УДК 681.5.03

О.М.Глазок (Національний авіаційний університет)

АНАЛІТИЧНИЙ СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗНАКОПОСТІЙНИХ МОДИФІКУЮЧИХ ПОЛІНОМІВ.

Розв'язується задача забезпечення знаковизначеності допоміжної функції, що використовується для синтезу керування за модифікованим методом аналітичного конструювання. Запропоновано будувати її як поліноміальну функцію модулів відхилень фазових координат від стану рівноваги.

В публікаціях [1,2] було запропоновано модифікований метод аналітичного конструювання систем керування для літальних апаратів. Врахування вимог до якості руху було запропоновано реалізувати за рахунок модифікації функціонала якості, до якого було введено частини розкладу допоміжної функції в ступеневий ряд, з коефіцієнтами, які є параметрами синтезу.

При синтезі за таким алгоритмом нелінійних систем керування застосування поліноміальних допоміжних функцій дозволяє забезпечити стійкість системи і якість руху, задану замовником системи керування літальним апаратом. Проте знакопостійність модифікуючого полінома в експлуатаційному діапазоні змінних стану не гарантовано. Це обмежує можливості теоретичного дослідження таких систем шляхом застосування теорем методу функцій Ляпунова, оскільки класичне визначення функції Ляпунова вимагає її знакопостійності. Шляхами подолання цього протиріччя є або розширення визначення функції Ляпунова і послаблення вимог до неї [3,4], або ж пошук такої форми допоміжної функції, яка забезпечуватиме знакопостійність.

Розглянемо можливість забезпечення знакопостійності допоміжної функції шляхом внесення до модифікуючих поліномів знаків модуля. Це можна зробити кількома способами Найпростішим способом є використання поліномів від модулів відхилень фазових координат від стану рівноваги. Так, для динамічної системи, описаної системою звичайних диференційних рівнянь

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{F(X)} \ ,$$

де $\mathbf{X} = (x_1 \ \ x_2 \ \dots \ x_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор відхилень змінних стану системи від стану рівноваги ; $\mathbf{U} = (u_1 \ \ u_2 \ \dots \ \ u_m)^{\mathrm{T}}$ – вектор керування, що впливає на систему; **A** та **B** – матриці (*n*x*n* та *n*x*m)* з постійними коефіцієнтами; **F(X)** – вектор-функція, компоненти якої є квадратичними формами від компонентів вектора X, модифікуючий доданок в підінтегральному виразі функціоналу якості $I = \int\limits_{t=0}^{\infty}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{PX} + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{RU} + w_2(\mathbf{X})\right)dt$ може бути записаний як

$$w_2(\mathbf{X}) = V_0(\mathbf{X}) + V_1\left(\left(|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|\right)^T\right) = V_0(\mathbf{X}) + \sum_{i,j,k} v_{ijk}\left|x_i x_j x_k\right| \ ,$$

де $V_0(\mathbf{X})$ – квадратична форма, що відповідає системі першого наближення.

З цієї формули видно, що доданок $V_1(\mathbf{X})$ може бути не знакопостійним, оскільки не відомо заздалегідь, які знаки матимуть коефіцієнти v_{ijk} , знайдені в результаті розв'язання задачі. В результаті позитивність визначеної таким чином функції $w_2(\mathbf{X})$ не гарантовано.

З метою гарантувати позитивність усіх доданків суми для $V_1(\mathbf{X})$ можна запропонувати наступний запис:

$$w_2(\mathbf{X}) = V_0(\mathbf{X}) + V_1\left(\left(|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|\right)^T\right) = V_0(\mathbf{X}) + \sum_{i,j,k} v_{ijk} x_i x_j x_k \cdot c_{ijk}$$

де $c_{ijk} = \pm 1$ – множник, що забезпечує зміну знаку відповідного доданку суми на знак "плюс". Питання про те, чи завжди буде сумісною отримана в результаті розв'язання задачі система лінійних рівнянь, потребує додаткового дослідження.

Інша можлива форма модифікуючого доданку має вигляд

$$w_2(\mathbf{X}) = V_0(\mathbf{X}) + |V_1(\mathbf{X})|\ ; \ w_2(\mathbf{X}) = V_0(\mathbf{X}) + |V_1(\mathbf{X})| = V_0(\mathbf{X}) + \left|\sum_{i,j,k} v_{ijk} x_i x_j x_k\right|;$$

Така постановка задачі гарантує знакопостійність допоміжної функції, але вимагає пошуку нових шляхів її розв'язку, оскільки знаходження суми під модулем не дозволяє розщепити рівняння Белмана на систему лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів v_{ijk}.

Розглянемо приклад синтезу оптимального регулятора для модельної нелінійної системи першого порядку:

$$\dot{x} = a_1 x + a_2 x^2 + bu\,. \tag{1}$$

Допоміжну функцію будемо шукати у вигляді

$$V_0(x) = qx^2\,,\ V_1(x) = v|x|^3, \tag{2}$$

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x) = qx^2 + v|x|^3\,. \tag{3}$$

де q, v – деякі числа, які необхідно знайти. Диференціювання функції $V(x)$ (3) по x можна виконувати без обмежень для всіх значень, за винятком точки x=0.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x} = 2qx + 3vx|x|\,,$$

Необхідно знайти керування, яке мінімізує функціонал якості

$$I = \int_0^\infty (px^2 + ru^2 + c_0 V_0 + c_1 V_1)dt = \int_0^\infty (px^2 + ru^2 + c_0 qx^2 + c_1 v|x|^3)dt\,, \tag{4}$$

де p, r, c_0, c_1 – задані числа, p>0, r>0.

Вираз для оптимального управління та рівняння Белмана для розглянутої задачі матимуть вигляд:

$$u_{opt} = -\frac{b}{2r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{b}{2r}(2qx + 3vx|x|)\,;$$

$$px^2 - \frac{b^2}{4r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + c_0 V_0 + c_1 V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)(a_1 x + a_2 x^2) = 0\,.$$

Перший крок – синтез лінійного регулятора. Розглядаємо лінеаризовану систему $\dot{x} = a_1 x + bu$. Функція Белмана та рівняння Белмана мають вигляд:

$$V(x) = V_0(x) = qx^2 , \tag{5}$$

$$px^2 - \frac{b^2}{4r}\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2 + c_0 V_0 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right) \cdot a_1 x = 0; \tag{6}$$

Як бачимо, лінійна частина задачі повторює лінійну частину задачі з допоміжною функцією, визначеною як

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x) = qx^2 + vx^3 .$$

Підстановка до рівняння Белмана (6) виразу для $V_0(x)$ (5) та виразу для $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial x} = 2qx$ приводить це рівняння до вигляду :

$$x^2\left\{p - \frac{b^2}{r}q^2 + c_0 q + 2a_1 q\right\} = 0 . \tag{7}$$

Співвідношення (7) виконується при всіх x з деякого околу точки рівноваги x=0, тому

$$p - \frac{b^2}{r}q^2 + c_0 q + 2a_1 q = 0 . \tag{8}$$

Отримане квадратне рівняння щодо величини q за змістом відповідає матричному рівнянню Ріккаті першого кроку аналітичного конструювання. Знайдемо його розв'язки. Враховуючи, що $p>0, r>0$, можна показати, що за будь-яких допустимих значень коефіцієнтів, що входять до рівняння (8), один з двох його коренів від'ємний, а другий додатній. Заради забезпечення позитивної визначеності функції $V_0(x)$ (3) оберемо позитивний корінь (позначимо його q_+):

$$V_0 = q_+ x^2 \ , \ q_+ = \frac{a_1 + \frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}}}{\frac{b^2}{r}} . \tag{9):$$

На другому кроці синтезу з урахуванням $q=q_+$ (9) з рівняння Белмана отримуємо

$$v = \frac{-2q_+ a_2}{\left(\frac{3b^2}{r}q_+ - c_1 - 3a_1\right)} \operatorname{sign} x . \tag{10}$$

Порівнюючи (10) з виразом для v, який було отримано при розв'язанні задачі з допоміжною функцією, що має вигляд полінома від x, можна бачити, що внесення $|x|$ до виразу $V_1(x)$ приводить до появи в цьому виразі sign x. Але ця модифікація ще не гарантує досягнення поставленої мети – добитися знакопостійності доданку $c_1 v|x|^3$ в підінтегральному виразі (4). Для цього необхідно виконати умову

$$c_1 v = \frac{2q_+ \cdot a_2 \cdot c_1}{\left(\frac{3b^2}{r} q_+ - c_1 - 3a_1\right)} \operatorname{sign} x > 0 \ . \tag{11}$$

При синтезі системи керування необхідно дослідити, чи може ця умова бути виконана при всіх значеннях x (при $\operatorname{sign} x = 1$ і при $\operatorname{sign} x = -1$) .

Розглянемо знак виразу (11). Величина q_+ додатня за побудовою. Згідно з виразом (9) вона залежить від величин a_1, b, p, r , c_0, але не залежить від значень a_2, c_1, які не беруть участі в процесі пошуку q_+. Величина a_2 (коефіцієнт у рівнянні керованої системи (1)) – є постійною, заданою величиною. Таким чином, знак числівника (11) визначається значенням a_2 , яке є характеристикою об'єкта, тобто задане замовником системи керування, і значенням параметр c_1 , яке ми маємо можливість обирати довільно.

Розглянемо знак знаменника. $\frac{3b^2}{r} q_+ > 0$, оскільки $p>0$, $r>0$, $b\neq 0$ (при $b=0$ система була б некерованою). Значення і знак виразу $\frac{3b^2}{r} q_+ - 3a_1 - c_1$, що стоїть в знаменнику (11), залежать від від величин a_1, b, p, r , а також від параметрів c_0 , c_1. При $c_1 \neq 0$ можемо перетворити (11) до наступної форми:

$$c_1 v = \frac{2q_+ a_2}{\left(\frac{1}{c_1}\left(\frac{3b^2}{r} q_+ - 3a_1\right) - 1\right)} \operatorname{sign} x > 0$$

Така форма є більш зручною для дослідження, порівняно з формою (11), оскільки параметр c_1 входить до неї лише один раз.

Висновки. В даній роботі запропоновано підходи, які, в разі їх подальшого розвитку, дозволять забезпечити знакопостійність допоміжної функції. Предметом подальших досліджень в рамках запропонованого підходу мають стати: умови, які забезпечують заданий знак виразу (11); методи отримання коефіцієнтів розкладів частин функції Белмана на другому і подальших парних кроках процесу послідовних наближень; пошук вигляду модифікуючого доданку – функції, яка б була аналітичною, знакопостійною і забезпечувала можливість отримання коефіцієнтів розкладу допоміжної функції з рівняння Белмана.

Список літератури

1. *Глазок О.М.* Метод синтезу нелінійних якісних регуляторів з введенням додаткових членів до функціоналу якості //Стан та перспективи розвитку новітніх науково-освітніх комп'ютерних технологій: Матеріали науково-практичної конференції. - Миколаїв: МДГУ, 2003. - С. 89-91.

2. *Глазок О.М.* Застосування нелінійних якісних регуляторів в системі стабілізації літака //Інформаційно-діагностичні системи. Матеріали VI міжнародної науково-технічної конференції "АВІА-2004". - Т.1. - К.: НАУ. - 2004.- С. 13.133-13.136.

3. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. - М.: Наука, 1977. - 400 с.

4. *Городецький В.Г.* Дослідження динамічних характеристик нелінійних систем за допомогою функцій Ляпунова, інтегральних та векторних співвідношень: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.04. НАН України. Ін-т косм. досліджень. - К., 2004. - 16 с.