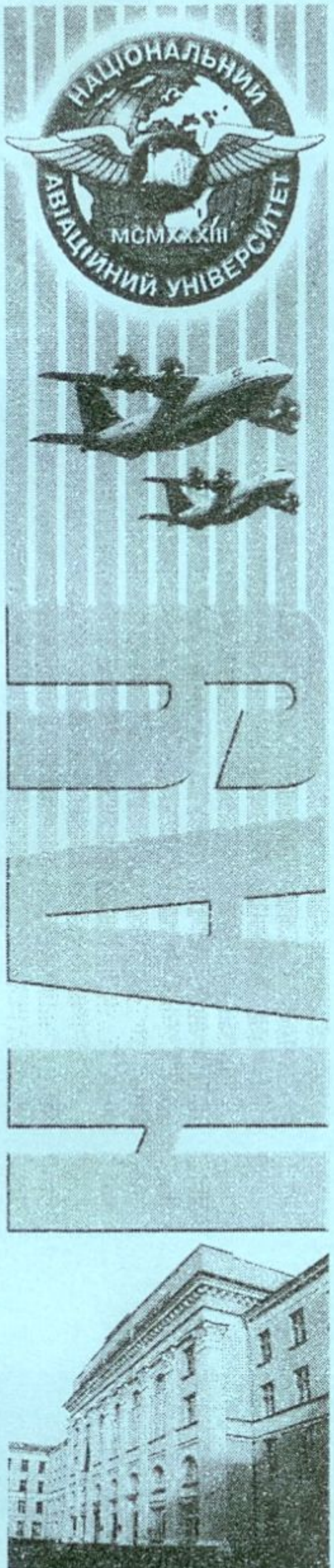

VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ЯКІСТЬ ЗМІСТУ ДОУНІВЕРСИТЕТСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ – НАЙВАЖЛИВІША ОЗНАКА ЯКОСТІ ВСТУПУ ДО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ

Матеріали III міжрегіонального семінару
10 – 11 квітня 2008 року

Київ 2009

УДК 377.6(082)
ББК Ч487 (4Уш) 711.9 НАУ
П 789

Якість змісту доуніверситетської підготовки – найважливіша ознака якості вступу до вищого навчального закладу:
П 789 матеріали III міжрегіонального семінару. – К. : Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2009. – 240 с.

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, у яких висвітлено основні проблеми підвищення якості змісту доуніверситетської підготовки як найважливішої ознаки ефективного вступу до ВНЗ. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання базових предметів (математики, фізики, української та іноземної мов, біології, рисунку тощо) з урахуванням вимог до освітніх послуг, що висуваються МОН України.

Видання буде корисним для викладачів загальноосвітніх навчальних закладів, слухачів підготовчих курсів Інституту доуніверситетської підготовки, учнів старших класів середніх загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій при підготовці до складання тестів Центру зовнішнього незалежного оцінювання з математики, фізики, української та англійської мов, біології тощо.

Організаційний комітет:

Н.П. Муранова (голова)
О.П. Пилипенко (секретар)

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол №7 від 04.03.2008).

УДК51:373.57(045)

Муранова Н.П.,
к. пед. н., доцент,
завідувач кафедри базових
і спеціальних дисциплін ІДП
Мазур К.І.,
к. ф.-м. н., доцент кафедри базових
і спеціальних дисциплін ІДП
Мазур О.К.,
ст. викладач кафедри вищої математики НУХТ
Сич О.К.,
аспірант

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ НА ВСТУПНИХ ВИПРОБУВАННЯХ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Майже вся теорія квадратного тричлена, а також розв'язання багатьох задач, зв'язаних з ним, базується на прийомі, що називається „виділення повного квадрата". Застосовуючи цей прийом до квадратного тричлена ax^2+bx+c, приходимо до рівності

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Вираз b^2-4ac називається дискримінантом квадратного тричлена $\left(D=b^2-4ac\right)$. Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ має відповідно 2, 1 або 0 розв'язків у залежності від того, буде його дискримінант додатним $(D>0)$, рівним нулю $(D=0)$, або від'ємним $(D<0)$. (Нагадаємо, що за визначенням квадратного рівняння $a\neq 0$). Корені квадратного рівняння x_1 і x_2 дорівнюють:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Правда, нумерація коренів умовна. Зазвичай намагаються занумерувати їх у порядку зростання, але це не обов'язково.

Якщо другий коефіцієнт (b) парний (причому він може бути просто парним числом, а може мати вид $b=2k$), то зручніше користуватися для знаходження коренів формулами

$$x_{1,\,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}D}}{a},\ \text{де}\ \frac{1}{4}D=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac\,.$$

Задачі, зв'язані з квадратним тричленом, що зустрічаються на вступних випробуваннях, надзвичайно різноманітні.

Задача 1. Знайти всі значення *параметра a*, при яких рівняння $2ax^2-4(a+1)x+4a+1=0$ має один корінь.

Розв'язання. Оскільки в умові не вказується, що розглядається квадратне рівняння, то при $a=0$ маємо лінійне рівняння $-4x+1=0$ з єдиним коренем $x=\frac{1}{4}$. Решту значень *параметра a* ми дістанемо з рівняння $D=0$, а краще $\frac{1}{4}D=0$:

$$4\left(a^2+2a+1\right)-2a(4a+1)=0,\ 2a^2-3a-2=0;\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=2.$$

Відповідь. $0;\ -\frac{1}{2};\ 2.$

До азбуки квадратного тричлена відноситься і **теорема Вієта.** Для того, щоб x_1 та x_2 були коренями рівняння $ax^2+bx+c=0$, необхідно і достатньо виконання рівностей $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ та $x_1-x_2=\frac{c}{a}$.

Зверніть увагу на те, що тут сформульовано два твердження – пряме і обернене. Часто, формулюючи теорему Вієта, обмежуються одним прямим твердженням: «Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то виконуються рівності...»

Деякі логічні термінологічні проблеми виникають у випадку $D=0$, але ми їх не будемо трактувати. Зауважимо лише, що вирази «квадратне рівняння що має один розв'язок» і «квадратне рівняння з рівними коренями» означають одне і те ж.

З теореми Вієта виходить також розкладання на множники квадратного тричлена:

$$ax^2+bx+c=0=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

На теоремі Вієта основано цілий ряд традиційних задач і методів розв'язання.

Задача 2. Довести, що при довільному a рівняння $\left(a^3-2a^2\right)x^2-\left(a^3-a+2\right)x+a^2+1=0$ має розв'язок.

Розв'язання. Можна, звичайно, знайти дискримінант і попробувати довести, що він додатний. А можна поступити мудріше. Позначимо ліву частину даного рівняння через $f\left(x\right)$. Відразу видно, що $f\left(0\right)=a^2+1>0$ при $a\in R.$ А $f\left(1\right)=-a^2+a+1<0$ при $a\in R.$ Тепер можна зробити висновок, що задане рівняння завжди має розв'язок. Більше того, якщо $a^3-2a^2\neq 0,$ тобто $a\neq 0$ і $a\neq 2,$ то задане рівняння має два корені; при цьому завжди є корінь, що задовольняє нерівності $0<x<1$.

Задача 3. Не розв'язуючи рівняння $ax^2+bx+c=0,$ знайти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, де x_1 і x_2 – корені заданого рівняння.

Розв'язання. Виконавши перетворення і використавши теорему Вієта, дістанемо

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{2c}{a}}{\dfrac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

Відповідь. $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}.$

Задача 4. Скласти квадратне рівняння з коренями $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},$ де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0.$

Розв'язання. Нехай шукане квадратне має вигляд $Ax^2+Bx+C=0$ або $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$ (*), а $X_1=\frac{1}{x_1}$, $X_2=\frac{1}{x_2}$ – його корені. Згідно з теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} X_1+X_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{c}=-\dfrac{B}{A}, \\ X_1\cdot X_2=\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{\frac{c}{a}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{C}{A}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{b}{c}=\dfrac{B}{A}, \\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{C}{A}. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення $\frac{B}{A}$ і $\frac{C}{A}$ в рівняння (*), дістанемо $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, або $cx^2+bx+a=0$.

Відповідь. $cx^2+bx+a=0$.

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАКІВ ДІЙСНИХ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Задача 5. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $ax^2-\left(a^2+2a-1\right)x+a^2-1=0$ має дійсні корені, та визначити їхні знаки.

Розв'язання. При $a=0$ задане рівняння матиме розв'язок $x=1$.

Нехай $a\neq 0$. Оскільки дискримінант

$D=a^4+2a^2+1=\left(a^2+1\right)^2$ є повним квадратом, то визначимо корені квадратного рівняння в явному вигляді: $x_1=a+1$, $x_2=\frac{a-1}{a}$. Отже, обидва корені додатні, якщо $a+1>0$ і $\frac{a-1}{a}>0$, тобто при $a\in(-1;\,0)\cup(1;\,+\infty)$. Якщо ж корені від'ємні, то $a+1<0$ і $\frac{a-1}{a}<0$, що не має смислу. При решті значень параметра a задане квадратне рівняння має корені різних знаків ($D>0$ при всіх $a \in R$).

Відповідь. Якщо $a \in (-1;\, 0] \cup (1;\, +\infty)$, то корені додатні; якщо $a \in (-\infty;\, -1] \cup (0;\, 1]$, то корені мають різні знаки.

Задача 6. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\left(a^2-2a-3\right)x^2-2\left(a^2-a-6\right)x+a^2+6a+8=0$ має дійсні корені, та визначити їхні знаки.

Розв'язання. Якщо $a^2-2a-3=0$, тобто $a=-1$ або $a=3$, то дістанемо два лінійних рівняння $8x+3=0$, звідки $x=-\frac{3}{8}$, або $35=0$, що не має змісту.

Якщо ж $a^2-2a-3\neq 0$, тобто $a\neq -1$ і $a\neq 3$, то маємо квадратне рівняння з параметром виду $Ax^2+Bx+C=0$, для знаходження існування його дійсних коренів і визначення їхніх знаків зручно скористатися рівносильністю таких умов:

$$\begin{cases} x_1>0, \\ x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0, \\ x_1\cdot x_2>0, \\ D\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{B}{A}>0, \\ \dfrac{C}{A}>0, \\ B^2-4AC\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B\cdot A>0, \\ C\cdot A>0, \\ B^2-4AC\geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1<0, \\ x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2<0, \\ x_1\cdot x_2>0, \\ D\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{B}{A}<0, \\ \dfrac{C}{A}>0, \\ B^2-4AC\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B\cdot A<0, \\ C\cdot A>0, \\ B^2-4AC\geq 0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_1<0, \\ x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1\cdot x_2<0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}<0 \Leftrightarrow C\cdot A<0. \qquad (3)$$

Маємо:

$$-B\cdot A=2\left(a^2-a-6\right)\left(a^2-2a-3\right)=2\left(a+2\right)\left(a+1\right)\left(a-3\right)^2,$$

$$C\cdot A=\left(a^2+6a+8\right)\left(a^2-2a-3\right)=\left(a+4\right)\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(a+1\right),$$

$$D=4\left(a^2-a-6\right)^2-4\left(a^2-2a-3\right)\left(a^2+6a+8\right)=$$

$$=-8\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(3a+5\right).$$

Отже, задане рівняння має дійсні корені $x_1=\dfrac{a^2-a-6-\sqrt{D}}{2\left(a^2-2a-3\right)}$ і $x_2=\dfrac{a^2-a-6+\sqrt{D}}{2\left(a^2-2a-3\right)}$, якщо $D=-8\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(3a+5\right)\ge 0$, тобто при $a\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-\dfrac{5}{3};3\right]$.

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння додатні і $x_1<x_2$, якщо, згідно з зауваженням 1 (див. задачу 12), $A=\left(a+1\right)\left(a-3\right)>0$ і, згідно з (1),

$$\begin{cases}2\left(a+2\right)\left(a+1\right)\left(a-3\right)^2>0,\\ \left(a+4\right)\left(a+2\right)\left(a+1\right)\left(a-3\right)>0,\\ -8\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(3a+5\right)\ge 0,\end{cases}\text{ тобто при } a\in\left(-\infty;-4\right).$$

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння від'ємні і $x_2<x_1$, якщо, згідно з зауваженням (див. задачу 12), $A=\left(a+1\right)\left(a-3\right)<0$ і, згідно з (2),

$$\begin{cases}2\left(a+2\right)\left(a+1\right)\left(a-3\right)^2<0,\\ \left(a+4\right)\left(a+2\right)\left(a+1\right)\left(a-3\right)>0,\\ -8\left(a+2\right)\left(a-3\right)\left(3a+5\right)\ge 0,\end{cases}\text{ тобто при } a\in\left(-1;3\right).$$

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння різних знаків $x_1<0,\ x_2>0$ і $x_1<x_2$, якщо згідно з зауваженням 1 (див задачу 12),

$A=(a+1)(a-3)>0$ і, згідно з (3), $(a+4)(a+2)(a+1)(a-3)<0$, тобто при $a\in(-4;-2)$.

Аналогічно розглядається решта випадків.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{5}{3};3\right]$, то рівняння має дійсні корені $x_1=\frac{a^2-a-6-\sqrt{-8(a+2)(a-3)(3a+5)}}{2(a^2-2a-3)}$ і $x_2=\frac{a^2-a-6+\sqrt{-8(a+2)(a-3)(3a+5)}}{2(a^2-2a-3)}$; якщо $a\in(-\infty;-4)$, то $x_1+x_2>0$, $x_1\cdot x_2>0$, $A>0, x_1>0, x_2>0, x_1<x_2$; якщо $a=-4$, то $x_1+x_2>0$, $x_1+x_2=0, A>0, x_1=0, x_2>0, x_1<x_2$; якщо $a\in(-4;-2)$, то $x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0, A>0, x_1<0, x_2>0$, $x_1<x_2$; якщо $a=-2$, то $x_1+x_2=0, x_1\cdot x_2=0, A>0, x_1=0$, $x_2=0, x_1=x_2$; якщо $a\in\left(-2;-\frac{5}{3}\right)$, то рівняння дійсних коренів не має; якщо $a\in\left[-\frac{5}{3};-1\right)$, то $x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2>0$, $A>0, x_1<0, x_2<0, x_1<x_2$; якщо $a=-1$, то рівняння лінійне, $x=-\frac{3}{8}$; якщо $a\in(-1;3)$, то $x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0, A<0, x_1<0$, $x_2<0, x_2<x_1$; якщо $a=3$, то рівняння лінійне, розв'язків не існує; якщо $a\in(3;+\infty)$, то дійсних коренів не існує.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ ДВОХ КВАДРАТНИХ ТРИЧЛЕНІВ

Задача 7. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $x^2-(2a-1)x+a=0$ і $(a+1)x^2-ax-1=0$ мають хоча б один спільний корінь.

Розв'язання. Якщо задані рівняння мають спільний корінь, то система

$$\begin{cases} x^2-(2a-1)x+a=0, \\ (a+1)x^2-ax-1=0 \end{cases}$$

мають той же корінь.

Помножимо обидві частини другого рівняння системи на a і додамо до першого. Дістанемо після скорочення на x, оскільки очевидно, що $x \neq 0$, рівняння

$$\left(a^2+a+1\right)x-\left(a^2+2a-1\right)=0.$$

Потім помножимо перше рівняння на $a+1$ і віднімемо його від другого. Дістанемо рівняння

$$\left(2a^2-1\right)x-\left(a^2+a+1\right)=0.$$

Оскільки x має задовольняти двом отриманим лінійним рівнянням, то для a має виконуватися співвідношення

$$\left(a^2+a+1\right)^2=\left(a^2+2a-1\right)\left(2a^2-1\right).$$

Потім отримуємо $a^4+2a^3-6a^2-4a=0$, або, після спрощень, $a(a-2)\left(a^2+4a+2\right)=0$, звідки $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-2-\sqrt{2}$, $a_4=-2+\sqrt{2}$.

Відповідь. $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-2-\sqrt{2}$, $a_4=-2+\sqrt{2}$.

Зауваження. 1. Для кожного зі знайдених значень a необхідно переконатися, що відповідні рівняння мають розв'язки. (Достатньо перевірити існування коренів у одного з них). 2. Задану пару квадратних рівнянь можна розглядати як систему двох рівнянь з невідомими x і a.

Задача 8. При яких значеннях параметра a рівняння $(1-a)x^2+2x-4a=0$ і $ax^2-4x+4a=0$ рівносильні?

Розв'язання. Простіше всього з'ясувати, коли рівняння рівносильні, маючи порожню множину розв'язків кожного. Це має місце, коли дискримінант кожного з рівнянь від'ємний, тобто

$\begin{cases} 1+4a(1-a)<0, \\ 4-4a^2<0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4a^2-4a-1>0, \\ a^2>1, \end{cases}$ звідки

$a \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty \right).$

Припустимо тепер, що при деякому a рівняння рівносильні і хоча б одне з них має корінь x_0. Тоді x_0 є коренем і другого рівняння і мають місце рівності

$$\begin{cases} (1-a)x_0^2 + 2x_0 - 4a = 0, \\ ax_0^2 - 4x_0 + 4a = 0. \end{cases}$$

У нас вийшла система відносно x_0 і a. Додавши перше рівняння до другого, дістанемо рівняння $x_0^2 - 2x_0 = 0$, що не містить a. Звідси робимо висновок, що або $x_0 = 0$, або $x_0 = 2$. У першому випадку $a = 0$ і початкові рівняння набирають вигляду $x^2 + 2x = 0$ і $-4x = 0$. Зрозуміло, що ці рівняння не рівносильні, отже $a = 0$ не підходить.

Якщо $x_0 = 2$, то з першого рівняння системи знаходимо, що $a = 1$. При цьому вихідні рівняння мають вигляд $2x - 4 = 0$ і $x^2 - 4x + 4 = 0$. Кожне з них має єдиний корінь $x = 2$, тобто вони еквівалентні і $a = 1$ підходить.

Відповідь. $a \in (-\infty; -1) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$, $a = 1$.

Задача 9. Розташувати корені рівнянь

$$x^2 + \frac{3}{a}x + 2a = 0 \text{ і } x^2 + \frac{12}{a}x - a = 0$$

у порядку зростання.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{a}x + 2a$,

$g(x) = x^2 + \dfrac{12}{a}x - a$; α_1 і α_2 – корені рівняння $f(x) = 0$; β_1 і β_2 – корені рівняння $g(x) = 0$. За смислом задачі вимагається розглядати лише ті значення параметра a, для яких, обидва рівняння мають розв'язки. Умова невід'ємності обох дискримінантів дають нам нерівності $-\sqrt[3]{36} \le a < 0$, $0 < a \le \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9}$.

Знайдемо значення x, при яких $f(x) = g(x)$, $x = \frac{a^3}{3}$. Рівняння мають спільний корінь, якщо $f\left(\frac{a^2}{3}\right) = g\left(\frac{a^2}{3}\right) = 0$, звідки $a = -3$.

Таким чином, множина значень параметра a, при яких обидва рівняння мають корені, розбито на три інтервали (рис. 1).

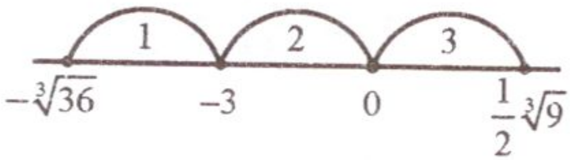

Рис. 1

Кінці інтервалів зручніше розглядати окремо. Виникають три випадки:

1. $-\sqrt[3]{36} < a < -3$. Маємо $f\left(\frac{a^2}{3}\right) = g\left(\frac{a^2}{3}\right) = a\left(a^3 + 27\right) > 0$. З точністю до позначень, яка з двох парабол відповідає $f(x)$, а яка $g(x)$ можливі два випадки (рис. 2 і рис. 3).

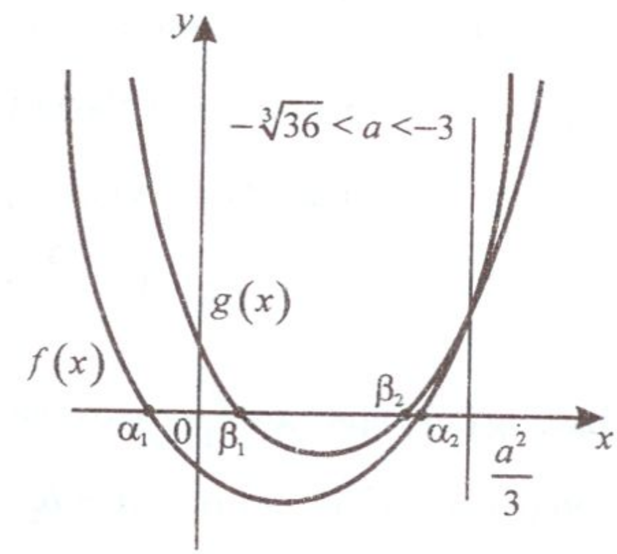

Рис. 2

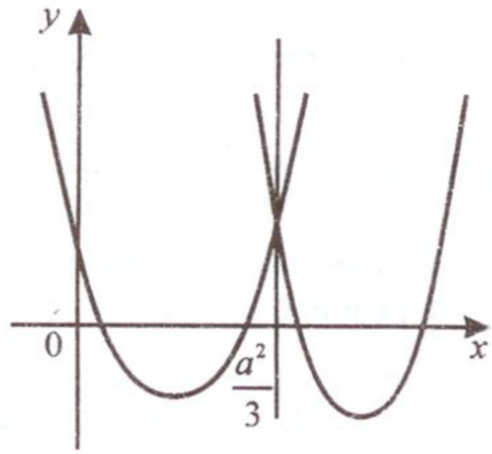

Рис. 3

Подивимося, як розташовані вершини кожної з парабол по відношенню до прямої $x = \frac{a^2}{3}$. Для $f(x)$ маємо $x_B = -\frac{3}{2a}$. На розглядуваному інтервалі зміни a маємо $-\frac{3}{2a} < \frac{a^2}{3}$ (доведіть). Вершина другої параболи також знаходиться лівіше від прямої $x = \frac{a^2}{3}$. (Перевірте правильність нерівності $-\frac{6}{a} < \frac{a^2}{3}$). Отже, має місце випадок, зображений на рис. 2. (На рис. 3 вершини парабол розташовані по різні боки від прямої $x = \frac{a^2}{3}$). Залишилося з'ясувати, яка з двох парабол на цьому рисунку відповідає $f(x)$, а яка $g(x)$.

Якщо $a < 0$ і $x < \frac{a^2}{3}$, то $f(x) - g(x) = -\frac{9}{a}\left(x - \frac{a^2}{3}\right) < 0$, тобто $f(x) < g(x)$. Отже, $g(x)$ при $x < \frac{a^2}{3}$ проходить вище $f(x)$ і $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$. Якщо $\alpha = -\sqrt[3]{36}$, то $\alpha_1 < \beta_1 = \beta_2 < \alpha_2$.

2. $-3 < a < 0$. В цьому випадку $f\left(\frac{a^2}{3}\right) = g\left(\frac{a^2}{3}\right) = a\left(a^3 + 27\right) < 0$. Як і в попередньому пункті, при

$x < \frac{a^2}{3}$ $f(x) < g(x)$, тобто графіки $f(x)$ і $g(x)$ розташовані так, як показано на рис. 4 і $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$. Якщо $a = -3$, то $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 = \alpha_2$.

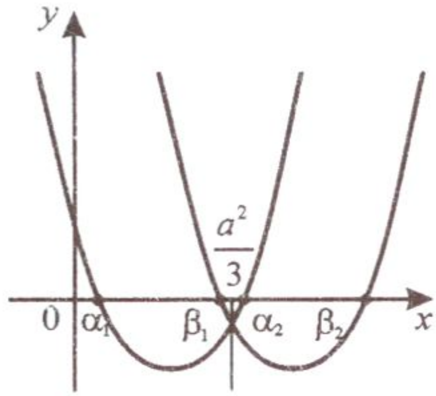

Рис. 4

3. $0 < a < \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$. Маємо $f\left(\frac{a^2}{3}\right) = g\left(\frac{a^2}{3}\right) > 0$. Обидві вершини знаходяться зліва від прямої $x = \frac{a^2}{3}$, і $f(x) > g(x)$ при $x < \frac{a^2}{3}$ (рис. 5). Отже, $\beta_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2$. Якщо $a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то $\beta_1 < \alpha_1 = \alpha_2 < \beta_2$.

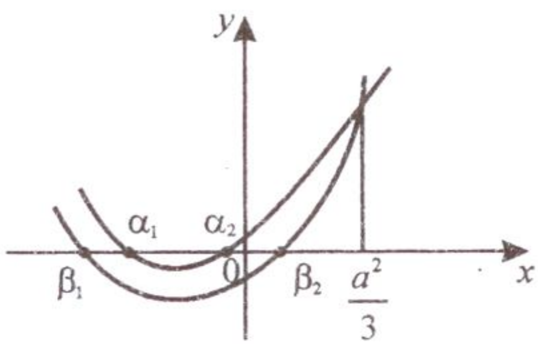

Рис. 5