

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЦИКЛА ГУДВИНА

А.О. Антонова

г. Киев, Национальный авиационный университет

Одна из моделей экономического цикла, предложенного Гудвином, имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения [1]:

$$\varepsilon\theta\ddot{y}(t) + (\varepsilon + \theta s)\dot{y}(t) - \varphi(\dot{y}(t)) + sy(t) = A_{ni}(t + \theta). \quad (1)$$

Здесь $y(t)$ – доход, $\varepsilon > 0$ и α – константы, $0 \leq \alpha \leq 1$, φ и A_{ni} – индуцированные и автономные инвестиции, θ – время запаздывания инвестиций. Функция $\varphi(\dot{y})$ обладает такими свойствами:

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(\dot{y}) \geq 0, \varphi'(0) = r > 0, \lim_{\dot{y} \rightarrow +\infty} \varphi(\dot{y}) = \varphi_+, \lim_{\dot{y} \rightarrow -\infty} \varphi(\dot{y}) = \varphi_-,$$

где φ_c и φ_f – потолок и пол Хикса.

Как доказано в [2], если φ_c и φ_f конечны, то в случае $A_{ni}(t) = A_0 = \text{const}$ зависимость $y(t)$ может иметь вид предельного цикла. Для этого необходимо и достаточно, чтобы стационарная точка уравнения (1) ($y = y_s = s^{-1}A_0$, $\dot{y} = 0$) была неустойчивой:

$$r > \varepsilon + s\theta.$$

Период цикла намного превышает θ . При фиксированном значении пола инвестиций увеличение потолка приводит к увеличению амплитуды цикла и его периода.

В случае, когда стационарная точка является неустойчивым фокусом,

$$\varepsilon + s\theta < r < (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{s\theta})^2,$$

предельный цикл возможен также и для индуцированных инвестиций, ограниченных только сверху, или только снизу [3-4], например для таких зависимостей $\varphi(\dot{y})$

$$\varphi = \begin{cases} r\dot{y}, & \dot{y} \leq \dot{y}_c = \varphi_c r^{-1}, \\ \varphi_c, & \dot{y} > \dot{y}_c, \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_f, & \dot{y} < \dot{y}_f, \\ r\dot{y}, & \dot{y} \geq \dot{y}_f = \varphi_f r^{-1}, \end{cases} \quad (2)$$

Напомним, что модель (1) в является следствием из модели Гудвина в форме дифференциального уравнения нейтрального типа с фиксированным запаздыванием θ [1]

$$\varepsilon\dot{y}(t) + sy(t) = \varphi(\dot{y}(t - \theta)) + A_{ni}(t). \quad (3)$$

Анализ свойств решений уравнения (3), выполненный в работе [5], показал, что при фиксированном значении пола в инвестициях увеличение потолка инвестиций приводит к увеличению амплитуды цикла, но только до определенного максимального значения потолка $\varphi_c = \varphi_{c\text{max}}$. При превышении этого значения происходит срыв длиннопериодического цикла и возникают пилообразные колебания дохода с периодом, равным времени запаздывания θ .

Поэтому периодические решения в модели бизнес-цикла в форме дифференциального уравнения нейтрального типа с фиксированным запаздыванием и нелинейными инвестициями вида (2) невозможны: если у функции $\varphi(\dot{y})$ нет потолка, то решения при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к ∞ , а если у функции $\varphi(\dot{y})$ нет пола, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$. Эти выводы подтверждает численное решение уравнения (3) для всех $r > \varepsilon + s\theta$.

Литература

1. R. M. Goodwin, *Econometrica*. **19**, 1-17 (1951).
2. K. Sasakura, *Journal of Economic Dynamics and Control*. **20**, 1763-1773 (1996).
3. Ph. Le Corbeiller, *IRE Transactions on Circuit Theory*. **7**, 387-398 (1960).
4. S. Sordi, Floors' and/or 'Ceilings' and the Persistence of Business Cycles, in: *Business Cycle Dynamics. Models and Tools*, edited by T. Puu and I. Sushko, Springer-Verlag, Berlin, 277-298 (2006).
5. A. O. Antonova, S. N. Reznik, and M. D. Todorov, "On periodic solutions of Goodwin's business cycle model with only floor in induced investmentin", *AIP Conf. Proc.* v. **1487**, American Institute of Physics, Melville, NY, 168-175 (2012).