Kucherov D.P.

TWO APPROACHES TO THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF HIGH-PRECISION SERVO-SYSTEMS: INVARIANCE AND OPTIMALITY

Рассмотрим следящий привод, описываемый в разомкнутом состоянии уравнением

$$\beta(p) = W(p)u(p). \tag{8}$$

Здесь $\beta(p)$ и $u(p)$ — изображения выходной величины, доступной для измерения, и управляющей величины, соответственно, а $W(p)$ - передаточная функция, равная

$$W(p) = \frac{k}{pA(p)}, \tag{9}$$

где k – коэффициент усиления,

$$A(p) = a_1 + \ldots + a_n p^n \tag{10}$$

– полином некоторой степени $n \geq 1$ с постоянными коэффициентами.

Предполагается, что есть некоторое задающее воздействие $\alpha(t)$, представляющее собой непрерывную гладкую функцию времени t. Задача состоит в том, чтобы обеспечить ошибку слежения

$$\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$$

системы, которая синтезирована на основе метода теории оптимальности.

Для построения закона оптимального управления перейдем от уравнения (8), составленного в терминах «вход-выход», к уравнению в терминах «пространства состояний»

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad \beta(t) = Cx(t).$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t))$ – вектор переменных состояния, $x_i = \beta^{i-1}(t)$, $i = (1, \ldots, n+1)$, A — матрица, B, C – векторы соответствующих размеров, которые имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \dots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \dfrac{k}{a_n} \end{vmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Рассмотрим специальный случай, когда задающее воздействие известно или принадлежит к некоторому классу функций, что является решением некоторой системы дифференциальных уравнений (см. [5, с. 343])

$$\dot{r}(t) = A_r r(t), \qquad \alpha(t) = C_r r(t)$$

Здесь A_r и C_r — не зависимые от времени матрицы соответствующих размеров. Введем дальше расширенное пространство, которое объединяет пространства векторов x и r, обозначив

$$v^T = \left(x^T,\ r^T\right), \quad A_p = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{vmatrix}, \quad B_p = \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C_p = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C_r \\ -C & C_r \end{vmatrix} \tag{11}$$

Тогда процесс в этому расширенном пространстве состояний приобретает стандартную форму

$$\dot{v}(t) = A_p v(t) + B_p u(t), \qquad y(t) = C_p\, v(t), \tag{12}$$

где $y(t) = (\beta(t), \alpha(t), \theta(t))^{\mathrm{T}}$.·

Будем оценивать качество наблюдения интегральным показателем типа квадратичного функционала [5-7]

$$I = \int_0^\infty \left(v^T(t) Q v(t) + \rho u^2(t)\right) dt, \tag{13}$$

в котором Q — некоторая весовая симметричная матрица, $\rho > 0$ — скаляр. (Выбор Q и ρ полагается, как известно, на конструктора системы.) Попробуем теперь формально найти такое управление $u(t)$, при котором функционал (13) достигает минимума. Трудности, которые возникают при решении данной задачи, связаны с тем, что приходится оперировать с не вполне управляемой системой по переменной $u(t)$. Этот факт вытекает из рассмотрения выражений для A_p, B_p (см. (11), (12)). Тем не менее данную задачу удается решить, если весовую матрицу Q в (13) представить блочной форме

$$Q = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix}.$$

Тогда выражение для оптимального управления получаем в виде

$$u_{opt}(t) = -K_1 x(t) + K_2 r(t) \ , \qquad (14)$$

где K_1 и K_2 — векторы, определяемые следующим образом:

$$K_1 = \rho^{-1} B^T P,\ K_2 = \rho^{-1} B^T Y. \qquad (15)$$

Здесь P - решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^T P + PA + Q - \rho^{-1} PBB^T P = 0, \qquad (16)$$

Y - решение уравнения Сильвестра [4] вида

$$FY + YG = C, \qquad (17)$$

в котором $F = A^T - \rho^{-1} PBB^T$, $G = A_r$, $C = -Q_{12}$.

Из выражения (14) видно, что K_1, и K_2 — векторы обратных и прямых связей соответственно.

На рис. 1 показанная структурная схема системы, реализующая оптимальный закон управления (14) (ВУ1, ВУ2 обозначают вычислительные устройства, которые разрешают формировать переменные $x(t)$, $r(t)$).

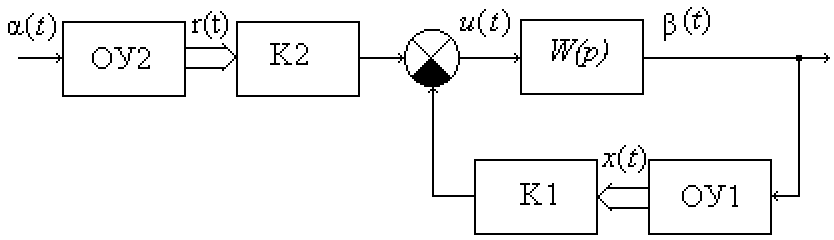

Рис.1

Проведем расчет ошибки установившегося режима $\theta_\infty(t)$ методом коэффициентов ошибок систем при известном влиянии, которое задано, $\alpha(t) = mt$ для одного частного случая, когда

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}. \tag{18}$$

Согласно [6] ошибку установившегося режима $\theta_\infty(t)$ для принятого типа задающего воздействия $\alpha(t)$ представим в виде ряда

$$\theta_\infty(t) = D_0\alpha(t) + D_1\frac{d\alpha(t)}{dt} + D_2\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \ldots .$$

Здесь D_i, i = 0, 1, 2,.., - коэффициенты ошибок, связанные с передающей функцией по ошибке соотношением

$$D_i = i!\frac{d^i}{dt^i}W_{\theta_k}(p)\Big|_{p=0}. \tag{19}$$

Используя представление (15)-(17), можно показать, что для рассмотренного случая векторы K_1 и K_2 в уравнении оптимального управления (14) равные

$$K_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}},\ \frac{1}{k}\left(\sqrt{1+\frac{2kT}{\sqrt{\rho}}}-1\right)\right), \qquad K_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}},\ \frac{1}{k}\left(\sqrt{1+\frac{2kT}{\sqrt{\rho}}}\right)\right). \tag{20}$$

В силу (18) и (14), учитывая (20), получаем выражение для передаточной функции W_{θ_O}, оптимальной системы:

$$W_{\theta_O} = \frac{T\sqrt{\rho}p^2}{T\sqrt{\rho}p^2 + \sqrt{\rho}\sqrt{1+\frac{2kT}{\sqrt{\rho}}}p + k}. \tag{21}$$

(При выводе уравнения (22) использовались составляющие вектора $r(t)$, определяемого как $r(t) = (\alpha(t),\ \dot{\alpha}(t))^{\mathrm{T}}$.)

Применяя (19), получаем

$$D_0 = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = \frac{2T\sqrt{\rho}}{k} \tag{22}$$

На основании (18) при наличии в его составе прямой связи, организованной с учетом требований теории инвариантности [3, 6], по формуле (19) находим

$$D_0 = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = \frac{2T}{k}, \tag{23}$$

Таким образом, выражения (22) и (23) для коэффициентов ошибок показывают, что коэффициенты ошибки по положению D_0 и по скорости D_1 в обоих случаях одинаковы и равны нулю, а коэффициенты ошибки по ускорению D_2 отличаются у $\sqrt{\rho}$ раз; поэтому только при $\rho = 1$ коэффициент D_2 одинаковый для обеих систем.

Результаты моделирования представлены на рис. 2. Результаты моделирования наглядно показывают, что при использовании методов теории оптимальности, по крайней мере для уравнения второго порядка, удается получить лучшую динамику процесса, чем при использовании методов теории инвариантости, если в выражении для функционала (13) взять $\rho < 1$, в частности $\rho \ll 1$.

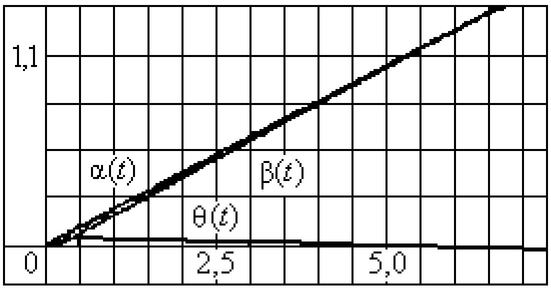

Рис.2

Вывод. Синтез следящих систем высокой точности методами оптимизации по квадратичному критерию показывает, что определение параметров настройки разомкнутой и замкнутой связи осуществляются совместно, в отличие от других методов, например, методов теории инвариантости, которые допускают независимую настройку параметров этих связей. При этом выбором довольно малого значения ρ можно добиться желательной динамики оптимальной системы.

1. Божко А.Е. Синтез оптимального управления колебательными системами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 164 с.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. Кучеров Д.П. О двух подходах к задаче синтеза следящих ситем высокой точности: инвариантность и оптимальность // Проблемы управления и информатики. – 1998. – №6. – С. 56-64.
4. Икрамов Х.Д. Численное решение матричних уравнений. — М: Наука, 1984. — 192 с.

5. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
6. Терсков В.Г. Основи теории расчета систем з комбинированным управлением // Теория инвариантости в системах автоматическог управления. — М.: Наука, 1964. — С. 5-45.
7. Задирака В.К. Некоторые приложения теории аппроксимации к решению задач автоматического управления. – Киев:1970. – 84 с.
8. Директор С., Popep P. Введение в теорию систем. — М.: Мир, 1974. — 464 с.
9. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Мир, 1975. – 424 с.
10. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (Метод пространства состояния). - М.: Наука, 1970. - 774 с./ Русс. пер. Zadeh L.A., Desoer C.A. Linear System Theory: The State Space Approach, - N.Y.: McGraw-Hill, - 1963.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.—576 с.
12. Кучеров Д.П. О некоторых методах и алгоритмах вычисления матричного экспоненциала в задачах анализа динамики систем управления // УСиМ, 2001. - № 5. – С. 11-16.
13. Маркус М., Минк X. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. – 232 с.
14. Козырев В. Д. Применение цифровых ЭВМ при исследовании автоматических систем РЭС. - Киев: КВИРТУ, — 1976.— 182 с.
15. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления / Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1990. - 332 с.
16. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
17. Ganapathy S., Subba Rao A. transient response evaluation from the state transition matrix // IEEE Proceedings. - Vol. 57. - N 3. - 1969. – P. 347 - 349.
18. Mastacusa E.J. A Method for calculating based on the Cayley-Hamilton Theorem // IEEE Proceedings.- Vol. 57. – N 7.- 1969. – P. 1328 - 1329.
19. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. — 576 с.