 0$.

Розв'язавши систему $\begin{cases} 2a - b = 25, \\ a + 2b = 0, \end{cases}$ знаходимо: $a = 10$, $b = -5$.

Відповідь. $M_1(10; -5)$.

Приклад 7. Знайти координати точки A, якщо кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через початок координат і через точку A, дорівнює $\frac{3}{4}$ і точка A віддалена від початку координат на 10 лінійних одиниць.

Розв'язання. Позначимо координати точки A через x_1 і y_1. Оскільки $к = \operatorname{tg}\alpha$, то $\frac{y_A}{x_A} = \frac{3}{4}$. Використовуючи формулу (9.1), знаходимо довжину відрізка OA (O — початок координат): $\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 10$. Розв'язавши систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{3}{4}, \\ \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 10, \end{cases}$$

дістаємо: $x_A = 8$, $y_A = 6$ або $x_A = -8$, $y_A = -6$.

Відповідь. (8; 6) і (–8; –6).

Приклад 8. Знаючи вершину $A(3; -4)$ трикутника ABC і рівняння двох його висот BM: $7x - 2y - 1 = 0$ та CN: $2x - 7y - 6 = 0$, скласти рівняння сторони BC.

Розв'язання. Оскільки прямі BM і AC взаємно перпендикулярні, то згідно з (9.18) знаходимо кутовий коефіцієнт прямої AC: $\kappa = -\dfrac{2}{7}$. Використовуючи формулу (9.8), записуємо рівняння AC: $y + 4 = -\dfrac{2}{7}(x - 3)$ або $2x + 7y + 22 = 0$. Координати точки $C(x_C; y_C) = AC \cap CN$ знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_C + 7y_C + 22 = 0, \\ 2x_C - 7y_C - 6 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_C = -4$, $y_C = -2$.

Аналогічно знаходимо координати точки $B(x_B; y_B) = AB \cap BM$.

Маємо $x_B = 1$, $y_B = 3$.

Отже, за формулою (9.9) рівняння сторони BC має вигляд:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-3}{-2-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Відповідь. $x - y + 2 = 0$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Знайти точку перетину двох прямих, заданих рівняннями $3x - y - 2 = 0$ і $2x + y - 8 = 0$.

а) $(1; 2)$; б) $(2; 4)$; в) $(3; 1)$; г) інша відповідь.

2. При яких значеннях a прямі $3x-ay+5=0$ і $2x+5y-7=0$ взаємно перпендикулярні?

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{6}{5}$; в) 3; г) інша відповідь.

3. Знайти кут між прямими $2x-y+5=0$ і $x+2y+6=0$.

а) 60°; б) 90°; в) 45°; г) інша відповідь.

4. Знайти координати точки A, симетричної точці $B(2;-1)$ відносно прямої $x-2y+5=0$.

а) $(7;-5)$; б) $(-1{,}6;\ 6{,}2)$; в) $(-3;\ 10)$; г) інша відповідь.

5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $x-3y-12=0$ і проходить через точку $A(-1;2)$.

а) $2x-y+1=0$; б) $x-3y+7=0$; в) $x+2y-3=0$; г) інша відповідь.

6. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого знаходиться на прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрата.

а) 10 кв. од.; б) 5 кв. од.; в) 16 кв. од.; г) інша відповідь.

7. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ і одна з його вершин $A(-2;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

а) 12 кв.од.; б) 6 кв.од.; в) 24 кв.од.; г) інша відповідь.

8. Дано вершини трикутника $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$; $C(2;1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

а) $5\sqrt{2}$; б) 4; в) 2; г) інша відповідь.

9. Сторони AB, BC і CA трикутника ABC задані відповідно рівняннями $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$. Обчислити відстань від центра ваги цього трикутника до сторони BC.

а) $10\sqrt{3}$; б) 3; в) 5; г) інша відповідь.

Група Б

1. Скласти рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $3x + 4y + 5 = 0$ і проходить через точку $(-1; 2)$.

Відповідь. $4x - 3y + 10 = 0$.

2. Скласти рівняння серединного перпендикуляра до AB, якщо відомо координати його кінців: $A(-2; 3)$ і $B(4; -7)$.

Відповідь. $3x - 5y - 13 = 0$.

3. Чи перетинає пряма $7x + 11y = 3$ відрізок AB, якщо:

а) $A(11; -7)$, $B(-6; 4)$; б) $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$.

Відповідь. а) ні; б) пряма проходить через точку A.

4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 1)$ під кутом $\pi/4$ до прямої $2x + 3y + 4 = 0$.

Відповідь. $x - 5y + 3 = 0$ або $5x + y - 11 = 0$.

5. Обчислити координати вершин трикутника, якщо відомо, що його сторони лежать на прямих $x - 7y + 9 = 0$, $3x + y + 5 = 0$ і $2x - 3y - 4 = 0$.

Відповідь. $(-2; 1)$, $(-1; -2)$, $(5; 2)$.

6. Обчислити довжину відрізка прямої $4x + 3y - 36 = 0$, який міститься між осями координат.

Відповідь. 15.

7. На прямій $x - 2y - 4 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(5; -1)$ і $B(2; 4)$.

Відповідь. $(2; -1)$.

8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-5, -2)$ і відтинає на осі Oy відрізок $b = -12$.

Відповідь. $y = -2x - 12$.

9. Знайти внутрішні кути трикутника, якщо його сторони задано рівняннями: $7x + 4y + 9 = 0$, $x - 8y + 27 = 0$ і $2x - y - 6 = 0$.

Відповідь. $\approx 67{,}4^\circ; \approx 56{,}3^\circ; \approx 56{,}3^\circ$.

10. Знайти відстань між двома паралельними прямими $4x + 3y - 8 = 0$ і $4x + 3y - 33 = 0$.

Відповідь. 5.

11. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 4 = 0$ і $3x - y - 9 = 0$ перпендикулярно до прямої $x + y - 7 = 0$.

Відповідь. $x - y - 5 = 0$.

12. До прямої, що проходить через точки $A(-4; 2)$ і $B(8; 4)$, проведено перпендикуляр через точку, яка ділить відрізок AB (від A до B) у відношенні 3:4. Скласти рівняння перпендикуляра.

Відповідь. $42x + 7y - 68 = 0$.

13. Скласти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(5;\ –4)$, $B(–1;\ 3)$, $C(–3;\ –2)$ паралельно протилежним сторонам.

Відповідь. $5x – 2y – 33 = 0$, $x + 4y – 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$.

14. Дано дві вершини $A(3;\ –1)$ і $B(5;\ 7)$ трикутника ABC і точку $N(4;\ –1)$ перетину його висот. Скласти рівняння сторін цього трикутника.

Відповідь. $4x – y – 13 = 0$, $x – 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$.

15. Визначити, при якому значенні a пряма
$(a + 2)x + (a^2 – 9)y + 3a^2 – 8a + 5 = 0$:

а) паралельна осі абсцис;

б) паралельна осі ординат;

в) проходить через початок координат.

У кожному випадку скласти рівняння прямої.

Відповідь. а) $a = –2$, $5y – 33 = 0$; б) $a_1 = –3$, $x – 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; в) $a_1 = 1$, $3x – 8y = 0$, $a_2 = \dfrac{5}{3}$, $33x – 56y = 0$.

16. Визначити, при яких значеннях a і b дві прямі $ax – 2y – 1 = 0$, $6x – 4y – b = 0$:

а) мають одну спільну точку; б) паралельні; в) співпадають.

Відповідь. а) $a \neq 3$; б) $a = 3$, $b \neq 2$; в) $a = 3$, $b = 2$.

17. Зайти гострий кут між прямими

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь. 60° .

18. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(8;\ 6)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 12 кв.од.

Відповідь. $3x – 2y – 12 = 0$, $3x – 8y + 24 = 0$.

19. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(1;\ 2)$, $B(2;\ –2)$, $C(6;\ 1)$: а) знайти кут φ між висотою CD і медіаною BM;

б) скласти рівняння бісектрис l_1 і l_2 внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A.

Відповідь. а) $\cos\varphi = \dfrac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}$; б) $l_1 : \dfrac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \dfrac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$;

$l_2 : (\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1) + (-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2) = 0$.

20. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках A (–1; – 1) і B(4; 5), а третя — лежить на прямій $y = 5(x - 3)$. Площа трикутника дорівнює 9,5 кв. од. Знайти координати вершини C.

Відповідь. $C_1(5; 10)$; $C_2(3; 0)$.

21. Дано три точки: A(2; 1), B(3; 1), C(–4; 0), що є вершинами рівнобедреної трапеції $ABCD$. Обчислити координати точки D, якщо $\overrightarrow{AB} = \kappa\overrightarrow{CD}$.

Відповідь. D(9; 0).

22. Дві сторони квадрата лежать на прямих $x - 2y + 2 = 0$ і $x - 2y - 5 = 0$. Обчислити площу квадрата.

Відповідь. $\dfrac{49}{5}$.

Примітка. Взяти на одній з прямих будь-яку точку і знайти відстань від неї до іншої прямої.

23. В яких точках дотичні до графіка функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 6x + 5$ паралельні прямій $6x + y + 7 = 0$?

Відповідь (1; 4) і (2; –3).

24. При якому значенні $x_0 \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ дотичні до графіка функції $y = \sin x + \sin 2x$, проведені в точках з абсцисами x_0 і $x_0 + \dfrac{\pi}{2}$, паралельні?

Відповідь. $x_0 = \arccos\left(-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Примітка. Шукані точки задовольняють рівняння

$$\cos x + 2\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(2x + \pi).$$

25. На параболі $y = \dfrac{1}{2}x^2$ знайти всі пари точок, в яких дотичні до неї взаємно перпендикулярні.

Відповідь. $\left(x_0; \dfrac{1}{2}x_0^2\right)$ і $\left(-\dfrac{1}{x_0}; \dfrac{1}{2x_0^2}\right)$, де x_0 — довільне відмінне від нуля число.

26. Скласти рівняння бісектрис кутів, на які розбивають площину прямі $8x + 6y - 15 = 0$ і $3x + 4y + 5 = 0$.

Відповідь. $14x + 14y - 5 = 0$ і $2x - 2y - 25 = 0$.

Примітка. Замінити спочатку в рівняннях прямих вектори $\vec{n}_1 = (8;\ 6)$ і $\vec{n}_2 = (3;\ 4)$ векторами однакової довжини. Цього можна досягти, ділячи, наприклад, перше рівняння на 2. Далі використати умову прикладу 5 (у теорії).

27. Знайти трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої $x - y + 2 = 0$, якщо: $A(0; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; 0)$.

Відповідь. Трикутник з вершинами $A_1(0; 2)$, $B_1(0; 4)$, $C_1(-2; 4)$.

28. На графіку функції $y = x - \ln(1 + x)$ знайти точку, в якій дотична до графіка паралельна прямій, що проходить через точки $A(2; 3)$ і $B(-1; 4)$.

Відповідь. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} - \ln\frac{3}{4}\right)$.

29. Як з'ясувати, чи будуть точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, що не лежать на прямій $ax + by + c = 0$, знаходитися по одну сторону від цієї прямої чи по різні її сторони?

Відповідь. Обчислити для точок $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ значення виразу $ax + by + c = 0$. Якщо це будуть числа одного знаку, то точки A і B знаходяться по одну сторону від прямої, а якщо різних знаків — по різні сторони.

30. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку (8; 5) і утворює з віссю Ox кут, у два рази більший від кута, утвореного з віссю Ox прямою $x — 4y + 4 = 0$.

Відповідь. $8x — 15y + 11 = 0$.

31. Дано рівняння двох сторін паралелограма $3x - 2y + 12 = 0$, $x - 3y + 11 = 0$ і точка перетину його діагоналей (2; 2). Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма і його діагоналей.

Відповідь. $x - 3y - 3 = 0$, $3x - 2y - 16 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$, $5x - 8y + 6 = 0$.

32. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

Відповідь. (2; 1), (4; 2), (–1; 7), (1; 8).

33. Визначити, при якому значенні D пряма $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0, \end{cases}$

перетинає: а) вісь Ox, б) вісь Oy, в) вісь Oz.

Відповідь. а) $D = -4$; б) $D = 9$; в) $D = 3$.

Розділ 10
РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

У декартових координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня і, навпаки, кожне рівняння першого степеня визначає площину.

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{10.1}$$

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярний до площини і називається нормальним вектором.

Окремі випадки загального рівняння площини:

а) $D = 0$, площина проходить через початок координат;

б) $A = 0$ (або $B = 0$, або $C = 0$), площина паралельна осі Ox (відповідно Oy або Oz);

в) $A = B = 0$ (або $A = C = 0$, або $B = C = 0$), площина паралельна площині Oxy (відповідно Oxz або Oyz).

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{10.2}$$

Якщо площина відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz відповідно відрізки a, b, c (відмінні від нуля), то її можна подати рівнянням:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{10.3}$$

яке називається рівнянням площини у «відрізках».

Рівняння площини в нормальному вигляді:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{10.4}$$

де α, β, γ — кути між координатними осями Ox, Oy, Oz і перпендикуляром, опущеним з початку координат на площину, а p — довжина цього перпендикуляра.

Для зведення загального рівняння площини (10.1) до вигляду (10.4) обидві його частини треба помножити на нормуючий множник

$$N = \pm\frac{1}{|\vec{n}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (10.5)$$

обравши перед коренем знак, протилежний знаку вільного члена в рівнянні (10.1).

Якщо дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (10.6)$$

паралельні, то їхні нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ колінеарні, отже, якщо координати нормальних векторів не дорівнюють нулю, дістаємо рівність (умова паралельності двох площин):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (10.7)$$

Якщо в рівняннях (10.6) коефіцієнти при відповідних невідомих дорівнюють нулю, а решта пропорційні, то рівності (10.7) теж виконуються, тобто площини паралельні.

Якщо дві площини (10.6) взаємно перпендикулярні, то перпендикулярні і їхні нормальні вектори, тому виконується рівність:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (10.8)$$

Дві площини (10.6) утворюють чотири попарно рівні двогранні кути. Один із них дорівнює куту між нормальними векторами. Позначивши будь-який з двогранних кутів через φ, дістанемо:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (10.9)$$

Обираючи верхній знак, дістанемо $\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$; обираючи нижній знак, дістанемо $\cos\left[180^\circ - (\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})\right]$.

Кутом між двома площинами називають найменший із двогранних кутів, утворених цими площинами, тобто

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (10.10)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини, заданої рівнянням (10.1) у прямокутній системі координат, визначається за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{10.11}$$

Рівняння площини, що проходить через три дані точки $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $C(x_3;\, y_3;\, z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \end{vmatrix}=0. \tag{10.12}$$

Гострий кут між прямою

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l} \tag{10.13}$$

і площиною (10.1) обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|\,Am+Bn+Cl\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+l^2}}. \tag{10.14}$$

Умова паралельності прямої (10.13) і площини (10.1) має вигляд:

$$Am + Bn + Cl = 0. \tag{10.15}$$

Умова перпендикулярності прямої (10.13) і площини (10.1) має вигляд:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l}. \tag{10.16}$$

Приклад 1. Знайти кут між площинами: $6x + 3y + 6z - 5 = 0$ і $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Розв'язання. Маємо нормальні вектори $\vec{n}_1=(2;\ 3;\ 6)$, $\vec{n}_2=(4;\ 4;\ 2)$. За формулою (10.10) знаходимо

$$\cos\varphi=\frac{|\,\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\,|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{2\cdot4+3\cdot4+6\cdot2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{16}{21}.$$

Отже, $\varphi=\arccos\frac{16}{21}\approx40^{\circ}22'$.

Відповідь. $\varphi=\arccos\frac{16}{21}\approx40^{\circ}22'$.

Приклад 2. Обчислити відстань від точки $A(1; 2; -7)$ до площини, заданої рівнянням $12x + 4y + 3z - 4 = 0$.

Розв'язання.
$I^{й}$ спосіб:
Використовуючи формулу (10.11), знаходимо

$$d = \frac{|12 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{5}{13}.$$

$II^{й}$ спосіб:
Нехай $|\overrightarrow{AB}|$ — відстань від точки A до даної площини. Вектор $\overrightarrow{AB}$ колінеарний вектору $\vec{n} = (12;\ 4;\ 3)$, і тому при деякому p маємо $\overrightarrow{AB} = p\vec{n}$.

Позначимо через $(x_1; y_1; z_1)$ координати точки B, тоді:

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - 1; y_1 - 2; z_1 + 7).$$

З рівності $\overrightarrow{AB} = p\vec{n}$ дістаємо:

$x_1 - 1 = 12p$, $y_1 - 2 = 4p$, $z_1 + 7 = 3p$.

За формулою відстані між двома точками (8.2) дістаємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(12p)^2 + (4p)^2 + (3p)^2} = 13|p|.$$

Оскільки координати точки $B(x_1; y_1; z_1)$ задовольняють дане рівняння площини, то $12(12p + 1) + 4(4p + 2) + 3(3p - 7) - 4 = 0$, звідси $p = \dfrac{5}{169}$ і $|AB| = 13|p| = \dfrac{5}{13}$.

Відповідь. 5/13.

Приклад 3. Дано рівняння площин $2x + 3y + 4z - 8 = 0$ і $4x + y + 3z - 6 = 0$, p — пряма, по якій перетинаються ці площини. Визначити:

а) координати точок перетину прямої p з площинами Oxy і Oyz;
б) величину кута між прямою p і площиною Oxz.

Розв'язання. а) підставляючи в систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 8 = 0, \\ 4x + y + 3z - 6 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$z = 0$, знаходимо абсцису і ординату точки A перетину прямої p з площиною Oxy, тобто $x = 1$, $y = 2$. Аналогічно знаходимо координати точки B (у системі (1) потрібно покласти $x = 0$): $B(0; 0; 2)$;

б) величину шуканого кута α можна знайти, використовуючи рівність

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\vec{n}|},$$

де $\overrightarrow{BA} = (1;\ 2;\ -2)$ і $\vec{n} = (0;\ 1;\ 0)$ — вектор, нормальний до площини Oxz (φ — кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\vec{n}$).

Дістаємо $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Отже, $\cos(90^0 - \alpha) = \frac{2}{3}$, тобто $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$.

Відповідь. а) $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 2)$; б) $\arcsin\frac{2}{3}$.

Приклад 4. Записати рівняння площини, що проходить через три дані точки: $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(0; 3; 0)$, $M_3(2; 1; 0)$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через три дані точки, можна записати, використовуючи формулу (10.12). Проте можна використати і такий спосіб. Підставляючи в загальне рівняння площини (10.1) по черзі координати точок $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(0; 3; 0)$, $M_3(2; 1; 0)$, дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A - B + 2C = -D, \\ 3B = -D, \\ 2A + B = -D, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо $A = -\frac{D}{3}$, $B = -\frac{D}{3}$, $C = -\frac{D}{2}$. При цих значеннях коефіцієнтів рівняння (10.1) набуває вигляду:

$$-D(2x + 2y + 3z - 6) = 0.$$

Скорочуючи на $-D$ ($D \neq 0$), дістаємо шукане рівняння:

$$2x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Відповідь. $2x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Приклад 5. Дано площину $2x + 2y - z + 4 = 0$ і пряму l, що проходить через точки $A(2; 1; 1)$ і $B(-3; 4; 0)$. Обчислити координати точки перетину прямої l з даною площиною.

Розв'язання. Обчислимо координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (-5;\ 3;\ -1)$. Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є точкою перетину даної площини і прямої l. Це означає, що:

— *по-перше*, координати точки M_0 задовольняють рівняння даної площини, тобто пов'язані рівністю:

$$2x_0 + 2y_0 - z_0 + 4 = 0; \quad (1)$$

— *по-друге*, вектор $\overrightarrow{AM}_0$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AM}_0 = \kappa \overrightarrow{AB}$, звідки випливають рівності:

$$x_0 - 2 = -5\kappa,\ y_0 - 1 = 3\kappa,\ z_0 - 1 = -\kappa. \qquad (2)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1), (2), знаходимо координати точки M_0: $x_0 = -13$, $y_0 = 10$, $z_0 = -2$.

Відповідь. (–13; 10; –2).

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -1; 3)$ паралельно векторам $\vec{a} = (3;0;-1)$ та $\vec{b} = (-3;2;2)$.

Розв'язання. Очевидно, що за нормальний вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ шуканої площини можна взяти векторний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}$:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{\kappa} =$$

$$= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{\kappa}.$$

Використовуючи формулу (10.2), дістаємо:

$$2(x-2) - 3(y+1) + 6(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z - 25 = 0.$$

Відповідь. $2x - 3y + 6z - 25 = 0$.

Приклад 7. Рівняння площини $2x + 3y - 4z + 24 = 0$ подати рівнянням площини у «відрізках».

Розв'язання. Перенесемо вільний член 24 у праву частину рівняння і обидві частини його поділимо на – 24.

Дістаємо: $\dfrac{x}{-12} + \dfrac{y}{-8} + \dfrac{z}{6} = 1$.

Відповідь. $\dfrac{x}{-12} + \dfrac{y}{-8} + \dfrac{z}{6} = 1$.

Приклад 8. Рівняння площини $2x + 9y - 6z + 33 = 0$ звести до нормального вигляду.

Розв'язання. Обидві частини даного рівняння помножимо на нормуючий множник $N = -\dfrac{1}{\sqrt{2^2 + 9^2 + 6^2}} = -\dfrac{1}{11}$.

Дістаємо: $-\dfrac{2}{11}x - \dfrac{9}{11}y + \dfrac{6}{11}z - 3 = 0$.

Відповідь. $-\dfrac{2}{11}x - \dfrac{9}{11}y + \dfrac{6}{11}z - 3 = 0$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Дано дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

а) $x+y-3z+2=0$; б) $x-y-3z+2=0$; в) $2x+y-z-1=0$;
г) інша відповідь.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;1;-1)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$.

а) $x+2y-3z-3=0$; б) $x-2y+3z+3=0$; в) $x+y-3z+1=0$;
г) інша відповідь.

3. Точка $P(2;-1;-1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

а) $2x+y+z-6=0$; б) $2x-2y-z-6=0$; в) $x-2y-z-6=0$;
г) інша відповідь.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=(3;-1;4)$.

а) $x+y-z=0$; б) $x-y-z=0$; в) $x-2y-z=0$; г) інша відповідь.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1;-1;-2)$ і $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно до площини $x-2y+3z-5=0$.

а) $2x+y-z-1=0$; б) $4x-y-2z-9=0$; в) $x-y+3z=0$; г) інша відповідь.

6. Дві грані куба знаходяться на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Обчислити об'єм цього куба.

а) 24 куб. од.; б) 8 куб. од.; в) 15 куб. од.; г) інша відповідь.

7. На осі $0y$ знайти точку, відстань від якої до площини $x+2y-2z-2=0$ дорівнює 4.

а) $(2;3;0)$; б) $(0;7;0)$ і $(0;-5;0)$; в) $(0;2;3)$ і $(2;0;1)$; г) інша відповідь.

8. На осі $0z$ знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1;-2;0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

а) $(2;5;0)$; б) $(0;0;-2)$ і $\left(0;0;-6\dfrac{4}{13}\right)$; в) $(0;0;-5)$ і $(0;0;2)$;

г) інша відповідь.

Група Б

1. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що точка $N(3; 5; 2)$ належить площині і є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

Відповідь. $3x + 5y - 2z - 38 = 0$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2; 3; -1)$ перпендикулярно до прямої, якій належать точки $B(1; 0; -1)$ і $C(-3; 1; -2)$.

Відповідь. $4x - y + z - 4 = 0$.

3. Обчислити відстань від початку координат до площини $2x - 2y + z - 6 = 0$.

Відповідь. 2.

4. Чи паралельні площини: $x + 2y + 3z + 5 = 0$ і $2x + 4y + 6z + 11 = 0$?

Відповідь. Так.

5. Чи є взаємно перпендикулярними площини: $2x - 5y + z + 4 = 0$ і $3x + 2y + 4z - 1 = 0$?

Відповідь. Так.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 3; -1)$ паралельно площині $3x + y - z + 5 = 0$.

Відповідь. $3x + y - z - 7 = 0$.

7. Знайти кут між площинами $x + 5y - 4z + 1 = 0$ і $x + y - z - 10 = 0$.

Відповідь. $\cos\varphi = \dfrac{5\sqrt{14}}{21}$, $\varphi \approx 27^{\circ}$.

8. Знайти кут між площиною, що проходить через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$ і $C(3; 2; 1)$, та площиною, що проходить через точки A, B і $D(3; 1; 2)$.

Відповідь. 60°.

9. Знайти косинуси кутів, утворених площиною $2x - 6y + 3z - 5 = 0$ з координатними площинами.

Відповідь. $\dfrac{3}{7}; \dfrac{6}{7}; \dfrac{2}{7}$.

10. Точки $A(1; -2; 0)$ і $B(3; 2; 6)$ симетричні відносно площини α. Скласти рівняння площини α.

Відповідь. $x + 2y + 3z - 11 = 0$.

11. Обчислити площу трикутника, що його відтинає площина $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ від координатного кута Oxy.

Відповідь. 240 кв. од.

12. Знайти координати точки перетину площини $2x - y + z - 3 = 0$ і прямої, що проходить через точки $A(-1;\ 0;\ 2)$ і $B(3;\ 1;\ 2)$.

Відповідь. $\left(\frac{5}{7};\frac{3}{7};2\right)$.

13. Пряма задана точками $A(1;\ -1;\ 1)$ і $B(-3;\ 2;\ 1)$. Знайти кут між прямою AB і площиною $5x - y + 8z = 0$.

Відповідь. $\arcsin\frac{23}{15\sqrt{10}} \approx 29^{\circ}$.

14. Знайти відстань від точки $A(-1;\ 3;\ 0)$ до площини $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

Відповідь. $\frac{5\sqrt{14}}{14}$.

15. Знайти відстань між площинами $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ і $9x + 6y + 12z - 5 = 0$.

Відповідь. $\frac{38\sqrt{29}}{87}$.

16. Знайти точки перетину:

а) прямої, яка є лінією перетину двох площин $3x - 4y = 0$, $y - 3z = 6$, і площини $2x - 5y - z - 2 = 0$;

б) прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ і площини $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Відповідь. а) $(0;\ 0;\ -2)$; б) $(2;\ 3;\ 1)$.

17. При якому значенні κ точки $A(1;\ 0;\ 3)$, $C(1;\ 2;\ 1)$, $B(-1;\ 3;\ 4)$, $D(\kappa;\ 2;\ 5)$ належать одній площині?

Відповідь. -1.

Вказівка. Записати рівняння площини, що проходить через три точки, а потім підставити координати точки D.

18. Записати рівняння площини, що проходить через вісь аплікат і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

Відповідь. $x + 3y = 0$, $3x - y = 0$.

19. Знайти проекцію точки $A(2;\ 11;\ -5)$ на площину $x + 4y - 2z + 7 = 0$.

Відповідь. $A_1(-1;\ -1;\ 1)$.

20. При якому значенні m площини $mx + y - 3z = 0$ і $2x - y + z - 2 = 0$ перпендикулярні?

Відповідь. 2.

21. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3; 4; -5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}_1 = (3;\ 1;\ -1)$ і $\vec{a}_2 = (1;\ -2;\ 1)$.

Відповідь. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

22. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (-2;1;3)$ і відтинає на осі Oz відрізок $c = -5$.

Відповідь. $2x - y - 3z - 15 = 0$.

23. При якому значенні m пряма $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

Відповідь. -3.

24. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-2; -3; 1)$, $M_2(1; 4; -2)$ перпендикулярно площині $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Відповідь. $2x - 3y - 5z = 0$.

25. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $x - 2y + 3z - 6 = 0$ і $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Відповідь. (0; 7; 0); (0; –1; 0).

Розділ 11
РІВНЯННЯ КОЛА І СФЕРИ

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола радіуса R з центром в початку прямокутної декартової системи координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2 . \qquad (11.1)$$

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (11.2)$$

визначає коло радіуса R з центром у точці $A(x_0; y_0)$.

Загальне рівняння другого порядку

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (11.3)$$

є рівнянням кола тоді і тільки тоді, коли $b = 0$ і $a = c$. У цьому випадку рівняння (11.3) можна подати у вигляді:

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0 ,$$

звідки

$$(x + m)^2 + (y + n)^2 = m^2 + n^2 - q . \qquad (11.4)$$

Вираз (11.4) буде рівнянням кола за умови $m^2 + n^2 - q \geq 0$.

Рівняння сфери радіуса R з центром у початку прямокутної декартової системи координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 . \qquad (11.5)$$

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \qquad (11.6)$$

визначає сферу радіуса R з центром у точці $A(x_0; y_0; z_0)$.

Приклад 1. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(2; 0)$, $B(5; 0)$ і яке дотикається осі Oy.

Розв'язання. Нехай невідомий центр кола має координати $(x_0; y_0)$. Тоді за умови дотику кола до осі Oy, абсциса центра x_0 дорівнює радіусу R. Оскільки точки $A(2; 0)$ і $B(5; 0)$ належать колу, то їх координати задовольняють рівняння кола. Використовуючи перераховані умови, дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} (2 - x_0)^2 + y_0^2 = R^2, \\ (5 - x_0)^2 + y_0^2 = R^2, \\ x_0 = R, \end{cases}$$

яка має два розв'язки: $x_0 = \dfrac{7}{2}$, $y_0 = \pm\sqrt{10}$.

Відповідь. $\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{10}\right)^2 = \dfrac{49}{4}$; $\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{10}\right)^2 = \dfrac{49}{4}$.

Приклад 2. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки: (0; 1), (2; 0), (3; –1).

Розв'язання. Оскільки коло проходить через зазначені точки, то їх координати повинні задовольняти рівняння кола. Підставляючи по черзі в рівняння (11.2) координати даних точок, дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_0{}^2 + (1 - y_0)^2 = R^2, \\ (2 - x_0)^2 + y_0^2 = R^2, \\ (3 - x_0)^2 + (-1 - y_0)^2 = R^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0{}^2 + (1 - y_0)^2 = R^2, \\ 4x_0 - 2y_0 = 3, \\ 6x_0 - 4y_0 = 9, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо $x_0 = -\dfrac{3}{2}$, $y_0 = -\dfrac{9}{2}$, $R = \sqrt{\dfrac{65}{2}}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

Відповідь. $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{65}{2}$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола, що проходить через точки B(5; 7) і C(–2; 4), якщо його центр лежить на прямій 4x + 3y – 18 = 0.

Розв'язання. Нехай $A(x_0; y_0)$ — центр шуканого кола, тоді $|AB| = |AC| = R$ (R — радіус цього кола). Тому матимемо:
$$\sqrt{(x_0-5)^2+(y_0-7)^2}=\sqrt{(x_0+2)^2+(y_0-4)^2} \Leftrightarrow 7x_0+3y_0-27=0.$$

Центр шуканого кола лежить на прямій $4x + 3y - 18 = 0$, тому його координати задовольняють це рівняння, тобто $4x_0 + 3y_0 - 18 = 0$. Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_0+3y_0-27=0, \\ 4x_0+3y_0-18=0, \\ \sqrt{(x_0-5)^2+(y_0-7)^2}=R. \end{cases}$$

Звідки $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $R=\sqrt{29}$. Тому шукане рівняння має вигляд: $(x-3)^2+(y-2)^2=29$.

Відповідь. $(x-3)^2+(y-2)^2=29$.

Приклад 4. Центр кола знаходиться у точці $A(-3; 1)$. Скласти рівняння кола, якщо воно дотикається до прямої $4x + 3y - 16 = 0$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної $\kappa_1=-\dfrac{4}{3}$, то кутовий коефіцієнт прямої AB (B — точка дотику), яка перпендикулярна до дотичної, згідно з формулою (9.18) дорівнює $\kappa_2=\dfrac{3}{4}$. Використовуючи формулу (9.8), записуємо рівняння прямої AB:

$$y-1=\frac{3}{4}(x+3) \Leftrightarrow 3x-4y+13=0.$$

Щоб визначити координати точки B, розв'язуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x+3y-16=0, \\ 3x-4y+13=0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 4$, тобто $B(1; 4)$.

Тепер знаходимо $R=|AB|=\sqrt{(1+3)^2+(4-1)^2}=5$. Отже, шукане рівняння має вигляд: $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

Відповідь. $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної до кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, яка проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, що знаходиться на цьому колі.

Розв'язання. Вектор $\vec{n} = (a - x_0; b - y_0)$ перпендикулярний до шуканої дотичної. Тому, згідно з формулою (9.4), її рівняння має вигляд:

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0\,.$$

Відповідь: $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$.

Приклад 6. Скласти рівняння сфери, що проходить через дану точку $A(1; -1; 4)$ і дотикається до координатних площин.

Розв'язання. Оскільки шукана сфера дотикається до координатних площин і центр сфери знаходиться в тій частині простору, для кожної точки якої $x > 0, y < 0, z > 0$ (саме в цій частині розташована точка $A(1; -1; 4)$), то координати центра будуть $(R; -R; R)$. З іншого боку, оскільки точка $A(1; -1; 4)$ належить сфері, то її координати задовольняють рівняння (11.6):

$$(1 - R)^2 + (-1 + R)^2 + (4 - R)^2 = R^2,$$

звідки випливає, що $R^2 - 6R + 9 = 0$, тобто $R = 3$.

Відповідь. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Група А

1. Знайти довжину хорди при перетині прямої $8x + y - 5 = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 35 = 0$.

а) 12; б) $10\sqrt{19}$; в) 23; г) інша відповідь.

2. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$.

а) $(2;1), R = 5$; б) $(3;-2), R = \sqrt{10}$; в) $(-3;2), R = 10$; г) інша відповідь.

3. Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $A(2;6)$ і має центр у точці $C(-1;2)$.

а) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$; б) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$;

в) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$; г) інша відповідь.

4. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(3;1)$ і $B(-1;3)$, а його центр знаходиться на прямій $3x-y-2=0$.

а) $(x-3)^2+(y+1)^2=9$; б) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$;

в) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$; г) інша відповідь.

5. Записати рівняння кіл радіуса $\sqrt{5}$, які дотикаються прямої $x-2y-1=0$ в точці $M(3;1)$.

а) $(x+1)^2+(y-3)^2=5$ і $(x-2)^2+(y-1)^2=5$;

б) $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ і $(x-2)^2+(y-3)^2=5$;

в) $(x+3)^2+(y-2)^2=5$ і $(x-1)^2+(y-2)^2=5$; г) інша відповідь.

6. Скласти рівняння діаметра кола $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного до прямої $5x-2y-13=0$.

а) $2x+5y-10=0$; б) $2x-5y+19=0$; в) $5x-2y+4=0$; г) інша відповідь.

7. Визначити довжину хорди кола $(x-2)^2+(y-4)^2=10$, яка ділиться в точці $A(1;2)$ навпіл.

а) 16; б) $2\sqrt{5}$; в) $4\sqrt{2}$; г) інша відповідь.

8. Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $A(1;-1)$ і точки перетину двох кіл: $x^2+y^2+2x-2y-23=0$, x^2+y^2-6x+ $+12y-35=0$.

а) $x^2-y^2-6x+y+17=0$; б) $x^2+y^2+6x-9y-17=0$;

в) $2x^2-3y^2+x-y+1=0$; г) інша відповідь.

9. Скласти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=5$ в точці $A(-1;2)$.

а) $x+2y-5=0$; б) $x-2y+5=0$; в) $2x+y-3=0$; г) інша відповідь.

10. Визначити гострий кут, утворений при перетині прямої $3x-y-1=0$ і кола $(x-2)^2+y^2=5$ (кутом між прямою і колом називається кут між прямою і дотичною до кола, проведеною в точці перетину прямої і кола).

а) 60°; б) 45°; в) 30°; г) інша відповідь.

Група Б

1. Вказати фігуру, що утворюється при перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ площиною:

а) $x + y + z = 1$; б) $3x - 4y - z = 6$; в) $3x + 4y = 5$?

Відповідь. а) коло; б) $\varnothing$; в) точка.

2. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(3;\ 1)$, $B(-2;\ 6)$, $C(-5;\ -3)$.

Відповідь. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

3. Скласти рівняння кола, що проходить через точку $A(2;\ 1)$ і дотикається до осей координат.

Відповідь. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

4. Скласти рівняння кола, вписаного в трикутник, сторони якого задано рівняннями $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$.

Відповідь. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

5. Знайти центр кола, описаного навколо трикутника з вершинами $A(0;\ a)$, $B(b;\ 0)$, $C(0;\ 0)$.

Відповідь. $\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

6. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + ax + by = 0$.

Відповідь. $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

7. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі ординат у точці $A(0;\ 2)$ і проходить через точку $B(-9;\ 5)$.

Відповідь. $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$.

8. Визначити радіус кола, по якому координатна площина Oxz перетинає сферу $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$. В якій точці знаходиться центр цього кола?

Відповідь. $R = 4$; $(1;\ 0;\ 3)$.

9. Скласти рівняння сфери, що має центр у точці $O(a;b;c)$ і проходить через початок координат.

Відповідь. $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

10. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 200$ і точку $S(3;\ 4;\ 5)$. Знайти координати точок перетину сфери з прямою SO (O — початок координат).

Відповідь. (–6; –8; –10), (6; 8; 10).

11. Знайти відстань від точки $M(9; 1)$ до кола $(x-3)^2+(y+7)^2=4$.

Відповідь. 8.

Вказівка: Спочатку знайти відстань від точки *M* до центра кола.

12. Знайти відстань від точки $A(3p;\ -2p;\ 6p)$ до сфери $x^2+y^2+z^2=p^2$ ($p>0$).

Відповідь. $6p$.

13. Довести, що рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точці $A(m;p;q)$, має вигляд $mx+py+qz=R^2$.

14. Скласти рівняння площини, що дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=9$ у точці $A(2; -2; -1)$.

Відповідь. $2x-2y-z-9=0$.

15. Дано коло $x^2+y^2=4$. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі абсцис і перетинає коло в таких точках *M* і *N*, що $|MN|=1$.

Відповідь. $y=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ і $y=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

16. Знайти відстань між прямою $3x+4y-31=0$ і колом $(x-3)^2+(y+7)^2=9$.

Відповідь. 7.

Вказівка. Спочатку обчислити відстань від центра даного кола до прямої.

17. Обчислити відстань від площини $2x+2y-z+15=0$ до сфери $x^2+y^2+z^2-4=0$.

Відповідь. 3.

18. Дано сферу $x^2+y^2+z^2-25=0$ і пряму l, що проходить через точку $A(2; 1; 1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2;\ -4;\ -1)$. Обчислити координати точок перетину прямої l зі сферою.

Відповідь. (4; –3; 0) і $\left(\dfrac{4}{21};\dfrac{97}{21};\dfrac{40}{21}\right)$.

19. Дано коло $x^2+y^2+ax+by=0$. Довести, що пряма $ax+by=0$ дотикається до цього кола. Скласти рівняння кола, симетричного даному відносно прямої $ax+by=0$.

Відповідь. $x^2+y^2-ax-by=0$.

20. Знайти множину точок $\{(x;y): x^2+y^2-2x-2y+1=0\}$.

Відповідь. Коло $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

21. При якому m площина $x+y+mz-2=0$ дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=1$?

Відповідь. $m=\pm\sqrt{2}$.

22. При якому α площина $x+y+z=2\alpha$ дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=12$?

Відповідь. $\alpha=\pm 3$.

23. Скласти рівняння сфери з центром у початку координат, що дотикається до площини $x+y+z+3=0$.

Відповідь. $x^2+y^2+z^2=3$.

24. Для яких точок $(x;y)$ координатної площини виконуються рівності:

а) $x^2+4x+y^2+8y=0$;

б) $x^2-4|x|+y^2-2y+4=0$;

в) $x^2-4x+y^2-2|y|+4=0$;

г) $x^2-4|x|+y^2-2|y|+4=0$?

Відповідь. а) коло $(x+2)^2+(y+4)^2=20$; б) коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і його симетричний образ відносно осі ординат; в) коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і його симетричний образ відносно осі абсцис; г) коло $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і його симетричні образи відносно двох координатних осей і початку координат.

25. Скласти рівняння кола, що дотикається до кола $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і має центр у точці $O(-1;5)$.

Відповідь. $(x+1)^2+(y-5)^2=16$.

26. Знайти всі значення a, при яких множина $\{(x; y): x^2 + y^2 + 2x \le 1\} \cap \{(x; y): x - y + a \ge 0\}$ містить тільки одну точку. Знайти цю точку.

Відповідь. $a = -1$; $(0; -1)$.

27. Центр кола знаходиться в точці (–1; –4). Скласти рівняння кола, якщо воно дотикається прямої, що перетинає осі координат у точках $A\left(\frac{9}{4}; 0\right)$ і $B(0; 3)$.

Відповідь. $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 25$.

28. Дано коло $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$. Скласти рівняння його діаметра, перпендикулярного до хорди $x - 5y - 12 = 0$.

Відповідь. $5x + y - 21 = 0$.

29. Через центри кіл $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ проведено пряму до перетину з віссю Ox. Обчислити кут, який утворює ця пряма з віссю Ox.

Відповідь. $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$.

30. Скласти рівняння кола, що проходить через початок координат і точки перетину двох кіл:

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25,\ (x-2)^2 + (y+4)^2 = 9.$$

Відповідь. $13x^2 + 13y^2 + 3x + 71y = 0$.

31. Знайти величину кута, під яким перетинаються кола $x^2 + y^2 - 4x = 1$ і $x^2 + y^2 - 2y = 9$ (кутом між двома колами називається кут між їх дотичними в точці перетину кіл).

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

32. Дано коло $x^2 + y^2 = 169$. Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, точку $A(1; 0)$ і дотикається до даного кола.

Відповідь. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

33. Скласти рівняння сфери в кожному із наступних випадків:

1) сфера проходить через початок координат і має центр $C(4;-4;-2)$;

2) сфера проходить через точку $A(2;-1;-3)$ і має центр $C(3;-2;\ 1)$;

3) точки $A(2;-3;\ 5)$ і $B(4;\ 1;-3)$ є кінцями одного із діаметрів сфери;

4) центр сфери — початок координат, і площина $16x-15y-12z+75=0$ — дотична до неї;

5) $C(3;-5;-2)$ — центр сфери і $2x-y-3z+11=0$ — дотична площина;

6) сфера проходить через три точки $M_1(3;\ 1;-3)$, $M_2(-2;\ 4;\ 1)$ і $M_3(-5;\ 0;\ 0)$, а її центр лежить на площині $2x+y-z+3=0$.

Відповідь. 1) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$;

2) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$;

3) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$;

4) $x^2+y^2+z^2=9$;

5) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$;

6) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$.

34. Встановити, як розміщена точка $A(2;\ -1;\ 3)$ відносно кожної із наступних сфер — усередині, поза нею чи на її поверхні:

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$;

4) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$;

5) $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0$.

Відповідь. 1) поза сферою; 2) і 5) на поверхні сфери; 3) і 4) всередині сфери.

35. Обчислити найкоротшу відстань від точки A до даної сфери:

1) $A(-2;\ 6;-3)$, $x^2+y^2+z^2=4$;

2) $A(9;-4;-3)$, $x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+241=0$;

3) $A(1;-1;\ 3)$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

Відповідь. 1) 5; 2) 21; 3) 7.

36. Встановити, як розміщена площина відносно сфери — перетинає, дотикається чи проходить поза нею:

1) $z=3$, $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$;

2) $y=0$, $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+13=0$;

3) $x=5$, $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$.

Відповідь. 1) перетинає; 2) дотикається; 3) поза сферою.

37. Встановити, як розміщена пряма відносно сфери — перетинає, дотикається чи проходить поза сферою:

1) $x=-2t+2$, $y=3t-\dfrac{z}{2}$; $z=t-2$;

$x^2+y^2+z^2+x-4y-3z+\dfrac{1}{2}=0$;

2) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$; $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0$;

3) $2x-y+2z-12=0$; $2x-4y+z+6=0$;

$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0$.

Відповідь. 1) перетинає; 2) поза сферою; 3) дотикається.

Розділ 12

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Тут розглядаються деякі геометричні задачі, що розв'язуються за допомогою методу координат, тобто вводиться декартова система координат на площині або у просторі. Наведені далі задачі можуть бути розв'язані і методами елементарної геометрії, проте, як правило, ці розв'язування потребують використання нетривіальних, штучних прийомів.

Якщо об'єктом задачі є куб або прямокутний паралелепіпед, то найбільш зручною є система координат, початок якої знаходиться в одній з вершин нижньої основи цих тіл, а координатні осі проходять через ребра, що виходять з цієї вершини.

Деякі геометричні задачі можна розв'язати досить просто, використовуючи елементи аналітичної геометрії.

Приклад 1. У рівнобедреному трикутнику ABC ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 8$) точка E ділить бічну сторону AB у відношенні 3:1 (рахуючи від вершини B).

Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{CE}$ і $\overrightarrow{CA}$, якщо $|\overrightarrow{CA}| = 12$.

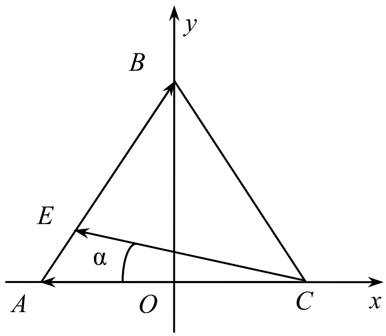


Рис. 12.1

Розв'язання: Введемо систему координат xOy (рис. 12.1). За властивістю висоти рівнобедреного трикутника ABC $|OA|=|OC|$.

Із трикутника OBC знаходимо:

$$|OB| = \sqrt{|BC|^2 - |OC|^2} = 2\sqrt{7}.$$

Оскільки $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$, отже, вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CE}$ мають координати: $\overrightarrow{CA} = (-12;\ 0)$; $\overrightarrow{AB} = \left(6;\ 2\sqrt{7}\right)$; $\overrightarrow{CE} = \left(-\dfrac{21}{2}; \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Підставляючи знайдені координати у формулу скалярного добутку векторів, дістаємо:

$$\cos\alpha = \frac{(-12)\cdot\left(-\frac{21}{2}\right)}{12\sqrt{(21/2)^2 + (\sqrt{7}/2)^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Відповідь. $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Приклад 2. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього правильного трикутника є стала величина.

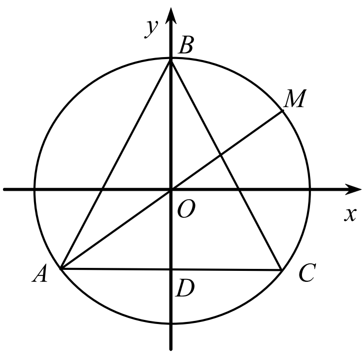


Рис. 12.2

Розв'язання. Через центр кола, описаного навколо правильного трикутника ABC, проведемо дві взаємно перпендикулярні осі Ox і Oy так, щоб вісь Ox була паралельна стороні AC (рис. 12.2).

Нехай $|AB| = |AC| = |BC| = a$, тоді

$$|OB| = R = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ |OD| = r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$|AD| = |DC| = \frac{a}{2}.$$

Отже, маємо такі координати вершин трикутника:

$$A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right),\ C\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right),\ B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right).$$

Візьмемо на колі довільну точку $M(x; y)$, тоді, враховуючи формулу відстані між двома точками, маємо :

$$|OM|^2 = x^2 + y^2 = R^2 = \frac{a^2}{3},\ |AM|^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2,$$

$$|BM|^2 = x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2,\ |CM|^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.$$

Тепер обчислимо суму квадратів відстаней:

$$|AM|^2+|BM|^2+|CM|^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+x^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+$$

$$+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=3\left(x^2+y^2\right)+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}=2a^2.$$

Відповідь. $2a^2$.

Приклад 3. Дано куб із ребром 1. На бічному ребрі AA_1 вибрано точку E так, що $|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{3}$; на ребрі BC взято точку F так, що $|\overrightarrow{BF}|=\frac{1}{4}$. Через центр куба і точки E та F проведено площину α. Знайти відстань від вершини B_1 до площини α.

Розв'язання. Введемо систему координат з початком O у вершині B, направивши осі координат Ox, Oy, Oz відповідно вздовж BA, BC, BB_1. Тоді $E\left(1;\ 0;\ \frac{1}{3}\right)$, $F\left(0;\ \frac{1}{4};\ 0\right)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $O_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. (Точка O_1 — центр куба). Знайдемо рівняння площини α, що проходить через три точки O_1, E і F. Для цього використаємо співвідношення:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (1)$$

Оскільки площина α не проходить через початок координат, то $D\neq 0$.

Поділивши обидві частини рівняння на D, дістанемо таке рівняння:

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0,$$

тобто

$$ax+by+cz+1=0. \qquad (2)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів a, b, c підставляємо в рівняння (2) координати точок E, F, O_1, що задовольняють це рівняння. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot \dfrac{1}{3}+1=0, \\ a\cdot 0+b\cdot \dfrac{1}{4}+c\cdot 0+1=0, \\ a\cdot \dfrac{1}{2}+b\cdot \dfrac{1}{2}+c\cdot \dfrac{1}{2}+1=0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $a=-\dfrac{5}{2}$, $b=-4$, $c=\dfrac{9}{2}$. Рівняння площини α має вигляд:

$$-\frac{5}{2}x-4y+\frac{9}{2}z+1=0\text{, тобто } 5x+8y-9z-2=0\,.$$

Відстань від точки $B_1(0;\ 0;\ 1)$ до площини α згідно з формулою (10.11) дорівнює:

$$d=\frac{|5\cdot 0+8\cdot 0-9\cdot 1-2|}{\sqrt{5^2+8^2+9^2}}=\frac{11\sqrt{170}}{170}.$$

Відповідь. $\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$.

Приклад 4. На гипотенузі *AB* прямокутного трикутника *ABC* взято точку *D*, що задовольняє умову $|BD|:|DA|=3:1$. Виразити довжину відрізка *CD* через довжини катетів $|CB|=a$ і $|CA|=b$.

Розв'язання: Введемо систему координат *xOy* з початком *O* у вершині *C*, направивши осі координат *Ox* і *Oy* відповідно вздовж катетів *CB* і *CA*. Тоді вершини трикутника *ABC* мають такі координати: *C*(0; 0), *B*(*a*; 0), *A*(0; *b*).

Знайдемо координати точки *D*. Використавши формулу (8.3), дістанемо: $x=\dfrac{a}{4}$; $y=\dfrac{3b}{4}$. Далі, згідно з формулою (8.1) дістаємо:

$$|CD|=\sqrt{a^2+9b^2}\,/\,4\,.$$

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{a^2+9b^2}}{4}$.

Приклад 5. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору точки на колі. Знайти цю суму.

Розв'язання. Нехай a — довжина сторони квадрата. Введемо систему координат (рис. 12.3).

Тоді рівняння вписаного кола має вигляд:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4},$$

тобто $x^2-ax+y^2-ay=-\dfrac{a^2}{4}$. (1)

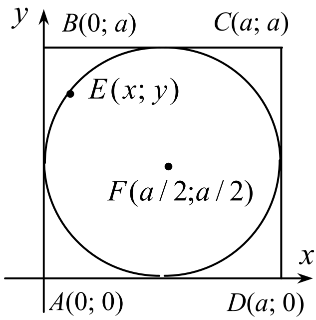


Рис. 12.3

Згідно з формулою (8.1) дістаємо:

$|CE|^2+|DE|^2+|AE|^2+|BE|^2=$

$=(a-x)^2+(a-y)^2+(a-x)^2+$

$+x^2+y^2+(a-y)^2=$

$=4a^2+4(x^2-ax+y^2-ay).$

Враховуючи рівність (1), знаходимо, що шукана сума дорівнює $3a^2$.

Відповідь: $3a^2$.

Приклад 6. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z=0$ і $2x-2y+z+6=0$. Обчислити об'єм куба.

Розв'язання. Довжина ребра куба дорівнює відстані між даними паралельними площинами. Виберемо на площині $2x-2y+z=0$ довільну точку, наприклад $x_0=0$, $y_0=1$, $z_0=2$. Тоді згідно з формулою (10.11) дістаємо

$$d=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 1+2+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=2.$$

Отже, об'єм куба дорівнює 8 куб.од.

Відповідь. 8 куб. од.

Приклад 7. У правильній чотирикутній призмі відношення довжин бічного ребра і сторони основи дорівнює 2. Знайти кут між діагоналлю BD_1 призми і площиною BC_1D (рис. 12.4).

Розв'язання. Введемо систему координат, як показано на рис. 12.4.

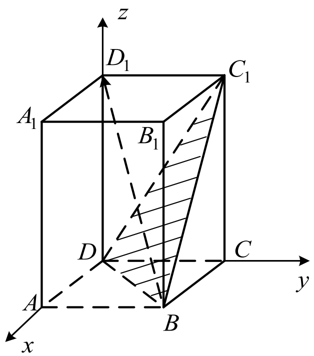


Рис. 12.4

Нехай $|AB| = |BC| = l$. Тоді $|AA_1| = 2l$. Координати точок B, C_1, D і D_1 будуть: $B(l;\ l;\ 0)$, $C_1(0;\ l;\ 2l)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $D_1(0;\ 0;\ 2l)$.

Площина BC_1D проходить через точку $D(0;\ 0;\ 0)$, тоді її рівняння має вигляд (10.2)

$$A_0x + B_0y + C_0z = 0,$$

де $\vec{n} = (A_0;\ B_0;\ C_0)$.

Підставляючи в останнє рівняння координати точок B і C_1, одержуємо систему

$$\begin{cases} A_0l + B_0l = 0; \\ B_0l + 2C_0l = 0, \end{cases}$$

звідси знаходимо, що $A_0 = 2C_0$, $B_0 = -2C_0$. Тому рівняння площини BC_1D має вигляд $2C_0x - 2C_0y + C_0z = 0$ або $2x - 2y + z = 0$.

Таким чином, $\vec{n} = (2;-2;\ 1)$ — вектор перпендикулярний до площини BC_1D. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BD_1}$:

$$\overrightarrow{BD_1} = (0 - l;\ 0 - l;\ 2l - 0) = (-l;\ -l;\ 2l).$$

Обчислюємо $\overrightarrow{BD_1} \cdot \vec{n} = -2l + 2l + 2l = 2l$,

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3,\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{l^2 + l^2 + 4l^2} = \sqrt{6} \cdot l.$$

Нехай φ — кут між прямою BD_1 і площиною BC_1D. Тоді маємо:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{BD_1} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right| |\vec{n}|} = \frac{2l}{3\sqrt{6}\ l} = \frac{\sqrt{6}}{9}, \quad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Відповідь. $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

Приклад 8. Довести теорему косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha$.

Доведення.

Введемо прямокутну систему координат з початком в точці A (рис. 12.5).

Вектор $\overrightarrow{OB}$ має координати: $\overrightarrow{OB} = (c\cos\alpha;\ c\sin\alpha)$.

Тоді точка B має такі координати $(c\cos\alpha;\ c\sin\alpha)$.

За формулою відстані між двома точками маємо:

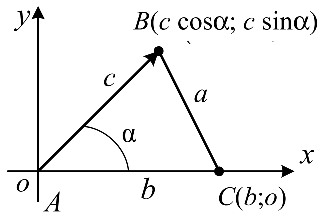


Рис. 12.5

$$|BC|^2 = a^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + c^2\sin^2\alpha =$$

$$= b^2 - 2bc\ \cos\alpha + c^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha =$$

$$= b^2 - 2bc\ \cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

звідки: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Приклад 9. Довести, що множина всіх точок M, для яких $\left||MA|^2 - |MB|^2\right| = k \cdot S_{\Delta MAB}$, де A і B — дані точки, $k > 0$ — стала, $S_{\Delta MAB}$ — площа ΔMAB, є дві прямі.

Розв'язання. Застосуємо метод координат. Нехай $|AB| = a$. Виберемо систему координат (рис. 12.6).

Тоді маємо $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $M(x;\ y)$. Знаходимо

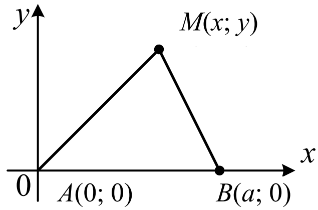


Рис. 12.6

$$|MA|^2 = x^2 + y^2,$$

$$|MB|^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Отже,

$$\left||MA|^2 - |MB|^2\right| = \left|2ax - a^2\right| = a|2x - a|\ .\ S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}a|y|.$$

За умовою $a|2x-a|=\frac{k}{2}a|y|$ або $|2x-a|=\frac{k}{2}|y|$, звідки $2x-a=\frac{k}{2}y$, $2x-a=-\frac{k}{2}y$ — рівняння двох прямих.

ПРИКЛАДИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. У рівнобедреному трикутнику ABC ($|AB| = |BC| = 15$) точка E ділить сторону BC у відношенні 1:4 (рахуючи від вершини B). Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\left|\overrightarrow{AC}\right|=20$.

Відповідь. $\arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

2. У прямокутному трикутнику ABC кут B прямий, $|AB| = 3$, $|BC| = 4$. Обчислити кут між медіанами AM і BD.

Відповідь. $\arccos\frac{\sqrt{13}}{65}$.

3. У прямокутному трикутнику з катетами AB і BC ($|AB|=8$, $|BC|=6$) проведено пряму AD, що ділить BC у відношенні $|BD|:|DC|=4:5$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

Відповідь. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

4. Навколо квадрата описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней точок кола до вершин квадрата не залежить від вибору точок на колі. Знайти цю суму.

Відповідь. $4a^2$, де a — довжина сторони квадрата.

5. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. На ребрі BC взято точку E так, що $|BE|=\frac{1}{4}$. На ребрі C_1D_1 взято точку F так, що $|FD_1|=\frac{2}{5}$. Через центр куба і точки E та F проведено площину α. Знайти відстань від вершини A_1 до площини α.

Відповідь. $\frac{6\sqrt{170}}{170}$.

6. Обчислити об’єм піраміди, утвореної площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

Відповідь. 8 куб. од.

7. У куб вписано сферу. Довести, що сума квадратів відстаней від кожної точки сфери до вершин куба не залежить від вибору точки. Знайти цю суму.

Відповідь. $8a^2$, де a — довжина сторони куба.

8. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. На ребрі AB взято точку E так, що $|BE| = \frac{2}{5}$. На ребрі CC_1 взято точку F так, що $|FC| = \frac{2}{3}$. Через центр куба і точки E та F проведено площину α. Знайти відстань від вершини A до площини α.

Відповідь. $\frac{3\sqrt{170}}{170}$.

9. Довжина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ дорівнює 1. На ребрі MM_1 взято точку A так, що $|AM| = \frac{3}{5}$. На ребрі K_1N_1 взято точку B так, що $|K_1B| = \frac{1}{3}$. Через центр куба і точки A та B проведено площину α. Точка P — проекція вершини N на площину α. Знайти $|BP|$.

Відповідь. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1121}{170}}$.

10. Основою піраміди $HPQR$ є рівносторонній трикутник PQR, довжина сторони якого дорівнює $2\sqrt{2}$. Бічне ребро HR перпендикулярне до площини основи і має довжину 1. Знайти величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку H і середину ребра QR, а інша — через точку R і середину ребра PQ.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Знайти рівняння сфери, описаної навколо конуса з висотою H і кутом при вершині осьового перерізу α. Початок системи координат співпадає з центром основи конуса, а вісь Oy напрямлена вздовж висоти конуса.

Відповідь: $x^2+\left(y-\dfrac{H}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2+z^2=\left(H\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2.$

12. Знайти рівняння сфери, вписаної в правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і двогранним кутом при основі α. Початок системи координат співпадає з вершиною піраміди, вісь Oy напрямлена вздовж висоти піраміди.

Відповідь. $x^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{4}.$

13. Знайти рівняння сфери, вписаної в конус з радіусом основи R і кутом при вершині осьового перерізу α. Початок системи координат співпадає з вершиною конуса, вісь Oy напрямлена вздовж висоти конуса.

Відповідь.

$$x^2+\left[y-R\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+R\ \operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)\right]^2+z^2=R^2\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right).$$

14. Знайти кут між діагоналлю BD_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і діагоналлю A_1D його грані, якщо $|AD|=a$, $|DC|=b$, $|DD_1|=c$.

Відповідь. $\arccos\dfrac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}$ при $a\geq c$;

$$\pi-\arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}} \text{ при } a<c.$$

15. Обчислити висоту піраміди з вершинами $S(0;\ 6;\ 4)$, $A(3;\ 5;\ 3)$, $B(-2;\ 11;-5)$, $C(1;-1;\ 4)$, опущеної з S.

Відповідь. 3.

16. Знайти центр і радіус кулі, вписаної у трикутну піраміду, обмежену координатними площинами і площиною

$$11x - 10y - 2z - 57 = 0.$$

Відповідь. $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$, $R=\dfrac{3}{2}$.

17. Визначити косинус кута між прямими:

$$\begin{cases} x-y-4z-5=0; \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y-6z+5=0; \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

Відповідь. $\cos\varphi = \pm\frac{4}{21}$.

18. Дано рівняння руху точки $M(x;y;z)$

$$x=5-2t,\ y=-3+2t,\ z=5-t.$$

Знайти відстань d, яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=7$.

Відповідь. $d=21$.

19. Знайти точку Q, симетричну точці $P(1;\ 3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

Відповідь. $Q(-5;\ 1;\ 0)$.

20. Обчислити відстань d від точки $P(2;\ 3;-1)$ до таких прямих:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$;

2) $x=t+1,\ y=t+2,\ z=4t+13$;

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

Відповідь. 1) 21; 2) 6; 3) 15.

21. Знайти відстань від параболи $y=x^2$ до прямої $y=x-4$.

Відповідь. $\frac{15\sqrt{2}}{8}$.

22. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ $AB=4$ см, $AA_1=3$ см. Точка D – середина ребра A_1C_1. Знайти відстань від вершини C_1 до площини ADB.

Відповідь. 1,5 см.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алексеев В.М.* Элементарная математика. Решение задач. — К.: Вища шк., 1989.
2. *Головко Л.К. и др.* Математика. Сборник задач. Пособие для подготовительных отделений. — К.: Вища шк., 1986.
3. *Говоров В.М. и др.* Сборник конкурсных задач по математике. — М.: Наука, 1983.
4. *Гусятников П.Б., Резниченко С.В.* Векторная алгебра в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
5. Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗІВ/ За ред. М.І. Сканаві. — К.: Вища шк., 1996.
6. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: Геометрія / За ред. З.І. Слепкань. — Х.: Гімназія, 2002.
7. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1972.
8. *Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О.* Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту: Геометрія. — Л.: ВНТЛ, 1997.
9. *Макуха А.С. и др.* Математика. Письменные экзаменационные работы. — К .: Вища шк., 1985.
10. *Нестеренко Ю.В. и др.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1983.
11. *Никулин А.В. и др.* Геометрия на плоскости (планиметрия). — Минск: ООО «Попудри», 1996.
12. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г.Н. Яковлева. — М.: Наука, 1985.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна
МАМЧУК Віталій Іванович
МУРАНОВА Наталія Петрівна

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

2-ге видання, стереотипне

Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Верстка *Л. Колодіної*

Підп. до друку 11.06.10. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 7,44. Обл.-вид. арк. 8,0.
Тираж 500 пр. Замовлення № 137-1.

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №977 від 05.07.2002.

Інститут доуніверситетської підготовки (ІДП) проводить освітню діяльність, пов'язану з підготовкою до вступу у ВНЗ та зовнішнього незалежного оцінювання для учнів 9–11 класів на підготовчих курсах *за напрямами*: технічним, економічним, гуманітарним, правовим, соціологічним, психологічним, міжнародні відносини, дизайн та архітектура ***з навчальних дисциплін:*** українська мова та література, математика, історія України, англійська мова, географія, фізика, хімія, біологія, основи журналістики, рисунок, композиція.

До послуг учнів 9–11 класів існують різноманітні **форми навчання:** *вечірні, щосуботи та заочні підготовчі курси*, а також організовано роботу підготовчих курсів в регіонах України, а саме: м .Андрушівка, м. Бердянськ, смт. Володимирець, м. Бориспіль, м. Глухів, м. Лубни, м. Дрогобич, м. Дубровиця, м. Канів, м.Енергодар, м. Козятин, м. Конотоп, м. Кузнецовськ, м. Луцьк, м. Миколаїв, м.Нікополь, м.Нововолинськ, м. Пирятин, м. Рівне, м.Свалява, м. Сімферополь, м. Старокостянтинів, м. Чернігів.

Основні напрями діяльності Інституту: якісна підготовка до ЗНО та вступу у ВНЗ; підвищення рівня підготовки абітурієнтів на основі використання кадрового і матеріального потенціалу Університету; вивчення і розроблення проблеми наступності та організації ранньої професійної орієнтації серед слухачів ІДП за участю провідних фахівців НАУ; поглиблене вивчення цілого ряду навчальних дисциплін та спецкурсів.

Термін навчання: 8-ми місячні підготовчі курси.

Заняття проводяться відповідно до чинних нормативних документів, робочих навчальних програм, адаптованих відповідно до вимог Державного стандарту базової і повної середньої освіти, Українського центру оцінювання якості освіти та затверджених кафедрою базових і спеціальних дисциплін Інституту доуніверситетської підготовки НАУ.

Навчальний процес на підготовчих курсах забезпечується педагогічними та науково-педагогічними працівниками кафедри базових і спеціальних дисциплін, а також висококваліфікованими фахівцями провідних кафедр Університету. Слухачі Інституту забезпечуються навчально-методичною літературою.

Протягом навчального року пропонуються: екскурсії до Державного музею авіації, навчального ангару, музею Університету, кафедр та лабораторій НАУ, участь у міжнародній конференції студентів та молодих учених «Політ» та презентації Університету на базі ЗНЗ.

Слухачі ІДП зараховуються на навчання до Національного авіаційного університету та інших ВНЗ відповідно до Умов прийому до вищих навчальних закладів України у поточному навчальному році.

Якщо є бажання отримати якісну підготовку до зовнішнього незалежного оцінювання і підготуватися до вступу в обраний вищий навчальний заклад, звертайтеся за адресою:

03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1, корпус 8, кім. 610.

Тел.: 406-74-04, 406-72-09, 406-73-11, 406-74-15, тел./факс: 497-52-84

E-mail: idp.nau@ua.fm. Web-сторінка: **www.nau.edu.ua**

Навчання платне

Ліцензія МОН України серія АВ №482350 від 08.09. 2009р.